STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 265 (C 13)

Leergang Besliskunde

Hoofdstuk XVII

Vervangingsproblemen

door

G. de Leve en F. Göbel

februari 1961

1. Inleiding

In dit hoofdstuk zullen wij ons bezig houden met een aantal problemen, welke kunnen worden opgelost met de z.g. vervangingstheorie.

De oplossingsmethoden, die bij deze problemen worden gebruikt vertonen veel overeenkomst met die van de voorraadproblemen en de dynamische-programmeringsproblemen. Men zou zelfs kunnen betwijfelen of het wel zin heeft om de vervangingsproblemen afzonderlijk te behandelen. Dat dit meestal toch geschiedt is vanwege het grote belang, dat aan deze sector van de besliskunde wordt toegekend.

Wel willen wij er nogmaals op wijzen dat het zeer belangrijk is om te leren door deze kunstmatige scheidingen heen te zien.

Wij zullen in het hierna volgende drie typen van vervangingsproblemen onderscheiden.

Het eerste type kan worden gekarakteriseerd door het volgende probleem:

In een bedrijf moet men een keuze doen tussen twee verschillende merken van een of andere machine. Op grond van eigen ervaringen en dankzij overige informaties kent men de onderhouds- en reparatiekosten van deze beide machines voor verschillende leeftijden. Als tevens de restwaarden van deze beide machines voor verschillende leeftijden beschikbaar zijn, dan wordt gevraagd na te gaan welke machine de meest voordelige is en om de hoeveel tijd deze moet worden vervangen.

Het tweede type bestaat uit die problemen, waarin men bijv. een machine eerst een tijd laat proefdraaien alvorens in te schakelen in het productieproces. Men hoopt hierdoor te bereiken, dat machines met een korte levensduur (constructiefouten) niet in het productieproces worden betrokken. Bij dit soort van problemen is het nl. zeer schadelijk als een machine plotseling uitvalt. Men behoeft in dit verband slechts te denken aan vliegtuigmotoren. Om dezelfde reden zal men een bovengrens willen stellen aan de looptijd van een machine.

Gevraagd wordt om in een bepaalde situatie na te gaan hoe lang de machine getest moet worden en hoe lang de maximale looptijd van de machine gekozen moet worden.

Een probleem van het derde type is een probleem waarin men slechts op van tevoren vastgestelde tijdstippen tot vervanging kan overgaan. Bij dit soort van problemen zal men behoefte hebben aan een criterium om na te gaan of een situatie op zo'n tijdstip aanleiding geeft tot vervanging. Vervangingsproblemen van dit type worden geheel overeenkomstig behandeld met voorraadproblemen met een z.g. (S,s) systeem.

2. Vervangingsproblemen van het eerste type

In een bedrijf wordt een machine gebruikt waarvan de aanschaffingskosten ƒ 16.000.- bedragen. Elk jaar dat de machine in bedrijf is, vermindert de waarde van de machine. In tabel 1 vindt men de restwaarde van de machine aangegeven.

Tabel 1

aantal jaren in bedrijf	1	2	3	4	5
restwaarde	ƒ 8000.-	ƒ 7000.-	ƒ 5000.-	ƒ 3000.-	ƒ 1000.-

Restwaarden als functie van het aantal jaren in bedrijf

Bovendien worden elk jaar reparatie- en onderhoudskosten gemaakt. Deze kosten, welke afhangen van de toestand van de machine worden gegeven door tabel 2.

Tabel 2

aantal jaren in bedrijf	1	2	3	4	5
reparatiekosten	ƒ 400.-	ƒ 1200.-	ƒ 2000.-	ƒ 3600.-	ƒ 4200.-

De reparatiekosten als functie van het aantal jaren in bedrijf

Gevraagd wordt nu het tijdstip te bepalen, waarop de machine moet worden vervangen. Dit tijdstip moet zodanig gekozen worden dat de machine steeds een geheel aantal jaren dienst doet.

Dit simpele vervangingsprobleem kan als volgt worden opgelost. Bepaal voor ieder jaar de totale kosten (inclusief afschrijving), welke in dat jaar en in de voorafgaande jaren gemaakt zijn. Deze boekhoudkundige operatie is uitgevoerd in tabel 3, waarbij tevens de gemiddelde kosten per jaar zijn berekend als de machine aan het eind van een bepaald jaar wordt vervangen.

Tabel 3

aantal jaren in bedrijf	na 1	na 2	na 3	na 4	na 5
totale kosten	*f* 8400.-	*f* 10600.-	*f* 14600.-	*f* 20200.-	*f* 26400.-
gemiddelde kosten per jaar	*f* 8400.-	*f* 5300.-	*f* 4867.-	*f* 5050.-	*f* 5280.-

Totale kosten en gemiddelde kosten als functie van de leeftijd van de machine

Uit tabel 3 volgt onmiddellijk, dat men steeds na drie jaar een nieuwe machine moet aanschaffen.

Indien bovenstaande gegevens van meer dan één machinemerk beschikbaar zijn kan men voor ieder merk afzonderlijk bij een optimale vervangingspolitiek de gemiddelde kosten per jaar uitrekenen. Het behoeft dan geen betoog, dat men dat merk moet verkiezen waarvoor de gemiddelde kosten per jaar minimaal zijn.

In dit voorbeeld hebben wij de kosten, welke betrekking hebben op verschillende jaren ongewogen opgeteld. Indien de kosten zich uitstrekken over een groot aantal jaren worden verdisconteringen toegepast. Bij numerieke berekeningen kunnen verdisconteringen nooit een groot probleem vormen.

Op de werkwijze, die hierboven is gevolgd, kan men gerechtvaardigde kritiek uitoefenen.

In de eerste plaats beschouwt men als mogelijke vervangingstijdstippen alleen de momenten waarop de machine een geheel aantal jaren in bedrijf is. Vervolgens werkt men met een soort gemiddelde reparatie- en onderhoudskosten en afschrijving, waarbij geen rekening wordt gehouden met toevallige verschillen tussen machines van één merk.

Wij zullen nu hetzelfde probleem in een meer wiskundige vorm bespreken. Daartoe voeren wij een model in met grootheden, die op het eerste gezicht een misschien wat te abstracte betekenis hebben. Wij moeten hiervan echter niet schrikken en rustig afwachten wat de gevolgen zijn.

Stel nl. dat de staat van een machine gewaardeerd kan worden met behulp van een reëel getal X. Een nieuwe machine is in de staat X_0 en kost $\varphi(X_0)$. De restwaarde van een machine $X < X_0$ wordt gegeven door de functie $\varphi(X)$. De functie $\varphi(X)$ zal in het algemeen een discontinuïteit in $X=X_0$ hebben.

Veronderstellen wij vervolgens dat de onkosten per tijdseenheid voor een machine, afgezien van de afschrijvingen, $\rho(X)$ bedragen.

De kwaliteitsvermindering van een machine zal in het algemeen afhangen van

a. de lengte t van de beschouwde bedrijfsperiode
b. het onderhoud e.d. gedurende deze periode
c. de kwaliteit X aan het begin van de periode
d. toevallige factoren.

We geven bovengenoemde vermindering daarom aan met het symbool $\underline{y}_{t;X}$; een index die betrekking heeft op punt b. ontbreekt, omdat we aannemen dat alle machines hetzelfde onderhoud krijgen en onder dezelfde omstandigheden verkeren, en verder dat eventuele reparaties geen invloed hebben op het kwaliteitsverloop.

In plaats van de vermindering in kwaliteit gedurende een tijd t vanuit de staat X kunnen wij ook in onze beschouwingen betrekken de tijdsduur $\underline{t}_{a;X}$ waarin vanuit X een kwaliteitsvermindering a heeft plaatsgevonden. De grootheid $\underline{t}_{a;X}$ zal naar wij aannemen een verdelingsfunctie $G(t;a;X)$ bezitten. De vraag waarvoor wij ons nu gesteld zien is van de volgende strekking: "In welke staat moet de machine verkeren, opdat de vervanging optimaal is". Wij zullen nu uitgaan van een aantal veronderstellingen, die bijna altijd in benadering maar zelden exact geldig zijn.

Deze veronderstellingen luiden als volgt:

1. Voor iedere a, b en X geldt:

$$\mathcal{E}\underline{t}_{a;X} + \mathcal{E}\underline{t}_{b;X-a} = \mathcal{E}\underline{t}_{a+b;X} \,. \qquad (2.1)$$

2. Er bestaat een functie $\tau(X)$ zodanig dat geldt voor iedere X

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathcal{E}\,\underline{t}_{h,X}}{h} = \tau(X) \tag{2.2}$$

Indien een machine in staat X is dan zal de tijdsduur, welke verstrijkt totdat de machine in de staat X-dX verkeert gelijk zijn $\underline{t}_{dX;X}$. Gedurende deze periode bedragen de onderhoudskosten:

$$\underline{t}_{dX;X}\,\rho(X) \tag{2.3}$$

en de verwachting van deze kosten is gelijk aan

$$\mathcal{E}\,\underline{t}_{dX;X}\,\rho(X)\;. \tag{2.4}$$

Volgens (2.2) mogen wij hiervoor schrijven[1)]

$$\tau(X)\,\rho(X)dX \tag{2.7}$$

en wij vinden voor de verwachting van de totale onderhoudskosten welke gemaakt worden in die periode waarin de machine in kwaliteit van X_0 tot X_1 daalt:

$$\int_{X_1}^{X_0} \tau(X)\,\rho(X)dX\;. \tag{2.8}$$

De totale vermindering in kwaliteit correspondeert met een bedrag

$$\varphi(X_0) - \varphi(X_1) \tag{2.9}$$

zodat wij voor de verwachting van de totale kosten die in deze periode worden gemaakt, vinden

$$\int_{X_1}^{X_0} \tau(X)\,\rho(X)dX + \varphi(X_0) - \varphi(X_1)\;. \tag{2.10}$$

Stel dat wij, in plaats van deze machine aan te schaffen deze machine ook kunnen huren tegen een bedrag van C_0 per tijdseenheid waarbij alle onderhoudskosten etc. voor de rekening van de verhuurder komen.

De verwachting van de huur te betalen in de periode tussen

----

1) In de hierboven gegeven analyse zijn de onderhoudskosten voor iedere staat X constant gekozen. Dit laatste behoeft echter niet het geval te zijn. De grootheid $\rho(X)$, waarvoor wij dan liever $\underline{\rho}_X$ schrijven, kan een stochastische variabele zijn, waarvan de verdelingsfunctie afhangt van X. De uitdrukkingen (2.3) en (2.4) gaan dan over in

$$\underline{t}_{dX;X}\,\underline{\rho}_X \tag{2.5}$$

en

$$\mathcal{E}\,\underline{t}_{dX;X}\,\underline{\rho}_X\;. \tag{2.6}$$

aanschaffing en vervanging bedraagt:

$$c_0 \mathcal{E}\, \underline{t}_{X_0-X_1;X_0} \, . \tag{2.11}$$

Het in eigen beheer nemen van een machine en het vervangen zodra hij in de staat X_1 komt is voordeliger wanneer geldt:

$$\int_{X_1}^{X_0} \tau(X)\, \rho(X) dX + \varphi(X_0) - \varphi(X_1) \leq c_0 \mathcal{E}\, \underline{t}_{X_0-X_1;X_0} \tag{2.12}$$

of

$$\frac{\int_{X_1}^{X_0} \tau(X)\, \rho(X) dX + \varphi(X_0) - \varphi(X_1)}{\mathcal{E}\, \underline{t}_{X_0-X_1;X_0}} \leqq c_0 \, . \tag{2.13}$$

Uit (2.13) volgt, dat het eigen beheer het beste concurreert tegen het huren, als X_1 zò wordt gekozen dat het linderlid van (2.13) minimaal is.

Indien de optimale vervangingsstaat X_1 groter is dan nul, voldoet deze waarde aan de volgende relatie:

$$\left[\frac{\delta}{\delta y} \; \frac{\int_{y}^{X_0} \tau(X)\, \rho(X) dX + \varphi(X_0) - \varphi(y)}{\mathcal{E}\, \underline{t}_{X_0-y;X_0}} \right]_{y=X_1} = 0 \, . \tag{2.14}$$

Indien deze vergelijkingen meer dan een oplossing hebben, dan zal men met behulp van het linkerlid van (2.13) moeten nagaan, welke de beste is. Bedenk dat steeds moet gelden $X_1 \geqq 0$. Indien er een oplossing is van (2.14) met een waarde kleiner dan nul, en ook indien er meer dan een oplossing is, hetzij positief of negatief, dan moet men ook $X_1=0$ in de beschouwingen betrekken. De relatie (2.14) is equivalent met:

$$\frac{\int_{X_1}^{X_0} \tau(X)\, \rho(X) dX + \varphi(X_0) - \varphi(X_1)}{\mathcal{E}\, \underline{t}_{X_0-X_1;X_0}} = \frac{\tau(X_1)\, \rho(X_1) + \varphi'(X_1)}{\left(\frac{d}{dy}\, \mathcal{E}\, \underline{t}_{X_0-y;X_0}\right)_{y=X_1}} \, . \tag{2.15}$$

Indien men aanneemt dat de kwaliteitsafname niet afhangt van de toestand van de machine (wat dus wil zeggen dat $\underline{t}_{a;X}$ onafhankelijk is van X) dan volgt uit (2.1) dat $\mathcal{E}\underline{t}_{a;X}$ geschreven kan worden als

$$\mathcal{E}\underline{t}_{a;X} = a\beta_0 \tag{2.16}$$

met

$$\beta_0 = \mathcal{E}\underline{t}_{1;X} . \tag{2.17}$$

Het zal duidelijk zijn dat het omgekeerde niet hoeft te gelden, m.a.w.: als aan (2.16) is voldaan, kan de stochastische variabele $\underline{t}_{a;X}$ nog heel goed van X afhangen. Wèl geldt dat, indien aan (2.16) is voldaan, (2.14) gelijkwaardig is met

$$\left[\frac{\delta}{\delta y}\;\frac{\int_y^{X_0}\beta_0\,\rho(X)\,dX+\varphi(X_0)-\varphi(y)}{\beta_0(X_0-y)}\right]_{y=X_1} = 0. \tag{2.18}$$

Wij zullen nu van het bovenstaande een toepassing geven:

Toepassing No 1

Stel dat een fabrikant een machine wil aanschaffen en dat hij een keuze moet maken uit twee verschillende typen A en B. Indien voor de staat van een nieuwe machine geldt:

$$X_0 = 10 \tag{2.19}$$

dan worden de restwaarden-functies van het type A resp. B gegeven door:

$$\begin{aligned} \varphi_A(X) &= \tfrac{1}{4}X^2 + 10 \qquad 0 \leqq X < 10 \\ \varphi_A(10) &= 45 \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} \varphi_B(X) &= 2X + 10 \qquad 0 \leqq X < 10 \\ \varphi_B(10) &= 35 . \end{aligned} \tag{2.21}$$

De onderhoudskosten per tijdseenheid voor een machine in de staat X worden resp. gegeven door:

$$\rho_A(X) = \frac{5}{\sqrt{X}} \tag{2.22}$$

$$\rho_B(X) = \frac{6}{X^2} . \tag{2.23}$$

De verwachting van de periode waarin de kwaliteit met één eenheid daalt is resp.:

$$\beta_A = 8{,}4 \tag{2.24}$$

$$\beta_B = 1{,}2 \quad . \tag{2.25}$$

Uit (2.18) volgt nu voor de optimale keuze van X_1 van de machine A:

$$\left[\frac{\delta}{\delta y} \frac{42 \int_y^{10} \frac{dX}{\sqrt{X}} + 35 - \frac{1}{4} y^2}{8{,}4(10-y)}\right]_{y=X_1} = 0 \tag{2.26}$$

of

$$\frac{1}{4} X_1^2 - 5X_1 - 42\sqrt{X_1} - \frac{420}{\sqrt{X_1}} + 84\sqrt{10} + 35 = 0 \; . \tag{2.27}$$

Deze relatie levert als enige toelaatbare de volgende oplossing op:

$$X_{1A} = 5 \; . \tag{2.28}$$

Voor de machine B vinden wij:

$$\left[\frac{\delta}{\delta y} \frac{7.2 \int_y^{10} \frac{dX}{X^2} + 25 - 2y}{1.2(10-y)}\right]_{y=X_1} = 0 \tag{2.29}$$

of

$$4{,}28\, X_1^2 + 14{,}4\, X_1 - 72 = 0 \; . \tag{2.30}$$

Uit (2.30) volgt tenslotte $X_{1B} = 2{,}74$ voor de machine B.

Wij hebben eerder in deze paragraaf vastgesteld, dat het eigen beheer het beste concurreert tegen het huren als het linkerlid van (2.13) minimaal is. Het is op grond hiervan duidelijk dat de machine waarvoor dit quotiënt het kleinste is te verkiezen is boven de andere machine. Deze beide quotiënten worden resp. gegeven door:

$$\frac{42 \int_{X_1}^{10} \frac{dX}{\sqrt{X}} + 35 - \frac{1}{4} X_1^2}{8{,}4(10-X_1)} \tag{2.31}$$

en

$$\frac{7.2\int_{X_1}^{10}\frac{dX}{X^2} + 25 - 2X_1}{1,2(10-X_1)} \qquad (2.32)$$

Indien men in (2.31) invult $X_{1A}=5$ en in (2.32) $X_{1B}=2,74$ dan vindt men voor beide uitdrukkingen resp. 2,56 en 2,45. Ondanks het feit dat de goedkope machine veel duurder is in het onderhoud is hij toch te verkiezen boven A.

In onze beschouwingen zijn wij steeds uitgegaan van de onderstelling, dat de beide machines alleen maar nieuw te koop zijn. Zonder enig bezwaar mogen wij ook aannemen, dat de beide machines tweedehands te koop zijn en wel in toestanden X waarvoor geldt de ongelijkheid

$$X \leqq X_0^* < X_0 \qquad (2.33)$$

waarbij X_0^* een gegeven toestand is.

Indien R(X) de prijs aangeeft van een tweedehands machine in de toestand X, dan kan men geheel overeenkomstig de hierboven gegeven beschouwing aantonen, dat een tweedehands machine A te verkiezen is boven een gekeurde machine C als geldt:

$$\frac{\int_{X_1}^{X_2} \tau(X)\,\rho(X)dX + R(X_2) - \varphi(X_1)}{\mathcal{E}\,\underline{t}_{X_2-X_1;X_2}} \leqq C_0 \qquad (2.34)$$

waarbij X_2 de toestand is op het moment van aanschaffen en C_0 de huurprijs per tijdseenheid van de gehuurde machine.
Als voor de waarden van X_1 en X_2, waarvoor het linkerlid van (2.34) minimaal is, de volgende relaties gelden:

$$X_1 > 0 \qquad X_2 < X_0^* \qquad (2.35)$$

dan zullen deze optimale waarden voor X_1 en X_2 moeten voldoen aan:

$$\left[\frac{\delta}{\delta y}\;\frac{\int_y^z \tau(X)\,\rho(X)\,dX + R(z) - \varphi(y)}{\mathcal{E}\,\underline{t}_{z-y;z}}\right]_{\substack{y=X_1\\ z=X_2}} = 0 \qquad (2.36)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta z}\;\frac{\int_y^z \tau(X)\,\rho(X)\,dX + R(z) - \varphi(y)}{\mathcal{E}\,\underline{t}_{z-y;z}}\right]_{\substack{y=X_1\\ z=X_2}} = 0 \qquad (2.37)$$

Indien de ongelijkheden (2.35) niet geldig zijn voor de optimale waarden van X_1 en X_2 dan moeten wij ook de grenswaarden van X_2 en X_1 in onze beschouwingen betrekken.

Het resultaat van één en ander kan zijn dat als wij twee machines A en B vergelijken, wij de voorkeur geven aan een nieuwe B boven een nieuwe A, maar dat men met een tweedehands A de laagste kosten verkrijgt.

Als tweede voorbeeld van een vervangingsprobleem van het eerste type beschouwen wij een zagerij, alwaar men bomen kan zagen op verschillende lengten. De bomen worden met behulp van een lopende band aangevoerd en automatisch onder de zaag geleid. De zaagmachine, die op een rail is gemonteerd, kan met behulp van een afstelmechanisme op een begrensd aantal plaatsen langs de rail worden vastgemaakt. Bij het plaatsen van een boomstam kan het gebeuren dat de zaag één of meer gaatjes verspringt, zodat een stam niet op de gewenste lengte wordt afgezaagd. Men kan dit voorkomen door de zaagmachine af te zetten en met behulp van mankracht de juiste toestand te herstellen. Het is duidelijk dat dit een kostbaar en tijdrovend karwei is. Het is dan ook de vraag of het niet voordeliger is om de zaag op de onjuiste afstand te gebruiken en verder een korting te geven op de prijs bij elke boomstam waarvan de lengte afwijkt van de gewenste. Het is duidelijk dat aan de andere kant heel grote afwijkingen van de nulstand ook nadelig zijn en men zal dus aan weerszijden van de nulstand twee grenzen kiezen waarbinnen de zaag ongestoord mag bewegen. Zodra één van de grenzen wordt bereikt of overschreden dan wordt de machine na het zagen van de boomstam gestopt en teruggeplaatst in de oorspronkelijke nulstand. De keuze van beide grenzen hangt uiteraard af van de kansverdeling van "de sprongen" van de zaag en bovendien van de grootten van de verschillende kortingen.

Indien men de zaagmachine een systeem noemt dan vindt men de toestand van het systeem door het aantal gaatjes te tellen dat de zaag van het afstelpunt is verwijderd. Het afstelpunt zelf geeft men aan met het cijfer nul, de punten rechts met een positieve en de punten links met een negatieve waarde. Door het verspringen van de zaag vormen de opeenvolgende toestanden van het systeem een keten. Wij zullen nu aannemen dat deze keten kan worden beschreven door een enkelvoudige Markovketen met de matrix der overgangswaarschijnlijkheden P. Wij zullen echter in dit proces ingrijpen als de afwijkingen van de nulstand te groot dreigen te worden.

Wij beschouwen vervolgens de klasse van strategieën met de volgende eigenschap:

> Indien men de strategie S_{-mn} toepast dan zal men de machine opnieuw afstellen als voor de toestand van het systeem op dat moment geldt: $i \leq -m$ of $i \geq n$.

Bij toepassing van een willekeurige strategie $S_{-m,n}$ ontstaat een nieuw Markov-proces. Als wij de matrix van de overgangswaarschijnlijkheden van het nieuwe Markov-proces aangeven met $P^{*}_{-m,n}$ dan gelden voor de overgangswaarschijnlijkheden p^{*}_{ij} de volgende eigenschappen:

$$1^{o})\quad p^{*}_{ij} = p_{ij} \qquad -m+1 \leq i \leq n-1$$

$$2^{o})\quad p^{*}_{ij} = 0 \qquad \begin{matrix} i \leq -m \\ i \geq n \end{matrix} \quad \text{en} \quad j \neq 0$$

$$3^{o})\quad p^{*}_{i0} = 1 \qquad \begin{matrix} i \leq -m \\ i \geq n \end{matrix} \qquad (2.38)$$

waarbij p_{ij} de elementen zijn uit de oorspronkelijke matrix P.

Zoals in hoofdstuk IX is aangegeven kan men de invariante verdeling bepalen van dit nieuwe Markovproces. Bij iedere strategie behoort dus een invariante verdeling.

Vervolgens zullen wij aannemen dat de kosten om de machine opnieuw in te stellen gelijk zijn aan C_0 en dat verder voor het zagen in de toestand i aan kortingen en overige onkosten een bedrag van $C(i)$ wordt uitgegeven.

Zoals in hoofdstuk IX is toegelicht verkrijgt men de optimale strategie door na te gaan voor welke strategie de verwachting van de onkosten in de limiettoestand minimaal is.

Toepassing

Laten wij voor de eenvoud aannemen dat bij het plaatsen van de boomstam de zaag slechts de volgende "bewegingen" zijn toegestaan:

a) de laatste instelling handhaven
b) één plaats opschuiven naar rechts
c) één plaats opschuiven naar links.

De desbetreffende overgangswaarschijnlijkheden worden in deze toepassing gegeven door:

$$\begin{aligned}
p_{ii} &= \tfrac{1}{2} && \text{voor } -m \neq i \neq n \\
p_{i,i-1} &= \tfrac{1}{3} && \text{voor } i \neq n \\
p_{i,i+1} &= \tfrac{1}{6} && \text{voor } i \neq -m \\
p_{n,0} &= 1 \\
p_{-m,0} &= 1 \\
p_{ij} &= 0 && \text{in alle overige gevallen.}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Stel vervolgens dat de instelkosten 20 bedragen en dat de overige onkosten gegeven worden door:

$$\begin{aligned}
\varphi(i) &= 2^{i} \quad \text{voor } i \neq 0 \\
\varphi(0) &= 0 \quad .
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Wij kunnen eenvoudig nagaan, dat de Markovketen welke ontstaat door het toepassen van de strategie $S_{-m,n}$ geen fuiken en/of kringfuiken bevat. Wij mogen dus de invariante kansen van deze verdeling bepalen met behulp van

$$q_j = \sum_{h=1}^{n} q_h p_{hj} \tag{2.41}$$

(zie ook blz. 15 van hoofdstuk IX).

De relaties (2.41) gaan na invullen van (2.39) over in:

$$\begin{aligned}
&a)\ q_j &&= \frac{1}{6} q_{j-1} + \frac{1}{2} q_j + \frac{1}{3} q_{j+1} \quad (1 \leq j \leq n-2;\ -m+2 \leq j \leq -1)\\
&b)\ q_{n-1} &&= \frac{1}{6} q_{n-2} + \frac{1}{2} q_{n-1}\\
&c)\ q_{-m+1} &&= \frac{1}{2} q_{-m+1} + \frac{1}{3} q_{-m+2}\\
&d)\ q_n &&= \frac{1}{6} q_{n-1}\\
&e)\ q_{-m} &&= \frac{1}{3} q_{-m+1}\\
&f)\ q_0 &&= q_{-m} + \frac{1}{6} q_{-1} + \frac{1}{2} q_0 + \frac{1}{3} q_1 + q_n .
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Beschouw nu een ander stel betrekkingen en wel:

$$r_j = \frac{1}{6} r_{j-1} + \frac{1}{2} r_j + \frac{1}{3} r_{j+1} \qquad (1 \leq j \leq n-1) \tag{2.43}$$

met als bijvoorwaarden

$$\begin{aligned} r_1 &= q_1 \\ r_n &= 0 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Indien wij de betrekkingen (2.43) en (2.44) vergelijken met de relaties (2.42a) en (2.42b) dan merken wij op dat de oplossingen welke voldoen aan (2.43) en (2.44) ook zullen voldoen aan (2.42a) en (2.42b).

De oplossing van (2.43) wordt gegeven door:

$$r_j = A + B(\tfrac{1}{2})^j \tag{2.45}$$

met

$$\begin{aligned} r_n &= A + B(\tfrac{1}{2})^n = 0 \\ r_1 &= A + B\tfrac{1}{2} = q_1 \quad . \end{aligned} \tag{2.46}$$

Uit (2.46) vinden wij voor A resp. B:

$$B = \frac{2q_1}{1-(\frac{1}{2})^{n-1}} \tag{2.47}$$

$$A = \frac{-q_1(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-(\frac{1}{2})^{n-1}} \quad . \tag{2.48}$$

De uitdrukking (2.45) gaat over in:

$$r_j = \frac{-q_1(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-(\frac{1}{2})^{n-1}} + \frac{q_1(\frac{1}{2})^{j-1}}{1-(\frac{1}{2})^{n-1}} =$$

$$= \frac{q_1}{1-(\frac{1}{2})^{n-1}} \left[(\tfrac{1}{2})^{j-1} - (\tfrac{1}{2})^{n-1}\right] . \qquad (2.49)$$

Wij vinden derhalve voor q_j:

$$q_j = \frac{q_1}{1-(\frac{1}{2})^{n-1}} \left[(\tfrac{1}{2})^{j-1} - (\tfrac{1}{2})^{n-1}\right] . \quad (1 \leq j \leq n-2) \qquad (2.50)$$

Uit (2.42d) volgt dan voor q_n:

$$q_n = \frac{1}{6} \frac{q_1}{1-(\frac{1}{2})^{n-1}} \left[(\tfrac{1}{2})^{n-2} - (\tfrac{1}{2})^{n-1}\right] \qquad (2.51)$$

De kansen $q_j(j=-1,\ldots,-m)$ kunnen op dezelfde wijze uitgedrukt worden in q_{-1} en wij vinden overeenkomstig (2.50)

$$r_{-j} = \frac{q_{-1}}{1-2^{m-1}} \left[2^{j-1} - 2^{m-1}\right] \quad (j=1,\ldots,m) \qquad (2.52)$$

en

$$q_{-m} = \frac{1}{3} \frac{q_{-1}}{1-2^{m-1}} \left[2^{m-2} - 2^{m-1}\right] . \qquad (2.53)$$

Volgens (2.42a) geldt:

$$q_1 = \frac{1}{3} q_0 + \frac{2}{3} q_2 = \frac{1}{3} q_0 + \frac{2}{3} \frac{q_1}{1-(\frac{1}{2})} \left[\tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2})^{n-1}\right] \qquad (2.54)$$

$$q_{-1} = \frac{2}{3} q_0 + \frac{1}{3} q_{-2} = \frac{2}{3} q_0 + \frac{1}{3} \frac{q_{-1}}{1-2^{m-1}} \left[2-2^{m-1}\right] . \qquad (2.55)$$

Uit deze relaties volgt:

$$q_0 = \frac{2q_1\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]}{1-(\frac{1}{2})^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}q_{-1}\left[1-2^m\right]}{1-2^{m-1}} \qquad (2.56)$$

en

$$q_{-1} = \frac{4q_1\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]}{1-(\frac{1}{2})^{n-1}} \frac{\left[1-2^{m-1}\right]}{1-2^m} . \qquad (2.57)$$

Wij vinden dus voor de grootheden q_j:

$$
\begin{aligned}
q_n &= \frac{1}{6}\,\frac{q_1}{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}\left[(\tfrac{1}{2})^{n-2}-(\tfrac{1}{2})^{n-1}\right]\\
q_j &= \frac{q_1}{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}\left[(\tfrac{1}{2})^{j-1}-(\tfrac{1}{2})^{n-1}\right]\\
q_0 &= 2q_1\,\frac{\left[1-(\frac{1}{2})^{n}\right]}{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}\\
q_{-1} &= 4q_1\,\frac{\left[1-(\frac{1}{2})^{n}\right]}{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}\,\frac{\left[1-2^{m-1}\right]}{1-2^{m}}\\
q_{-j} &= \frac{4q_1\left[1-(\frac{1}{2})^{n}\right]\left[2^{j-1}-2^{m-1}\right]}{(1-2^{m})\left[1-(\frac{1}{2})^{n-1}\right]}\\
q_{-m} &= \frac{\frac{4}{3}q_1\left[1-(\frac{1}{2})^{n}\right]\left[2^{m-2}-2^{m-1}\right]}{\left[1-(\frac{1}{2})^{n-1}\right]\left[1-2^{m}\right]}\quad .
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

Uit de relatie

$$\sum_{j=-m}^{+n} q_j = 1 \tag{2.59}$$

volgt tenslotte de waarde van q_1.

Met behulp van de uitdrukkingen (2.58) en de betrekking (2.59) kunnen voor ieder stel waarden van m en n de invariante kansen worden bepaald. In tabel 4 hebben wij voor verschillende waarden van m en n de bijbehorende invariante kansen aangegeven. In tabel 5 vinden wij tenslotte de verwachting van de onkosten in de limiettoestand voor de verschillende strategieën.

Tabel 4

q_j	n=5 m=2	n=4 m=2	n=3 m=2	n=3 m=3	n=4 m=3	n=4 m=4	n=3 m=4	n=5 m=3	n=5 m=3	n=3 m=5	n=4 m=5	n=5 m=5
q_5	0,002	-	-	-	-	-	-	0,002	0,002	-	-	0,001
q_4	0,012	0,005	-	-	0,004	0,003	-	0,008	0,009	-	0,003	0,006
q_3	0,035	0,025	0,011	0,009	0,020	0,016	0,007	0,022	0,028	0,006	0,013	0,019
q_2	0,081	0,075	0,056	0,044	0,059	0,047	0,035	0,052	0,064	0,029	0,039	0,043
q_1	0,174	0,174	0,170	0,132	0,137	0,110	0,105	0,112	0,138	0,086	0,091	0,093
q_0	0,360	0,373	0,395	0,307	0,294	0,237	0,245	0,231	0,285	0,201	0,196	0,192
q_{-1}	0,240	0,249	0,263	0,263	0,252	0,221	0,229	0,216	0,245	0,195	0,189	0,186
q_{-2}	0,096	0,100	0,105	0,176	0,168	0,189	0,196	0,185	0,163	0,182	0,177	0,173
q_{-3}	-	-	-	0,070	0,067	0,126	0,131	0,123	0,065	0,156	0,151	0,149
q_{-4}	-	-	-	-	-	0,050	0,052	0,049	-	0,104	0,100	0,099
q_{-5}	-	-	-	-	-	-	-		-	0,042	0,040	0,040

De invariante kansen van de door de verschillende strategieën voortgebrachte Markovketens

Tabel 5

m \ n	3	4	5
2	3,931	3,911	4,038
3	3,879	3,863	3,967
4	4,703	4,650	4,743
5	6,640	6,540	6,548

De verwachting van de onkosten in de limiettoestand berekend voor verschillende waarden van m en n

Zoals uit tabel 5 blijkt geeft de strategie $S_{-3,4}$ een relatief minimum. Men kan, door deze berekeningen ook voor de overige strategieën uit te voeren, zich ervan overtuigen dat het ook de beste is.

3. Vervangingsproblemen van het tweede type

Van een vliegtuigmotor die verondersteld wordt continu in bedrijf te zijn, zijn de reparatie- en onderhoudskosten verwaarloosbaar. De motor raakt echter na verloop van een stochastische tijd $\underline{t}$, met verdelingsfunctie $F(t)$, defect. We zullen veronderstellen dat de kosten om één motor te vervaardigen c_1 zijn, terwijl het defect raken van een in gebruik zijnde motor kosten c_2 met zich meebrengt.

De bedoeling is nu om op de hoge kosten c_2 zo veel mogelijk te besparen. Hiertoe staan, naar wij zullen aannemen, twee mogelijke handelwijzen, die gecombineerd kunnen worden gebruikt, tot onze beschikking, nl.:

a. het testen van de motoren gedurende het tijdsinterval $(0,a)$ met het doel om constructiefouten op te sporen,
b. het buiten gebruik stellen van een motor die gedurende $b-a$ tijdseenheden in gebruik is geweest, en in die tijd niet defect is geraakt.

Men zou tegen het testen kunnen inbrengen dat de motoren hierdoor alleen maar ouder kunnen worden. Inderdaad geldt dit voor iedere motor individueel, maar de verwachting van de nog resterende looptijd kan voor de goedgekeurde na de test groter zijn dan die van de nog niet gekeurde voor de aanvang van de test. Wij zullen dit met een voorbeeld toelichten.

Beschouw een steekproef van 40 motoren, waarvan 20 stuks getrokken zijn uit een populatie waarvan de elementen een levensduur hebben die bij benadering $N(4,1)$ verdeeld is, terwijl de overige 20 stuks afkomstig zijn uit een populatie waarvan de elementen een bij benadering $N(24,1)$ verdeelde levensduur hebben. De gemiddelde levensduur is dus ongeveer 14 tijdseenheden. Laten we nu alle motoren gedurende ongeveer 8 tijdseenheden draaien, dan is het zo goed als zeker dat alleen de motoren met de $N(24,1)$-verdeling dit zullen volhouden. De resterende motoren hebben dus een gemiddelde levensduur van ongeveer $24-8=16$ tijdseenheden. Deze zijn er dus weliswaar niet beter op geworden (hun levensduur is 8 tijdseenheden minder) maar we kunnen deze motoren met een gerust hart gedurende zeg 12 tijdseenheden gebruiken.

We merken nog op dat een gemengde populatie als bovengenoemd met één verdelingsfunctie kan worden beschreven. Stel nl. dat een fractie α de functie $F(x)$, en de rest $G(x)$ als verdelingsfunctie van de levensduur heeft. De kans dat de levensduur $\underline{x}$ van een willekeurige motor uit deze gemengde populatie een waarde x niet overschrijdt, is gelijk aan

$$P[\underline{x} \leq x] = \alpha F(x) + (1-\alpha)G(x) \quad . \tag{3.1}$$

Het rechterlid is weer een functie van x, die blijkbaar de verdelingsfunctie van $\underline{x}$ is.

We zullen nu de testperiode $(0,a)$ en de bedrijfsperiode (a,b) zo gunstig mogelijk kiezen. De verwachting van de kosten per N nog te testen motoren bedraagt

$$Nt(a,b) = Nc_1 + Nc_2\{(F(b)-F(a)\} \tag{3.2}$$

omdat de kosten c_2 alleen gemaakt worden als een motor tussen a en b defect raakt. De verwachting van de tijdsduur gedurende welke deze N motoren in bedrijf zullen zijn, is

$$Nn(a,b) = N\int_a^b (t-a)dF(t) + N\int_b^\infty (b-a)dF(t) \quad . \tag{3.3}$$

Huren van de motoren tegen een prijs c_3 per tijdseenheid (waarbij <u>alle</u> kosten voor rekening van de verhuurder komen) is dus voordeliger dan zelf de kosten betalen, wanneer

$$c_3N(a,b) < Nt(a,b) \tag{3.4}$$

ofwel

$$\frac{t(a,b)}{n(a,b)} > c_3 \tag{3.5}$$

We zien hieruit dat a en b optimaal zijn wanneer

$$G(a,b) = \frac{t(a,b)}{n(a,b)} = \frac{c_1+c_2\{F(b)-F(a)\}}{\int_a^b tdF(t)+b-bF(b)-a+aF(a)} \tag{3.6}$$

minimaal is.

Indien a en b voldoen aan $0 < a < b < \infty$, en G neemt in (a,b) een extremum aan, dan geldt

$$\frac{\delta G}{\delta a} = 0; \qquad \frac{\delta G}{\delta b} = 0 \quad . \tag{3.7}$$

Uitgeschreven wordt dit

$$\left.\begin{aligned} -\frac{c_2 f(a)n(a,b)-\{1-F(a)\}t(a,b)}{n^2(a,b)} &= 0 \\ \frac{c_2 f(b)n(a,b)-\{1-F(b)\}t(a,b)}{n^2(a,b)} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

waarin f(t) de verdelingsdichtheid van de levensduur is.

Een nodige voorwaarde opdat aan (3.8) is voldaan is blijkbaar

$$\frac{f(a)}{1-F(a)} = \frac{f(b)}{1-F(b)} \tag{3.9}$$

Deze vergelijking heeft als (triviale) oplossing a=b; dit zal echter nooit een minimum kunnen opleveren, want $G(a,a)=\infty$ voor alle a. Als (3.9) geen andere oplossing heeft, is er dus geen extremum in het inwendige van het gebied $0 \leqq a \leqq b \leqq \infty$.
Het omgekeerde is helaas niet waar, m.a.w.: er zijn verdelingsfuncties waarvoor een niet-triviale oplossing van (3.9) bestaat, terwijl het stelsel (3.8) tòch geen oplossing heeft.

Wij dienen dus voor de bepaling van de optimale waarde van a en b de verdelingsfunctie F(x) en de kansdichtheid f(x) van de looptijd x te kennen.

In de praktijk beschikt men slechts over een eindig aantal waarnemingen en heeft men een trapfunctie als een schatting voor F(x). Indien wij met deze trapfunctie $\hat{F}(x)$ werken in plaats van F(x) dan gaat de formule voor G over in

$$G(a,b) = \frac{c_1+c_2\{\hat{F}(b)-\hat{F}(a)\}}{\sum\limits_{a+1}^{b} ip(i)+b-b\hat{F}(b)-a+a\hat{F}(a)} \tag{3.10}$$

waarin $p(i) = \hat{F}(i)-\hat{F}(i-1)$. (3.11)

Voeren we nu de functies R(i) en H(i) in, gedefinieerd door

$$R(i) = 1-\hat{F}(i) \tag{3.12}$$

$$H(i) = \sum_{j=1}^{i} jp(j)+iR(i) \tag{3.13}$$

dan kunnen we voor G ook schrijven

$$G(a,b) = \frac{c_1+c_2\{R(a)-R(b)\}}{H(b)-H(a)} \quad . \tag{3.14}$$

Deze formule is zeer geschikt voor toepassingen, ten eerste omdat aan de waarnemingen niet eerst een continue functie behoeft te worden aangepast, en ten tweede om de eenvoud van de berekening als R(i) en H(i) eenmaal getabelleerd zijn.

Toepassing. Laat p(i) gegeven zijn door de tweede kolom van tabel (3.1). Met behulp van (3.11, 12 en 13) kan deze tabel worden voltooid. In principe kan G(a,b) nu voor ieder stel waarden van a en b worden bepaald. Dit is echter niet nodig:

Tabel 3.1

i	100p(i)	100R(i)	100H(i)
0	0	100	0
1	24	76	100
2	3	73	176
3	1	72	249
4	1	71	321
5	1	70	392
6	2	68	462
7	2	66	530
8	3	63	596
9	4	59	659
10	7	52	718
11	10	42	770
12	11	31	812
13	8	23	843
14	6	17	866
15	3	14	883
16	3	11	897
17	2	9	908
18	2	7	917
19	1	6	924
20	0	6	930
21	1	5	936
22	0	5	941
23	0	5	946
24	1	4	951
25	0	4	955
26	1	3	959
27	1	2	962
28	0	2	964
29	0	2	966
30	2	0	968

wanneer we mogen aannemen dat de functie G in de buurt van het minimum geen al te rare bokkesprongen maakt, en wanneer we bovendien weten waar het minimum ongeveer ligt, kunnen we volstaan met de functiewaarden van G te berekenen in een betrekkelijk klein aantal punten.

Hiertoe wordt bij een vaste waarde a_0 van a een b_0 gezocht, zodanig dat

$$G(a_0,b_0) \leq G(a_0,b_0 \pm 1) \quad . \tag{3.15}$$

Bij deze b_0 wordt dan een a_1 bepaald, zodat

$$G(a_1,b_0) \leq G(a_1 \pm 1,b_0) \tag{3.16}$$

enzovoorts, in de hoop dat op deze wijze een punt (a,b) zal worden gevonden met

$$\begin{aligned} G(a,b) &\leq G(a,b \pm 1) \\ G(a,b) &\leq G(a \pm 1,b) \end{aligned} \quad . \tag{3.17}$$

Voor "alle" zekerheid berekenen we dan nog $G(a \pm 1, b \pm 1)$.

Bij de genoemde keuze van p(i) leidt deze procedure zowel voor $c_2/c_1=10$ als voor $c_2/c_1=40$ na ongeveer 15 stappen tot de oplossing, zoals uit onderstaande tabellen moge blijken.

Tabel 3.2

a ↓ \ b →	7	8	9	10	
0	83	79	77		
1	47	46	48		
2	48	48	50		
3	57	55	56	64	← start
4		65			

G(a,b) voor enkele waarden van a en b bij $c_1=100$, $c_2=1000$

Tabel 3.3

a \ b →	4	5	6	7	8	9	10
1	136	116	116	116			
2	124	102	105	107	119		
3	194	126	122	121	133	151	192 ← start
4				144			

G(a,b) voor enkele waarden van a en b bij c_1=100, c_2=4000

Voor c_2/c_1=10 wordt het minimum bereikt voor a=1, b=8; voor c_2/c_1=40 daarentegen voor a=2, b=5.

We merken tenslotte nog op dat voor zeer grote waarden van c_2/c_1 de functie G(a,b) minimaal is voor a=21, b=23. Dit is direct uit de tabel (3.1) af te lezen.

4. Vervangingsproblemen van het derde type

Tot dusver hebben wij vervangingsproblemen beschouwd waarin wij naar eigen goeddunken het tijdstip konden bepalen waarop een machine of een onderdeel van een machine moet worden vervangen.

Er bestaat echter ook een groot aantal situaties, waarin vervanging slechts mogelijk is op van tevoren vastgestelde tijdstippen.

Om de gedachten te bepalen veronderstellen wij dat wij belast zijn met het onderhoud van een electronenapparatuur. Dit toestel, dat gedurende de gehele week in werking is kan slechts op maandagochtenden worden nagezien. Dit onderzoek is voornamelijk gericht op een zeer kwetsbaar onderdeel, waarvan de toestand met behulp van een ampèremeter kan worden bepaald. Stel dat verder gegeven is dat het apparaat alleen op de inspectie-ochtenden kan worden gerepareerd. Gevraagd wordt nu, op grond van allerlei gegevens betreffende de levensduur van het tere onderdeel en de kosten verbonden aan het uitvallen van het toestel, na te gaan welke toestand van het betreffende onderdeel tijdens de inspectie nog toelaatbaar is.

Stel dat de kwaliteit van het onderdeel kan worden aangegeven door een reëel getal: S correspondeert met een nieuw onderdeel, terwijl het getal 0 de hoedanigheid aanduidt van een totaal onbruikbaar onderdeel.

Er moet een boete b worden betaald wanneer het onderdeel de toestand 0 aanneemt vóór de inspectie (ook in dit model kan het dus voordelig zijn om het onderdeel al te vervangen wanneer het nog niet geheel onbruikbaar is). De aankoopkosten van een onderdeel bedragen c.

We zullen aannemen dat de kwaliteitsdaling per week de verdelingsfunctie $F(x)$ heeft, d.w.z. $F(x)$ is de kans dat deze daling hoogstens x is.

Onze strategie zal nu bestaan in het vervangen van het onderdeel zodra het kwaliteitsgetal beneden een waarde s daalt. s is dus een getal tussen 0 en S, en we zullen proberen dit getal zo gunstig mogelijk te kiezen. Hiertoe berekenen we de verwachting van de kosten per onderdeel die gemaakt worden vanaf het ogenblik van ingebruikstelling tot het moment van vervanging. Het is duidelijk dat dit bedrag gelijk is aan[1] $c+bp$, waarbij p de kans is dat er

----

1) Voorlopig betrekken we geen onderhoudskosten en/of restwaarden in onze beschouwingen.

boete moet worden betaald. Om deze kans te berekenen voeren we in de stochastische variabele $\underline{y}_n = \underline{x}_1+\ldots+\underline{x}_n$ met verdelingsfunctie $F_n(y)$ en kansdichtheid $f_n(y)$. De grootheid $\underline{y}_n$ stelt het kwaliteitsverval voor in n weken.

Veronderstel dat, nadat een nieuw onderdeel geplaatst is, n-1 inspecties zijn voorbijgegaan zonder dat men het onderdeel heeft vervangen. Dit betekent:

$$\underline{y}_{n-1} < S-s \tag{4.1}$$

Als nu vóór de n^e inspectie het onderdeel onklaar raakt, dan geldt bovendien:

$$\underline{x}_n > S - y_{n-1} \quad . \tag{4.2}$$

De kans op de hierboven beschreven situatie is dus voor $n > 1$ gelijk aan

$$\int_0^{S-s} P\left[\underline{x}_n > S-t\right] f_n(t)dt \tag{4.3}$$

en voor n=1 eenvoudig

$$P\left[\underline{x}_1 > S\right] \quad . \tag{4.4}$$

De kans dat het onderdeel onklaar raakt vóór een willekeurige inspectie wordt dus gegeven door:

$$p = 1-F(S) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{S-s} \left\{1-F(S-t)\right\} f_{n-1}(t)dt \quad . \tag{4.5}$$

De gemiddelde gebruiksduur van het onderdeel, $\mathcal{E}\underline{t}$, wordt als volgt berekend.

Stel dat, nadat een nieuw onderdeel geplaatst is, bij de n^e inspectie daarna het toestel weer opnieuw van een nieuw onderdeel wordt voorzien. Dit betekent:

$$x_n \geqq S-s-\underline{y}_{n-1} \tag{4.6}$$

met

$$\underline{y}_{n-1} < S-s \quad . \tag{4.7}$$

De kans op realisering van een dergelijke situatie is voor $n > 1$ gelijk aan

$$\int_0^{S-s} P\left[x_n \geqq S-s-t\right] f_{n-1}(t)\,dt \quad , \tag{4.8}$$

terwijl de levensduur van het onderdeel dan n weken is.

Voor n=1 vinden we voor bovengenoemde kans:

$$P\left[x_1 > S-s\right] \tag{4.9}$$

Uit (4.8) en (4.9) volgt nu voor de verwachting van de levensduur:

$$\mathcal{E}\underline{t} = 1-F(S-s)+\sum_{n=2}^{\infty} n \int_0^{S-s} \left\{1-F(S-s-t)\right\} f_{n-1}(t)\,dt \quad . \tag{4.10}$$

Ook nu voeren wij het volgende gedachtenexperiment uit: Stel dat wij het beheer van de electronenapparatuur ook kunnen uitbesteden tegen een bedrag c_0 per week. Bij dit bedrag zijn ook inbegrepen de aanschaffingskosten van het onderdeel.

Het in eigen beheer hebben van het onderdeel is voordeliger dan uitbesteden indien geldt:

$$c + bp < c_0\, \mathcal{E}\underline{t} \tag{4.11}$$

ofwel

$$\frac{c+bp}{\mathcal{E}\underline{t}} < c_0 \quad . \tag{4.12}$$

Het "eigen beheer" concurreert dus het beste als

$$\frac{c+bp}{\mathcal{E}\underline{t}} = \frac{c + b\left[1-F(s)+\sum\limits_{n=2}^{\infty} \int_0^{S-s} \left\{1-F(S-t)\right\} f_{n-1}(t)\,dt\right]}{1-F(S-s)+\sum\limits_{n=2}^{\infty} n \int_0^{S-s} \left\{1-F(S-s-t)\right\} f_{n-1}(t)\,dt} \tag{4.13}$$

minimaal is.

Wij dienen dus het rechterlid van (4.13), gezien als functie van s, te minimaliseren. Deze vrij ingewikkelde uitdrukking wordt van een verrassend eenvoudige gedaante indien wij voor F(x) een exponentiële verdeling kiezen:

$$F(x) = 1-e^{-\alpha x} \quad . \tag{4.14}$$

De uitdrukking (4.5) voor p laat zich dan nl. als volgt herleiden:

$$p = 1 - F(S) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{S-s} \{1-F(S-t)\} f_{n-1}(t)dt =$$

$$= e^{-\alpha S} + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{S-s} e^{-\alpha(S-t)} \cdot \frac{e^{-\alpha t}\alpha^{n-1} t^{n-2}}{\Gamma(n-1)} dt =$$

$$= e^{-\alpha S} + \alpha \int_0^{S-s} e^{-\alpha(S-t)} \{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\alpha t}\alpha^{n-2} t^{n-2}}{(n-2)!}\} dt =$$

$$= e^{-\alpha S} + \alpha \int_0^{S-s} e^{-\alpha(S-t)} dt = e^{-\alpha S} + e^{-\alpha S}\left[e^{\alpha t}\right]_0^{S-s} =$$

$$= e^{-\alpha s} . \tag{4.15}$$

De formule (4.10) voor $\mathcal{E}\underline{t}$ kan eveneens belangrijk worden vereenvoudigd:

$$\mathcal{E}\underline{t} = e^{-\alpha(S-s)} + \int_0^{S-s} e^{-\alpha(S-s-t)} \{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n e^{-\alpha t}\alpha^{n-1} t^{n-2}}{\Gamma(n-1)}\} dt. \tag{4.16}$$

Voor de vorm tussen de accoladen mogen wij ook schrijven:

$$\{\ldots\} = \alpha e^{-\alpha t} \sum_{n=2}^{\infty} \{\frac{(n-2)(\alpha t)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{2(\alpha t)^{n-2}}{(n-2)!}\} =$$

$$= \alpha e^{-\alpha t}\{\alpha t \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(\alpha t)^{n-3}}{(n-3)!} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\alpha t)^{n-2}}{(n-2)!}\} =$$

$$= \alpha e^{-\alpha t} \{\alpha t e^{\alpha t} + 2e^{\alpha t}\} = \alpha^2 t + 2\alpha . \tag{4.17}$$

Substitueren we dit in (4.16), dan vinden we

$$\mathcal{E}\underline{t} = e^{-\alpha(S-s)} + e^{-\alpha(S-s)} \int_0^{S-s} e^{\alpha t}(\alpha^2 t + 2\alpha)dt =$$

$$= e^{-\alpha(S-s)} + e^{-\alpha(S-s)}\left[\alpha t e^{\alpha t} + e^{\alpha t}\right]_0^{S-s} = \alpha(S-s) + 1. \tag{4.18}$$

Substitutie van (4.15) en (4.18) in (4.13) geeft nu

$$\frac{c+bp}{\mathcal{E}\underline{t}} = \frac{c+be^{-\alpha s}}{\alpha(S-s)+1} \quad . \qquad (4.19)$$

Voor de optimale keuze van s geldt dus

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{c+be^{-\alpha s}}{\alpha(S-s)+1}\right\} = 0 \qquad (4.20)$$

ofwel

$$\frac{\alpha b}{c}(S-s) = e^{\alpha s} \quad . \qquad (4.21)$$

<u>Toepassing</u>. Stel dat de boete 20 maal zo hoog is als de aanschaffingskosten van een nieuw onderdeel, laat S gelijk zijn aan 1, en laat de gemiddelde kwaliteitsdaling per week gelijk zijn aan $\frac{1}{18}$.

De vergelijking (4.21) gaat na invullen van deze gegevens, en na enige herleiding over in

$$S = \frac{1}{18}\,{}^{e}\log 360(1-s) \quad . \qquad (4.22)$$

Om deze vergelijking op te lossen passen we een z.g. iteratie-procedure toe. Deze procedure berust op de volgende redenering: indien een getal t een wortel is van (4.22) dan is

$$t = \frac{1}{18}\,{}^{e}\log 360(1-t) \qquad (4.23)$$

een identiteit: links staat een getal, rechts staat hetzelfde getal. Indien een getal u géén wortel is van (4.22) geldt natuurlijk

$$u \neq \frac{1}{18}\,{}^{e}\log 360(1-u) \qquad (4.24)$$

maar, als u <u>in de buurt</u> van een wortel ligt, zal het rechterlid van (4.24) óók in de buurt van deze wortel liggen. Het kan zelfs gebeuren dat $\frac{1}{18}\,{}^{e}\log 360(1-u)$ dichter bij die wortel ligt dan u zelf.

We zouden deze situatie als volgt kunnen formuleren: u is een schatting van een wortel, en $\frac{1}{18}\,{}^{e}\log 360(1-u)$ is een betere schatting.

Het ligt nu voor de hand om deze betere schatting van u te gebruiken op dezelfde manier als we de eerste hebben gebruikt, in de hoop om op deze wijze een nòg betere schatting van de wortel te verkrijgen.

Op grond van deze redenering besluiten we ertoe om (4.22) als volgt te herschrijven:

$$s_{n+1} = \frac{1}{18}\, {}^{e}\log 360(1-s_n) \tag{4.25}$$

en we vatten deze relatie op als een recurrentiebetrekking voor de termen van een rij $s_0, s_1, s_2, \ldots$. Voor s_0 kiezen we de waarde 0,3. Substitutie in het rechterlid van (4.25) geeft achtereenvolgens

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 0{,}3074 \\ s_2 = 0{,}3066 \\ s_3 = 0{,}3067 \\ s_4 = 0{,}3067 \end{array}\right\} . \tag{4.26}$$

We zullen het onderdeel dus vervangen zodra op een maandagochtend blijkt dat het kwaliteitscijfer beneden 0,3067 is gedaald.

Tot slot van dit hoofdstuk zullen wij nagaan welke gedaante de formule (4.13) krijgt indien wij rekening houden met onderhoudskosten en restwaarden.

Hiertoe bepalen we eerst de verdelingsfunctie $G(y)$ van het resterende kwaliteitsniveau $\underline{y}$ van een onderdeel dat wordt vervangen. Wij dienen hier weer onderscheid te maken tussen een daling tot beneden s in één of in meer weken. Op een dergelijke manier als bij de afleiding van de formules (4.5) en (4.10) vinden we dan:

$$G(y) = P[\underline{y} \leq y] = 1-F(S-y)+\sum_{j=2}^{\infty} \int_0^{S-s} \{1-F(S-y-t)\} f_{j-1}(t)dt \ . \tag{4.27}$$

Voor de verwachting a van de restwaarde bij vervanging vinden we dan

$$a = \int_0^s r(y)g(y)dy \tag{4.28}$$

waarin $r(y)$ de waarde is van een onderdeel van de kwaliteit y, en $g(y)$ de verdelingsdichtheid van $\underline{y}$.

Om de verwachting d van de onderhoudskosten te berekenen voeren we in de functie $h(x)$, die de onderhoudskosten per tijdseenheid in de toestand x aangeeft. Evenals in paragraaf 2 zullen wij met $\underline{t}_{dx;x}$ de tijd aangeven waarin het onderdeel, vanuit de kwaliteitsstaat x met een bedrag dx vermindert. Gedurende dit tijdsinterval bedragen de onderhoudskosten dus

$$h(x)\underline{t}_{dx;x} \ . \tag{4.29}$$

De verwachting van deze kosten wordt dan gegeven door[1)]

$$\mathcal{E} h(x)\underline{t}_{dx;x} = \alpha h(x)dx \ , \tag{4.30}$$

waarin α de verwachting is van de tijd die nodig is voor een kwaliteitsdaling van 1 eenheid.

Men kan bewijzen dat de verwachting van de onderhoudskosten per onderdeel gegeven wordt door

$$d = \alpha \int_0^s h(x)dx - \alpha \int_0^s g(y)dy \int_0^y h(x)dx \ . \tag{4.31}$$

De te minimaliseren functie heeft nu de volgende gedaante

$$\frac{-a+pb+c+d}{\mathcal{E}\underline{t}} \tag{4.32}$$

waarin p gegeven wordt door (4.5), $\mathcal{E}\underline{t}$ door (4.10), a door (4.28) en d door (4.31).

----

1) Hierbij wordt gebruik gemaakt van een veronderstelling van dezelfde vorm als aangegeven in (2.1), welke slechts in benadering geldig is.