

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

A M S T E R D A M

STATISTISCHE AFDELING

Rapport S 265 (C 13)

Leergang Besliskunde

Hoofdstuk XIX

De bescherming van ons land tegen het hoge water

door

J. Kriens en C.L. Smid

(Bewerking van de rapporten S 226 door
Prof. Dr D. van Dantzig en Prof. Dr J. Hemelrijk
en S 222 door Prof. Dr D. van Dantzig)

februari 1961

1. Inleiding

Naar aanleiding van de watersnoodramp op 1 februari 1953 gaf de Nederlandse regering aan een commissie van deskundigen (de zogenaamde Delta-Commissie) opdracht na te gaan welke maatregelen er genomen moesten worden, teneinde ons land zo goed mogelijk te beveiligen tegen watersnoodrampen. In het kader van haar werkzaamheden verstrekte deze commissie opdrachten aan o.a. het K.N.M.I. in De Bilt, het Waterloopkundig Laboratorium in Delft, het Centraal Planbureau en aan het Mathematisch Centrum.

Twee van de door het Mathematisch Centrum bestudeerde problemen zullen in dit hoofdstuk worden behandeld. Het eerste betreft de vraag, een onderzoek in te stellen naar de frequenties van stormvloedstanden van verschillende hoogten en het tweede de vraag, een statistisch en economisch verantwoorde basis te verstrekken voor de bepaling der verhoging, welke de dijken langs de Westerschelde en de Nieuwe Waterweg moeten ondergaan.

2. De frequentielijn der hoge waterstanden te Hoek van Holland

2.1. Het waarnemingsmateriaal; de keuze van Hoek van Holland

Het beschikbare waarnemingsmateriaal bestaat uit waargenomen hoogwaterstanden (te vinden in de Jaarboeken der Waterhoogten van de Algemene Dienst van de Rijkswaterstaat) ¹⁾ voor verschillende plaatsen langs de kust en in de zeearmen. Van deze plaatsen is Hoek van Holland - althans voor Centraal Holland en Zeeland - het geschiktste punt om de invloed van de Noordzee op de kust te onderzoeken. Het is centraal gelegen en de peilschaal bevindt zich dicht bij de kust, waardoor de storende invloeden, die zich verderop in rivieren en zeearmen voordoen, daar niet of althans het minst aanwezig zijn. Het onderzoek werd daarom voor Hoek van Holland uitgevoerd.

De beschikbare waarnemingen strekten zich uit over de jaren 1888 tot en met 1956. De hier gegeven resultaten berusten op ongeveer 49000 hoogwaterstanden. Van het aanbrengen van een bodemdalingscorrectie op de waarnemingen werd afgezien, omdat 1e deze correctie zeer onzeker zou zijn en 2e zijn invloed op de - voor dit onderzoek belangrijkste - hoge H.W.'s relatief zeer gering is. Dit geldt

¹⁾ Een hoogwaterstand (afkorting: H.W.) is de hoogste stand, die gedurende een periode van hoogwater wordt bereikt.

uiteraard niet meer indien men, bij extrapolatie, rekening wenst te houden met de bodemdaling in toekomstige perioden. Het is echter beter dit probleem afzonderlijk te beschouwen en het niet onder één hoofd te brengen met de onderzoekingen naar de hoogwateroverschrijdingslijn, die hier worden behandeld. De bodemdaling wordt wèl in rekening gebracht bij de economische beschouwingen (vgl. par. 3.4).

2.2. De frequentieverdeling van alle hoogwaterstanden

De empirische frequentieverdeling van alle hoogwaterstanden is in fig. 2.1 aangegeven. Op de horizontale as is daarbij de hoogte aangegeven (in m boven NAP) en op de vertikale - op logaritmische schaal - het gemiddeld aantal overschrijdingen van de beschouwde hoogte per jaar. De hoogste waargenomen waterstand is 3,85 m (1 februari 1953); het bijbehorende aantal overschrijdingen per jaar is $1/69 = 0,0145$. De daarop volgende is 3,28 m (22 december 1894) met gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar $2/69 = 0,0290$.

In 1939 introduceerde P.J. WEMELSFELDER ¹⁾ deze statistische behandeling van hoogwaterstanden. Waar in het verleden veelal de hoogte van een te bouwen of te verhogen dijk werd gebaseerd op de hoogste tot dan waargenomen waterstand, betoogde Wemelsfelder terecht, dat men ook met hogere waterstanden dan de waargenomene rekening dient te houden en dat deze op de lange duur elk met een bepaalde frequentie voorkomen. Bij uitzetten van de toen beschikbare gegevens voor Hoek van Holland op de boven beschreven wijze, verkreeg hij een rij punten, die voor niet te geringe hoogte bij goede benadering op een rechte lijn lagen. Uit fig. 2.1 blijkt, dat dit ook voor de momenteel beschikbare waarnemingen boven 1,50 m het geval is.

Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h noemen we $n(h)$. Als we dus $\log n(h)$ uitzetten tegen h , dan vinden we vanaf een bepaalde hoogte H_1 vrijwel een rechte lijn (zie fig. 2.2).

1) P.J. WEMELSFELDER, Wetmatigheden in het optreden van stormvloed, "De Ingenieur" No 9, Bouw- en Waterkunde 3.

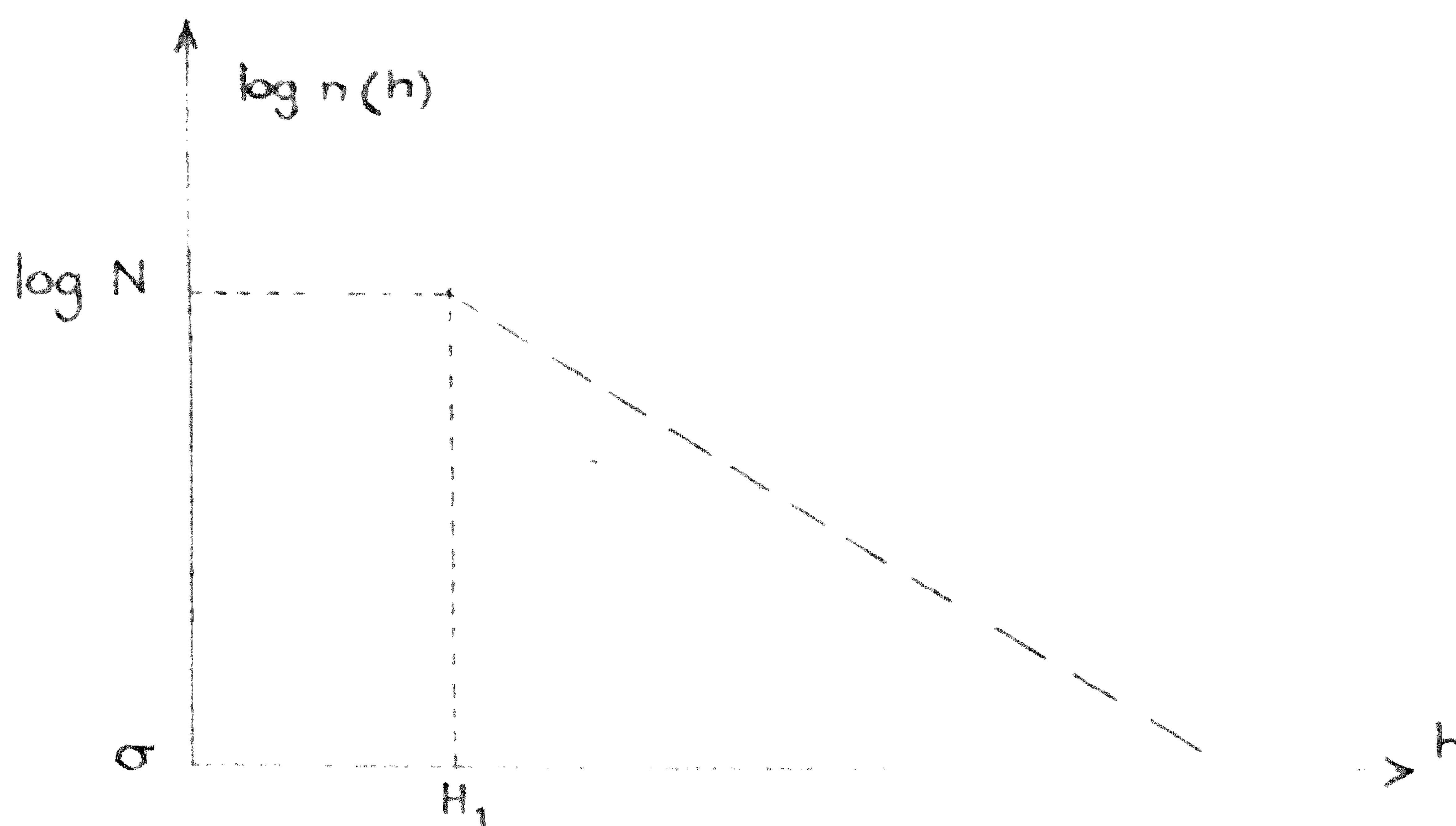


fig. 2.2

Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar,
schematisch weergegeven

Wanneer N het totaal aantal overschrijdingen per jaar van het peil H_1 is, dan is dus:

$$\log n(h) = \log N + \frac{1}{a} (h - H_1) \quad \text{of}$$

$$n(h) = N e^{-\frac{h - H_1}{a}} \quad (2.1)$$

a . heet de nepereringshoogte. Gemakkelijk is uit de formule af te leiden dat het gemiddelde aantal overschrijdingen van het peil $h+a$ e maal zo klein is als van het peil h .¹⁾

In veel gevallen is men niet zo zeer geïnteresseerd in het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van een peil h , doch veel meer in de kans dat een bepaald peil in een bepaald jaar wordt overschreden. Wij zullen nu echter aantonen, dat dit voor grote waarden van h op hetzelfde neerkomt.

Omdat we in veel gevallen slechts een deel van de in een jaar voorkomende waarnemingen zullen beschouwen²⁾ kunnen we het aantal waarnemingen per jaar niet constant nemen. In die gevallen is het

-
- 1) a is dus de verhoging van het peil h , nodig om de kans e maal zo klein te maken; deze verhoging werd nepereringshoogte genoemd naar JOHN NAPIER, die in 1614 de natuurlijke logaritmen invoerde.
 - 2) Bijv. de winterwaarnemingen of de naar depressies geselecteerde waarnemingen; zie par. 2.3.

aantal waarnemingen per jaar stochastisch, d.w.z. er bestaat een kans p_n op n waarnemingen in een bepaald jaar; de aantallen waarnemingen voor verschillende jaren zijn onafhankelijk.

Als

$$g(h) = P[\underline{h} \geq h] \quad (2.2)$$

de kans op overschrijding van het peil h bij één waarneming voorstelt, dan vinden wij voor $p(h)$, de kans op overschrijding van het peil h in een jaar,

$$p(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \{ 1 - g(h) \}^n \right] p_n, \quad (2.3)$$

hetgeen voor grote h benaderd kan worden met

$$\sum_{n=0}^{\infty} n p_n \cdot g(h), \quad (2.4)$$

daar $\{ 1 - g(h) \}^n$ in dat geval door $1 - n g(h)$ vervangen mag worden.²⁾ Het verwachte aantal overschrijdingen van het peil h in een jaar is

$$n(h) = \sum_{n=0}^{\infty} n g(h) \cdot p_n, \quad (2.5)$$

zodat we kunnen concluderen:

Het verwachte aantal overschrijdingen van een hoog peil h in één jaar is gelijk aan de kans op overschrijding van dat peil h in één jaar.

Het verwachte aantal overschrijdingen $n(h)$ van een peil h in één jaar kunnen we schatten uit de beschikbare gegevens van 60 à 70 jaar met het gemiddeld per jaar opgetreden aantal overschrijdingen van het peil h , hetgeen wij als volgt kunnen inzien.

Volgens (2.2) is de kans op overschrijding van het peil h gelijk aan $g(h)$, of ter afkorting g . Wanneer het totaal aantal hoge waterstanden per jaar N_0 bedraagt, dan is de kans op k waarnemingen $\geq h$ in m jaar

$$P[\underline{k} = k] = \binom{N_0 m}{k} g^k (1-g)^{N_0 m - k} \quad (2.6)$$

(vgl. voorbeeld 5b uit hoofdstuk I).

2) Volgens voorbeeld 1.5 uit hoofdstuk II is

$$\{ 1 - g(h) \}^n = 1 - \binom{n}{1} g(h) + \binom{n}{2} \{ g(h) \}^2 + \dots + \{ -g(h) \}^n.$$

Voor grote h is $g(h)$ erg klein, zodat de termen, waarin $g(h)$ in een hogere dan de eerste graad voorkomt bij benadering wel verwaarloosd kunnen worden.

Zijn er in m jaar n waarnemingen $\geq h$ gedaan, dan is volgens voorbeeld 2.2 uit hoofdstuk IV de meest aannemelijke schatting van g

$$\hat{g} = \frac{n}{N_0 m} \quad (2.7)$$

Ook $\underline{n}(h)$, het aantal waarnemingen $\geq h$ in één jaar is binomiaal verdeeld en wel met dezelfde kans $g(h)=g$. De meest aannemelijke schatting voor het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar is dus

$$\hat{n}(h) = N_0 \hat{g} = \frac{n}{m} . \quad (2.8)$$

Vervolgens moet de parameter a uit formule (2.1) geschat worden uit het waarnemingsmateriaal. In hoofdstuk IV, voorbeeld 2.3, is aangetoond, dat wanneer de waarnemingen groter dan H_1 exponentieel verdeeld zijn met parameter a , dat dit dan ook geldt voor de waarnemingen $>h$, mits $h \geq H_1$. Het doet er dus niet toe, waar wij de exponentiële verdeling laten beginnen; de schatting van a blijft dezelfde. Volgens (2.25) uit hoofdstuk IV kan a geschat worden door

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i - H_1) . \quad (2.9)$$

2.3. Extrapolatie en homogeen maken van het waarnemingsmateriaal

Het behoeft geen betoog, dat extrapolatie van een zuiver empirisch verkregen lijn steeds in hoge mate onzeker is. In het hier beschouwde geval moeten veiligheidsmaatregelen genomen worden tegen eventualiteiten die mogelijk zijn, zonder dat het zeker is, dat - en zo ja, wanneer - zij zullen optreden. Dit leidt tot een mathematisch-statistische behandeling van het probleem: men zal een schatting moeten maken van de kans, dat bepaalde mogelijke waterstanden zullen worden overtroffen, en op grond daarvan de maatregelen moeten treffen, beseffende dat er steeds een - zij het zeer kleine - kans overblijft, dat zij toch zullen blijken onvoldoende te zijn geweest.

Men zal dus uit de waarnemingen een kansverdeling moeten afleiden, die zich ook verder uitstrekt dan de hoogst waargenomen stand. Dit betekent eigenlijk, dat men zich voorstelt, dat over lange tijd, bijv. na enkele honderden jaren, met de dan beschikbare waarnemingen opnieuw een empirische frequentielijn zal worden af-

geleid, en dat men nu reeds tracht te raden, hoe deze er zal uitzien. Dit is een gissing, dus onzeker. Door echter de thans bekende feiten zo goed mogelijk in aanmerking te nemen, kan men bereiken, dat redelijkerwijs te verwachten is, dat de toekomstige frequentielijn niet al te veel van de thans gegiste af zal wijken.

Extrapolatie is dus, ook al blijft onzekerheid bestaan, noodzakelijk. Om de onzekerheid zo veel mogelijk te beperken, dient men echter voorzorgen te nemen. De belangrijkste van deze voorzorgen is, dat men ertegen waakt, de extrapolatie te baseren op "niet-homogeen" waarnemingsmateriaal.

Wanneer we het aantal zeer hoge H.W.'s in de winter en in de zomer vergelijken, dan blijkt dit aantal in de winter veel groter te zijn. Dit is een gevolg van inhomogeniteit van het waarnemingsmateriaal.

Men zou, om een grotere homogeniteit te bereiken, alleen de hoogwaterstanden gedurende de "wintermaanden" november t/m januari (dit zijn de maanden waarin de meeste hoge H.W.-standen voorkomen) kunnen beschouwen. Ook deze waargenomen hoogwaterstanden zijn echter nog verre van homogeen, doordat zij veroorzaakt worden door depressies van verschillende typen. Beter is het dus, die hoogwaterstanden te selecteren, die het gevolg zijn van potentieel gevaarlijke depressies. Gedurende een stormvloed kunnen bovendien verschillende hoogwaterstanden voorkomen. Deze bezitten uiteraard een grote afhankelijkheid. We kiezen daarom per depressie slechts de hoogste hoogwaterstand.

Door dus meteorologische hulpmiddelen te gebruiken, kan een grotere homogeniteit bereikt worden, waardoor de betrouwbaarheid van de extrapolatie vergroot wordt.

Pogingen om het materiaal zo mogelijk nog beter homogeen te maken, werden langs twee andere wegen verricht, nl. door te onderzoeken of er een verband tussen de H.W.'s en de zonnevlekken-intensiteit te vinden was en of aan te tonen viel, dat de jaren verdeeld konden worden in "gevaarlijke" en "minder gevaarlijke" jaren. Beide onderzoekingen hadden een negatief resultaat: er waren in het ter beschikking staande materiaal geen aanwijzingen voor een merkbare invloed van de zonnevlekken-intensiteit op de H.W.'s en een splitsing, zoals die van de maanden en die van de depressies, in gevaar-

lijke en minder gevaarlijke, kan bij de jaren niet worden verkregen. Een meteorologische basis ontbrak trouwens bij deze beide onderzoeken.

Er is derhalve uiteindelijk gewerkt met de H.W.'s, opgetreden in de wintermaanden november, december en januari bij naar banen geselecteerde depressies. In figuur 2.3 zijn deze op dezelfde wijze uitgezet als in figuur 2.1 voor alle waterstanden gebeurd is. Een duidelijk inzicht in de verschillen die ontstaan wanneer men de exponentiële verdeling aan alle, dan wel aan de nu gekozen waarnemingen aanpast, verkrijgt men door de figuren 2.4 en 2.5 te vergelijken.

Of de aanpassing, die men bij het geselecteerde materiaal verkrijgt, goed is en of het materiaal werkelijk voldoende homogeen is, zal in de volgende paragraaf onderzocht worden.

2.4. Toetsing van de aanpassing en van de homogeniteit

Een gangbare toets voor het beoordelen van de aanpassing van een theoretische verdeling aan een steekproefverdeling is de χ^2 -toets (vgl. hoofdstuk VI, blz. 30 e.v.). Bij toepassing op een voldoende groot aantal waarnemingen geeft deze betrouwbare resultaten. In tabel 2.1 zijn de Nepereringshoogten, die behoren bij aangepaste krommen, welke bij toepassing van deze toets met een onbetrouwbaarheid van 5% verworpen moeten worden, d.w.z. waarbij de aanpassing slecht is, door onderstreping aangegeven. Dubbel onderstreept zijn die gevallen, waarbij de aanpassing zéér slecht is. Uit de gevonden waarden blijkt, dat de aanpassing zéér slecht is voor lage beginpeilen, hetgeen te verwachten was, daar in deze gevallen de lage hoogwaterstanden in de figuren ten duidelijkste niet op een rechte lijn liggen. Daarentegen kunnen de gevonden waarnemingen (althans volgens de nu toegepaste toets) vanaf voldoende hóge peilen zeer wel uit exponentiële verdelingen afkomstig zijn.

Echter is bekend, dat de waarnemingen in figuur 2.1 uitgezet, géén homogeen materiaal vormen en bovendien sterk afhankelijk zijn. (Hoogwaterstanden die direct na elkaar bereikt worden, hebben een gemeenschappelijke oorzaak.) Dit is in veel mindere mate het geval met de waarnemingen, die in figuur 2.5 gebruikt zijn.

Tabel 2.I
De bij de χ^2 -aanpassingstoets aangepaste exponentiële verdelingen

	H_1 (in m)	\hat{n} (H_1)	\hat{a}
fig. 2.1	1,10	126	<u>1,212</u>
2.4	1,30	47,2	<u>0,231</u>
	1,50	19,7	0,236
	1,70	8,41	0,243
	1,90	3,62	0,255
	2,10	1,65	0,255
fig. 2.3	1,30	4,97	<u>0,500</u>
2.5	1,40	4,65	<u>0,430</u>
	1,50	4,08	0,383
	1,60	3,37	0,354
	1,70	2,64	0,337
	1,80	2,05	0,321
	1,90	1,49	0,325
	2,00	1,13	0,315
	2,10	0,841	0,304
	2,20	0,524	0,364
	2,30	0,381	0,387
	2,40	0,286	0,394
	2,50	0,270	0,315
	2,60	0,206	0,304

Een methode om de homogeniteit van het waarnemingsmateriaal te onderzoeken is de methode van GUMBEL. Deze methode berust er op, dat de verdelingsfunctie van de grootste van N onderling onafhankelijke waarnemingen van een stochastische variabele onder bepaalde voorwaarden goed met een dubbelexponentiële verdelingsfunctie benaderd kan worden.

Geven wij het maximum van de waargenomen hoogwaterstanden gedurende één jaar aan met \underline{h} , dan is de verdelingsfunctie van \underline{h} dus

$$H(h) = e^{-e^{-\beta(h-\gamma)}} \quad (2.10)$$

Op een bepaald soort waarschijnlijkheidspapier (vgl. hoofdstuk VI, paragraaf 4), het zogenaamde Gumbelpapier, wordt deze verdelingsfunctie getransformeerd tot een rechte lijn. We kunnen dus onderzoeken of de jaarmaxima van de waargenomen hoogwaterstanden beschouwd kunnen worden als onderling onafhankelijke trekkingen uit dezelfde verdeling, door na te gaan of de waarnemingen op Gumbel-

papier (cumulatief) uitgezet inderdaad op een rechte lijn liggen. Bovendien kan men aantonen dat de helling van deze lijn moet overeenstemmen met de helling van de gevonden lijn van alle waarnemingen op halflogaritmisch papier.

In de figuren 2.6 en 2.7 zijn de jaarmaxima uitgezet op Gumbelpapier, uitgaande van respectievelijk alle waarnemingen en alleen baanselectiewaarnemingen. De getrokken lijnen geven de verdelingsfuncties aan van alle waarnemingen, respectievelijk alle geselecteerde waarnemingen. Duidelijk blijkt dat de helling van de lijn in fig. 2.6 slecht en in fig. 2.7 heel goed bij de op het Gumbelpapier uitgezette waarnemingen past.

Met de χ^2 -toets hebben we al gezien dat de frequentieverdeling der waarnemingen $\geq 1,50$ m goed voorgesteld kan worden door een exponentiële verdeling. We kunnen dus zeggen dat de waargenomen frequenties over het algemeen niet te veel afwijken van wat op grond van de exponentiële verdeling te verwachten is. Het zou echter kunnen zijn, dat voor grote h bijvoorbeeld uitsluitend afwijkingen naar boven optreden en voor kleine h afwijkingen naar beneden.

De extrapolatie zou dan van twijfelachtige waarde worden. Daarom moeten we onderzoeken of de aanname van een exponentiële verdeling aanleiding geeft tot onwaarschijnlijke afwijkingen van de hoge waarnemingen ten opzichte van de lagere.

Als h_1, \dots, h_n (geordende) onderling onafhankelijke waarnemingen zijn uit de exponentiële verdeling

$$F_{H_1}(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{h-H_1}{a}} & h \geq H_1 \\ 0 & h < H_1 \end{cases} \quad (2.11)$$

met $H_1 = h_{n+1} \leq h_n \leq h_{n-1} \leq \dots \leq h_1$, dan vormen x_1, \dots, x_n , waarbij $x_1 = (h_1 - h_{1+1})^{\frac{1}{a}}$, eveneens een steekproef van onderling onafhankelijke waarnemingen uit $F_{H_1}(h)$.

Men kan nu, bij gegeven k , toetsen of het quotiënt

$$B = \frac{x_1 + \dots + x_k}{x_1 + \dots + x_{k+1} + \dots + x_n} = \frac{h_1 + \dots + h_k - kh_{k+1}}{h_1 + \dots + h_n - nH_1} \quad (2.12)$$

ongewoon groot of klein is, d.w.z. of de som van de verschillen van

de k hoogste waarnemingen te sterk afwijkt van wat op grond van alle n waarnemingen een redelijke waarde genoemd kan worden. Men kan bewijzen dat de stochastische grootheid

$$\underline{B} = \frac{x_1 + \dots + x_k}{x_1 + \dots + x_n} \quad (2.13)$$

een Bêta-verdeling heeft met parameters $\alpha = k$ en $\beta = n - k$ (vgl. hoofdstuk III (1.28)).

Dus

$$\begin{aligned} P[\underline{B} \leq B] &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^B x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k-1)!} \int_0^B x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Toepassingen op de waarnemingen $\geq 1,70$ m brengt geen bijzondere kenmerken van de hoogste standen aan het licht, zoals uit tabel 2.II blijkt:

Tabel 2.II
Toetsresultaten

n = 166	k	B	$P[\underline{B} \leq B]$
	4	0,0231	0,53
	8	0,0542	0,68
	16	0,0942	0,49
	32	0,2117	0,75

2.5. Enige andere uitgevoerde bewerkingen

Enige andere uitgevoerde bewerkingen willen we hier nog in het kort noemen.

- 1) Er is getracht de verdelingsfunctie van de H.W.'s te benaderen met een log. normale verdeling. Deze bleek inderdaad goed bij de waarnemingen aangepast te kunnen worden; echter is de verkregen verdeling nauwelijks te onderscheiden van de hier gebruikte exponentiële verdeling, ook niet bij extrapolatie tot bijv. 6m hoogte. De exponentiële verdeling geeft dus resultaten, die in

het door de waarnemingen bestreken interval ook bij benadering in overeenstemming zijn met de veronderstelling van een logaritmisch normale verdeling. De eerstgenoemde verdeling is echter wiskundig veel beter hanteerbaar en wezenlijk bevredigender, daar zij tot minder willekeur bij de aanpassing en de extrapolatie aanleiding geeft, omdat zij van slechts één aan de waarnemingen aan te passen parameter afhangt. Daarom werd aan de exponentiële verdeling de voorkeur gegeven.

2) Betrouwbaarheidsintervallen

Uit tabel 2.I blijkt dat wij voor de helling van de lijn verschillende waarden vinden, wanneer wij uitgaan van verschillende beginpunten. Een beter inzicht in de betrouwbaarheid van de schatting van a verkrijgt men door het berekenen van betrouwbaarheidsgrenzen voor a . Wij gaan uit van de baanselectiewaarnemingen en onderstellen dat dit onderling onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling zijn (vgl. fig. 2.3).

Boven de 1,70 m zijn er 166 waarnemingen. De meest aannemelijke schatting van a is dan volgens tabel 2.I: $\hat{a}=0,337$.

Een kleine afwijking van de geschatte waarde van $n(H_1)$ ten opzichte van de werkelijke waarde is niet ernstig, daar deze neerkomt op een geringe verschuiving van de baanselectielijn evenwijdig aan zichzelf en dit is voor de extrapolatie van weinig betekenis. Wat de helling van de lijn betreft, zijn wij hoofdzakelijk geïnteresseerd in bovengrenzen van a . Met behulp van de in hoofdstuk V summier aangegeven theorie van de betrouwbaarheidsintervallen is het mogelijk betrouwbaarheidsbovengrenzen voor a te vinden. Bij onbetrouwbaarheden van 5% resp. 1% zijn deze grenzen 0,385 resp. 0,407.

Het beginpunt is bij 1,70 m gekozen om nog zoveel mogelijk waarnemingen bij de berekening van de betrouwbaarheidsintervallen te kunnen betrekken. Het verschil tussen de bovengrens en de meest aannemelijke schatting wordt namelijk kleiner, naarmate het aantal waarnemingen toeneemt. De 166 waarnemingen, waarover wij boven de 1,70 m beschikken geven toch nog aanleiding tot vrij grote verschillen.

Conclusie

De baanselectiewaarnemingen $\cong 1,70$ m kunnen beschouwd worden als onderling onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling met $a=0,337$. De overschrijdingskans van de op 1 februari 1953 opgetreden hoogte is 0,0045 en die van het 5,00 m peil is 0,00015. Een overschrijdingskans van 0,0001 treedt op bij 5,10 m.

3. De optimale hoogte van onze dijken

3.1. De overwegingen van de Delta-Commissie

Eeuwenlang is het in Nederland gebruik geweest de dijken te verhogen tot het peil van de hoogst bekende stormvloedstand. Sinds de in 1939 door P.J. WEMELSFELDER geïntroduceerde statistische beschouwingwijze van de hoge waterstanden, is men zich gaan realiseren dat ook met hogere dan reeds voorgekomen standen rekening moet worden gehouden.

Op 1 februari 1953 was de stand te Hoek van Holland 3,85 m met een overschrijdingskans van 0,0045 per jaar. Het optreden van nog hogere standen is echter fysisch gezien zeer zeker mogelijk omdat a) het astronomisch getij (voorspelde stand volgens de getijtafel) bijna een halve meter hoger had kunnen zijn en b) bij maximale intensiteit van de storm op een andere plaats de vloed nog enige dm hoger zou zijn. Vloedstanden van 5m N.A.P. kunnen dus zeker optreden, terwijl zelfs nog hogere standen niet geheel uitgesloten zijn.

Op grond van deze overwegingen en rekening houdende met de bijbehorende frequenties is de Delta-Commissie tot de conclusie gekomen dat de kans op overstroming tot een aanvaardbare waarde wordt teruggebracht, wanneer men deze op 10^{-4} per jaar, of wel 1% per eeuw brengt. Dit betekent dat de dijken in Hoek van Holland op een zodanig niveau gebracht moeten worden dat stormvloedstanden van 5m (volgens paragraaf 2: 5,10 m) geen doorbraak veroorzaken. Ook op economische gronden was een "basispeil" van 5m te Hoek van Holland acceptabel. Uitzonderlijk veilig is dit nog niet, aangezien het betekent dat de kans op een ramp gedurende de eerstkomende 50 jaar, dus tijdens het leven van de thans jonge mensen, altijd nog $\frac{1}{2}\%$ is. In andere gevallen houdt men rekening met kansen op risico's die nog veel kleiner zijn.

Het basispeil is dus vastgesteld op een mengsel van fysische en economische overwegingen. Ondanks de aanzienlijke verbetering ten opzichte van vroegere overwegingen, heeft ook deze methode nog iets onbevredigends en men zou gaarne tot een beter gefundeerde conclusie willen komen. De vraag is of deze wellicht door het afwegen van economische voor- en nadelen verkregen kan worden. Immers noch zeer hoge, noch zeer lage dijken zijn economisch verantwoord, zodat er ergens een optimum moet zijn. Een tweede is uiteraard of dit optimum ook te achterhalen is.

Tegen deze achtergrond heeft het Mathematisch Centrum de opdracht geaccepteerd: een statistisch en economisch verantwoorde basis te verstrekken voor de bepaling van de verhoging welke de dijken langs de Westerschelde en de Rotterdamse Waterweg moeten ondergaan.

3.2. Het eenvoudige geval

Wij beschouwen voorlopig alleen een sterk vereenvoudigd geval en nemen daarbij aan dat het gaat om één afzonderlijke polder, waarbij een stormvloedstand boven het kritieke peil H_0 (welk peil niet gelijk hoeft te zijn aan de kruinhoogte) een overstroming veroorzaakt, die alle laag gelegen goederen in de polder verloren doet gaan en waarbij stormvloedstanden onder het kritieke peil geen enkele schade veroorzaakt.

De vraag is nu of het huidige kritieke peil, economisch gezien bevredigend is en zo neen, met hoeveel het dient te worden verhoogd.

Stel dat wij het kritieke peil met x meter verhogen. In veel gevallen blijken de dijkverhogingskosten I in goede benadering lineaire functies van x te zijn, zodat wij krijgen

$$I = I_0 + I_1 x, \quad (3.1)$$

waarin I_0 de initiële kosten zijn en I_1 de kosten per meter dijkverhoging.

Deze dijkverhogingskosten moeten afgewogen worden tegen de verminderde kansen op rampschaden. Dit is slechts mogelijk, wanneer er één bepaalde maatstaf ter beschikking staat, of anders gezegd wanneer wij weten voor elk bedrag de overblijvende kansen op rampschaden in rekening gebracht moeten worden. Wij verrichten hiertoe het volgende gedachtenexperiment.

Stel dat een verzekeringsmaatschappij in staat en bereid zou zijn om de overblijvende mogelijke rampschaden te verzekeren. De maatschappij zal ieder jaar een premie vragen, die gelijk is aan de rampschadeverwachting per jaar; deze is na de verhoging met X m

$$p(H_0+X) \cdot W, \quad (3.2)$$

waarin $p(H_0+X)$ de kans is op overschrijding van het peil H_0+X per jaar en W de totale door de dijk te beschermen waarde vertegenwoordigt (inclusief kosten van dijkherstel, indirecte schade ten gevolge van produktiederving elders, waardevermindering van de grond, enz.). Teneinde deze te betalen premies te kunnen vergelijken met I , bepalen wij de contante waarde van al deze premies. De contante waarde van een voor t jaar te betalen premie bedraagt

$$\frac{p(H_0+X) \cdot W}{\left(1 + \frac{\delta}{100}\right)^t},$$

waarin δ de rentevoet per jaar is of met een continue rentevoet

$$p(H_0+X) \cdot W \cdot e^{-\frac{\delta t}{100}}. \quad (3.3)$$

Kort men de huidige overschrijdingskans af tot p_0 en schrijft men (vgl. (2.1))

$$\alpha = \frac{1}{a}, \quad (3.4)$$

dan gaat (3.3) over in

$$p(H_0+X) \cdot W \cdot e^{-\frac{\delta t}{100}} = e^{-\alpha(H_0-H_1+X)} \cdot W \cdot e^{-\frac{\delta t}{100}} = p_0 \cdot W \cdot e^{-\alpha X} \cdot e^{-\frac{\delta t}{100}}. \quad (3.5)$$

De totale verdisconteerde waarde van alle te bepalen premies is dan

$$R = \int_0^{\infty} p_0 W e^{-\alpha X} e^{-\frac{\delta t}{100}} dt = p_0 W e^{-\alpha X} \cdot \frac{100}{\delta} = \frac{P_0 W e^{-\alpha X}}{\delta} \quad (3.6)$$

met $100 p_0 = P_0$.

Dus bij een verhoging van de dijken met X meter worden de totale kosten om de polder te verdedigen tegen de zee:

$$R = I+R = I_0 + I_1 X + \frac{P_0 W e^{-\alpha X}}{\delta}. \quad (3.7)$$

Achten wij die dijkverhoging optimaal, waarbij K minimaal is, dan wordt het optimum gevonden door

$$\frac{dK}{dX} = I_1 - \frac{P_0 W \alpha e^{-\alpha X}}{\delta} \quad (3.8)$$

gelijk aan nul te stellen. Dus als \hat{X} de optimale verhoging is

$$I_1 - \frac{P_0 W \alpha e^{-\alpha \hat{X}}}{\delta} = 0 \quad (3.9)$$

of

$$\hat{X} = \frac{1}{\alpha} \log \frac{P_0 W \alpha}{\delta I_1} \quad (3.10)$$

Figuur 3.1 geeft de belangrijkste functies nog eens grafisch weer.

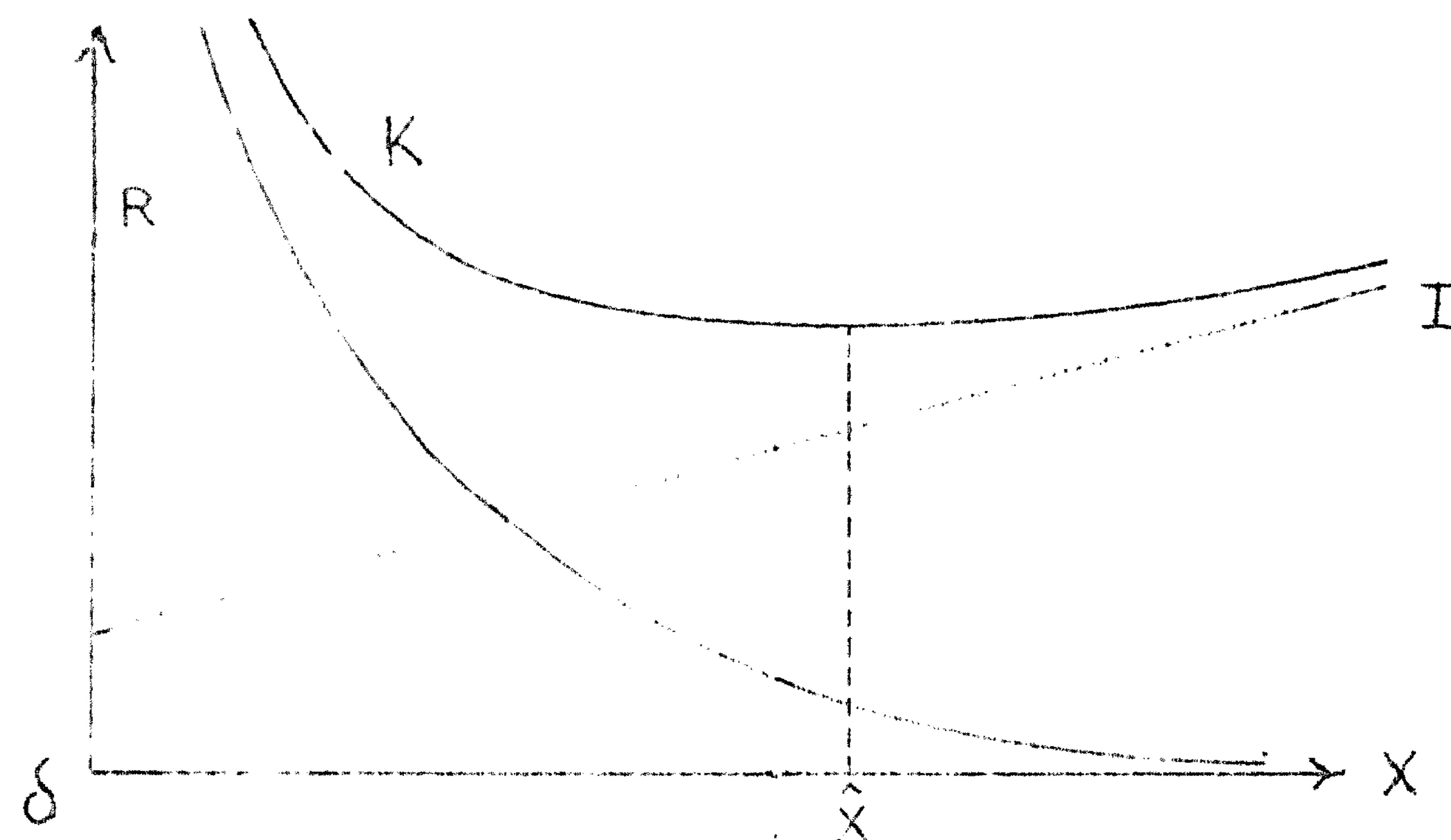


fig. 3.1

Grafische bepaling van de optimale dijkverhoging

Ook andere optimale grootheden zijn nu eenvoudig te berekenen. We vinden:

$$\hat{I} = I_0 + I_1 \hat{X} \quad (3.11)$$

$$\hat{R} = \frac{I_1}{\alpha} \quad (3.12)$$

$$\hat{K} = I_0 + I_1 \hat{X} + \frac{I_1}{\alpha} \quad (3.13)$$

Dijkverhoging zal slechts plaatsvinden als de kosten bij optimale verhoging kleiner zijn dan de kosten bij geen verhoging, dus als

$$I_0 + I_1 \hat{X} + \frac{I_1}{\alpha} < K_0 = R_0 , \quad (3.14)$$

dus als

$$\hat{I} + \frac{I_1}{\alpha} < \frac{I_1}{\alpha} e^{\alpha \hat{X}}$$

of

$$\hat{I} < \frac{I_1}{\alpha} (e^{\alpha \hat{X}} - 1) . \quad (3.15)$$

Hoewel de formules (3.10) en (3.15) alleen geldig zijn voor het hier behandelde, niet geheel reële, vereenvoudigde geval, bevatten ze toch al de essentie van het probleem.

3.3. Kritiek op het eenvoudige model

Op de onderstellingen van het in 3.2 opgestelde model kan op velerlei wijzen kritiek geleverd worden; een aantal punten worden hieronder genoemd.

- 1) Teneinde het optimum te kunnen berekenen zijn twee niet geheel gelijkwaardige grootheden opgeteld, namelijk enerzijds de werkelijk uit te geven kosten van dijkverhoging en anderzijds de constante waarden van toekomstige schadeverwachtingen. In de praktijk van de verzekeringsmaatschappijen is een dergelijke procedure gebruikelijk en kan de methode verdedigd worden met de in hoofdstuk XVIII, paragraaf 1, opgesomde argumenten. Als de regering deze handelwijze toepaste op alle beslissingen van vergelijkbare omvang, dan was ook hier de methode zonder meer te rechtvaardigen. De fictieve verzekeringsmaatschappij is echter alleen ingevoerd als "model" teneinde de redenering aanschouwelijk te maken. Het model kan aanzienlijk gewijzigd worden zonder dat de resultaten erdoor veranderen.
- 2) De onderstelling dat een bepaald kritiek peil H_0 bestaat zodanig dat bij vloedhoogte $h > H_0$ alles verloren gaat en bij een vloedhoogte $h < H_0$ niets, is wellicht voor één polder nog wel acceptabel, voor een groot polderstelsel uiteraard niet. In het laatste geval moet men een functie invoeren die aangeeft welke fractie van W verloren gaat bij bepaalde waarden van h .
- 3) De schadeverwachting is voor ieder jaar gelijkgesteld aan $p(H_0+X).W$; dit impliceert de onderstelling dat na een ramp bin-

nen een jaar alles weer in de oude staat is teruggebracht. Dit zal wel niet steeds het geval kunnen zijn, maar gezien de zeer kleine kans op het optreden van twee rampen veroorzakende stormen in op-eenvolgende jaren en gezien mede de toegepaste verdiscontering, kan de invloed hiervan zonder meer verwaarloosd worden.

- 4) De onderstelling dat de functie $p(h)$ constant is in de tijd is niet houdbaar vanwege de relatieve bodemdaling van ons land ten opzichte van de zee. Deze relatieve bodemdaling ontstaat tengevolge van zeespiegelrijzing, bodemdaling en inklinking van de jongere geologische lagen. Stel dat deze relatieve bodemdaling gemiddeld η^m /eeuw bedraagt.

Na τ eeuwen is de dijkhoogte H_0+X geworden $H_0+X-\eta\tau$ met een overschrijdingskans

$$p(H_0+X-\eta\tau) = p_0 e^{-\alpha(X-\eta\tau)} = p_0 e^{-\alpha X + \alpha\eta\tau} \quad (3.16)$$

Deze formule kan niet "eeuwig" goed zijn, daar de p dan willekeurig zou toenemen. Om het volledig wegzinken van de dijken in zee te voorkomen, zal echter periodieke regeneratie nodig zijn. De invloed hiervan op ons probleem wordt in 3.4 besproken.

- 5) Ook de onderstelling dat de te beschermen waarde W in de loop van de tijd constant blijft is niet houdbaar, aangezien er door de eeuwen een, zij het zeer onregelmatige, toeneming van de welvaart heeft plaatsgevonden. Wij zullen aannemen dat W gemiddeld met $\gamma\%$ per jaar toeneemt. Zowel γ als δ zijn heel moeilijk te schatten; gelukkig blijkt in 3.4 echter dat in de formules alleen de grootte $\delta' = \delta - \gamma$ van belang is en deze "gereduceerde rentevoet" vertoont in de loop der eeuwen minder fluctuaties.

3.4. Het gecorrigeerde model

Wanneer de dijken steeds na T eeuwen op de na de verhoging verkregen hoogte worden teruggebracht, dus met ηT meter worden verhoogd, dan is de contante waarde van alle kosten van dijkverhoging en regeneratie gelijk aan

$$I = I_0' + I_1 X + I_1 \eta T e^{-\delta' T} + I_1 \eta T e^{-2\delta' T} + \dots = I_0' + I_1 X + \frac{I_1 \eta T}{e^{\delta' T} - 1} \quad (3.17)$$

I_0' bestaat hierin uit I_0 en de contante waarde van alle toekomstige initiële kosten. Er is verdisconteerd met de gereduceerde rentevoet

omdat bij toenemende welvaart ook de kosten van dijkbouw vermoedelijk hoger zullen worden; verdiscontering met δ leidt overigens tot resultaten, die vrijwel niet afwijken van die bij verdiscontering met δ' .

Over t jaren of 100τ eeuwen is W toegenomen tot $W e^{\gamma \tau}$. Met behulp van (3.16) vinden wij voor de contante waarde van de totale schadeverwachting gedurende de eerste T eeuwen

$$\begin{aligned} & 100 \int_0^T p_0 W e^{\gamma \tau} e^{-\delta \tau} e^{-\alpha X + \alpha \eta \tau} d\tau = \\ & = P_0 W e^{-\alpha X} \int_0^T e^{-\delta' \tau + \alpha \eta \tau} d\tau = \\ & = P_0 W e^{-\alpha X} \frac{1 - e^{-(\delta' - \beta)T}}{\delta' - \beta}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

waarin $\beta = \alpha \eta$ is gesteld.

Sommeren over alle perioden leidt tot

$$\begin{aligned} R &= P_0 W e^{-\alpha X} \cdot \frac{1 - e^{-(\delta' - \beta)T}}{\delta' - \beta} (1 + e^{-\delta' T} + e^{-2\delta' T} + \dots) = \\ &= P_0 W e^{-\alpha X} \frac{1 - e^{-(\delta' - \beta)T}}{\delta' - \beta} \cdot \frac{\delta'}{1 - e^{-\delta' T}} = \\ &= \frac{P_0 W e^{-\alpha X + \frac{1}{2} \beta T}}{\delta'} \cdot C \end{aligned} \quad (3.19)$$

met

$$C = e^{-\frac{1}{2} \beta T} \frac{1 - e^{-(\delta' - \beta)T}}{\delta' - \beta} \frac{\delta'}{1 - e^{-\delta' T}}. \quad (3.20)$$

De optimale waarde van X vinden wij nu door

$$\frac{dK}{dX} = \frac{d(R+I)}{dX} \quad (3.21)$$

gelijk aan nul te stellen. Het resultaat is

$$\hat{X} = \frac{1}{\alpha} \log \frac{P_0 W \alpha}{I_1 \delta'} + \frac{1}{2} \eta T + \frac{1}{\alpha} \log C, \quad (3.22)$$

hetgeen, wegens $\frac{1}{\alpha} \log C$ klein en negatief, bij benadering vervangen kan worden door

$$\hat{X} \approx \frac{1}{\alpha} \log \frac{P_0^W \alpha}{I_1 \delta'} + \frac{1}{2} \eta T. \quad (3.23)$$

Vergelijken wij deze formule met (3.10), dan zien wij dat δ vervangen is door δ' en dat tengevolge van het rekening houden met de bodemdaling een term $\frac{1}{2} \eta T$ is toegevoegd. Ook de andere grootheden \hat{I} , \hat{R} en \hat{K} zijn weer te berekenen.

Past men formule (3.23) toe om de optimale hoogte van de dijken langs de Rotterdamse Waterweg te bepalen en gaat men uit van de volgende gegevens¹⁾:

$\alpha = 2,97$; $p_0 = p(3,85) = 0,0045$; $W = 24,2$ miljard gulden;

$I_1 = 40$ miljoen gulden; $\delta' = 1,5\%$ per jaar:

dan vindt men voor de eerste term ruim 2 meter, zodat de optimale hoogte ongeveer zes meter zou bedragen. De term $\frac{1}{2} \eta T$ is wegens de zeer slechte bekendheid van η moeilijk te bepalen, doch kan verwaarloosd worden, wanneer men besluit de dijken periodiek te regenereren en T klein te kiezen, bijvoorbeeld 20 jaar.

3.5. Een aantal opmerkingen

1. Hoewel het in 3.4 gebruikte model reeds aanzienlijk beter bij de werkelijkheid aansluit dan het in 3.2 toegepaste, bevat het nog tal van onderstellingen, die niet steeds vervuld behoeven te zijn. De onderstellingen omtrent de lineariteit van $\log p(h)$ en I bleken voor de Rotterdamse Waterweg aanvaardbaar, doch kunnen voor andere gevallen zonder moeite door gewijzigde onderstellingen vervangen worden.
2. De bruikbaarheid van de aangegeven methode hangt onder meer van de nauwkeurigheid waarmee de vereiste constanten geschat kunnen worden af. Uit formule (3.23) volgt, dat de invloed van onnauwkeurigheden in α het grootst is, aangezien alle andere constanten

1) De hier gegeven getallen moeten hoofdzakelijk als rekenvoorbeeld gezien worden. Niettemin zijn ze zo realistisch mogelijk gekozen. Voor de fundering van deze waarden en een discussie van hun onnauwkeurigheid wordt verwezen naar paragraaf 3.5 en naar rapport S 222, waarvan een enigszins gewijzigde versie in Bijdrage II van het Rapport Delta-Commissie zal worden opgenomen.

slechts onder de logaritme voorkomen. Gelukkig is echter juist α , samen met p_0 relatief goed bekend; een absolute fout in α van $\delta\alpha = \pm 0,5$ is reeds zeer onwaarschijnlijk en leidt slechts tot een afwijking in de uitkomst van $\pm 20\%$.

De kosten van dijkbouw kunnen nauwkeurig geschat worden, terwijl de invloed van η gering is, wanneer men de periode T klein kiest. Er resten nog de twee economische constanten δ' en W . Hiervan is δ' een zogenaamde "economische invariant" waarvan de variatiemogelijkheden niet excessief zijn; een verschil van een factor twee is reeds uitgesloten te achten en heeft aangezien deze achter de logaritme zou plaatsvinden nog slechts een invloed van ongeveer $\frac{1}{4}$ meter.

De grootte, die het moeilijkst te bepalen is, is de te beschermen waarde W . Het ligt voor de hand uit te gaan van de in het betreffende gebied aanwezige kapitaalgoederenvoorraad, vermeerderd met de aanwezige duurzame consumptiegoederen. Daarnaast moet rekening worden gehouden met de kosten van dijkherstel, bemaling, e.d., de verliezen die ontstaan door produktiederving in het betreffende gebied en elders en moeilijk te waarderen factoren, zoals de waarden van mensenlevens, culturele goederen, e.d. Het in rekening brengen van een bepaald bedrag voor de bescherming van de aanwezige mensen is niet erg zinvol; zelfs het waarderen van een mensenleven op een vrijwel nooit toegepast hoog bedrag van bijvoorbeeld f 100.000.- leidt tot verhogingen van slechts enkele centimeters. Beter is het derhalve alleen te werken met zuiver economische factoren en de aldus verkregen verhogingen te beschouwen als ondergrenzen.

3. Gezien de onnauwkeurigheden die in de gevonden waarde van \bar{X} nog aanwezig zijn, kan het resultaat van de berekening niet als het definitieve antwoord gezien worden, doch alleen als richtlijn dienen. Dit neemt niet weg dat het onderzoek ruimschoots resultaten opleverde doordat men:
 - a) een systematische methode van aanpak verkreeg, waarmee voor alle gebieden de verschillende factoren steeds op dezelfde wijze afgewogen worden,
 - b) inzicht verkreeg welke factoren veel invloed hebben en welke niet,

- c) bekend werd welke relevante factoren relatief het slechtst bekend zijn,
- d) inzicht verkreeg in methoden waarop niet zuiver economische factoren in rekening gebracht kunnen worden.