

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Rapport S 265 (C 13)

Leergang Besliskunde

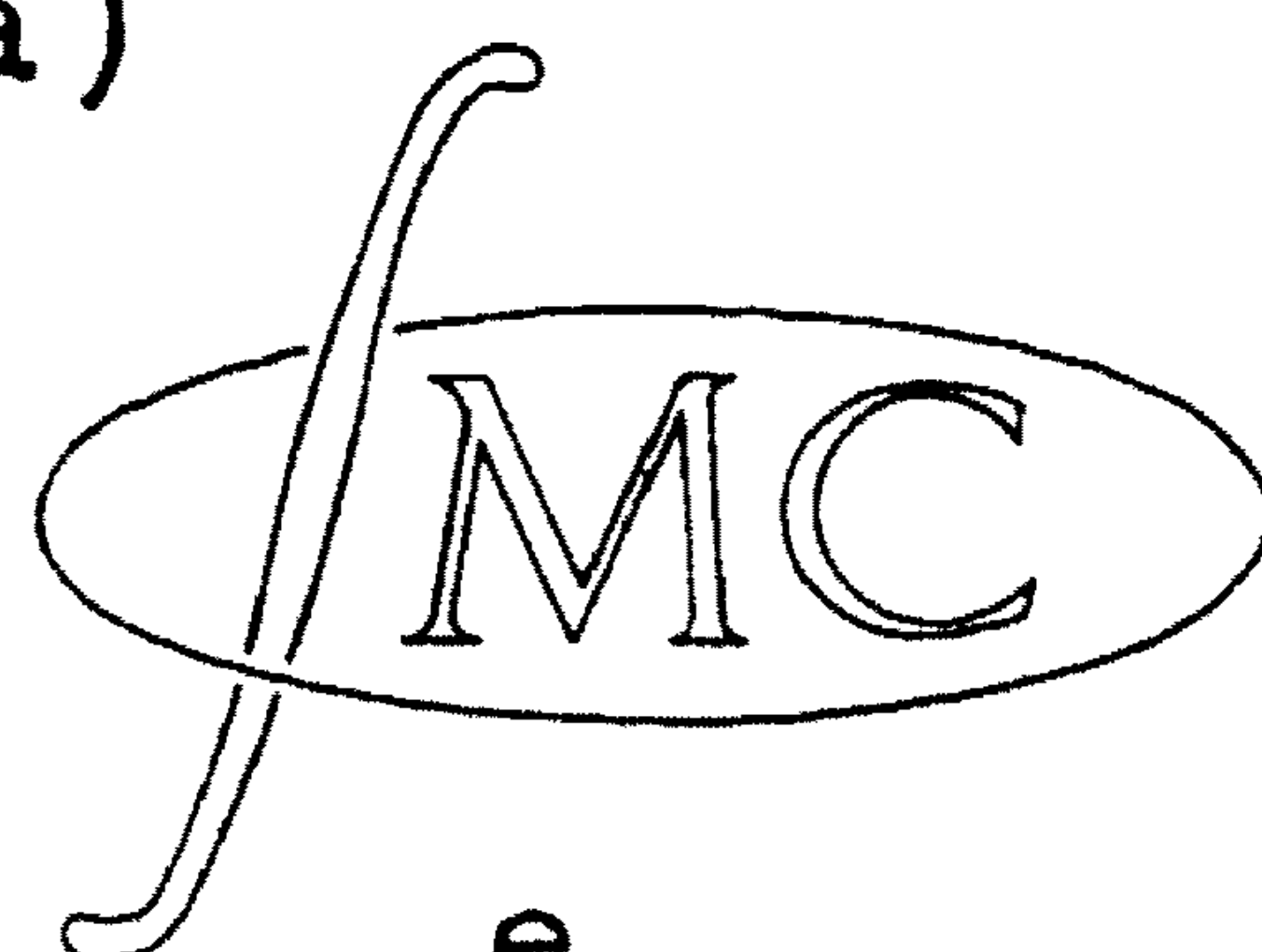
Hoofdstuk XV

Wachttijden

door

F. Göbel en W. Molenaar

(Dit hoofdstuk is ten dele gebaseerd op
rapport S 246 (C 11) deel I, door Ir.
A.R. Bloemena)



2^e druk

september 1964

Printed at the Mathematical Centre at Amsterdam, 49, 2nd Boerhaavestraat.
The Netherlands.

The Mathematical Centre, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Scientific Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

1. Inleiding

Iedereen kent de situatie waarin klanten aankomen bij een loket, waar zij door een bediende worden geholpen.

Minder bekend zijn de situaties in fabrieken, waar een aantal gelijksoortige machines in bedrijf zijn, die, indien zij door storing mochten uitvallen, worden hersteld door één van de aan het bedrijf verbonden reparateurs, zodra deze daarvoor beschikbaar komt.

De hierboven beschreven situaties zijn overeenkomstig in die zin, dat er in beide gewacht en bediend wordt. Het behoeft geen betoog dat wachten behalve vervelend ook kostbaar kan zijn.

De wachttijd voor een loket of de tijdsduur welke voorafgaat aan een reparatie hangt uiteraard sterk af van het aantal ingeschakelde bedienden.

Door het openstellen van een extra loket of door het toevoegen van een extra reparateur kan men de wachttijd vaak bekorten. Deze maatregelen brengen echter kosten met zich mee en de vraag is of deze offers opwegen tegen de vermindering van het aantal klanten dat ongeduldig wordt en de rij verlaat resp. tegen de eventuele toename van de produktie. Ook kan men overwegen of het niet voordelig is om kleine reparaties te laten voorgaan. Dergelijke typen van keuze-problemen kunnen met behulp van de theorie van de wachttijden wiskundig worden behandeld. Met opzet stellen wij vast dat dit kan geschieden met behulp van de theorie van de wachttijden omdat de theorie zelf zich niet bezighoudt met optimaliteitsproblemen.

De te behandelen problemen geven aanleiding tot het opstellen van een wiskundig model, waarin o.a. de volgende aspecten een rol spelen:

- a) Het aankomstenpatroon, b.v. de kansverdeling van de tijdsintervallen tussen opvolgende aankomsten of van

het aantal aankomsten in een tijdsinterval van gegeven lengte. Deze verdelingen kunnen nog van het tijdstip afhangen, men denke b.v. aan spitsuren.

- b) Het bedieningsmechanisme (het aantal loketten, de kansverdeling van de bedieningstijd e.d.).
- c) De rijdiscipline. Tenzij anders vermeld wordt nemen wij aan dat de klanten in volgorde van aankomst worden geholpen. Maar men kan ook bepaalde klanten voorrang geven, b.v. omdat zij tevoren een afspraak hebben gemaakt of omdat zij een kortere bedieningstijd hebben.

Aan de hand van bepaalde onderstellingen over deze factoren tracht men informatie in te winnen over bijv. de verdelingsfunctie van de rijlengte, de verdelingsfunctie van de wachttijd, de vrije tijd van de bediende, kortom: grootheden die een maat zijn voor de efficiency van het systeem.

In het hierna komende zullen wij spreken over loketten en klanten, over machines en reparateurs, maar men bedenke dat de resultaten ook geldig zijn in vele andere toepassingsgebieden. Zowel vliegvelden als telefoonlijnen kunnen dikwijls beschouwd worden als een loket waar de klant (vliegtuig of abonnee) op bediening wacht.

2. Het proces

Wanneer men als toeschouwer het komen en gaan van klanten bij een loket gadeslaat, dan ontdekt men dat

- a) niet van tevoren met zekerheid is vast te stellen op welke tijdstippen de rijlengte zich zal wijzigen;
- b) niet van tevoren met zekerheid is vast te stellen of op de in a) genoemde tijdstippen de rijlengte zal toenemen dan wel afnemen.

Wij beschouwen nu de rij van wachtenden voor het loket, inclusief degene die bediend wordt, als een systeem. De toestand van het systeem wordt bepaald door het aantal aanwezige klanten n : als $n=0$ heeft de loketbediende niets

te doen, als $n=1$ is één klant aanwezig die geholpen wordt, voor $n=k+1$ zijn er bovendien k klanten die wachten. De toestandsveranderingen van het systeem (aankomst en vertrek van klanten) voltrekken zich niet deterministisch; het systeem is onderworpen aan een stochastisch proces. Een speciaal soort stochastisch proces is in hoofdstuk IX behandeld, n.l. de enkelvoudige Markovketen. Het nu beschouwde proces van wachtende is alleen een keten indien wij het proces op discrete tijdstippen aanschouwen.

Beperken wij onze aandacht tot discrete, op gelijke afstanden gelegen (equidistante) tijdstippen, dan nog heeft het proces geen enkelvoudige Markovketen te zijn. Immers bij een enkelvoudige Markovketen hangen de overgangskansen slechts af van de laatst-aangenomen toestand, en niet van de daaraan voorafgaande toestanden. Er is echter geen enkele garantie dat het hierboven beschouwde proces zich op deze wijze laat beschrijven. Als er b.v. in de beschouwde wachtsituatie spitsuren zijn, is er bij waarnemen om de vijf minuten aan het begin van het spitsuur een grote kans dat de rijlengte toeneemt. Aan het eind van het spitsuur zal de rijlengte meestal afnemen. De overgangswah vanuit een vaste toestand zijn hier dus niet constant in de tijd.

Indien het beschouwde proces geen enkelvoudige Markovketen is, en er ook niet toe herleid kan worden door het invoeren van meer complexe toestanden, dan kan het proces veelal gezien worden als een Markovproces waarover in Hoofdstuk IX, par. 11 gesproken werd. Men kan voor deze processen aantonen, dat onder bepaalde voorwaarden, waarop wij niet nader zullen ingaan, maar die voor wachttijdprocessen dikwijls zijn vervuld, ook invariante verdelingen bestaan. Deze kansverdelingen hebben betrekking op de toestand van het systeem op een "zeer ver" gelegen tijdstip. In hoofdstuk IX hebben wij deze kansverdelingen bepaald voor enkel-

voudige Markovketens met eindig veel toestanden. Op een overeenkomstige wijze kunnen deze kansverdelingen ook voor de overige processen worden bepaald.

In de wachttijdtheorie werkt men graag met de invariante verdeling, omdat deze niet afhangt van de begin-toestand. Men zegt dan dat het proces wordt beschouwd in de stationaire toestand.

Het is dikwijls ook zinvol om het proces niet te beschouwen op equidistante tijdstippen, maar juist op die tijdstippen waarop de toestand van het systeem zich wijzigt. Dit zijn dus de tijdstippen waarop een klant binnenkomt of weggaat, mits we de mogelijkheid uitsluiten dat er tegelijk een klant aankomt en een klant vertrekt. Het is bij deze afspraak onmogelijk geworden dat twee opeenvolgende toestanden van het systeem gelijk zijn.

Vaak onderscheidt men in de wachttijdtheorie machineproblemen, waarbij het aantal potentiële klanten begrensd is, en loketproblemen waarbij dit (in het model althans) niet het geval is. In een loketprobleem kan de toestandsvariabele n die op pag. 2 gedefinieerd is aftelbaar oneindig veel waarden aannemen ¹⁾. In paragraaf 5 wordt een loketprobleem voor één loket behandeld, terwijl in paragraaf 6 een machineprobleem voor meer "loketten" aan de orde is.

1) Men spreekt van aftelbaar veel toestanden als er een voorschrift ontworpen kan worden zodanig dat aan iedere toestand op een ondubbelzinnige wijze een nummer kan worden toegevoegd. In bovenstaande situatie is dit zeer eenvoudig: men nummert nl. de toestanden in overeenstemming met de lengte van de rij. Indien echter de toestand van het systeem gekenmerkt wordt door twee grootheden b.v. het aantal mannen en het aantal vrouwen in de rij dan is het nummeren een minder eenvoudige opgave. Ook nu is het aantal toestanden aftelbaar. (Ga zelf na!)

3. Het Poisson-proces

In deze paragraaf zullen wij allereerst aantonen dat onder betrekkelijk eenvoudige onderstellingen het aantal klanten dat in een tijdsinterval van een willekeurige maar vaste lengte aankomt, verdeeld is volgens een Poissonverdeling.

Laat $\underline{x}(t)$ het aantal klanten zijn dat in het interval $[0, t)$ aankomt, dan luiden de bovengenoemde onderstellingen:

- a) In ieder eindig tijdsinterval komt slechts een eindig aantal klanten aan.
- b) Op ieder tijdstip komt hoogstens één klant aan.
- c) Als $0 \leq t_1 < \dots < t_n$, dan zijn de aantallen klanten die resp. in de perioden $t_1 \leq t < t_2, \dots, t_{n-1} \leq t < t_n$ aankomen en welke gegeven worden door $\underline{x}(t_2) - \underline{x}(t_1), \dots, \underline{x}(t_n) - \underline{x}(t_{n-1})$ onderling onafhankelijke stochastische grootheden.
- d) De verdelingsfunctie van het aantal klanten, dat in $[s, t)$ aankomt, $\underline{x}(t) - \underline{x}(s)$, hangt alleen af van $(t-s)$.

Indien in een practijksituatie aan deze vier onderstellingen is voldaan dan heeft, zoals wij nu zullen bewijzen, het aantal aankomsten in een gegeven periode een Poissonverdeling.

Eerst bewijzen wij de volgende hulpstellingen.

Hulpstelling 1

Als $Q(t)$ de kans is dat in het interval $[0, t)$ géén klanten aankomen, m.a.w.

$$Q(t) \stackrel{\text{def}}{=} P[\underline{x}(t) = 0] \quad (3.1)$$

dan geldt voor alle $t \geq 0$ en $s \geq 0$

$$Q(s+t) = Q(s) \cdot Q(t) \quad (3.2)$$

en

$$Q(s+t) \leq Q(t); \quad (3.3)$$

voor elke $t > 0$ en elk natuurlijk getal n is bovendien

$$Q(t) = \left\{ Q\left(\frac{t}{n}\right) \right\}^n. \quad (3.4)$$

Bewijs:

$$Q(s+t) \stackrel{\text{def}}{=} P[\underline{x}(s+t)=0] = P[\underline{x}(s+t)-\underline{x}(t)=0 \wedge \underline{x}(t)=0].$$

Wegens onderstelling c) zijn de gebeurtenissen in het rechterlid stochastisch onafhankelijk, terwijl de kans op de eerste gebeurtenis $Q(s)$ is volgens d). Dus is

$$Q(s+t) = P[\underline{x}(s+t)-\underline{x}(t)=0] \cdot P[\underline{x}(t)=0] = Q(s) \cdot Q(t).$$

Wegens $0 \leq Q(s) \leq 1$ volgt (3.3) direct uit (3.2). Ook volgt (3.3) direct uit de definitie van $Q(t)$: als de periode langer wordt dan de kans op geen aankomst in die periode nooit toenemen.

Voor het bewijs van (3.4) kunnen we het interval $[0, t)$ als volgt in n deelintervallen verdelen:

$$\left[0, \frac{t}{n}\right); \left[\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}\right); \dots; \left[\frac{(n-1)t}{n}, t\right). \quad (3.5)$$

De gebeurtenis "geen klant in $[0, t)$ " is nu de conjunctie van de onafhankelijke gebeurtenissen "geen klant in

$\left[\frac{(j-1)t}{n}, \frac{jt}{n}\right)$ " voor $j=1, 2, \dots, n$. Elk van deze laatste gebeurtenissen heeft een kans $Q\left(\frac{t}{n}\right)$ dus de kans $Q(t)$ op de eerstgenoemde gebeurtenis is het product van n factoren $Q\left(\frac{t}{n}\right)$.

Men kan (3.4) ook uit (3.2) bewijzen met volledige inductie.

Hulpstelling 2

De functie $Q(t) = P[\underline{x}(t) = 0]$ voldoet voor iedere t met $0 \leq t < \infty$ aan $Q(t) > 0$.

Bewijs:

Stel dat voor zekere $t > 0$ geldt $Q(t)=0$. Wegens (3.4) is dan ook $Q\left(\frac{t}{n}\right) = 0$. In elk der n deelintervallen (3.5) komt nu met kans nul géén klant, dus met kans één

minstens één klant aan. Met kans één arriveren dus minstens n klanten in het eindige tijdsinterval $[0, t)$. Omdat dit geldt voor willekeurig grote n , zou het aantal aankomsten in $[0, t)$ oneindig groot zijn, zodat een tegenspraak ontstaat met onderstelling a). De onderstelling $Q(t)=0$ kan dus voor geen enkele $t > 0$ juist zijn.

Tenslotte is, met $s=1$ en $t=0$ in (3.3), $Q(1) \leq Q(0)$, zodat met $Q(1)$ ook $Q(0)$ positief is.

De eisen, die aan $Q(t)$ blijken beide hulpstellingen moeten worden opgelegd, blijken deze functie volledig te bepalen:

Hulpstelling 3

De enige overal positieve monotoon niet-stijgende functie $Q(t)$ die voldoet aan $Q(s+t) = Q(s) Q(t)$ is $Q(t) = e^{-ct}$.

Bewijs:

Met $t=1$ volgt uit (3.4): $Q(1) = \left\{ Q\left(\frac{1}{n}\right) \right\}^n$. Stel $Q(1) = \alpha$, dan is dus

$$Q\left(\frac{1}{n}\right) = \alpha^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log \alpha}. \quad (3.6)$$

Maar $t = \frac{n}{m}$ geeft in (3.4):

$$Q\left(\frac{n}{m}\right) = \left\{ Q\left(\frac{1}{m}\right) \right\}^n = \left(\alpha^{\frac{1}{m}} \right)^n = e^{\frac{n}{m} \log \alpha}. \quad (3.7)$$

De relatie $Q(r) = e^{r \log \alpha}$ geldt dus voor elk positief rationaal getal r . Om deze relatie voor ieder positief reëel getal ω te bewijzen gebruiken wij de monotonie van $Q(t)$. Laat $r_1, r_2, \dots$ resp. $s_1, s_2, \dots$ een rij van rationale getallen zijn die monotoon stijgend resp. dalend naar ω convergeert. Dan geldt

$$Q(r_i) \geq Q(\omega) \geq Q(s_i) \quad (3.8)$$

of

$$\alpha^{s_i} \leq Q(\omega) \leq \alpha^{r_i}. \quad (3.9)$$

Omdat α^x een continue functie is van x naderen zowel α^{s_i} als α^{r_i} tot α^ω als $i \rightarrow \infty$, zodat met $c = -\log \alpha$ geldt

$$Q(\omega) = \alpha^\omega = e^{\omega \log \alpha} = e^{-c\omega} \quad (3.10)$$

Zou de constante c negatief zijn dan was $Q(1) = e^{-c} > 1$, maar de kans $Q(1)$ is ≤ 1 . Verder houdt $c=0$ in dat $Q(t)=1$ is voor elke eindige waarde van t . Met andere woorden: de kans op een aankomst van een klant in ieder eindig tijdsinterval is nul. Het is redelijk om aan te nemen, dat in dergelijke situaties geen wachttijdtheorie wordt toegepast.

Wij hebben nu de volgende samenvattende stelling bewezen.

Stelling 1

Voor de kans $Q(t)$ op geen aankomst in $[0, t)$ geldt onder de onderstellingen a) t/m d): $Q(t) = e^{-ct}$, waarbij $c > 0$ mag worden verondersteld.

Wij verdelen het interval $[0, t)$ weer in n gelijke deelintervallen volgens (3.5). Verder definiëren wij:

1. De gebeurtenis A vindt plaats als in het interval $[0, t)$ precies m klanten aankomen.
2. De gebeurtenis B_n vindt plaats als in m van de n deelintervallen minstens één klant aankomt en in de overige $n-m$ intervallen geen.
3. De gebeurtenis C_n vindt plaats als in minstens één van de n deelintervallen twee of meer klanten aankomen.

Wij kunnen nu het volgende vaststellen:

Als de gebeurtenis A heeft plaatsgevonden dan is zeker ook minstens één van de gebeurtenissen B_n en C_n geschied.

M.a.w. de kans op de gebeurtenis A is kleiner dan de kans op B_n en/of C_n , d.w.z.

$$P[A] \leq P[B_n \vee C_n] \leq P[B_n] + P[C_n]. \quad (3.11)$$

Als de gebeurtenis B_n heeft plaatsgevonden dan is zeker ook minstens één van de gebeurtenissen A en C_n geschied. M.a.w. de kans op de gebeurtenis B_n is kleiner dan de kans op A en/of C_n d.w.z.

$$P[B_n] \leq P[A \vee C_n] \leq P[A] + P[C_n]. \quad (3.12)$$

Uit (3.11) en (3.12) volgt:

$$|P[A] - P[B_n]| \leq P[C_n]. \quad (3.13)$$

Volgens een stelling uit de maattheorie mogen P en lim verwisseld worden mits $\lim C_n$ bestaat:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P[C_n] &= P[\lim_{n \rightarrow \infty} C_n] = \\ &= P[\text{minstens één tijdstip met twee aankomsten}] = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dus geldt

$$P[A] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[B_n]. \quad (3.15)$$

Men kan nu gemakkelijk nagaan dat voor $P[B_n]$ geldt:

$$\begin{aligned} P[B_n] &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(e^{-\frac{ct}{n}} \right)^{n-m} \left(1 - e^{-\frac{ct}{n}} \right)^m = \\ &= \frac{1}{m!} e^{-ct} \left(e^{\frac{ct}{n}} - 1 \right)^m \frac{n!}{(n-m)!} = \\ &= \frac{1}{m!} e^{-ct} \left[\frac{ct}{n} + \frac{c^2 t^2}{2! n^2} + \dots \right]^m \frac{n!}{(n-m)!} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Voor het rechterlid van (3.15) vindt men dan:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P[B_n] &= \frac{1}{m!} e^{-ct} (ct)^m \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{ct}{2!n} + \dots \right]^m \frac{n!}{n^m (n-m)!} = \\ &= \frac{e^{-ct} (ct)^m}{m!} . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Wij hebben nu de volgende stelling bewezen:

Stelling 2

Wanneer voldaan is aan de onderstellingen a) t/m d) heeft het aantal aankomsten $\underline{x}(t)$ in ieder tijdsinterval van lengte t een Poisson-verdeling, waarvan de kansen gegeven worden door

$$P [\underline{x}(t) = m] = \frac{e^{-ct} (ct)^m}{m!} . \quad (3.18)$$

De positieve parameter c stelt hier het verwachte aantal aankomsten per tijdseenheid voor. Immers de Poisson-verdeling (3.18) heeft verwachting ct , zodat het verwachte aantal aankomsten in iedere tijdsduur t gelijk is aan ct .

Vervolgens zullen wij een stelling bewijzen welke betrekking heeft op de kansverdeling van de lengte van het tijdsinterval tussen twee aankomsten. Men kan nl. bewijzen dat, als het aantal aankomsten in een periode van gegeven lengte een Poisson-verdeling heeft, de lengten van de tijdsintervallen tussen twee opeenvolgende aankomsten onafhankelijk exponentieel verdeeld zijn, d.w.z.: als $\underline{s}_1$ de lengte van het tijdsinterval voorstelt dat eindigt bij de aankomst van de eerste klant en $\underline{s}_i$ de tijd aangeeft welke verstrijkt tussen de aankomst van de $(i-1)^e$ en de i^e klant, dan geldt de volgende stelling:

Stelling 3

Indien de kans op m aankomsten in een interval van de lengte t gegeven wordt door $\frac{e^{-ct}(ct)^m}{m!}$ dan geldt voor iedere $s > 0$ en voor iedere $i \geq 1$

$$a) \quad P[\underline{s}_i \leq s] = 1 - e^{-cs} \quad (3.19)$$

$$b) \quad P[\underline{s}_i \leq s \mid \underline{s}_{j_1} = s_{j_1}, \dots, \underline{s}_{j_k} = s_{j_k}] = P[\underline{s}_i \leq s] \quad (3.20)$$

voor alle $k \geq 1$ en alle $j_1 < i, j_2 < i, \dots, j_k < i$.

Bewijs:

Bewering a) wordt voor $i \geq 1$ als volgt bewezen. Laat t het tijdstip van de $(i-1)^e$ aankomst zijn, dan geldt:

$$\begin{aligned} P[\underline{s}_i > s] &= P[\text{geen aankomsten in } (t, s+t)] = \\ &= P\left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \text{geen aankomsten in } [t+\epsilon, s+t+\epsilon) \right\}\right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

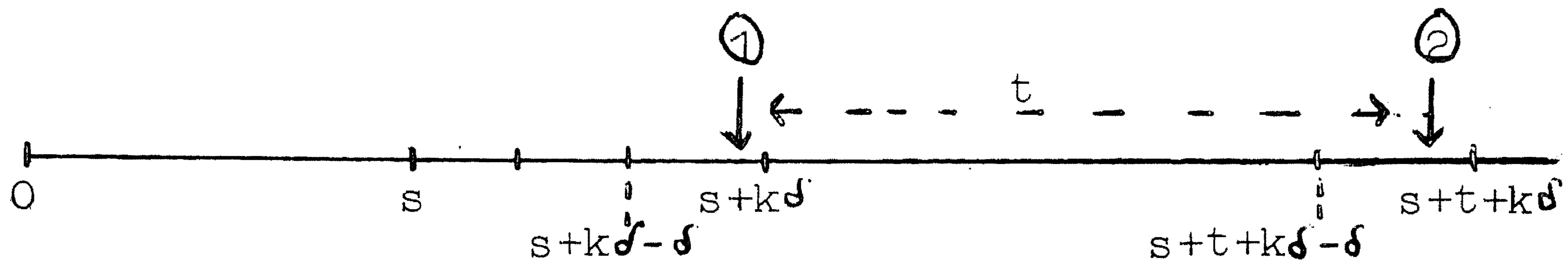
Weer mogen P en $\lim$ verwisseld worden, en voor iedere ϵ is $P[\text{geen aankomsten in } [t+\epsilon, s+t+\epsilon)]$ gelijk aan $Q(s) = e^{-cs}$. Dit geldt dan ook voor de limiet, zodat a) bewezen is. Voor $i=1$ verloopt het bewijs analoog, maar met $t=0$ en het interval $[0, s+\epsilon)$, zodat geldt

$$P[\underline{s}_1 > s] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q(s+\epsilon) = e^{-cs}. \quad (3.22)$$

Voor het bewijs van bewering b) zullen wij eerst voor willekeurige $s > 0$ en $t > 0$ aantonen:

$$P[\underline{s}_1 > s \wedge \underline{s}_2 > t] = e^{-c(s+t)}. \quad (3.23)$$

Kies hiertoe $\delta > 0$, maar $\delta < s$ en $\delta < t$, en verdeel het interval $[s, \infty)$ in deelintervallen $[s+k\delta-\delta, s+k\delta)$ van lengte δ . De gebeurtenis $[\underline{s}_1 \geq s]$, d.w.z. "eerste aankomst op of na s ", vindt dan en slechts dan plaats als één van de elkaar uitsluitende gebeurtenissen "eerste aankomst in $[s+k\delta-\delta, s+k\delta)$ optreedt, voor $k=1,2,\dots$. In de figuur is de eerste aankomst met ① aangegeven.



Is bovendien $\underline{s}_2 > t$, dan valt de tweede aankomst na het punt ②. Wij vervangen dit door de zwaardere eis "tweede aankomst op of na $s + t + k\delta$ " en vinden:

$$P[\underline{s}_1 \gg s \wedge \underline{s}_2 > t] \gg \sum_{k=1}^{\infty} P[1^e \text{ aankomst in}$$

$$[s+k\delta-\delta, s+k\delta) \text{ en } 2^e \text{ aankomst op of na } s + t + k\delta].$$

De gebeurtenis in het rechterlid betekent: geen aankomst in $[0, s+k\delta-\delta)$, één aankomst in $[s+k\delta-\delta, s+k\delta)$ en geen aankomst in $[s+k\delta, s+t+k\delta)$. Volgens stelling 2 heeft dit een kans

$$e^{-c(s+k\delta-\delta)} c\delta e^{-c\delta} e^{-ct}, \quad (3.24)$$

zodat

$$\begin{aligned} P[\underline{s}_1 \gg s \wedge \underline{s}_2 > t] &\gg c\delta e^{-c(s+t+\delta)} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-c\delta(k-1)} = \\ &= \frac{c\delta}{1-e^{-c\delta}} e^{-c(s+t+\delta)} = L. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Werken wij daarentegen met de lichtere eis "2e aankomst op of na $s+t+k\delta-\delta$ ", dan vinden wij een bovengrens. Het enige verschil met (3.24) is dat de laatste factor $e^{-c(t-\delta)}$ wordt, omdat er nu geen aankomst valt in $s+k\delta, s+t+k\delta-\delta)$. Zo vindt men

$$P[\underline{s}_1 \gg s \wedge \underline{s}_2 > t] \leq \frac{c\delta}{1-e^{-c\delta}} e^{-c(s+t)} = R. \quad (3.26)$$

Nu laat men de positieve δ tot nul naderen. Uit

$$1 - e^{-c\delta} = 1 - 1 + c\delta - \frac{(c\delta)^2}{2!} + \dots \quad (3.27)$$

volgt

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \frac{c\delta}{1 - e^{-c\delta}} = 1. \quad (3.28)$$

$P[\underline{s}_1 \geq s \wedge \underline{s}_2 > t]$ is niet afhankelijk van δ en moet dus gelijk zijn aan de gemeenschappelijke limiet van L en R, dit is $e^{-c(s+t)}$. Bij a) is al bewezen dat de verdeling van $\underline{s}_1$ continu is, d.w.z. $P[\underline{s}_1 = s] = 0$. Dus is $P[\underline{s}_1 > s \wedge \underline{s}_2 > t] = P[\underline{s}_1 \geq s \wedge \underline{s}_2 > t]$ en (3.23) is bewezen. De stochastische variabelen $\underline{s}_1$ en $\underline{s}_2$ zijn nu onafhankelijk, immers

$$\begin{aligned} P[\underline{s}_1 \leq s \wedge \underline{s}_2 \leq t] &= 1 - P[\underline{s}_1 > s] - P[\underline{s}_2 > t] + \\ &+ P[\underline{s}_1 > s \wedge \underline{s}_2 > t] = 1 - e^{-cs} - e^{-ct} + e^{-c(s+t)} = \\ &= P[\underline{s}_1 \leq s] \cdot P[\underline{s}_2 \leq t]. \end{aligned}$$

Met een eenvoudige generalisering van bovenstaand bewijs toont men aan dat $\underline{s}_1$ stochastisch onafhankelijk is van alle $\underline{s}_{j_m}$ met $j_m < i$. Hieruit volgt bewering b) van stelling 3.

Het omgekeerde van de stellingen 2 en 3 is ook juist; wij zullen dit niet bewijzen. De drie beweringen:

- (1) onderstellingen a) t/m d);
- (2) het aantal aankomsten in een tijdsduur t heeft een Poissonverdeling met verwachting ct (volgt een Poissonproces met parameter c);
- (3) de aankomstintervallen zijn onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met verwachting $\frac{1}{c}$;

zijn onderling equivalent. Men vindt in de literatuur één van de drie, niet steeds dezelfde, als definitie en de andere twee als eigenschappen. De hier gegeven afleiding is van J.L. DOOB; het bewijs van stelling 3 echter van J. TH. RUNNENBURG.

De volgende stelling volgt uit stelling 2 of uit stelling 3:

Stelling 4

Indien de kans op m aankomsten in een interval van de lengte t gegeven wordt door $\frac{e^{-ct}(ct)^m}{m!}$ dan heeft de som van k verschillende aankomstintervallen een gamma-verdeling met k vrijheidsgraden, d.w.z. er geldt voor iedere $s > 0$ en iedere k :

$$P[\underline{s}_1 + \underline{s}_2 + \dots + \underline{s}_k \leq s] = \int_0^s \frac{c^k e^{-ct} t^{k-1}}{(k-1)!} dt. \quad (3.29)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} P[\underline{s}_1 + \underline{s}_2 + \dots + \underline{s}_k \leq s] &= P[\underline{x}(s) \geq k] = \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \frac{e^{-cs} (cs)^j}{j!}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Men kan eenvoudig aantonen door partiële integratie dat het rechterlid van (3.29) gelijk is aan het rechterlid van (3.30).

Tot slot van deze paragraaf bespreken wij een bijzondere eigenschap van de exponentiële verdeling.

Indien men bij een bushalte aankomt, en men weet dat de vorige bus tien minuten geleden vertrokken is, dan zal men verwachten, dat er nu wel eerder een bus zal komen dan indien men de vorige bus juist zou hebben gemist. Dit vermoeden kan alleen gegrond zijn, indien de tijdsintervallen tussen opeenvolgende aankomsten van bussen bij de halte niet exponentieel verdeeld zijn. Zijn deze tijdsintervallen wel onafhankelijk exponentieel verdeeld dan is de wachttijd tot de volgende bus arriveert niet afhankelijk van de tijd die verstreken is sinds het vertrek van de vorige bus.

Deze eigenschap van de exponentiële verdeling hangt nauw samen met het model, dat in deze paragraaf werd beschreven en waarbij de kans op het binnenkomen van een

klant (het aankomen van een bus) onafhankelijk van de voorgeschiedenis werd ondersteld.

In ieder geval zal men bij praktische toepassingen dienen na te gaan of de situatie zodanig is dat aan de genoemde eigenschap is voldaan. Dit is bijvoorbeeld zeker niet het geval indien dienstregelingen bestaan. Wij zullen bovenstaande bewering bewijzen in de volgende stelling.

Stelling 5

Is y een kansgrootheid met een exponentiële verdeling:

$$P[y \leq y] = 1 - e^{-cy} \quad \text{voor } y \geq 0 \quad (3.31)$$

dan geldt:

$$P[y > y] = P[y > y+a | y > a]. \quad (3.32)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} P[y > y+a | y > a] &= \frac{P[y > y+a \wedge y > a]}{P[y > a]} = \\ &= \frac{P[y > y+a]}{P[y > a]} = \frac{e^{-c(y+a)}}{e^{-ca}} = e^{-cy} = P[y > y]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Is bij een loketprobleem de tijd, die de bediende nodig heeft om één klant te bedienen (=bedieningstijd) een kansgrootheid met een exponentiële verdeling en komt tijdens de bedieningstijd een andere klant binnen, dan is de tijd die deze klant moet wachten tot de klant, die aan het loket geholpen wordt, vertrekt, een kansgrootheid met dezelfde exponentiële verdeling. Deze eigenschap, die direct uit het voorgaande volgt, zal in dit hoofdstuk vele malen toegepast worden.

4. Laplace-transformaties

In de theorie der wachttijden wordt vrijwel steeds gewerkt met niet-negatieve stochastische variabelen (tijdsduren, aantallen klanten etc.). Zo'n niet-negatieve stochastische variabele $\underline{x}$ kan behalve door zijn verdelingsfunctie $P[\underline{x} \leq x]$ ook worden vastgelegd door diens Laplace-getransformeerde

$$Q(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{E} e^{-\tau \underline{x}} = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-\tau x} f(x) dx \\ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\tau k} p_k \end{cases} \quad (4.1)$$

als $\underline{x}$ continu verdeeld is met dichtheid $f(x)$ resp. discreet verdeeld met $p_k = P[\underline{x} = k]$. Het is direct duidelijk dat $Q(0) = 1$ is; men kan aantonen dat de integraal resp. som voor alle positieve waarden van τ convergeert.

Men kan eenvoudig nagaan dat de n^{de} afgeleide van $Q(\tau)$, als deze bestaat, gegeven wordt door:

$$Q^{(n)}(\tau) = (-1)^n \int_0^{\infty} x^n e^{-\tau x} f(x) dx \quad (4.2)$$

resp.

$$Q^{(n)}(\tau) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} k^n e^{-\tau k} p_k. \quad (4.3)$$

Bij substitutie $\tau = 0$ blijkt in beide gevallen:

$$Q^{(n)}(0) = (-1)^n \mathfrak{E} \underline{x}^n. \quad (4.4)$$

Men kan bewijzen, dat een verdelingsfunctie door zijn Laplace-getransformeerde éénéénduidig is bepaald. Het rekenen met Laplace-getransformeerden is dikwijls eenvoudiger dan met verdelingsfuncties; soms volgt b.v. uit (4.4) een snelle methode om momenten van de verdeling te bepalen. In sommige wachttijdproblemen is een bij de stationaire toestand behorende kansverdeling lastig te bepalen, terwijl zijn Laplace-getransformeerde eenvoudig te berekenen is.

5. Een loketprobleem

Laten wij aannemen dat klanten uit een onbegrensd grote populatie onafhankelijk van elkaar aankomen bij één loket, en dat daarbij aan de voorwaarden a) t/m d) van paragraaf 3 is voldaan. Het aantal aankomsten in ieder tijdsinterval met lengte t heeft een Poissonverdeling met verwachting λt , terwijl de aankomstintervallen exponentieel verdeeld zijn met verwachting $\frac{1}{\lambda}$. Bediening geschiedt in volgorde van aankomst, terwijl de bedieningstijden onderling onafhankelijke stochastische variabelen s zijn met dezelfde kansdichtheid $g(s)$ die niet nader wordt gespecificeerd.

Stel dat wij het systeem van wachtende klanten (inclusief degene die bediend wordt) beschouwen op de tijdstippen, waarop een klant na zijn bediening vertrekt. De toestand van het systeem wordt nu gekenmerkt door de lengte van de tijd van wachtenden, die de vertrekkende klant achter zich laat.

Wij zullen nu aantonen dat de rij van toestanden, welke het systeem doorloopt, een Markov-keten vormt met aftelbaar veel toestanden. Het is duidelijk dat er sprake is van een keten, immers het proces wordt slechts op discrete tijdstippen beschouwd.

Wij zullen nu aantonen dat de keten een Markov-keten is. Veronderstel tijdelijk dat de bedieningstijd voor iedere klant constant is en gelijk aan $s > 0$, dan zijn de volgende ontwikkelingen mogelijk:

- a) Indien het aantal wachtenden op een beschouwd discreet tijdstip gelijk is aan $i \geq 1$, dan neemt de toestandsvariabele op het volgende tijdstip de waarde $i - 1$ aan, als gedurende de bedieningstijd van de eerste der i wachtenden geen nieuwe klant arriveert. De kans op een overgang van i naar $i - 1$ wordt dus gegeven door:

$$p_{i,i-1} = P[\text{geen klanten in } s] = e^{-\lambda s}. \quad (i \geq 1) \quad (5.1)$$

- b) Indien het aantal wachtenden op een beschouwd discreet tijdstip gelijk is aan $i \geq 1$, dan neemt de toestandsvariabele op het volgende tijdstip de waarde $i+k$ aan, als gedurende de bedieningstijd van de eerste der i wachtenden $(k+1)$ nieuwe klanten arriveren. De kans op een overgang van i naar $i+k$ wordt dus gegeven door:

$$p_{i,i+k} = P[(k+1) \text{ klanten in } s] = \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^{k+1}}{(k+1)!} \quad (i \geq 1, k \geq 0) \quad (5.2)$$

- c) Indien het aantal wachtenden op een beschouwd discreet tijdstip gelijk is aan 0, dan neemt de toestandsvariabele op het volgende tijdstip de waarde k aan als gedurende de bedieningstijd van de eerstvolgende klant, die echter nog komen moet, k klanten arriveren. De kans op een overgang van 0 naar k wordt dus gegeven door

$$p_{0,k} = P[k \text{ klanten in } s] = \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^k}{k!} \quad (k \geq 0) \quad (5.3)$$

- d) Andere overgangen zijn niet mogelijk, dus voor de niet genoemde index-combinaties geldt:

$$p_{j,k} = 0 \quad (5.4)$$

Men ziet gemakkelijk in, dat informatie betreffende meer voorafgaande toestanden dan alleen de laatste, geen invloed heeft op de kansverdeling van de eerstvolgende toestand. De beschouwde keten is dus een Markovketen met afteelbaar veel toestanden.

Uit de relaties (5.1) t/m (5.4) volgt, dat de oneindige matrix van overgangswaarden schematisch als volgt uitziet:

$$\begin{pmatrix}
 e^{-\lambda s} & e^{-\lambda s} \lambda s & e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^2}{2!} & e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^3}{3!} & \dots \\
 e^{-\lambda s} & e^{-\lambda s} \lambda s & e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^2}{2!} & e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^3}{3!} & \dots \\
 0 & e^{-\lambda s} & e^{-\lambda s} \lambda s & e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^2}{2!} & \dots \\
 0 & 0 & e^{-\lambda s} & e^{-\lambda s} \lambda s & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Ook bij Markov-ketens met aftelbaar veel toestanden kunnen fuiken en kringfuiken optreden. Men gaat gemakkelijk na, dat in deze Markovketen noch fuiken noch kringfuiken aanwezig zijn. Op geheel analoge wijze als in par. 6 van hoofdstuk IX kan men laten zien, dat als de invariante kansen q_j bestaan, zij moeten voldoen aan

$$q_j = \sum_{i=0}^{\infty} q_i p_{ij}. \quad (5.6)$$

Uit (5.5) en (5.6) volgt:

$$q_0 = q_0 p_{00} + q_1 p_{10} = (q_0 + q_1) e^{-\lambda s};$$

en voor $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
 q_k &= q_0 p_{0k} + \sum_{i=1}^{k+1} q_i p_{ik} = \\
 &= q_0 e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} + \sum_{i=1}^{k+1} q_i e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{k-i+1}}{(k-i+1)!}
 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Tot dusver hebben wij voor de eenvoud aangenomen dat de bedieningstijd voor iedere klant constant is en wel gelijk aan s . De overgangswah gegeven in (5.1) t/m (5.5) zijn dus eigenlijk "voorwaardelijke" overgangswah. Indien men uitgaat van de veronderstelling dat de be-

dieningstijd een stochastische grootheid is met kansdichtheid $g(s)$ dan gaan (5.1) t/m (5.3) over in:

$$\begin{aligned} p_{i,i-1} &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} g(s) ds & (i \geq 1); \\ p_{i,i+k} &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^{k+1}}{(k+1)!} g(s) ds & (i \geq 1, k \geq 0); \\ p_{0,k} &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^k}{k!} g(s) ds & (k \geq 0). \end{aligned} \quad (5.8)$$

De invariante kansen q_j voldoen nu aan:

$$\begin{aligned} q_0 &= (q_0 + q_1) \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} g(s) ds, \\ q_k &= q_0 \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} g(s) ds + \\ &+ \sum_{i=1}^{k+1} q_i \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{k-i+1}}{(k-i+1)!} g(s) ds & (5.9) \\ &\text{voor } k \geq 1. \end{aligned}$$

Bepaling van q_0

Wij zullen nu eerst met behulp van (5.9) de kans q_0 bepalen; daartoe berekenen wij $\sum_{k=1}^{\infty} kq_k$. Uit (5.9) volgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} kq_k &= q_0 \sum_{k=1}^{\infty} k \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^k}{k!} g(s) ds + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{i=1}^{k+1} q_i \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{k-i+1}}{(k-i+1)!} g(s) ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q_0 \lambda \int_0^{\infty} s g(s) ds + \sum_{i=1}^{\infty} q_i \sum_{k=i-1}^{\infty} k \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^{k-i+1}}{(k-i+1)!} g(s) ds = \\
&= q_0 \lambda \underline{E} s + \sum_{i=1}^{\infty} q_i \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} g(s) \left[\sum_{h=0}^{\infty} (h+i-1) \frac{(\lambda s)^h}{h!} \right] ds = \\
&= q_0 \lambda \underline{E} s + \sum_{i=1}^{\infty} i q_i - (1-q_0) + (1-q_0) \lambda \underline{E} s. \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Uit (5.10) volgt nu:

$$q_0 = 1 - \lambda \underline{E} s \quad (5.11)$$

Uit de relaties (5.9) en (5.11) kunnen de kansen q_k achter-eenvolgens worden berekend. Immers uit (5.9) volgt:

$$q_{k+1} = \frac{q_k - q_0 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^k}{k!} g(s) ds - \sum_{i=1}^k q_i \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^{k-i+1}}{(k-i+1)!} g(s) ds}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} g(s) ds} \quad (5.12)$$

voor $k \geq 1$

en

$$q_1 = \frac{q_0 (1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} g(s) ds)}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} g(s) ds} \quad \text{voor } k=0. \quad (5.13)$$

Men definieert in de wachttijdtheorie de bezettingsgraad¹⁾ ρ als

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{verwachting bedieningstijd}}{\text{verwachting aankomstinterval}} = \frac{\underline{E} s}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda \underline{E} s. \quad (5.14)$$

1) Engels: traffic intensity.

Volgens (5.11) is q_0 alleen een kans als $0 \leq \rho \leq 1$. Het is duidelijk dat ρ zelfs positief is, want λ is een positieve parameter en bij $\underline{\epsilon}_s = 0$ zou de bedieningstijd nul zijn met kans 1. De eis $\rho \leq 1$ is intuïtief duidelijk: als de bediening gemiddeld langer duurt dan het aankomst-interval hopen zich steeds meer klanten in de wachtkamer op en ontstaat er geen stabiele stationaire verdeling. In het geval $\rho = 1$ volgt uit (5.11) $q_0 = 0$, uit (5.13) $q_1 = 0$, uit (5.12) voor $k = 1, 2, \dots$ achtereenvolgens $q_2 = 0$, $q_3 = 0$, enz. Ook bij bezettingsgraad 1 is er dus geen invariante kansverdeling. Voor het geval $0 < \rho < 1$ kan men aantonen dat de invariante kansen q_j steeds bestaan en gegeven worden door de formules (5.11) t/m (5.13).

Bepaling van de verwachting van de rijlengte in de stationaire toestand

Met behulp van (5.9) kan ook de verwachting van de toestandsgrootte $\underline{n}$ worden bepaald. Daartoe berekent men de uitdrukking, $\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q_k$. Uit (5.9) volgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q_k &= q_0 \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^k}{k!} g(s) ds + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \sum_{i=1}^{k+1} q_i \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^{k-i+1}}{(k-i+1)!} g(s) ds = \\ &= q_0 \lambda^2 \underline{\epsilon}_s^2 + \sum_{i=1}^{\infty} q_i \sum_{k=i-1}^{\infty} k(k-1) \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^{k-i+1}}{(k-i+1)!} g(s) ds = \\ &= q_0 \lambda^2 \underline{\epsilon}_s^2 + \sum_{i=1}^{\infty} q_i \sum_{h=0}^{\infty} (h+i-1)(h+i-2) \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda s} (\lambda s)^h}{h!} g(s) ds. \end{aligned}$$

Na splitsing $(h+i-1)(h+i-2) = h(h-1) + 2hi - 2h + i(i-1) + -2i + 2$ behandelt men elke term zoals in (5.10), waar- door blijkt

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q_k = \lambda^2 \underline{E_s^2} + \sum_{i=1}^{\infty} i(i-1)q_i + 2(1-q_0)(1-\lambda \underline{E_s}) +$$

$$- 2 \sum_{i=1}^{\infty} i q_i (1 - \lambda \underline{E_s}). \quad (5.15)$$

Uit (5.15) volgt:

$$\underline{E_n} = \sum_{i=1}^{\infty} i q_i = 1 - q_0 + \frac{\lambda^2 \underline{E_s^2}}{2(1-\lambda \underline{E_s})} = \rho + \frac{\lambda^2 \underline{E_s^2}}{2(1-\rho)}. \quad (5.16)$$

De uitdrukking (5.16) geeft ons de verwachting van het aantal wachtenden in de stationaire toestand op het moment dat een klant zojuist bediend is. COX en SMITH ²⁾ merken n.a.v. (5.16) op, dat het aantal wachtenden niet alleen vermindert als de gemiddelde bedieningstijd korter wordt maar ook als de variatie in bedieningstijd vermindert bij gelijkblijvend gemiddelde. Voor een exponentieel verdeelde bedieningstijd met verwachting s is $\underline{E_s^2} = 2s^2$, dus met $\rho = \lambda s$ blijkt in (5.16)

$$\underline{E_n} = \rho + \frac{2\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho}. \quad (5.17)$$

Is de bedieningstijd daarentegen constant gelijk aan s , dan is $\underline{E_s^2} = s^2$ en

2) D.R. Cox en W.L. Smith, Queues, Methuen (London) 1961.

In deze zeer duidelijke inleiding tot de wachttijdproblemen wordt ook aandacht geschonken aan problemen met prioriteiten en aan loketproblemen met meer dan één loket (in serie of parallel), onderwerpen die in deze cursus niet worden behandeld. Het boekje bevat een uitvoerige literatuurlijst. Een speciale bibliografie van A. DOIG over wachttijdpublikaties vindt men in Biometrika 44 (1957), 490-514.

$$\underline{E}_n = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho} \left(1 - \frac{1}{2}\rho\right). \quad (5.18)$$

Voor geringe bezettingsgraad ($\rho \approx 0$) is $1 - \frac{1}{2}\rho \approx 1$ en blijft de verwachte rijlengte nagenoeg gelijk. Maar voor "zwaar verkeer" ($\rho \approx 1$) wordt de verwachte rijlengte bijna gehalveerd door de variatie in de bedieningstijd weg te nemen bij gelijkblijvende verwachting.

Bepaling van de verwachting van de wachttijd in de stationaire toestand

Wij definiëren dat de wachttijd van een klant begint op het moment van binnenkomst en eindigt op het moment waarop zijn bediening begint. COX en SMITH onderscheiden queueing-time(excl. bedieningstijd) en waiting-time (incl. bedieningstijd). Wij merken op dat de personen, die de zojuist bediende klant achter zich laat, zijn aangekomen tijdens de wacht- en bedieningstijd van deze klant. Bij een gegeven wacht- en bedieningstijd is het aantal aankomsten verdeeld volgens een Poisson-verdeling met verwachting $\lambda(w+s)$ als de w de wachttijd voorstelt. Indien de beide tijden niet constant zijn maar kansverdelingen hebben, dan wordt de verwachting van het aantal aankomsten gegeven door $E\lambda(\underline{w}+\underline{s})$. Uit (5.16) volgt:

$$\rho + \frac{\lambda^2 E \underline{s}^2}{2(1-\lambda E \underline{s})} = \lambda E \underline{w} + \lambda E \underline{s} \quad (5.19)$$

en dus geldt:

$$E \underline{w} = \frac{\lambda E \underline{s}^2}{2(1-\rho)} \quad (5.20)$$

Zoals boven ziet men in dat deze grootte gehalveerd wordt bij overgang van exponentiële bedieningstijd op constante bedieningstijd met dezelfde verwachting.

Bepaling van de Laplace-getransformeerde voor de rijlengte in de stationaire toestand

Volgens (4.1) is de Laplace-getransformeerde van de verdeling van $\underline{n}$, die we $\varphi(\tau)$ zullen noemen, gelijk aan $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\tau k} q_k$. Na substitutie van (5.9) en enig rekenen vindt men

$$\varphi(\tau) = \frac{(1-\rho)(1-e^{-\tau})\psi(\lambda - \lambda e^{-\tau})}{\psi(\lambda - \lambda e^{-\tau}) - e^{-\tau}}, \quad (5.21)$$

waarbij $\psi(\cdot)$ de Laplace-getransformeerde is van de verdelingsfunctie van de bedieningstijden.

Bepaling van de Laplace-getransformeerde voor de wachttijd in de stationaire toestand

De kans op r aankomsten in de bedienings- en wachttijd van een klant wordt gegeven door:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(w+s)} \lambda^r (w+s)^r}{r!} g(s) ds h(w) dw. \quad 3) \quad (5.22)$$

De Laplace-getransformeerde van deze kansverdeling wordt gegeven door:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda(w+s)} \lambda^r (w+s)^r e^{-\tau r}}{r!} g(s) ds h(w) dw. \quad (5.23)$$

Indien wij (5.23) uitwerken verkrijgen wij achtereenvolgens:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(w+s) + \lambda(w+s)e^{-\tau}} g(s) ds h(w) dw \quad (5.24)$$

3) $h(w)$ is de kansdichtheid van de wachttijd.

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda w(1-e^{-\tau})} h(w) dw = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s(1-e^{-\tau})} g(s) ds \quad (5.25)$$

$$\phi(\lambda - \lambda e^{-\tau}) = \psi(\lambda - \lambda e^{-\tau}) \quad (5.26)$$

als $\phi(\cdot)$ en $\psi(\cdot)$ resp. de Laplace-getransformeerden zijn van de kansverdelingen van de wacht- en bedieningstijden. Omdat het aantal aankomsten in de wacht- en bedieningstijd van een klant gelijk is aan het aantal wachtenden dat dezelfde klant na bediening achter zich laat, is het rechterlid van (5.21) gelijk aan (5.26), zodat geldt:

$$\phi(\lambda - \lambda e^{-\tau}) = \frac{(1-\rho)(1-e^{-\tau})}{\psi(\lambda - \lambda e^{-\tau}) - e^{-\tau}}. \quad (5.27)$$

Stel nu $\lambda - \lambda e^{-\tau} = \tau'$, dan gaat (5.27) over in

$$\phi(\tau') = \frac{(1-\rho)\tau'}{\lambda\psi(\tau') + \tau' - \lambda}. \quad (5.28)$$

De verdeling van de werktijd en de vrije tijd van de bediende

Indien de bediende vrij is en er komt een klant binnen, dan begint een werktijd, die eindigt op het eerstvolgende tijdstip waarop een klant vertrekt en geen rij achterlaat. Het aantal klanten dat in een werktijd bediend wordt noemen wij de treinlengte. De eerste klant van een "trein" heeft dus een wachttijd nul. Nu kan geconstateerd worden, dat de lengte van de werktijd en de treinlengte niet veranderen indien de volgorde, waarin de klanten worden bediend, gewijzigd wordt.

De werktijd begint met het binnenkomen van een klant op een tijdstip, zeg $t=0$, waarop de bediende vrij is. Komen er tijdens de bedieningstijd $\underline{s}$ van deze klant geen klanten aan, dan is de lengte van de werktijd $\underline{s}$ en de treinlengte 1. Komen er m klanten aan in de bedieningstijd $\underline{s}$ ($m \geq 1$), dan doen wij, alsof deze klanten op de

volgende wijze worden bediend. De m klanten worden allen afgezonderd. Aan het eind van de tijd $\underline{s}$ is, afgezien van de m klanten, het loket leeg. Eén van de m klanten wordt dan toegelaten om bediend te worden. Als er in zijn bedieningstijd klanten binnenkomen, dan worden die meteen na hem bediend; komen in die bedieningstijd weer klanten binnen, dan worden ook die meteen daarna bediend, enzovoorts. Tot op een ogenblik het loket leeg komt (terwijl er dus nog steeds $m-1$ klanten in afzondering wachten). De tijd, die verlopen is sinds het einde van de bedieningstijd $\underline{s}$ is een tijd $\underline{d}_1$. Deze tijd $\underline{d}_1$ verschilt alleen daarin van een werktijd, dat de bediende niet vrij was vóór het begin ervan. De verdelingsfunctie van de tijdsduur $\underline{d}_1$ is evenwel identiek met die van een werktijd. Aan het einde van die tijd $\underline{d}_1$ begint een tijdsduur $\underline{d}_2$ door weer één van de $m-1$ afgezonderde klanten toe te laten, voor bediening, terwijl alle klanten die in zijn bedieningstijd binnenkomen weer direct na hem geholpen worden, enzovoorts. Weer heeft $\underline{d}_2$ de verdelingsfunctie van een werktijd. Dit procédé wordt voortgezet tot de laatste van de afgezonderde klanten bediend is en ook alle klanten die in zijn bedieningstijd binnenkwamen, enzovoorts. Komt dan nu tenslotte het loket vrij, dan is dit het einde van de werktijd $\underline{d}$, die op tijdstip 0 begon. Hieruit volgt dus:

$$\begin{aligned} \underline{d} &= \underline{s} && \text{als } \underline{m} = 0 \\ \underline{d} &= \underline{s} + \underline{d}_1 + \dots + \underline{d}_m && \text{als } \underline{m} = m > 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

waarbij $\underline{m}$ het aantal klanten is dat in de bedieningstijd van de eerste klant aankomt. Bepaalt men de verwachting van $\underline{d}$ onder de voorwaarde $\underline{m}=m$, dan vindt men

$$\mathbb{E}(\underline{d}|\underline{m}=m) = \mathbb{E} \underline{s} + m \mathbb{E} \underline{d} \quad (5.30)$$

daar $\underline{d}$, $\underline{d}_1$, $\underline{d}_2$, ... alle dezelfde verdelingsfunctie bezitten. Wij vinden nu voor de onvoorwaardelijke verwachting:

$$\underline{\varepsilon}_d = \underline{\varepsilon}_s + \underline{\varepsilon}_m \underline{\varepsilon}_d \quad (5.31)$$

of

$$\underline{\varepsilon}_d = \frac{\underline{\varepsilon}_s}{1 - \underline{\varepsilon}_m} = \frac{\underline{\varepsilon}_s}{1 - \rho}. \quad (5.32)$$

Voor de treinlengte $\underline{h}$ vindt men analoog aan (5.29)

$$\left. \begin{aligned} \underline{h} &= 1 & \text{als } \underline{m} &= 0 \\ \underline{h} &= 1 + \underline{h}_1 + \dots + \underline{h}_m & \text{als } \underline{m} &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

waaruit men op dezelfde wijze als hierboven voor $\underline{\varepsilon}_d$ is geschied, kan afleiden

$$\underline{\varepsilon}_h = \frac{1}{1 - \rho}. \quad (5.34)$$

Na elke werktijd komt een tijdsinterval $\underline{v}$ waarbij de bediende vrij is. De lengte van het tijdsinterval is de wachttijd tot de eerstvolgende klant binnenkomt. Dit is volgens de bekende eigenschap van de exponentiële verdeling weer een exponentieel verdeelde kansgrootheid, zodat

$$P[\underline{v} \leq v] = 1 - e^{-\lambda v} \quad (\text{als } v > 0) \quad (5.35)$$

en dus

$$\underline{\varepsilon}_v = \frac{1}{\lambda}. \quad (5.36)$$

De fractie van de tijd gedurende welke de bediende gemiddeld bezig is met het bedienen van klanten wordt nu gegeven door:

$$\frac{\underline{\varepsilon}_d}{\underline{\varepsilon}_d + \underline{\varepsilon}_v} = \frac{\frac{\underline{\varepsilon}_s}{1 - \rho}}{\frac{\underline{\varepsilon}_s}{1 - \rho} + \frac{1}{\lambda}} = \lambda \underline{\varepsilon}_s = \rho. \quad (5.37)$$

6. Een machineprobleem

In een fabriek staan n machines opgesteld (bijv. automatische draaibanken) die door m reparateurs worden bediend. Als we aannemen dat nooit twee of meer reparateurs tegelijk

aan dezelfde machine werken, dan is het zinloos om meer dan n reparateurs in dienst te nemen. Wel kan het voordeliger zijn om $m \leq n$ te kiezen. We zullen nu trachten de optimale grootte van m te bepalen.

Stel dat de kansverdeling van de tijd dat de machine vanaf nu nog zonder storing in werking zal zijn, gegeven wordt door de verdelingsfunctie

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} . \quad (6.1)$$

Stel dat de kansverdeling van de nog resterende reparatieduur, als de machine in reparatie is, gegeven wordt door de verdelingsfunctie

$$G(t) = 1 - e^{-\mu t} . \quad (6.2)$$

Uit (6.1) en (6.2) volgt dat op grond van onze veronderstellingen de kansverdelingen van de resterende loop- resp. reparatietijden niet afhangen van de tijd dat de machine al loopt of al in reparatie is.

Op ieder ogenblik verkeert ieder der machines in een van de volgende drie toestanden:

- (a) de machine loopt,
- (b) de machine wacht op reparatie,
- (c) de machine wordt gerepareerd.

Als nu i het aantal lopende machines is, zal het aantal machines dat tot de categorieën (b) of (c) behoort, gelijk zijn aan $n-i$. We nemen uiteraard aan dat de machines die niet lopen, onmiddellijk worden gerepareerd, voorzover er een reparateur beschikbaar is. Het aantal machines dat in reparatie is, is dus gelijk aan

$$j = j(i) = \min(m, n-i) \quad (6.3)$$

en het aantal machines dat op reparatie wacht wordt gegeven door:

$$n-i-j = n-i-\min(m, n-i) = \max(n-i-m, 0). \quad (6.4)$$

We zien hieruit dat de toestand van het systeem "machine-park" gekarakteriseerd kan worden door een eendimensionale toestandsvector, waarvan de component gelijk is aan i , het aantal lopende machines.

Het is duidelijk dat ook nu het systeem onderworpen is aan een stochastisch proces. Indien wij dit proces slechts aanschouwen op de tijdstippen dat de toestand van het systeem verandert (d.w.z. of een zojuist gerepareerde machine wordt in werking gesteld of een machine raakt defect), dan zijn wij getuige van een Markov-keten met eindig veel toestanden. We zullen van deze Markov-keten de overgangswahrscheinlichkeiten p_{ij} van toestand i naar toestand j berekenen.

De kans dat een looptijd $\underline{t}$ groter is dan een waarde t wordt blijkens (6.1) gegeven door:

$$P[\underline{t} > t] = e^{-\lambda t}. \quad (6.5)$$

Stel dat op een gegeven ogenblik i machines in werking zijn, dan is de kans dat alle i looptijden groter zijn dan t gelijk aan:

$$(e^{-\lambda t})^i = e^{-i\lambda t}. \quad (6.6)$$

De kans op minstens één looptijd kleiner dan t wordt gegeven door $1 - e^{-i\lambda t}$. De verdelingsfunctie van de kleinste van i looptijden is dus

$$F_i(t) = 1 - e^{-i\lambda t}. \quad (6.7)$$

Stel dat op een gegeven ogenblik j machines in reparatie zijn, dan vindt men op analoge wijze dat de kleinste van deze j reparatietijden de volgende verdelingsfunctie heeft:

$$G_j(t) = 1 - e^{-j\mu t}. \quad (6.8)$$

De kansdichtheden behorende bij de verdelingsfuncties (6.7) en (6.8) worden resp. gegeven door

$$\begin{aligned} f_i(t) &= i \lambda e^{-i \lambda t} \\ g_j(t) &= j \mu e^{-j \mu t}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Stel dat de kleinste van i looptijden gelijk is aan x , dan is de kans dat er eerder een machine gerepareerd wordt dan dat er één defect raakt gelijk aan:

$$G_j(x) = 1 - e^{-j \mu x}. \quad (6.10)$$

De onvoorwaardelijke kans dat er eerder een machine wordt gerepareerd dan dat er één defect raakt, als er i machines in werking zijn is dus

$$\begin{aligned} P[\text{kleinste van } j \text{ reparatietijden} < \text{kleinste van } i \text{ looptijden}] &= \\ = \int_0^{\infty} (1 - e^{-j \mu x}) i \lambda e^{-i \lambda x} dx &= \frac{j \mu}{i \lambda + j \mu}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

waarin j gegeven wordt door (6.3).

De kans die we hier hebben berekend is voor de Markov-keten juist de kans op een overgang van toestand i naar toestand $i+1$, dus

$$p_{i,i+1} = \frac{j \mu}{i \lambda + j \mu} \quad (1 \leq i \leq n-1). \quad (6.12)$$

Omdat van i alleen overgang naar $i-1$ of $i+1$ mogelijk is, geldt

$$p_{i,i-1} = 1 - \frac{j \mu}{i \lambda + j \mu} = \frac{i \lambda}{i \lambda + j \mu} \quad (1 \leq i \leq n-1). \quad (6.13)$$

De matrix $\mathcal{M}$ der overgangswkhn heeft dus de volgende gedaante

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{10} & 0 & p_{12} & \cdots & 0 \\ 0 & p_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{n-1,n-2} & 0 & p_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

waarbij de kansen p_{ij} gegeven worden door (6.12) en (6.13). Terwille van de overzichtelijkheid hebben we deze uitdrukkingen voor de p_{ij} niet ingevuld in $\mathcal{M}$.

We kunnen nu met behulp van de formule

$$q_i = \sum_{k=0}^n q_k p_{ki} \quad (6.15)$$

de stationaire kansen q_i berekenen.

Omdat in iedere kolom van $\mathcal{M}$ hoogstens twee elementen voorkomen die niet nul zijn, krijgen de vergelijkingen (6.15) de volgende eenvoudige vorm:

$$\begin{aligned} q_0 &= p_{10} \cdot q_1 \\ q_1 &= 1 \cdot q_0 + p_{21} \cdot q_2 \\ q_2 &= p_{12} \cdot q_1 + p_{32} \cdot q_3 \\ &\dots \\ q_{n-2} &= p_{n-3, n-2} \cdot q_{n-3} + p_{n-1, n-2} \cdot q_{n-1} \\ q_{n-1} &= p_{n-2, n-1} \cdot q_{n-2} + 1 \cdot q_n \\ q_n &= p_{n-1, n} \cdot q_{n-1} \end{aligned} \quad (6.16)$$

We lossen uit dit stelsel $q_0, q_1, \dots, q_n$ op, door eerst $q_1, \dots, q_n$ in q_0 uit te drukken. Voor q_1 is dit wel zeer eenvoudig; q_2 kan met behulp van de tweede vergelijking van het stelsel (6.16) geschreven worden als

$$q_2 = \frac{q_1 - q_0}{p_{21}}, \quad (6.17)$$

en aangezien we reeds q_1 in q_0 hebben uitgedrukt, kan ook q_2 als "functie van q_0 " worden geschreven. Hiermee gaan we door totdat tenslotte q_n is uitgedrukt in q_0 . Vullen we dan voor de grootheden p_{ij} , die natuurlijk ook in deze uitdrukkingen voorkomen, de door (6.12) en (6.13) gegeven vormen in, dan blijkt het resultaat te zijn:

$$\begin{aligned}
 q_i &= \frac{(m\mu)^{i-1} (i\lambda + m\mu)}{i! \lambda^i} q_0 \text{ als } 0 \leq i \leq n-m \\
 q_i &= \frac{m^{n-m} (m-1)! \mu^{i-1} \{i\lambda + (n-i)\mu\}}{(n-i)! i! \lambda^i} q_0 \quad (6.18) \\
 &\text{als } n-m+1 \leq i \leq n.
 \end{aligned}$$

q_0 kunnen we nu berekenen door deze $n+1$ vergelijkingen op te tellen; links komt er dan $q_0 + q_1 + \dots + q_n = 1$, en rechts

$$\begin{aligned}
 &q_0 \left\{ \sum_{i=0}^{n-m} \frac{(m\mu)^{i-1} (i\lambda + m\mu)}{i! \lambda^i} + \right. \\
 &\left. + \sum_{i=n-m+1}^n \frac{m^{n-m} (m-1)! \mu^{i-1} (i\lambda + n\mu - i\mu)}{(n-i)! i! \lambda^i} \right\}. \quad (6.19)
 \end{aligned}$$

Blijkens het voorgaande kan men nu de door (6.18) gegeven stationaire kansen als volgt interpreteren:

q_i is de kans op het waarnemen (in de stationaire toestand) van een overgang van het systeem naar de toestand i , onder de voorwaarde dat een overgang wordt waargenomen.

Maar als we het systeem op willekeurige tijdstippen beschouwen zal de kansverdeling van de waargenomen toestanden een geheel andere zijn. Immers: een toestand waarin het systeem zelden overgaat heeft een lage waarde van q_i , maar indien zo'n "zeldzame" toestand gemiddeld bijv. 30x zo lang blijft bestaan als alle andere toestanden, zal deze "zeldzame" toestand juist vaak worden waargenomen wanneer we niet alleen naar tijdstippen kijken waarop een verandering plaatsvindt.

Om dit nu te corrigeren vermenigvuldigen we de kansen q_i ieder met de gemiddelde "levensduur" L_i van de bijbehorende toestand i . De producten zijn in het algemeen geen kansen meer, want hun som is gelijk aan

$\sum_{i=0}^n q_i L_i$, en dit is niet noodzakelijk gelijk aan 1. Delen we echter iedere $q_i L_i$ door deze som:

$$p_i = \frac{q_i L_i}{\sum_{k=0}^n q_k L_k} \quad (6.20)$$

dan is p_i juist de kans dat het systeem op een willekeurig tijdstip in de toestand i zal worden aangetroffen.¹⁾

Om de kansen p_i te kennen, moeten we dus allereerst L_i berekenen. Hiertoe bepalen we de kansverdeling van de tijd $\underline{t}$ gedurende welke de toestand i blijft bestaan.²⁾

$$\begin{aligned} P[\underline{t} \geq t] &= P[i \text{ looptijden} \geq t; \\ &\quad j \text{ reparatietijden} \geq t] = \\ &= e^{-i\lambda t} \cdot e^{-j\mu t}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

dus

$$P[\underline{t} < t] = 1 - e^{-(i\lambda + j\mu)t}. \quad (6.22)$$

$\underline{t}$ is dus exponentieel verdeeld met verwachting

$$L_i = \mathcal{E} \underline{t} = \frac{1}{i\lambda + j\mu}.$$

Eliminatie van j levert ons de volgende formules voor L_i :

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{1}{i\lambda + m\mu} \quad \text{voor } 0 \leq i \leq n-m; \\ L_i &= \frac{1}{i\lambda + (n-i)\mu} \quad \text{voor } n-m+1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Met behulp van de formules (6.18) en (6.23) vinden we nu

$$\begin{aligned} q_i L_i &= \frac{(m\mu)^{i-1}}{i! \lambda^i} q_0 = \frac{m^i \mu^i}{i! \lambda^i} q_0 L_0 \quad \text{voor } 0 \leq i \leq n-m; \\ q_i L_i &= \frac{m^{n-m} (m-1)! \mu^{i-1}}{(n-i)! i! \lambda^i} = \frac{m^{n-m} m! \mu^i}{(n-i)! i! \lambda^i} q_0 L_0 \quad (6.24) \\ &\quad \text{voor } n-m+1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

1) Het exacte bewijs van deze bewering zullen we hier achterwege laten.

2) j is hier (nog steeds) gelijk aan $\min(m, n-i)$.

zodat

$$p_i = \frac{m^i \mu^i}{i! \lambda^i} p_0 \text{ voor } 0 \leq i \leq n-m; \quad (6.25)$$

$$p_i = \frac{m^{n-m} m! \mu^i}{(n-i)! i! \lambda^i} p_0 \text{ voor } n-m+1 \leq i \leq n.$$

waarin

$$p_0^{-1} = \sum_{i=0}^{n-m} \frac{m^i \mu^i}{i! \lambda^i} + \sum_{i=n-m+1}^n \frac{m^{n-m} m! \mu^i}{(n-i)! i! \lambda^i}. \quad (6.26)$$

De uitdrukking (6.25) geeft ons de kans dat op een willekeurig zeer ver gelegen tijdstip i machines in werking zijn.

De gemiddelde rijlengte R van de machines, die niet in werking zijn, wordt gegeven door

$$R = \sum_{i=0}^n (n-i) p_i. \quad (6.27)$$

Toepassing

In een fabriek staan 20 machines die in 4 groepen van 5 verdeeld zijn. Voor iedere groep is er een reparateur, maar geen van de 4 reparateurs is in staat om machines te repareren die niet tot zijn groep behoren. Het gebeurt dus wel eens dat in de ene groep alle machines in werking zijn (zodat de bijbehorende reparateur niets te doen heeft) terwijl in een andere groep bijvoorbeeld twee machines op reparatie wachten. De directeur van de fabriek vindt dit bijzonder onprettig en overweegt om de reparateurs te verzoeken de cursus A.R.R.³⁾ te volgen. De reparateurs, die

3) All Round Reparateur.

deze cursus zelf moeten bekostigen, zullen hiervoor natuurlijk een tegenprestatie verlangen, en de directeur besluit dat deze zal bestaan in een loonsverhoging. Zijn probleem is nu: hoever kan ik met deze verhoging gaan, zonder dat de totale kosten (lonen + verliezen doordat een of meer machines defect zijn) zullen stijgen?

Berekening

Wij nemen aan dat uit waarnemingen gebleken is dat het hier behandelde model de toestand redelijk goed beschrijft. D.w.z. de waargenomen tijdstippen van defect raken en weer in bedrijf stellen van de machines zijn verenigbaar met de hypothese van onafhankelijke, exponentieel verdeelde looptijden en reparatietijden met voor elke machine dezelfde verwachting $\frac{1}{\lambda}$ resp. $\frac{1}{\mu}$. Uit de waarnemingen volgen tevens schattingen voor λ en μ . Laat c_1 het huidige uurloon zijn van de reparateurs, c_2 het nieuwe uurloon, en c_3 de verliezen per uur per machine die stilstaat. Laat verder $\frac{\lambda}{\mu}$ gelijk zijn aan 0,1.

In de huidige situatie is dan de verwachting van de kosten per uur per groep gelijk aan $c_1 + c_3 \cdot R(5, 1)$, waarin $R(5, 1)$ de gemiddelde rijlengte is bij 5 machines en 1 reparateur. De verwachte kosten per uur worden dus gegeven door

$$A = 4c_1 + 4c_3 \cdot R(5, 1). \quad (6.28)$$

Wanneer ieder van de reparateurs de machines van iedere groep kan repareren zijn de kosten per uur

$$B = 4c_2 + c_3 \cdot R(20, 4). \quad (6.29)$$

Het nieuwe uurloon c_2 moet dus voldoen aan

$$4c_2 + c_3 \cdot R(20, 4) \leq 4c_1 + 4c_3 \cdot R(5, 1)$$

ofwel

$$c_2 \leq c_1 + c_3 \left\{ R(5, 1) - \frac{R(20, 4)}{4} \right\}. \quad (6.30)$$

Voor de berekening van $R(s,1)$ en $R(20,4)$ kan men de definitie (6.27) toepassen, na de kansen p_i te hebben opgelost uit (6.25) en (6.26). Vooral voor $n=20$ vergt dit veel rekenwerk. Men kan zich deze moeite besparen door tabellen te raadplegen die bij gegeven n , m en $\frac{\lambda}{\mu}$ de relevante gegevens afdrukken. Zo vindt men bij PECK en HAZELWOOD ⁴⁾ een tabel van de kans D dat een machine die defect raakt, op reparatie moet wachten, met als ingangen: het aantal machines N (bij ons n), het aantal reparateurs M (bij ons m) en de "service factor" $X = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$. De tabel geeft ook de "efficiency factor" F die is gedefinieerd door

$$F = 1 - \frac{\text{gemiddeld aantal wachtende machines}}{\text{totaal aantal machines}}. \quad (6.31)$$

De tabel bevat de waarden $N = 4$ (1) 26 (2) 70 (5) 170 (10) 250 met bijpassende M en X -waarden. In de inleiding geven Peck en Hazelwood aan hoe uit F en de drie gegevens N, M, X de overige grootheden (b.v. gemiddeld aantal lopende machines) worden berekend. Zo is

$$N - R = NF (1-X). \quad (6.32)$$

In ons voorbeeld is $\frac{\lambda}{\mu} = 0,1$ dus $X = \frac{1}{11}$. Dit geeft in de tabel voor $N = 5$ en $M = 1$ een waarde $F = 0,960$, en voor $N = 20$ en $M = 4$ $F = 0,997$.

Dus is

$$\begin{aligned} R(5,1) &= 5 - 5 \times 0,960 \times \frac{10}{11} = 5 - 4,36 = 0,64; \\ R(20,4) &= 20 - 20 \times 0,997 \times \frac{10}{11} = 20 - 18,13 = 1,87. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Substitutie van deze waarden in (6.30) doet deze voorwaarde overgaan in

4) L.G. Peck & R.N. Hazelwood, Finite Queuing Tables, Wiley New York 1958.

$$c_2 \leq c_1 + c_3 \cdot 0,17. \quad (6.34)$$

De maximale loonsverhoging die de directeur onder de genoemde beperkingen kan geven is dus $c_3 \cdot 0,17$.

Berekening van de verwachte wachttijd w , bij één repareur

Stel dat het systeem, vlak voordat een machine defect raakt, in de toestand i verkeert. Er zijn dus i machines in werking, en van de overige $n-i$ is er één in reparatie. De verwachting van de tijd die zal verstrijken voordat deze reparatie klaar is, is op ieder tijdstip gelijk aan $\frac{1}{\mu}$. Hetzelfde geldt voor de verwachting van de reparatietijden van ieder der $n-i-1$ machines die op reparatie wachten.

De voorwaardelijke verwachting van de wachttijd van een machine die defect raakt op een tijdstip waarop het systeem van toestand i in toestand $i-1$ overgaat, bedraagt dus

$$\mathcal{E}(w | i \rightarrow i-1) = \frac{n-i}{\mu}. \quad (6.35)$$

Om de onvoorwaardelijke verwachting van de wachttijd te berekenen, moeten we nu eerst de kans bepalen dat het systeem van i naar $i-1$ overgaat als we alleen die tijdstippen beschouwen waarop een machine defect raakt. Het gegeven dat een machine defect raakt, dus de toestands-grootheid daalt, geven we met "dalend" aan. Dan is de gevraagde kans

$$\begin{aligned} P[i \rightarrow i-1 | \text{dalend}] &= \frac{P[i \rightarrow i-1 \text{ en dalend}]}{P[\text{dalend}]} = \\ &= 2 q_i p_{i,i-1}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Immers: het systeem kan alleen van i naar $i-1$ overgaan als het eerst in toestand i verkeert, d.w.z. als het bij de vorige toestandsverandering overging in i . De kans hierop is q_i , terwijl $p_{i,i-1}$ de kans is dat het daarna in toestand $i-1$ overgaat. Dit alles onder de voorwaarde dat er een gebeurtenis plaatsvindt. Verder moet in de stationaire toestand even vaak een machine defect raken als weer in werking worden gesteld omdat het systeem anders niet stabiel is. De kans $P[\text{dalend}]$ (waarbij niet bekend is vanuit welke i !) is dus $\frac{1}{2}$.

De onvoorwaardelijke verwachting van $\underline{w}$ is dus gelijk aan

$$E \underline{w} = \sum_{i=1}^n 2q_i p_{i,i-1} \frac{n-i}{\mu}. \quad (6.37)$$

Om deze uitdrukking te herleiden, merken we allereerst op dat uit de formules (6.13) en (6.18) volgt dat

$$q_i p_{i,i-1} = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{i-1} \frac{q_0}{(i-1)!} \text{ voor } i=1, \dots, n. \quad (6.38)$$

Verder geldt

$$2 \sum_{i=1}^n q_i p_{i,i-1} = 1 \quad (6.39)$$

want op ieder tijdstip waarop een machine defect raakt, gaat het systeem van toestand i over in toestand $i-1$ voor één der waarden $i=1, \dots, i=n$.

Met behulp van de betrekkingen (6.38) en (6.39) kunnen we nu het rechterlid van (6.37) als volgt herleiden:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n 2q_i p_{i,i-1} \frac{n-i}{\mu} &= \frac{2}{\mu} \sum_{i=1}^n \{(n-1)-(i-1)\} q_i p_{i,i-1} = \\
&= \frac{2}{\mu} \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{\mu} \sum_{i=2}^n (i-1) q_i p_{i,i-1} = \\
&= \frac{n-1}{\mu} - \frac{2}{\mu} \sum_{i=2}^n (i-1) \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{i-1} \frac{q_0}{(i-1)!} = \\
&= \frac{n-1}{\mu} - \frac{2}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{i-1} \frac{q_0}{(i-1)!} = \\
&= \frac{n-1}{\mu} - \frac{2}{\lambda} \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1} \frac{q_0}{(n-1)!} \right\} = \\
&= \frac{n-1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \{1 - 2q_n\}.
\end{aligned}$$

Dus wij vinden tenslotte:

$$\underline{\varepsilon}_w = \frac{n-1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} [1 - 2q_n], \quad (6.40)$$

waarin q_n nog moet worden opgelost uit (6.18) en (6.19).