

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM  
AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Rapport S 265 (C 13)

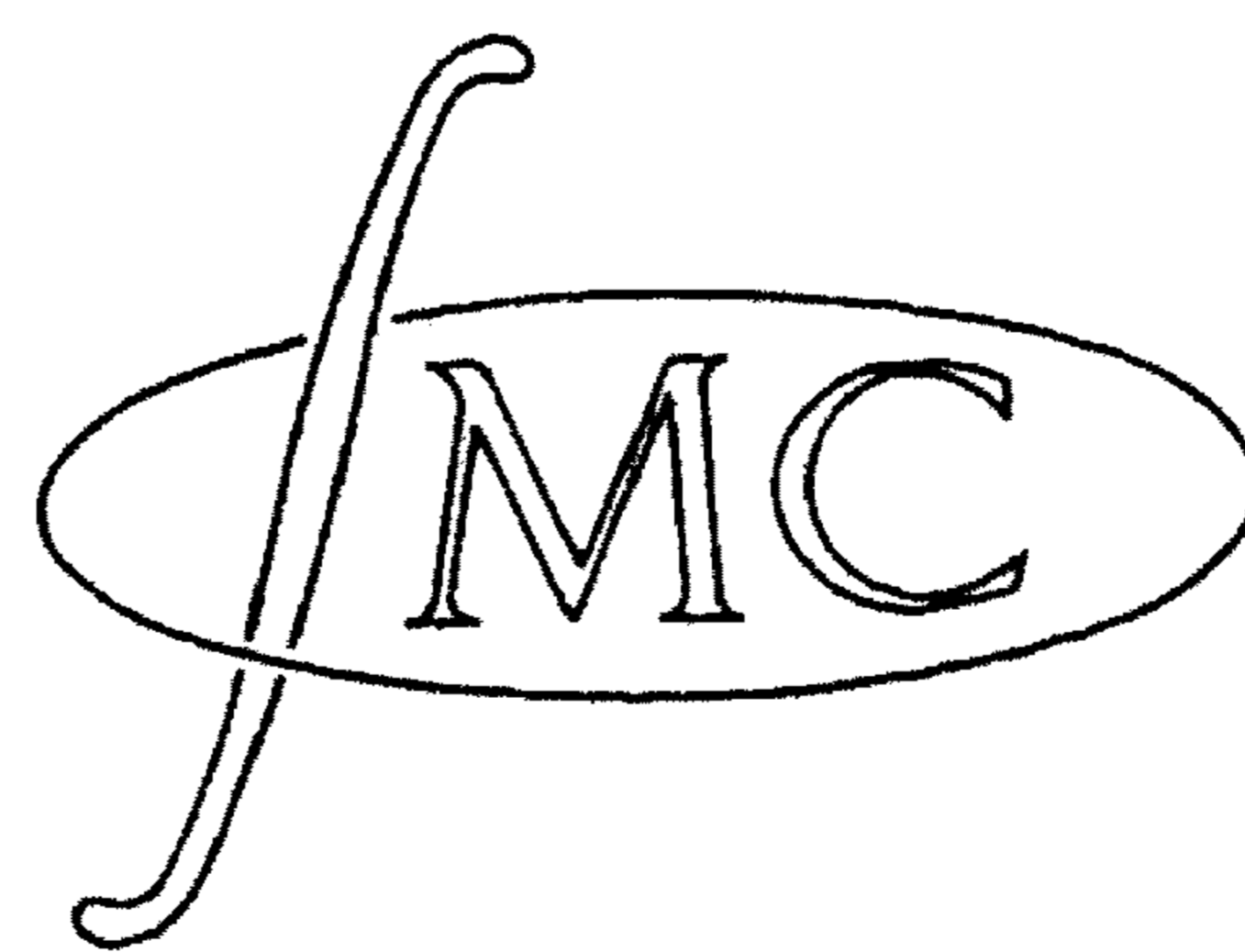
Leergang Mathematische Besliskunde

Hoofdstuk XX

Netwerkplanning

door

F. Göbel



april 1964

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.



## Netwerkplanning

### 1. Inleiding; het maken van een netwerk

De term Netwerkplanning wordt hier gebruikt als samenvattende benaming voor technieken als C.P.M., Pert, Less, etc.<sup>1)</sup>. Dit zijn, kort gezegd, technieken die de leiding, bijv. van een bedrijf, informatie verstrekken waarmee t.a.v. bepaalde projecten beslissingen kunnen worden genomen. Om deze vage omschrijving nader te preciseren zullen we nagaan waaraan een project moet voldoen opdat een of andere vorm van netwerkplanning kan worden toegepast; later zal de hierboven genoemde informatie ter sprake komen.

Het project moet kunnen worden verdeeld in een aantal onderdelen of deelbewerkingen<sup>2)</sup> waartussen zekere ordeningsrelaties zijn gedefinieerd. Dat wil o.a. zeggen dat voor iedere activiteit A is vastgesteld (a) welke activiteiten eraan vooraf dienen te gaan, en (b) aan welke activiteiten pas kan worden begonnen als A is voltooid. Projecten waarbij activiteiten voorkomen die weliswaar niet tegelijkertijd kunnen plaatsvinden, maar overigens wel in een willekeurige volgorde kunnen worden uitgevoerd, voldoen niet aan deze eis, en komen niet in aanmerking voor een netwerkplanningsmethode.

---

1) C.P.M.= Critical Path Method

Pert = Program Evaluation Research Task; later is aan deze letters de betekenis Program Evaluation and Review Technique gegeven.

Less = Least Cost Estimating and Scheduling

2) Deze onderdelen of deelbewerkingen worden gewoonlijk aangeduid met "karweien" of "activiteiten". Wij zullen de laatste term gebruiken.



Wanneer aan bovengenoemde eis is voldaan, is het meestal mogelijk de ordeningsrelaties grafisch voor te stellen d.m.v. een netwerk. Een activiteit wordt hierbij voorgesteld door een pijl, zodanig dat begin- en eindpunt van de pijl corresponderen met begin resp. voltooiing van de activiteit. Hierbij kunnen zich bepaalde moeilijkheden voordoen, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt. Stel een project bestaat uit vier activiteiten A, B, C en D, en stel dat A en B vooraf moeten gaan aan C, en bovendien B aan D. Wanneer men nu deze ordeningsrelaties grafisch zou voorstellen zoals in fig. 1.1 is, gedaan, dan leest men hieruit af dat A vooraf moet gaan aan D, wat niet de bedoeling is.

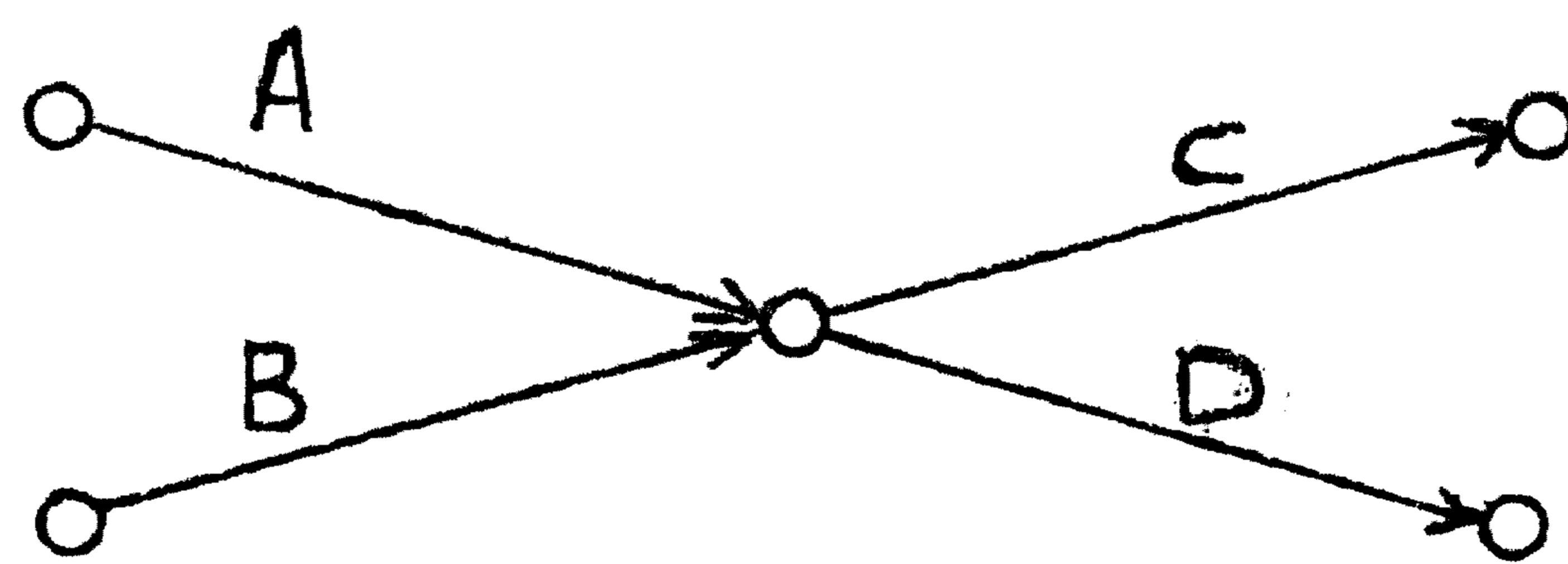


Fig. 1.1

A en B gaan vooraf aan C en D

Deze moeilijkheid kan worden omzeild door het invoeren van een dummy-activiteit E, zoals in fig. 1.2 is gebeurd.

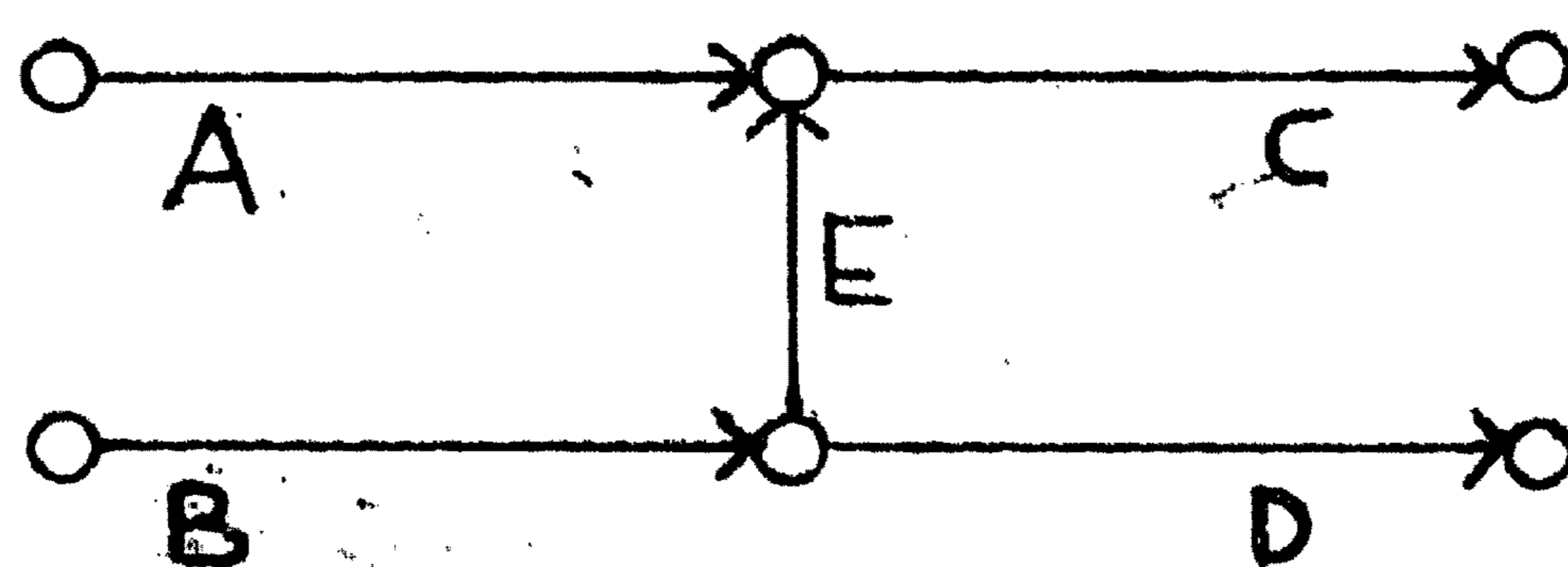


Fig. 1.2

A gaat niet noodzakelijk vooraf aan D



Het is verder gebruikelijk om het netwerk zo te tekenen dat er slechts één beginknooppunt (oorsprong), en slechts één eindknooppunt (voltooiing) is, en dat bovendien iedere activiteit eenduidig is bepaald door zijn begin en eind. Deze eisen vormen geen essentiële restricties voor het project: door eventueel weer dummy activiteiten in te voeren kan er gemakkelijk aan worden voldaan. Als bijv. ergens in een netwerk de in fig. 1.3 getekende situatie optreedt, kan met behulp van de dummy H worden bereikt dat tussen ieder tweetal knooppunten niet meer dan één pijl loopt (zie fig. 1.4).

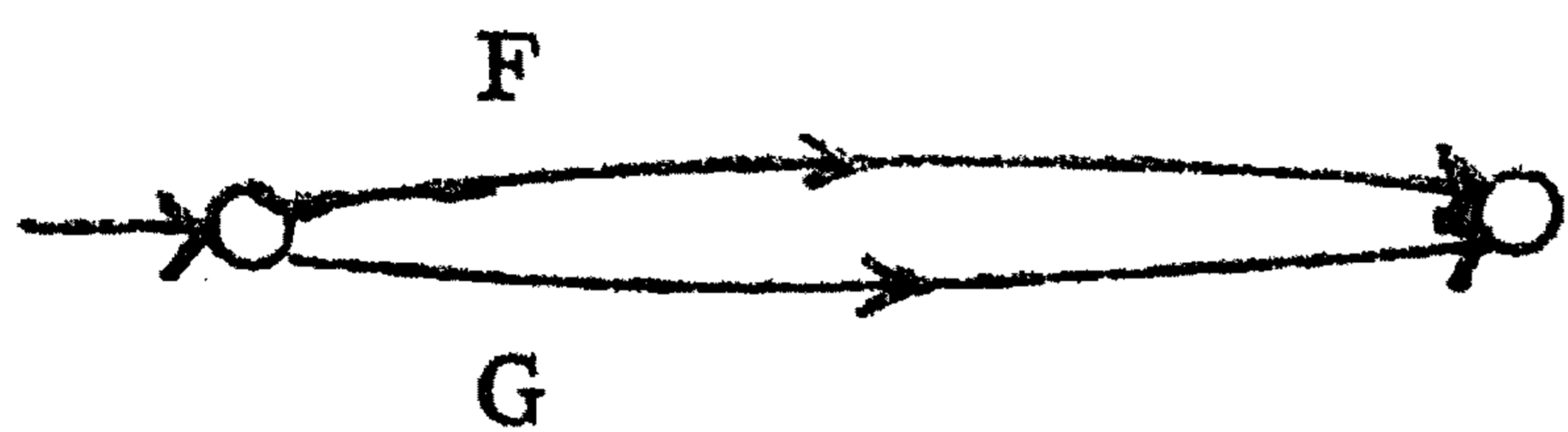


Fig. 1.3

F en G hebben hetzelfde beginpunt, en hetzelfde eindpunt

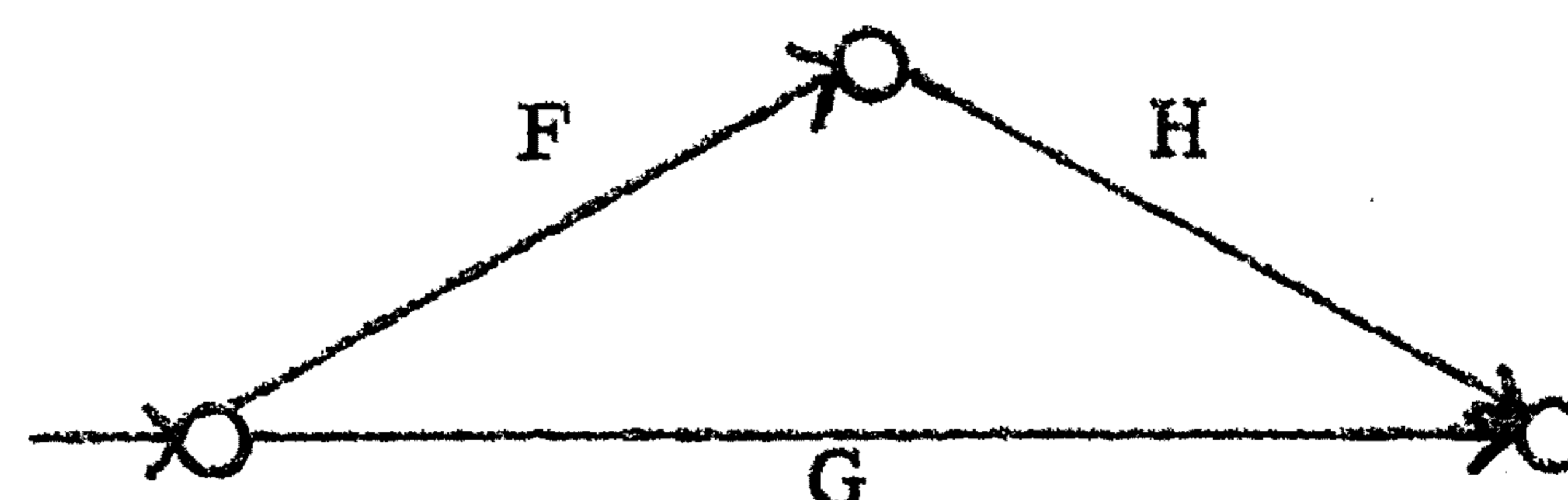


Fig. 1.4

Iedere activiteit is door zijn begin- en eindpunt bepaald

Bij veel praktijk-projecten zal het voorkomen dat bewerkingen elkaar kunnen overlappen, in die zin dat aan B pas kan worden begonnen als aan A begonnen is, terwijl de voltooiing van A niet noodzakelijk vooraf hoeft te gaan aan het beginnen van B. Hoewel dergelijke projecten niet aan de gestelde eis voldoen kan de volgende kunstgreep soms uitkomst brengen: A wordt verdeeld in deelactiviteiten  $A_1$  en  $A_2$ , en het netwerk ziet er ter plaatse uit als in fig. 1.5.

Vaak gaat een dergelijke situatie gepaard met de eis dat A niet mag worden "ingehaald" door B. In het netwerk kan deze eis worden benaderd zoals in fig. 1.6 is gedaan.



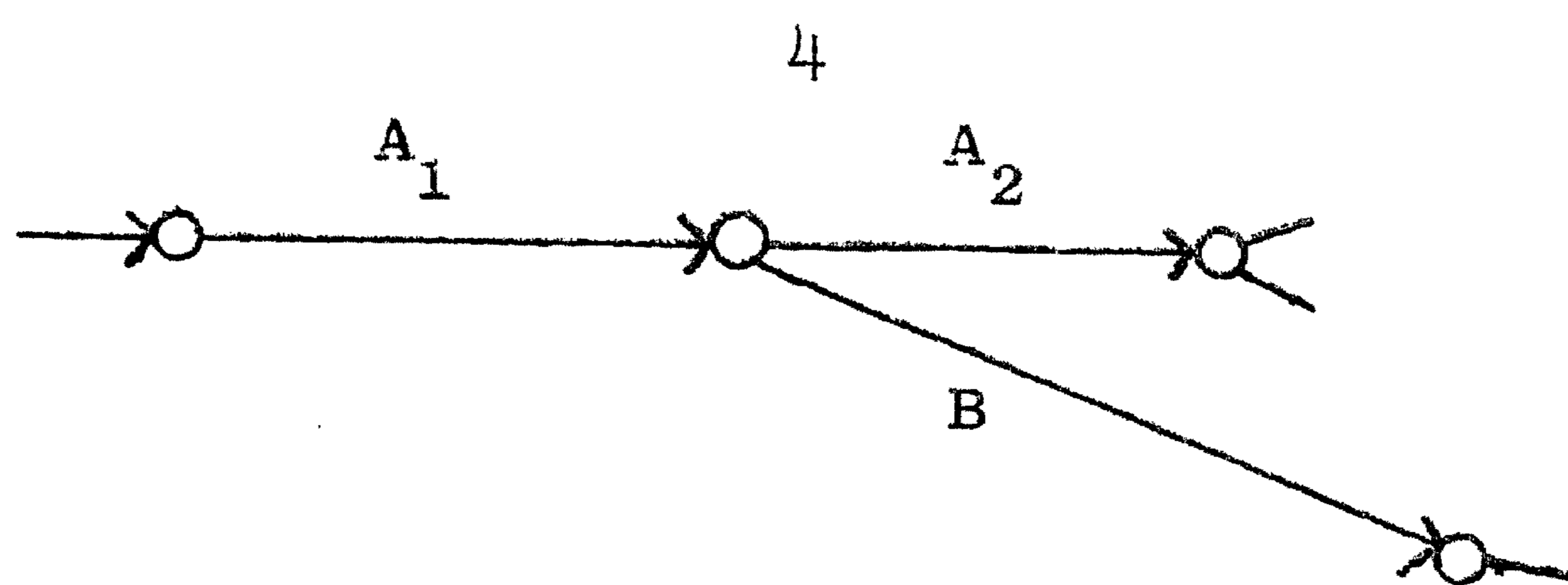


Fig. 1.5

Grafische voorstelling van  
overlappende activiteiten

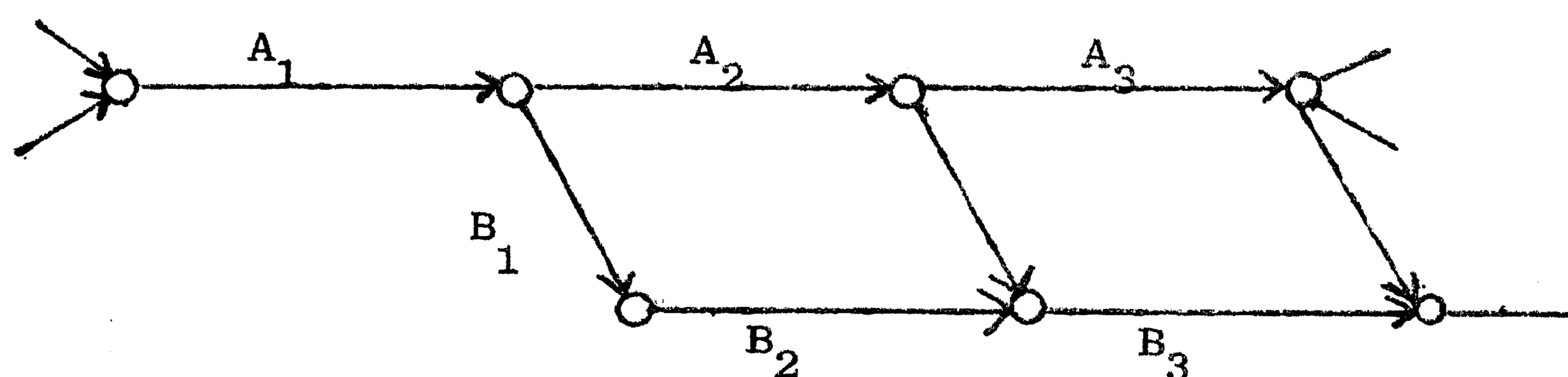


Fig. 1.6

B mag A niet inhalen

Het is echter niet prettig wanneer een netwerk door herhaalde toepassing van deze kunstgreep moet worden gecompliceerd. Projecten waarbij deze situatie vaak optreedt, kunnen dan ook beter niet d.m.v. een netwerk worden gepland.

We merken tenslotte op dat in het netwerk nooit een cykel ("loop") kan optreden; immers, als bijv. voor twee activiteiten A en B geldt dat A vooraf moet gaan aan B, en B aan A, zou men nooit aan dit gedeelte van het netwerk kunnen beginnen.

We hebben tot nu toe niets gezegd over de tijdsdueren van de activiteiten, noch over de tijdstippen waarop de knooppunten plaatsvinden. Inderdaad, men behoudt bij C.P.M., Pert, e.d. de planning, waarbij de ordeningsrelaties tussen de activiteiten worden vastgesteld, en de scheduling, waarbij aan de knooppunten tijdstippen worden toegekend, scherp gescheiden. In de volgende paragraaf zal enige aandacht worden besteed aan de scheduling.



## 2. Het kritieke pad

Wanneer het netwerk is opgesteld, kan een begin worden gemaakt met de scheduling-fase van het project. Het is hierbij nuttig de knooppunten te nummeren van  $1, \dots, n$ , en wel zodanig dat  $i < j$  indien  $i$  vooraf gaat aan  $j$ , d.w.z. indien er een geordende reeks van activiteiten bestaat van  $i$  naar  $j$ . Men ziet gemakkelijk in, dat deze wijze van nummeren altijd mogelijk is<sup>1)</sup>. Iedere activiteit is nu eenduidig bepaald door het paar  $(i, j)$ . Omgekeerd hoeft niet bij ieder paar  $(i, j)$  met  $i < j$  een activiteit te behoren, zodat de paren  $(i, j)$  die met activiteiten van het netwerk corresponderen een deelverzameling vormen van de  $\frac{1}{2}n(n-1)$  mogelijke paren  $(i, j)$  met  $1 < i < j < n$ . Een project kan dus worden opgevat als een deelverzameling  $\mathcal{D}$  van de verzameling van alle paren  $(i, j)$ .

We voegen nu aan de oorsprong het tijdstip 0 toe, en nemen verder voorlopig aan dat de duur van iedere activiteit  $(i, j)$  een gegeven getal  $y_{ij}$  is.

Het is duidelijk dat aan de activiteiten die een gegeven knooppunt  $i$  als beginpunt hebben, pas kan worden begonnen als alle activiteiten die  $i$  als eindpunt hebben zijn voltooid.

- 
- 1) Bijv. door met de volgende algorithmen een oplossing te construeren:
- a. Geef de oorsprong nummer 1.
  - b. Laat alle pijlen weg die in genummerde knooppunten ontspringen. Neem een willekeurig knooppunt waarop geen pijl uitkomt (zo'n knooppunt is er altijd, omdat er geen cykels zijn), en geef dit punt het laagste ongebruikte nummer.
  - c. Pas stap b toe totdat de voltooiing genummerd is.



Het vroegste moment  $e_i$  waarop dit kan gebeuren is

$$\begin{cases} e_i = \max \{ e_k + y_{ki} \mid (k,i) \in \mathcal{P} \} & i=2, \dots, n \\ e_1 = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Verder moet, indien een bepaald tijdstip  $T$  is gegeven waarop het project uiterlijk moet zijn voltooid, het knooppunt  $i$  uiterlijk zijn bereikt op tijdstip  $f_i$  met

$$\begin{cases} f_i = \min \{ f_k - y_{ik} \mid (i,k) \in \mathcal{P} \} & i=1, \dots, n-1 \\ f_n = T \end{cases} \quad (2.2)$$

Uit (2.1) volgt dat activiteit  $(i,j)$  niet eerder kan beginnen dan op tijdstip  $e_i$ , en niet voltooid kan zijn voor  $e_i + y_{ij}$ . Ook moet  $(i,j)$  uiterlijk zijn voltooid of  $f_j$ , en dus uiterlijk beginnen op  $f_j - y_{ij}$ .<sup>2)</sup>

Voor  $(i,j)$  is dus een tijdsinterval van de lengte  $f_j - e_i$  beschikbaar, en een speelruimte

$$f_j - e_i - y_{ij} = \tau_{ij} \quad (2.3)$$

Deze laatste grootheid wordt gewoonlijk aangeduid met de naam totale speelruimte, ter onderscheiding van andere speelruimten, waarvan de definities als volgt luiden:

---

2)  $e_i$  en  $f_i$  worden in het Engels "earliest event time" resp. "latest event time" genoemd. Worden deze tijdstippen beschouwd m.b.t. een activiteit, dan worden de namen "earliest start time" en "latest completion time" gebruikt. Verder heet  $e_i + y_{ij}$  "earliest completion time", en  $f_j - y_{ij}$  "latest start time".



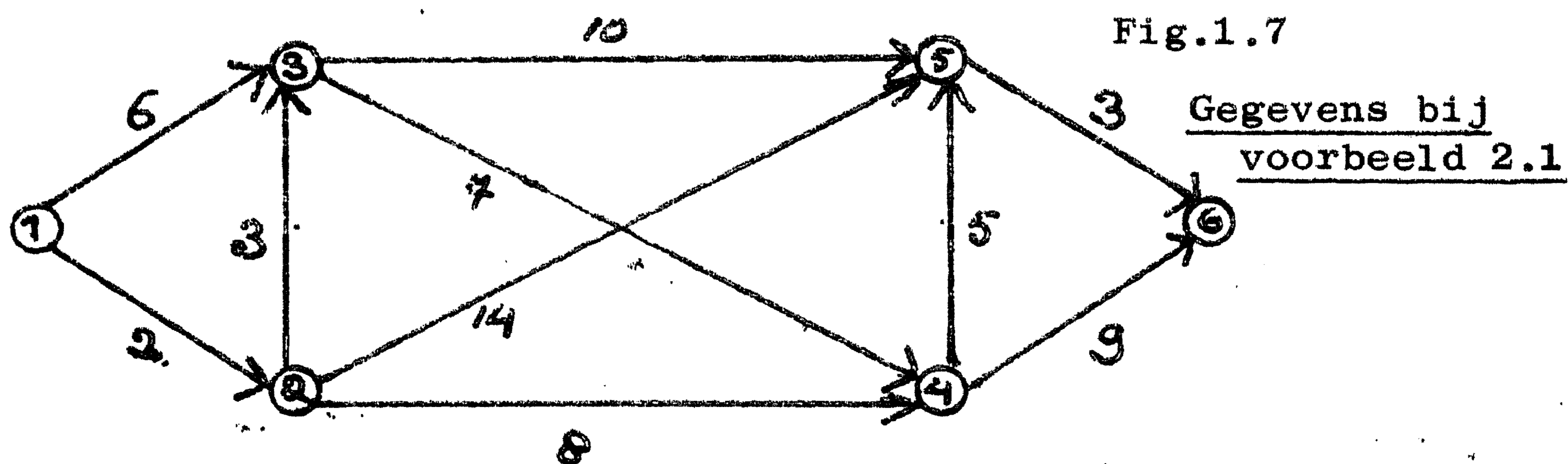
vrije speelruimte (free float):  $e_j - e_i - y_{ij} = \tau_{ij}^v$   
 onafhankelijke speelruimte (independent float):  
 $\max\{0, e_j - f_i - y_{ij}\} = \tau_{ij}^o$   
 afhankelijke speelruimte (dependent float, interfering float):  
 $f_j - e_j = \tau_{ij}^a$

De vrije speelruimte (de belangrijkste van de drie) van een activiteit is de speelruimte die deze activiteit heeft als alle andere activiteiten zo vroeg mogelijk beginnen. De onafhankelijke speelruimte is de speelruimte die voor een activiteit overblijft ongeacht de begintijdstippen van de overige activiteiten. Voor de afhankelijke speelruimte geldt

$$\tau_{ij}^a = \tau_{ij} - \tau_{ij}^v \quad (2.4)$$

Een activiteit wordt kritiek genoemd als  $\tau_{ij} = 0$ . Het is eenvoudig te zien dat alleen dan kritieke activiteiten voorkomen als  $e_n = T$ . Is dit het geval, dan zijn er ook een of meer ketens van opeenvolgende activiteiten aan te wijzen, beginnend in knooppunt 1, en eindigend in  $n$ , waarvoor alle  $\tau_{ij}$  nul zijn. Een dergelijke keten heet een kritiek pad van het netwerk.

Voorbeeld 2.1. Beschouw het in fig. 1.7 afgebeelde netwerk. Bij de pijlen zijn de activiteitsduren  $y_{ij}$  geplaatst, de knooppunten met hun nummers zijn door omcirkelde getallen aangegeven.



Met formule (2.1) vindt men gemakkelijk dat

$$\begin{cases} e_1 = 0 \\ e_2 = 2 \\ e_3 = 6 \\ e_4 = 13 \\ e_5 = 18 \\ e_6 = 22 \end{cases} \quad (2.5)$$

zodat een kritiek pad alleen voorkomt als  $T=22$ . Uitgaande van deze waarde voor  $T$  vinden we met formule (2.2)

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 3 \\ f_3 = 6 \\ f_4 = 13 \\ f_5 = 19 \\ f_6 = 22 \end{cases} \quad (2.6)$$

Met formule (2.3) kan nu voor iedere activiteit de totale speelruimte worden berekend. Het resultaat hiervan is

$$\begin{cases} 2_{12} = 1 \\ 2_{13} = 0 \\ 2_{23} = 1 \\ 2_{24} = 3 \\ 2_{34} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2_{25} = 3 \\ 2_{35} = 3 \\ 2_{45} = 1 \\ 2_{46} = 0 \\ 2_{56} = 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

Het kritieke pad bestaat dus uit de activiteiten (1,3), (3,4) en (4,6).



Blijkens de definitie van kritiek pad geldt voor de activiteiten die ertoe behoren dat uitstel of vertraging van deze activiteiten een evengrote verschuiving van het voltooiingstijdstip met zich meebrengt. Vanzelfsprekend zullen daarom de kritieke activiteiten door de leiding zorgvuldig in het oog moeten worden gehouden.

We zijn hiermee aangeland bij de eerste vorm van informatie die de netwerktechniek aan de leiding kan verschaffen: een netwerk, waarin is aangegeven welke activiteiten kritiek, en bij voorkeur ook welke bijna-kritiek zijn, d.w.z. een betrekkelijke kleine  $\tau_{ij}$  hebben. En, zoals we later zullen zien, ook de activiteiten met een zeer grote speelruimte kunnen belangrijk zijn.

Zelfs in deze zeer eenvoudige vorm kan een netwerkplanning van nut zijn, nog afgezien van het inzicht in de samenhang van het project, dat reeds bij het maken van het netwerk wordt verkregen.

Uit het voorgaande blijkt dat het voortdurend bijwerken van de gegevens naarmate het project vordert, van groot belang kan zijn. Immers, een activiteit die een grote  $\tau_{ij}$  heeft bij de aanvang van het project, kan kritiek worden als de eraan voorafgaande bewerkingen steeds maar worden uitgesteld. Wiskundig gezien levert het her-plannen geen moeilijkheden: er ontstaat een nieuw netwerk, dat zich op dezelfde wijze laat behandelen als het oorspronkelijke. Maar er kunnen zich natuurlijk allerlei organisatorische en administratieve problemen voordoen; deze worden hier echter buiten beschouwing gelaten.



### 3. Uitbreidingen

In de vorige paragraaf zijn, soms impliciet, bepaalde veronderstellingen gemaakt, waaraan echter in de praktijk niet altijd is voldaan. Het is dan nodig om het model iets ingewikkelder te maken.

Als bijv. de onzekerheid in de duur der activiteiten groot is, laten de tijden zich beter beschrijven als stochastische variabelen. In het bijzonder is deze uitbreiding van het model vaak nodig bij een project dat voor het eerst wordt uitgevoerd. Het is dan dus noodzakelijk om de kansverdeling van de activiteitsduren te schatten. In paragraaf 4 zal o.a. worden geschetst hoe dit in het zg. Pert-systeem geschiedt.

Het kan ook gebeuren dat de  $y_{ij}$  niet alleen zeer nauwkeurig bekend zijn, maar zelfs nog naar wens kunnen worden geregeld. Men kan bijv. de situatie hebben dat tegen hogere kosten (of ten koste van de kwaliteit van het eindprodukt) de activiteitsduur kan worden verminderd. We denken hierbij vooral aan het uitbesteden van kritieke activiteiten. In paragraaf 6 zal een systeem worden besproken (de "Critical Path Method") dat sterk de nadruk legt op dit aspect.

Bij sommige research- en ontwikkelingsprojecten is het niet mogelijk een netwerk te maken, omdat de gedaante ervan na een bepaalde activiteit nog kan afhangen van het resultaat van die activiteit. Er is een poging gedaan om deze moeilijkheid op te lossen door het invoeren van een algemener soort netwerk waarin knooppunten optreden met de eigenschap dat niet alle eruit ontspringende activiteiten voltooid behoeven te worden. Gezien echter het speculatieve karakter van sommige hierbij gemaakte veronderstellingen zullen wij hierop niet verder ingaan.



Het kan tenslotte voorkomen dat men bij de planning rekening moet houden met de beperktheid van "hulpbronnen". (Als men bijv. de beschikking heeft over 3 lassers, kunnen twee activiteiten die ieder 2 lassers vereisen niet tegelijkertijd plaatsvinden). Aan dit punt zal in paragraaf 7 enige aandacht worden gewijd.

#### 4. De "Program Evaluation and Review Technique".

In het Pert-systeem wordt dus verondersteld dat de activiteitsduren  $y_{ij}$  een bekende kansverdeling hebben. Men gaat bij het bepalen hiervan als volgt te werk. Aan de hiervoor in aanmerking komende personen wordt gevraagd een optimistische, een waarschijnlijkste, en een pessimistische schatting van de activiteitsduur te geven. Stel deze schattingen zijn  $a, b$  resp.  $m$ . Men neemt nu aan dat de grootte

$$\underline{x} = \frac{y_{ij} - a}{b - a} \quad (4.1)$$

een  $\beta$ -verdeling heeft:

$$P[\underline{x} \leq x] = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1} dv \quad (4.2)$$

(vgl. hoofdstuk III, § 1, formule (1.28)).

Deze aanname berust niet op waarnemingen van activiteitsduren, maar heeft als enige redenen dat de  $\beta$ -verdeling een eindige range heeft en dat de parameters  $\alpha$  en  $\beta$  zo kunnen worden gekozen dat de dichtheid een-toppig is. Dit laatste wordt dan ook gedaan, en wel zodanig dat de modus van  $x$  gelijk is aan  $\frac{m-a}{b-a}$ . Uit (4.2) leidt men gemakkelijk af dat dan de volgende betrekking tussen  $\alpha$  en  $\beta$  geldt:

$$\alpha(b-m) - \beta(m-a) = a+b-2m \quad (4.3)$$



Aangezien de  $\beta$ -verdeling nu nog niet vastligt, maakt men nog een veronderstelling, en wel

$$\sigma(\underline{y}_{ij}) = \frac{1}{6} (b-a) \quad (4.4)$$

Deze betrekking is equivalent met

$$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{1}{36} \quad (4.5)$$

De verdeling is nu bepaald, en de verwachting kan worden berekend. Hiervoor is o.a. het oplossen van de 3<sup>e</sup> graadsvergelijking (4.5) vereist. Gezien de benaderingen die al zijn gemaakt verdient het de voorkeur dit oplossen evenmin exact te doen, maar gebruik te maken van de volgende formule

$$\mathcal{E}(\underline{y}_{ij}) \approx \frac{1}{6} (a+4m+b) \quad (4.6)$$

die zoals uit numerieke berekeningen is gebleken, een redelijke benadering is.

Met behulp van deze gegevens kan men nu trachten om bijv. de kansverdeling van  $\underline{e}_i$ , het vroegste voltooiingstijdstip van knooppunt  $i$ , te berekenen. Het zal duidelijk zijn dat dit voor een netwerk van enige omvang een verre van eenvoudige taak is. Er zijn echter verschillende benaderingsmethoden bekend, waarvan in dit hoofdstuk de eenvoudigste zal worden behandeld.

Hierbij wordt allereerst de verwachting van het tijdstip waarop knooppunt  $i$  zal worden bereikt, benaderd door de grootte  $\hat{e}_i$ , als volgt gedefinieerd:<sup>1)</sup>

---

1) De hier gebruikte notatie wijkt af van die in hoofdstuk V, waar een accent circonflex een meest aannemelijke schatter aanduidt.



$$\hat{e}_i = \max \left\{ \hat{e}_k + \mathcal{E}(y_{ki}) \mid (k,i) \in \mathcal{P} \right\} \quad (4.7)$$

$$\hat{e}_1 = 0$$

Iedere activiteitsduur wordt dus vervangen door zijn verwachting, en op het resulterende netwerk wordt formule (2.1) toegepast.

Dat (4.7) inderdaad een benaderingsformule is, blijkt uit het volgende eenvoudige voorbeeld. Stel het netwerk heeft de gedaante die in fig. 4.1 is afgebeeld, en stel

$$\begin{cases} y_{12} = 0 \\ y_{13} = 2 \\ P[y_{23} = 1] = P[y_{23} = 4] = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.8)$$

Volgens (4.7) geldt nu  $\hat{e}_3 = 2\frac{1}{2}$ , terwijl de exacte waarde van  $\mathcal{E} \underline{e}_3$  gelijk is aan  $\frac{1}{2} \max(0+1, 2) + \frac{1}{2} \max(0+4, 2) = 3$ .

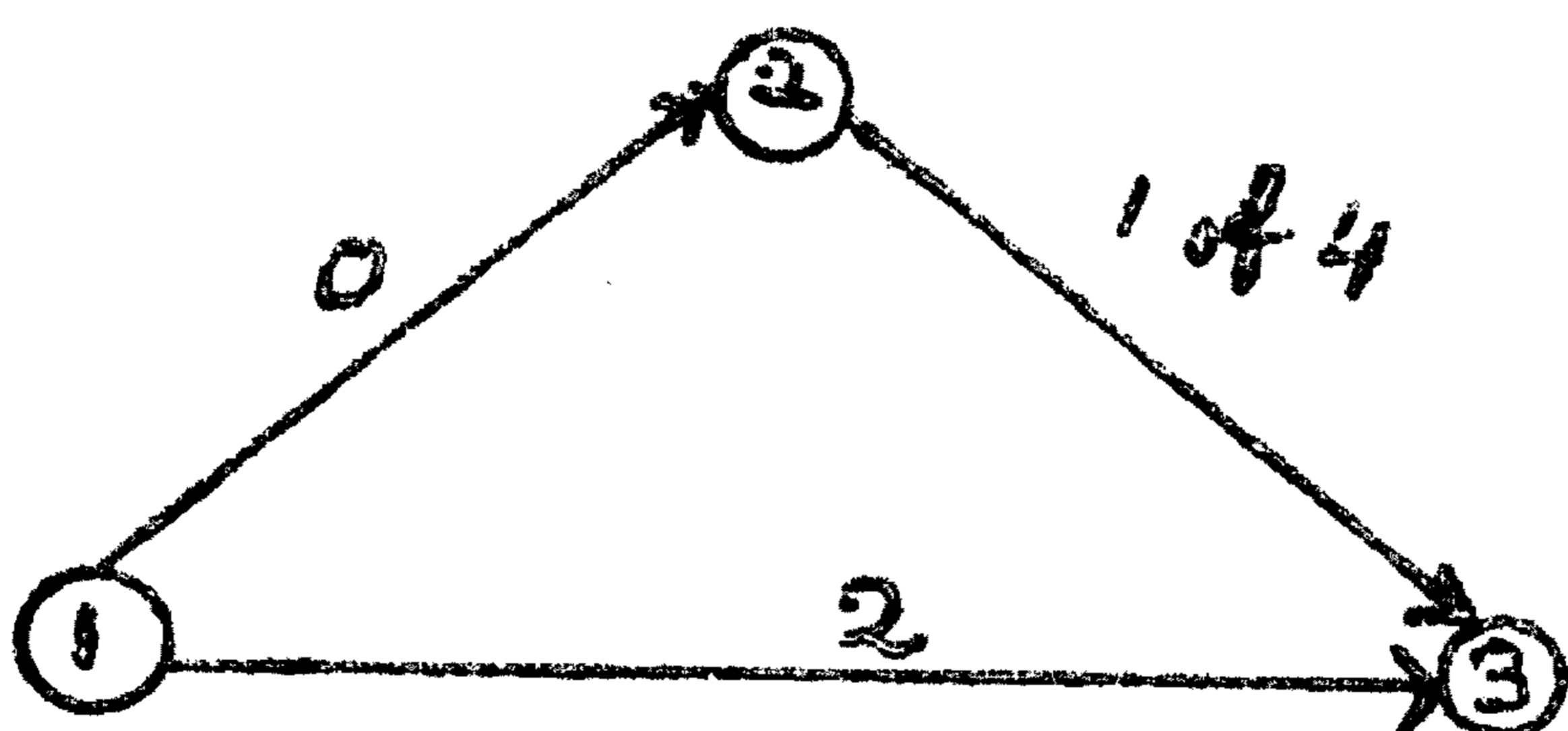


Fig. 4.1

Eenvoudig netwerk met  $\hat{e}_3 \neq \mathcal{E} \underline{e}_3$

Voor de variantie van  $\underline{e}_i$  gebruikt men de volgende benadering

$$\hat{\sigma}^2(\underline{e}_i) = \sum \sigma^2(y_{jk}) \quad (4.9)$$

waarbij gesommeerd wordt over alle activiteiten die liggen in een langste pad van 1 naar  $i$  in het corresponderende deterministische netwerk (dus waarin iedere activiteitsduur is vervangen door zijn verwachting).



In het hierboven genoemde voorbeeld is  $\sigma^2(\underline{e}_3)$  gelijk aan 1, terwijl met (4.9) wordt gevonden  $\hat{\sigma}^2(\underline{e}_3)=2,25$ . Blijkbaar is de benadering tamelijk grof. Bovendien hangt de gevonden waarde nog af van de detaillering in het netwerk <sup>2)</sup>.

Verder wordt in het Pert-system aangenomen dat de grootheden  $\underline{e}_i$  voor niet te kleine waarden van  $i$  bij benadering normaal verdeeld zijn. De verdeling van  $\underline{e}_i$  ligt nu vast, en men heeft de mogelijkheid om uitspraken van de vorm

$$P[\underline{e}_i \leq E_i] = p \quad (4.10)$$

te doen, waarin  $E_i$  ontleend is aan een gegeven scheduling van het project. Hun betrouwbaarheid even buiten beschouwing latend zijn deze waarschijnlijkheidsuitspraken (probability statements) natuurlijk waardevolle inlichtingen voor de leiding.

Geheel analoog kan men  $\mathcal{E}(\underline{f}_i)$ , de verwachting van het tijdstip waarop knooppunt  $i$  uiterlijk moet zijn bereikt, bij gegeven  $T$ , benaderen met

$$\begin{cases} \hat{f}_i = \min \{ \hat{f}_k - \mathcal{E}(y_{ik}) \mid (i,k) \in \mathcal{P} \} & i < n \\ \hat{f}_n = T \end{cases} \quad (4.11)$$

en de variantie van  $\underline{f}_i$  met

$$\hat{\sigma}^2(\underline{f}_i) = \sum \sigma^2(y_{jk}) \quad (4.12)$$

waarbij wordt gesommeerd over alle activiteiten die lig-

---

2) Zie T.L. Healy, Activity Subdivision and Pert Probability Statements, Operations Research 9, no 3.(1961) p. 341-348)



gen in een langste pad van  $i$  naar  $n$  in het corresponderende deterministische netwerk. Ook van de grootheden  $\underline{f}_i$  wordt aangenomen dat ze bij benadering normaal verdeeld zijn (voor niet te grote waarden van  $i$ ), en ook hier kunnen dus waarschijnlijkheidsuitspraken worden gedaan.

Tot slot van deze paragraaf zullen we wat nader ingaan op een verbeterde schatting van  $\mathcal{E} \underline{e}_i$ , gevonden door Fulkerson<sup>3)</sup>. De definitie hiervan luidt

$$\begin{aligned} e_i^* &= \mathcal{E} \max \{ e_k^* + y_{ki} \mid (k,i) \in \mathcal{P} \} \\ e_1^* &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Wanneer de activiteitsduren  $y_{ij}$  onafhankelijk zijn (deze eis kan overigens nog wel worden verzwakt) geldt

$$\hat{e}_i \leq e_i^* \leq \mathcal{E} \underline{e}_i \quad (4.14)$$

De linkerhelft van (4.14) kan men met volledige inductie als volgt bewijzen. Voor  $i=1$  is de bewering triviaal. Stel men heeft al bewezen dat  $\hat{e}_j \leq e_j^*$  voor  $j=1, \dots, i-1$ , dan geldt

$$\begin{aligned} e_i^* &= \mathcal{E} \max \{ e_k^* + y_{ki} \mid (k,i) \in \mathcal{P} \} \geq \\ &\max \mathcal{E} \{ e_k^* + y_{ki} \mid (k,i) \in \mathcal{P} \} = \\ &\max \{ e_k^* + \mathcal{E} y_{ki} \mid (k,i) \in \mathcal{P} \} \geq \\ &\max \{ \hat{e}_k + \mathcal{E} y_{ki} \mid (k,i) \in \mathcal{P} \} = \hat{e}_i \end{aligned}$$

De rechterhelft van (4.14) kan men op een dergelijke manier bewijzen.

---

3) D.R. Fulkerson, Expected Critical Path Lengths in Pert Networks, Operations Research 10, no 6 (1962), p.808-817.



We zien dus dat  $e_1^*$ , evenals  $\hat{e}_1$  altijd aan de optimistische kant is, en dat  $e_1^*$  nooit slechter is dan  $\hat{e}_1$ . Uit de getallenvoorbeelden die in Fulkersons rapport worden gegeven, krijgt men de indruk dat  $e_1^*$  een reële verbetering betekent t.o.v.  $\hat{e}_1$ . Hier staat tegenover dat deze laatste schatting wat meer rekenwerk vereist. Het volgende aan Fulkerson ontleende voorbeeld geeft hiervan een indruk.

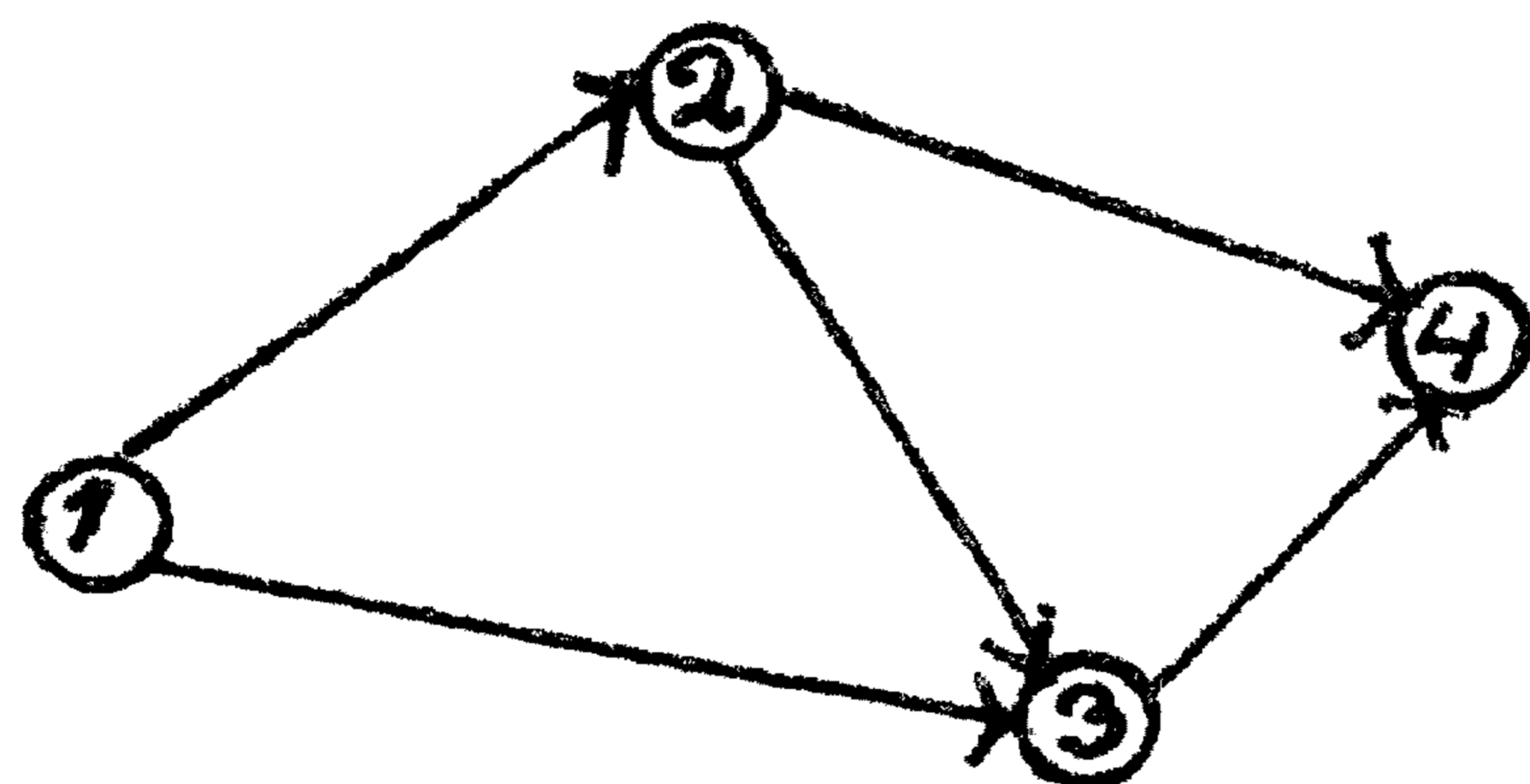


Fig. 4.2

Voorbeeld van het berekenen van  $e_1^*$

Stel ieder der activiteitsduren in het in fig. 4.2 getekende netwerk neemt met kans  $\frac{1}{2}$  de waarden 0 en 1 aan. Dan geldt volgens (4.13)

$$\begin{aligned}
 e_1^* &= 0 \\
 e_2^* &= \frac{1}{2}(e_1^*+0) + \frac{1}{2}(e_1^*+1) = \frac{1}{2} \\
 e_3^* &= \frac{1}{4} \max(e_1^*+0, e_2^*+0) + \frac{1}{4} \max(e_1^*+0, e_2^*+1) + \\
 &\quad + \frac{1}{4} \max(e_1^*+1, e_2^*+0) + \frac{1}{4} \max(e_1^*+1, e_2^*+1) = \frac{9}{8} \quad (4.15) \\
 e_4^* &= \frac{1}{4} \max(e_2^*+0, e_3^*+0) + \frac{1}{4} \max(e_2^*+0, e_3^*+1) + \\
 &\quad + \frac{1}{4} \max(e_2^*+1, e_3^*+0) + \frac{1}{4} \max(e_2^*+1, e_3^*+1) = \frac{55}{32}
 \end{aligned}$$

In dit geval geldt  $e_4^* = \mathcal{E} \underline{e}_4$ , terwijl  $\hat{e}_4 = \frac{3}{2}$ . Indien de activiteitsduren met kans  $\frac{1}{3}$  de waarden 0, 1 en 2 aannemen geldt



$$\hat{e}_4 = 3$$

$$e_4^* = 3,22$$

$$\mathcal{E} \underline{e}_4 = 3,32$$

Uit het voorgaande blijkt wel duidelijk dat we bij stochastische activiteitsduren eigenlijk niet meer van een kritiek pad kunnen spreken: ieder pad heeft een bepaalde kans om kritiek te worden.

### 5. Toepassingen van Pert

Het Pert-systeem is ontworpen voor, en voor het eerst gebruikt bij de bouw van de Polarisraket. In het tijdschrift Operations Research is door permanente leden van het team dat hieraan heeft gewerkt een verslag uitgebracht over deze eerste toepassing <sup>1)</sup>. De Amerikaanse marine heeft later ook bij de "air to air missile" Eagle het Pert-systeem gebruikt, terwijl bij het Typhon-project de belangrijke stap werd gedaan om de inschrijvers op bepaalde deelprojecten te verzoeken Pert toe te passen.

Ook bij de Amerikaanse luchtmacht, waar men spreekt van PEP<sup>2)</sup> in plaats van Pert, en bij het leger worden netwerk technieken toegepast.

Het kosten-aspect blijft bij deze militaire toepassingen enigszins op de achtergrond, alhoewel hiervoor in Pert en verwante systemen wel ruimte is gelaten.

---

1) D.G. Malcolm, J.H. Roseboom, C.E. Clark, W. Fazar,  
Application of a Technique for Research and Development Program Evaluation, Operations Research 7, no 5,  
(1959) p. 646-669.

2) Program Evaluation Procedure.



Ruwweg is de procedure als volgt: wanneer blijkt dat een knooppunt een zeer kleine kans heeft om op tijd klaar te komen, wordt een kritieke activiteit verkort, bijv. met 2 weken, en de kosten hiervan worden afgewogen tegen tijdwinst die wordt bereikt t.a.v. de voltooiing (die dus hoogstens 2 weken bedraagt). Er wordt, in tegenstelling tot C.P.M, geen poging gedaan om deze tijdwinst expliciet uit te drukken in geldeenheden. Voor verschillende kritieke activiteiten uitgevoerd kan deze procedure echter wel een indruk geven van de mogelijkheden die er zijn om  $P[e_n \leq T]$  groter te maken.

De vereiste berekeningen worden gewoonlijk op een elektronische rekenmachine uitgevoerd, waarvoor men bij de Navy de Naval Ordnance Research Computer gebruikt.

## 6. De "Critical Path Method"

Zoals al in § 3 is vermeld, wordt bij dit systeem in veel grotere mate dan bij Pert, rekening gehouden met de kosten die aan het uitvoeren van het project zijn verbonden, in het bijzonder de zg. directe kosten. Deze zijn i.h.a. een dalende functie van het voltooiingstijdstip  $T$ : hoe kleiner  $T$  is, des te meer zal men moeten uitgeven aan overuren, uitbesteding, speciale voorzieningen, e.d. De indirecte kosten worden meestal lager als  $T$  kleiner wordt gemaakt. Men denke hierbij aan een project dat tot doel heeft een nieuw produkt op de markt te brengen. Hoe eerder het produkt kan worden verkocht, hoe hoger de opbrengst zal zijn.

Als gewoonlijk tracht men de keuzevariabele, i.c.  $T$ , zo te bepalen dat de som van beide kostensoorten minimaal is. Bij C.P.M. gaat het er nu om, de directe kosten te minimaliseren bij iedere waarde van  $T$ ; anders gezegd: men tracht de directe opbrengsten te maximaliseren, en wel



door bij vaste  $T$  zo gunstig mogelijke waarden aan de activiteitsduren te geven.

In het model neemt men aan dat de (directe) opbrengst van iedere activiteit  $(i,j)$  een lineaire, niet dalende functie is van de duur:

$$W_{ij} = a_{ij} y_{ij} + b_{ij}; \quad a_{ij} \geq 0 \quad (6.1)$$

en dat  $y_{ij}$  alle waarden tussen twee gegeven grenzen kan aannemen:

$$d_{ij} \leq y_{ij} \leq D_{ij} \quad (6.2)$$

Voegen we aan ieder knooppunt  $i$  een tijdstip  $t_i$  toe, dan moet gelden

$$y_{ij} \leq t_j - t_i \quad (6.3)$$

De totale opbrengst van het project is nu

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} W_{ij}$$

en we moeten dus  $y_{ij}$  en  $t_i$  zodanig kiezen dat  $\sum W_{ij}$  maximaal is onder de bijvoorwaarden (6.2), (6.3) en  $t_n \leq T$ . Hierbij is  $T$  de voorgeschreven projectduur. De maximale waarde van  $\sum W_{ij}$  hangt nu nog van  $T$  af; deze opbrengstfunctie geven we daarom aan met  $W(T)$ .

Als  $T$  voldoende groot is kunnen we de  $t_i$  zo kiezen dat  $y_{ij} = D_{ij}$  kan worden genomen; voor zulke waarden van  $T$  geldt dus

$$W(T) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} (a_{ij} \cdot D_{ij} + b_{ij}), \quad (6.4)$$



en dat is natuurlijk de grootste waarde die  $W(T)$  ooit kan bereiken. De kleinste  $T$  waarvoor dit nog mogelijk is,  $M$ , kan op dezelfde wijze worden gevonden als het tijdstip  $e_n$  in paragraaf 2, dus

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_j = \max \{ t_i + D_{ij} \mid (i,j) \in \mathcal{P} \} & (j=2, \dots, n) \\ t_n = M \end{cases} \quad (6.5)$$

Als  $T$  echter kleiner is dan  $m$ , als volgt gedefinieerd:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_j = \max \{ t_i + d_{ij} \mid (i,j) \in \mathcal{P} \} & (j=2, \dots, n) \\ t_n = m \end{cases} \quad (6.6)$$

is het niet mogelijk om aan (6.2) en (6.3) te voldoen, zodat een schema met  $T < m$  niet bestaat.

Er rest ons dus nog het probleem om  $W(T)$  te bepalen voor  $m \leq T < M$ . Dit gebeurt door uit te gaan van het schema met  $t_j$  gedefinieerd door (6.5) en  $y_{ij} = D_{ij}$ ; en achtereenvolgens voor steeds kleinere waarden van  $T$  de optimale  $t_i$  en  $y_{ij}$  te bepalen. Hiervoor zijn ongeveer tegelijkertijd twee algorithmen gevonden, nl. door Kelly<sup>1)</sup> en Fulkerson<sup>2)</sup>.

- 
- 1) J.E. Kelly Jr., Critical Path Planning and Scheduling: Mathematical Basis, Operations Research 9(1961), no 3, p. 296-320.
- 2) D.R. Fulkerson, A Network Flow Computation for Project Cost Curves, Management Science 7(1961), no 2, p.167 e.v.



Alvorens de algoritme van Kelley te bespreken, die overigens slechts weinig van de Fulkerson-algoritme verschilt, zullen we bij wijze van inleiding nagaan wat er zoal kan gebeuren als we de projectduur gaan verkorten.

Allereerst merken we op dat het hierboven genoemde beginschema (6.5) een of meer kritieke paden bevat. Stel nu dat we de projectduur met een klein bedrag  $\theta$  willen bekorten. Hiertoe moeten dan bepaalde activiteiten worden ingekort. Het is duidelijk dat het geen zin heeft om niet-kritieke activiteiten te bekorten. Onze keus zal dus vallen op kritieke activiteiten, en wel die, waarvoor de daling van de opbrengst zo klein mogelijk is. We beperken ons even tot het eenvoudige geval dat er slechts één kritiek pad is in het beginschema. De voordeligste wijze om de projectduur met  $\theta$  te bekorten is dan: het met  $\theta$  inkorten van de activiteit met de kleinste  $a_{ij}$  waarvoor een inkorting inderdaad mogelijk is. (In het beginschema worden door deze laatste restrictie dus alleen die activiteiten uitgesloten die  $d_{ij} = D_{ij}$  hebben). De vraag is nu: hoe groot kan  $\theta$  zijn? Er zijn verschillende omstandigheden die maken dat  $\theta$  niet willekeurig groot kan worden gekozen. In de eerste plaats mag de duur van een activiteit die wordt ingekort niet lager worden dan  $d_{ij}$ . Ten tweede heeft het geen zin om de beschouwde activiteit zonder meer verder te verkorten, zodra door de initiële verkorting een ander pad kritiek is geworden. In de derde plaats mag  $\theta$  niet zo groot zijn dat de resulterende verlenging (!) van andere activiteiten een lengte van meer dan  $D_{ij}$  zou opleveren. Het klinkt misschien merkwaardig dat een verkorting van de projectduur een verlenging van een activiteitsduur met zich kan meebrengen, maar men dient te bedenken dat aan  $W(T)$  steeds de maximale waarde moet worden gegeven.



We zullen dit direct in een voorbeeld nog toelichten. Vanuit het beginschema treedt deze anomalie natuurlijk nooit op, aangezien daarin  $y_{ij} = D_{ij}$  voor alle activiteiten, en verlenging dus bij voorbaat is uitgesloten.

Het hierboven bedoelde voorbeeld is als volgt: het netwerk heeft de gedaante die in fig. 6.1 is afgebeeld, terwijl bij de pijlen de grootheden  $d_{ij}$  en  $D_{ij}$  zijn vermeld. Verder is <sup>3)</sup>

$$\begin{cases} a_{12} = a_{34} = 2 \\ a_{23} = 1 \\ a_{13} = a_{24} = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

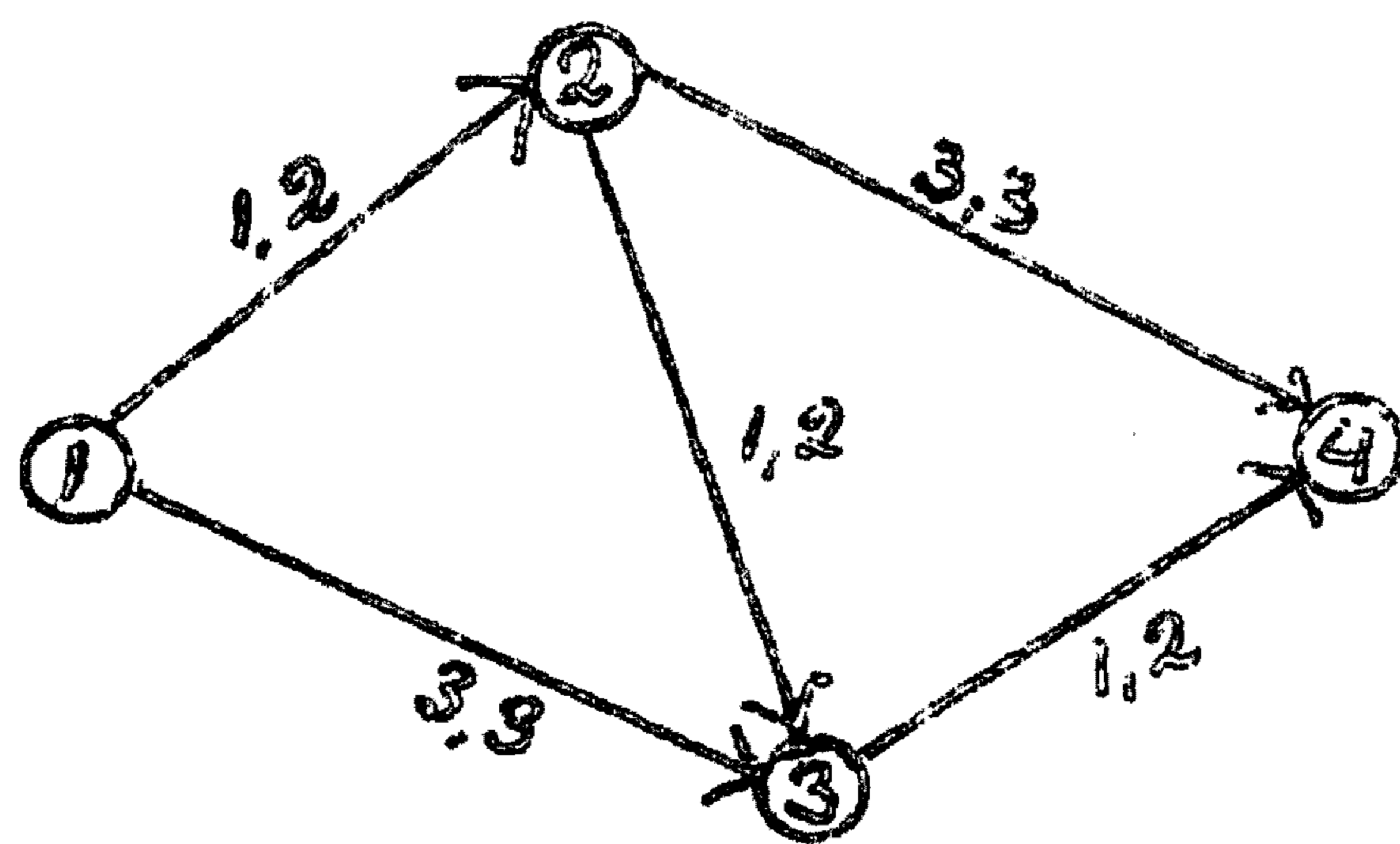


Fig. 6.1

Netwerk waarin verlenging van een activiteit optreedt

In het beginschema ( $y_{ij} = D_{ij}$ ) is het pad 1234 kritiek, en het kan het voordeligst worden verkort door  $y_{23}$  te verkleinen. Dit verkleinen is mogelijk totdat  $y_{23} = d_{23} = 1$ . Nu zijn echter meteen alle paden kritiek geworden. Willen we de projectduur nu nog verder verkorten, dan moeten

---

3) Het is niet nodig om de  $b_{ij}$  te kennen, daar deze steeds een constante bijdrage tot  $W(T)$  leveren.



dus zoveel  $y_{12}$  als  $y_{34}$  worden verkort (de enige activiteiten die nog kunnen worden verkort). Natuurlijk is het in principe mogelijk om  $y_{23}$  hierbij ongewijzigd te laten, maar dit zou geen optimale oplossing geven. In dit geval moet dus  $y_{23}$  worden verlengd, en als  $y_{12}=y_{34}=1$ , is  $y_{23}$  weer gelijk aan 2.

We keren nu weer terug naar een willekeurig beginschema als gedefinieerd door (6.5); we veronderstellen dat er slechts één pad kritiek is en dat we dit pad met een klein bedrag  $\theta$  bekorten. We hebben gezien welke activiteit hiertoe moet worden ingekort. Voor de tijdstippen  $t_i$  betekent een dergelijke inkorting dat ze of onveranderd blijven, of met een bedrag  $\theta$  worden verminderd. Het is intuïtief wel in te zien dat dit ook moet gelden wanneer niet alle  $y_{ij}=D_{ij}$ , of wanneer er meer dan één pad kritiek is. Evenzo betekent een vermindering van de projectduur met  $\theta$  voor de activiteiten  $y_{ij}$  dat ze ongewijzigd blijven, of met  $\theta$  worden verminderd of vermeerderd. In formule:

$$\begin{aligned} t_i' &= t_i - \theta \delta_i \text{ met } \delta_i = 0 \text{ of } 1 \\ y_{ij}' &= y_{ij} - \theta \sigma_{ij} \text{ met } \sigma_{ij} = -1, 0 \text{ of } 1 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Het is nu eenvoudig om voor een willekeurig netwerk in formule aan te geven hoe groot  $\theta$  mag zijn:

$$\theta \leq \alpha = \min(y_{ij} - d_{ij} \mid \sigma_{ij} = 1) \quad (6.9)$$

$$\theta \leq \beta = \min(D_{ij} - y_{ij} \mid \sigma_{ij} = -1) \quad (6.10)$$

$\theta$  mag dus niet groter zijn dan enige  $y_{ij} - d_{ij}$  waarvan de  $y_{ij}$  wordt verminderd, en ook niet groter dan enige  $D_{ij} - y_{ij}$  waarvan de  $y_{ij}$  wordt vermeerderd. (Als  $\sigma_{ij} \leq 0$  voor alle activiteiten, nemen we  $\beta$  in (6.10) gelijk aan  $\infty$ )



Voor de  $y'_{ij}$  en  $t'_i$  gedefinieerd door (6.8) moet natuurlijk ook gelden

$$y'_{ij} + t'_i - t'_j \leq 0 \quad (6.11)$$

Volgens (6.8) kunnen we hiervoor schrijven

$$y_{ij} - \theta \sigma_{ij} + t_i - \theta \delta_i - t_j + \theta \delta_j = (y_{ij} + t_i - t_j) - \theta p_{ij} \leq 0 \quad (6.12)$$

waarin

$$p_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_i - \delta_j \quad (6.13).$$

Aan (6.12) is vanzelf voldaan als  $p_{ij} \geq 0$ ; voor de overige activiteiten moet  $\theta$  dus voldoen aan

$$\theta \leq \alpha = \min \left\{ \frac{y_{ij} + t_i - t_j}{p_{ij}} \mid p_{ij} < 0 \right\} \quad (6.14)$$

Deze ongelijkheid zorgt er dus voor dat  $\theta$  niet meer groter wordt wanneer er nieuwe kritieke paden bijkomen. (Als  $p_{ij} \geq 0$  voor alle  $(i,j) \in \mathcal{P}$ , definiëren we  $\alpha = \infty$ )

Samenvattend kunnen we dus zeggen dat de grootste waarde  $\theta_0$  die  $\theta$  mag aannemen, gegeven wordt door:

$$\theta_0 = \min (\alpha, \beta, \gamma) \quad (6.15)$$

We vestigen er nog eens de aandacht op dat hier steeds wordt gesproken over één fase in de verkortingsprocedure, een fase die dus beeindigd is, wanneer andere activiteiten eraan te pas moeten komen om een verdere verkorting te verkrijgen.



Wanneer we dus  $\sigma_{ij}$  en  $\delta_i$  kennen voor alle activiteiten resp. knooppunten, m.a.w. wanneer we weten welke activiteiten moeten worden verkort, enz., dan weten we meteen ook wat de maximale toegelaten  $\theta$  is. De algoritme moet dus nog het volgende probleem oplossen:

"Gegeven een schema (bepaald door  $y_{ij}$  en  $t_i$ ); voor welke  $\sigma_{ij}$  is dan  $\sum_{(i,j) \in \mathcal{P}} a_{ij} \sigma_{ij}$  minimaal wanneer de grootheden  $\sigma_{ij}$  nog moeten voldoen aan bepaalde bijvoorwaarden?"

Deze voorwaarden kunnen het best worden geformuleerd door eerst de volgende deelverzameling van  $\mathcal{P}$  in te voeren:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= \{(i, j) \mid y_{ij} + t_i - t_j = 0\} \\ \mathcal{Q}_2 &= \{(i, j) \mid d_{ij} < y_{ij} = D_{ij}\} \\ \mathcal{Q}_3 &= \{(i, j) \mid d_{ij} = y_{ij} = D_{ij}\} \\ \mathcal{Q}_4 &= \{(i, j)^* \mid d_{ij} = y_{ij} < D_{ij}\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

De bijvoorwaarden, die zich gemakkelijk laten interpreteren, luiden dan<sup>4)</sup>:

$$\begin{cases} p_{ij} \geq 0 & \text{als } (i, j) \in \mathcal{Q}_1 \\ \sigma_{ij} \geq 0 & \text{als } (i, j) \in \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \\ \sigma_{ij} = 0 & \text{als } (i, j) \in (\mathcal{P} - \mathcal{Q}_1) \cup \mathcal{Q}_3 \\ \sigma_{ij} \leq 0 & \text{als } (i, j) \in \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_4 = \mathcal{Q}_4 \\ \delta_1 & = 0 \\ \delta_n & = 1 \end{cases} \quad (6.17)$$

4) N.a.v. de vierde regel van formule (6.17) merken we het volgende op: een activiteit die tot  $\mathcal{Q}_4$  behoort, heeft niet z'n maximale duur en is dus ingekort; hieruit volgt dat deze activiteit kritiek was en dus nog steeds kritiek is, d.w.z. de totale speelruimte is 0. Maar dan is ook de vrije speelruimte 0, en dus  $\mathcal{Q}_4 \subset \mathcal{Q}_1$ .



De uitgangspunten van de algoritme zijn nu: het netwerk, de gegevens  $a_{ij}$ ,  $d_{ij}$  en  $D_{ij}$ , en het beginschema met  $y_{ij}=D_{ij}$  en  $t_j$  volgens (6.5). Verder voegen we aan iedere activiteit een hulpvariabele  $u_{ij}$  toe; deze hulpvariabelen hebben aan het begin alle de waarde 0.

De algoritme, die verwant is aan de in hoofdstuk XII behandelde simplex-methoden bestaat uit twee gedeelten: een procedure  $\mathcal{L}$  waarin sommige of alle knooppunten een label krijgen, en een procedure  $\mathcal{M}$  waarin de  $u_{ij}$  waarden worden gewijzigd.

Het recept voor  $\mathcal{L}$  luidt als volgt:

- (1) De oorsprong krijgt de label (blanco,  $\infty$ ).
- (2) Stel knooppunt  $i$  heeft de label ( $\pm k, h$ ) of de label (blanco,  $\infty$ ), of de label ( $\pm k, \infty$ ) en knooppunt  $j$  heeft geen label:
  - (2a) Als  $(i, j) \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$  en  $u_{ij} < a_{ij}$ , geef dan aan knooppunt  $j$  de label  $(i, \min\{h, a_{ij} - u_{ij}\})$ .
  - (2b) Als  $(i, j) \in \mathcal{G}_1 \cap (\mathcal{G}_3 \cup \mathcal{G}_4)$ , geef dan  $j$  de label  $(i, h)$ .
  - (2c) Als  $(i, j) \in \mathcal{G}_1 - (\mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3 \cup \mathcal{G}_4)$  geef dan aan  $j$  géén label.
- (3) Stel  $i$  heeft geen label en  $j$  heeft de label ( $\pm k, h$ )
  - (3a) Als  $(i, j) \in \mathcal{G}_1 \cap (\mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3)$  en  $u_{ij} > 0$ , geef dan aan  $i$  de label  $(-j, \min\{h, u_{ij}\})$
  - (3b) Als  $(i, j) \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_4 = \mathcal{G}_4$  en  $u_{ij} > a_{ij}$ , geef dan aan  $i$  de label  $(-j, \min\{h, u_{ij} - a_{ij}\})$
  - (3c) Als  $(i, j) \in \mathcal{G}_1 - (\mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3 \cup \mathcal{G}_4)$ , geef dan  $i$  géén label.
- (4) Pas de regels 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 3c toe totdat het niet meer mogelijk is om een knooppunt te labellieren. Indien meer dan één regel van toepassing is, is het om het even welke hiervan wordt toegepast.



$\mathcal{L}$  kan op twee manieren eindigen: het eindknooppunt heeft al of niet een label. In het eerste geval moet de procedure  $\mathcal{M}$  worden toegepast. Deze luidt als volgt:

Als de voltooiing de label  $(+k, h)$  heeft, vervang dan  $u_{kn}$  door  $u_{kn} + h$ . Als nu  $k$  de label  $(+j, m)$  heeft, vervang dan  $u_{jk}$  door  $u_{jk} + h$ ; heeft echter  $k$  de label  $(-j, m)$  vervang dan  $u_{kj}$  door  $u_{kj} - h$ . Zet dit voort totdat de oorsprong is bereikt.

De variabelen die volgens  $\mathcal{M}$  geen verandering ondergaan, houden de waarden die ze hadden.

De nieuwe  $u_{ij}$  waarden worden nu gebruikt bij het herhalen van  $\mathcal{L}$ . Zolang het eindknooppunt hierbij een label krijgt, moet  $\mathcal{M}$  weer worden toegepast, etc.

Zodra bij toepassing van  $\mathcal{L}$  niet alle knooppunten een label krijgen, is de eerste fase in de verkorting beëindigd. We kunnen uit het resultaat van deze laatste toepassing van  $\mathcal{L}$  direct aflezen welke  $t_i$  moeten worden gewijzigd. Er geldt namelijk:  $\delta_i = 0$  als  $i$  behoort tot de verzameling  $\mathcal{J}$  der gelabelleerde knooppunten, in  $\delta_i = 1$  als  $i$  behoort tot  $\mathcal{J} = \mathcal{P} - \mathcal{J}$ .

Weten we eenmaal welke knooppunten moeten worden opgeschoven, dan is het niet moeilijk om in te zien wat de waarden van  $\sigma_{ij}$  zijn voor de activiteiten: een activiteitsduur kan alleen worden verkort als  $(i, j) \in \mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4$ , en het is alleen dan eventueel nodig om  $y_{ij}$  te verkorten als  $(i, j) \in \mathcal{P}_1$ . De duur wordt inderdaad verkort, als het eindpunt van de activiteit opschuift, en het beginpunt niet. Deze verbale voorwaarden zijn equivalent met de eerste regel van (6.18); de tweede en derde regel laten zich op analoge wijze interpreteren.



$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } (i,j) \in \mathcal{P}_1 - (\mathcal{P}_3 \cup \mathcal{P}_4), i \in J, j \in J \\ -1 & \text{als } (i,j) \in \mathcal{P}_1 - (\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3), i \in J, j \in J \\ 0 & \text{in alle andere gevallen.} \end{cases} \quad (6.18)$$

Hiermee is dus een der eerder genoemde fasen voltooid. De verkortingsprocedure moet worden herhaald totdat eens  $t_n' = m$ , de kortst mogelijke projectduur.

We passen de algoritme nu toe op een eenvoudig voorbeeld. In fig. 6.2 is het netwerk getekend, in tabel 6.I zijn de grootheden  $a_{ij}$ ,  $d_{ij}$  en  $D_{ij}$  opgenomen

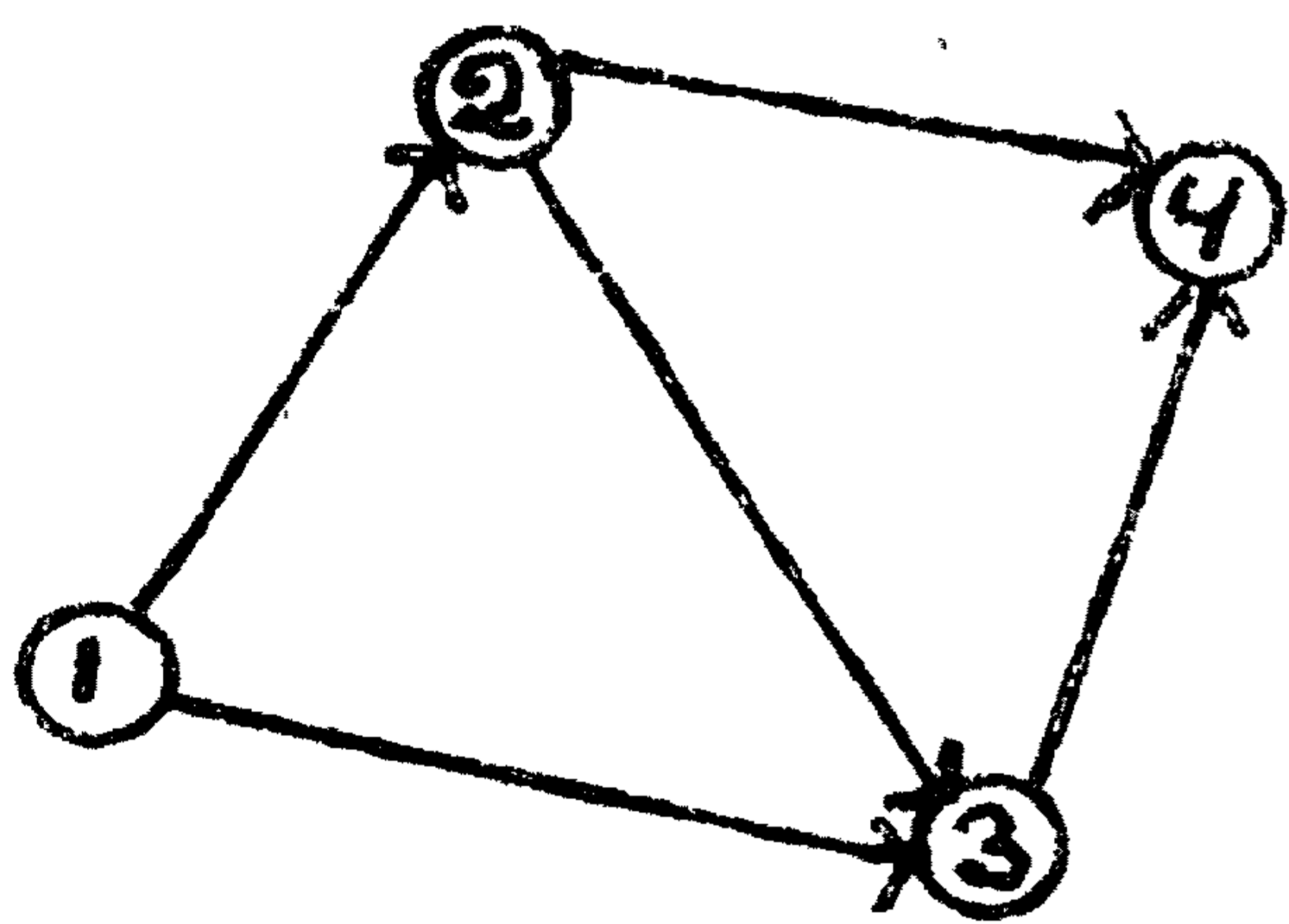


Fig. 6.2

Netwerk van het  
uitgewerkte voorbeeld

Tabel 6.I

Gegevens voor het  
uitgewerkte voorbeeld

$(i,j)$	$a_{ij}$	$d_{ij}$	$D_{ij}$
12	2	3	5
13	3	2	5
23	2	2	4
24	4	4	6
34	2	2	3

In het beginschema is  $y_{ij} = D_{ij}$ , terwijl de bepaling van  $t_i$  volgens (6.5) het volgende resultaat heeft

$$t_1=0, t_2=5, t_3=9, t_4=12 \quad (6.19)$$

Voor de verzamelingen  $\mathcal{P}_k$  vinden we met (6.16)

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 = \{12, 23, 34\} \\ \mathcal{P}_2 = \mathcal{P} \\ \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_4 = \emptyset \end{cases} \quad (6.20)$$

5)  $\emptyset$  is het symbool voor de lege verzameling.



Nu wordt de procedure  $\mathcal{L}$  toegepast. Regel 1 is zeer eenvoudig. Om te zien of regel 2 kan worden toegepast, zoeken we activiteiten waarvan het begin wel, en het eindpunt niet een label heeft. Daar alleen de oorsprong gelabelleerd is, komen 12 en 13 in eerste instantie beide in aanmerking. Echter 13 behoort niet tot  $\mathcal{P}_1$ , zodat we ons moeten beperken tot 12. Deze behoort tot  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ , en  $0 = u_{12} < a_{12} = 2$ , zodat we aan knooppunt 2 de label  $(+1, 2)$  kunnen geven. Nu kan regel 2a worden toegepast op activiteit 23; het resultaat is dat 3 de label  $(+2, 2)$  krijgt. Tenslotte kunnen we 2a toepassen op 34: knooppunt 4 krijgt de label  $(+3, 2)$ . Hier is  $\mathcal{L}$  dus beëindigd: alle knooppunten hebben een label, dus verdere labelering is zeker niet mogelijk. (zie fig. 6.4)

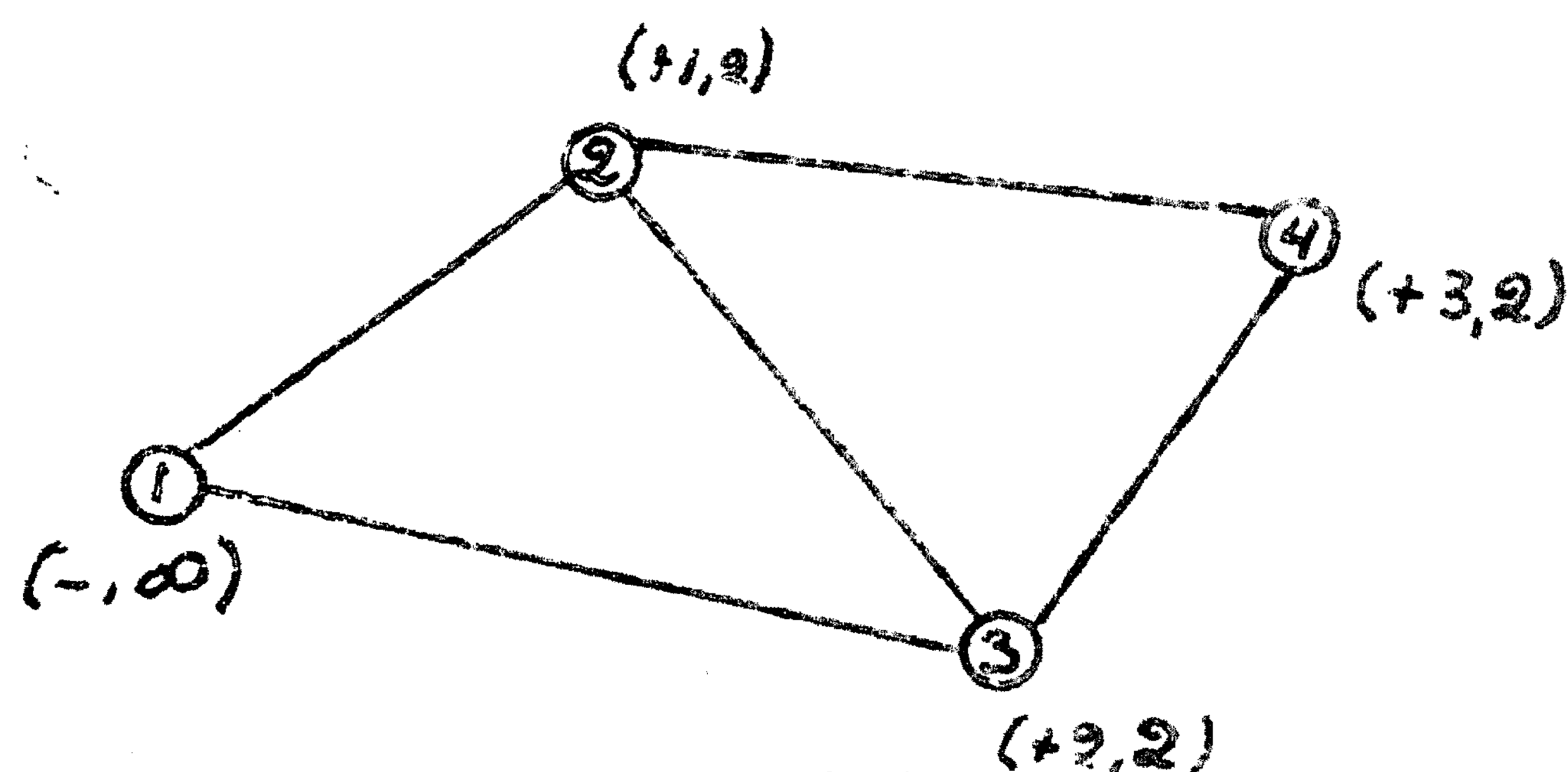


Fig. 6.4

Resultaat van de eerste labellering

Nu moet dus  $m$  worden toegepast. Knooppunt 4 heeft de label  $(+3, 2)$ , dus  $u_{34}$  wordt met 2 vermeerderd; 3 heeft de label  $(+2, 2)$  dus  $u_{23}$  wordt met 2 vermeerderd; 2 heeft de label  $(+1, 2)$  dus  $u_{12}$  wordt eveneens met 2 vermeerderd. De nieuwste waarden van  $u_{ij}$  zijn dus

$$\begin{cases} u_{12} = 2 \\ u_{13} = 0 \\ u_{23} = 2 \\ u_{24} = 0 \\ u_{34} = 2 \end{cases} \quad (6.21)$$



Met gebruikmaking van deze u-waarden gaan we nu  $\mathcal{L}$  herhalen. De oorsprong krijgt weer zijn label (blanco,  $\infty$ ), maar het is nu niet mogelijk om nog verdere labelen uit te delen. Immers: 2a kan niet worden toegepast op 12 omdat  $u_{12} = a_{12}$ , en niet op 13 omdat  $13 \notin \mathcal{P}_1$ ;  $\mathcal{P}_3$  en  $\mathcal{P}_4$  zijn leeg, zodat 2b niet kan worden toegepast; 2c levert nooit een label op; tenslotte kan regel 3 niet worden toegepast omdat er geen activiteit is met de oorsprong als eindpunt.

We kennen nu  $\mathcal{Y}$  en  $\mathcal{Y}$ , en kunnen met de definities (6.18), (6.13), (6.14), (6.9) en (6.15) achtereenvolgens de hieronder vermelde grootheden bepalen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Y} = \{1\} \\ \mathcal{Y} = \{2, 3, 4\} \\ \mathcal{S}_1 = 0, \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = 1 \\ \mathcal{G}_{12} = 1, \text{ alle andere } \mathcal{G}_{ij} \text{ zijn } 0 \\ p_{13} = -1, \text{ alle andere } p_{ij} \text{ zijn } 0 \\ \alpha = 4, \beta = \infty, \gamma = 2, \theta_0 = 2 \end{array} \right. \quad (6.22)$$

Het optimale schema voor  $\theta = \theta_0 = 2$ , dus voor projectduur 10 is nu, blijkens (6.8) als volgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1' = 0, t_2' = 3, t_3' = 7, t_4' = 10 \\ y_{12}' = 3, y_{13}' = 5, y_{23}' = 4, y_{34}' = 3 \end{array} \right. \quad (6.23)$$

Tweede verkorting. Voor de tweede verkorting hebben we, behalve  $u_{ij}$ ,  $t_i$  en  $y_{ij}$  (zie (6.21) en (6.23)) ook weer de verzamelingen  $\mathcal{P}_k$  nodig. Hiervoor vinden we

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_1 = \{12, 23, 34\} \\ \mathcal{P}_2 = \{13, 23, 24, 34\} \\ \mathcal{P}_3 = \emptyset \\ \mathcal{P}_4 = \{12\} \end{array} \right. \quad (6.24)$$



De procedure  $\mathcal{L}$  heeft het in fig. 6.5 afgebeelde resultaat.

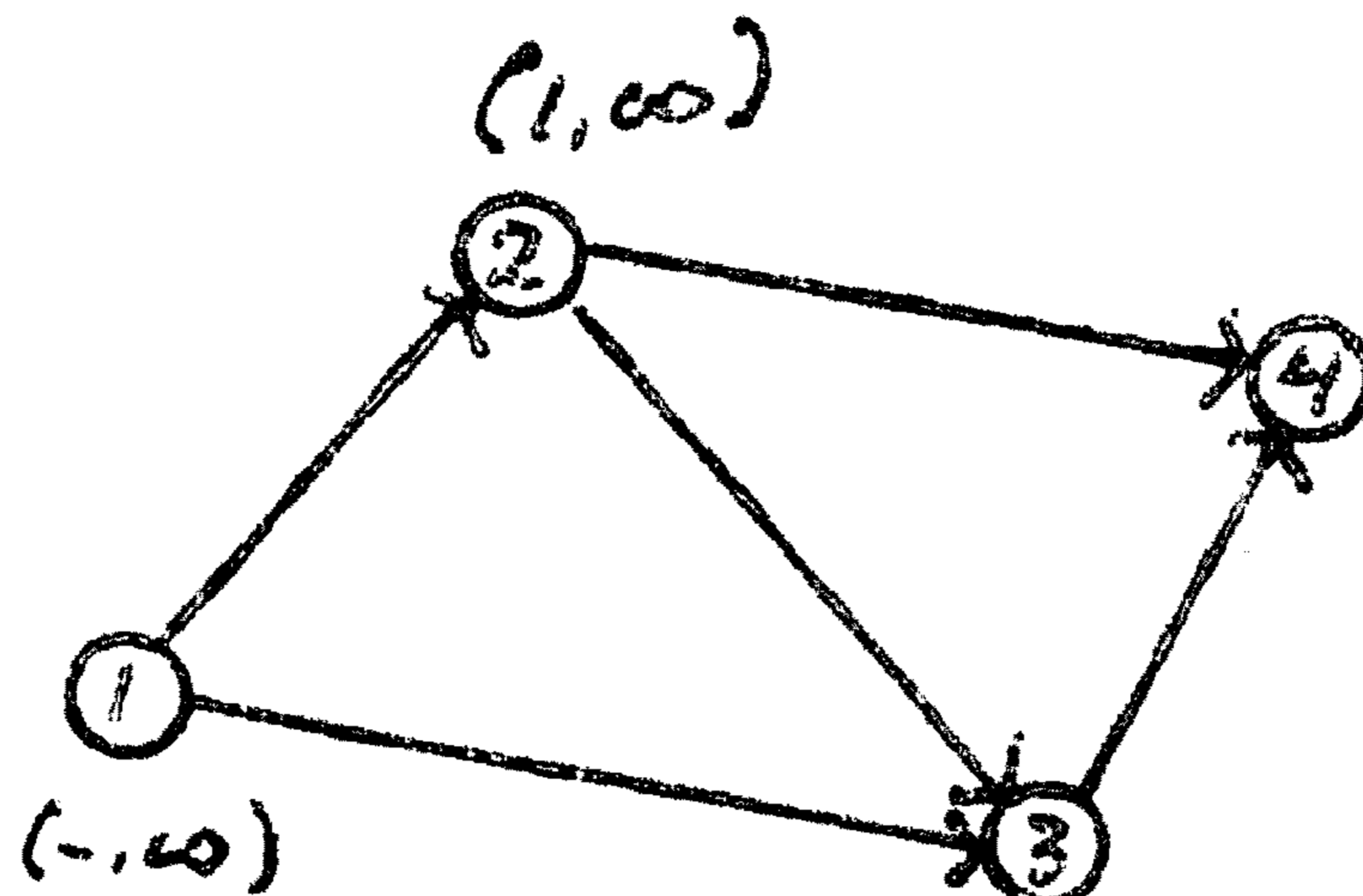


Fig. 6.5

Labellering bij de tweede verkorting

Hiermee vinden we:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Y} = \{1, 2\} \\ \mathcal{Z} = \{3, 4\} \\ \delta_1 = \delta_2 = 0, \delta_3 = \delta_4 = 1, \\ \sigma_{23} = 1, \text{ alle overige } \sigma_{ij} \text{ zijn } 0, \\ p_{13} = p_{24} = -1, \text{ alle overige } p_{ij} \text{ zijn } 0, \\ \alpha = 1, \beta = \infty, \gamma = 2, \theta_0 = 1 \end{array} \right. \quad (6.25)$$

Het optimale schema voor projectduur 9 is dus

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = 0, t_2 = 3, t_3 = 6, t_4 = 9 \\ y_{12} = 3, y_{13} = 5, y_{23} = 3, y_{24} = 6, y_{34} = 3 \end{array} \right. \quad (6.26)$$

Derde verkorting. De  $u_{ij}$  zijn bij de vorige fase niet gewijzigd, en worden dus gegeven door (6.21), terwijl de  $t_i$  en  $y_{ij}$  in (6.26) zijn vermeld. Toepassing van (6.16) geeft

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_1 = \{12, 23, 24, 34\} \\ \mathcal{P}_2 = \{13, 24, 34\} \\ \mathcal{P}_3 = \emptyset \\ \mathcal{P}_4 = \{12\} \end{array} \right. \quad (6.27)$$



$\mathcal{L}$  verloopt nu als volgt: de oorsprong krijgt de label (blanco,  $\infty$ ). Regel 2b kan worden toegepast op activiteit 12, zodat knooppunt 2 de label (+1,  $\infty$ ) krijgt. Regel 2a kan nu worden toegepast op 24, en 4 krijgt de label (+2, 4). Tenslotte kan door toepassing van 3a aan 3 de label (-4, 2) worden gegeven. Alle knooppunten hebben nu een label, dus  $\mathcal{L}$  is beëindigd (zie fig. 6.6). In het bijzonder heeft de voltooiing een label zodat  $\mathcal{M}$  moet worden toegepast.

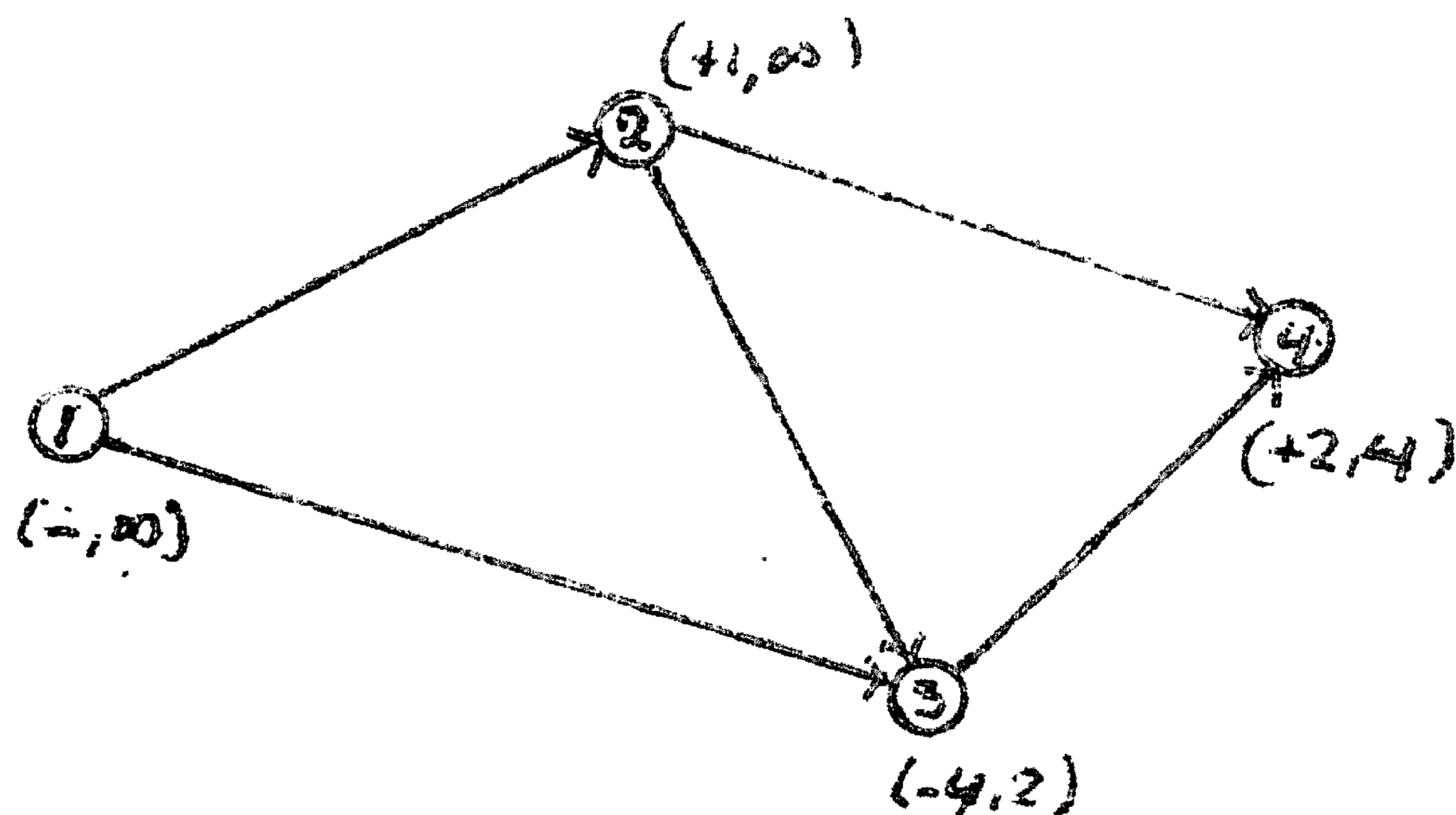


Fig. 6.6

Labellering bij de derde verkorting

Knooppunt 4 heeft de label (+2, 4), dus  $u_{24}$  wordt met 4 vermeerderd. Knooppunt 2 heeft de label (+1,  $\infty$ ), dus  $u_{12}$  wordt met 4 vermeerderd. Hiermee is  $\mathcal{M}$  beëindigd. De nieuwe waarden van  $u_{ij}$  zijn:

$$\begin{cases} u_{12} = 6 \\ u_{13} = 0 \\ u_{23} = 2 \\ u_{24} = 4 \\ u_{34} = 2 \end{cases} \quad (6.28)$$

We gaan nu  $\mathcal{L}$  opnieuw toepassen. De oorsprong krijgt weer de label (blanco,  $\infty$ ), en volgens regel 2b krijgt 2 de label (+1,  $\infty$ ). Verdere labels kunnen niet worden uitgerekend.



We hebben dus

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J} = \{1, 2\} \\ \mathcal{J} = \{3, 4\} \\ \delta_1 = \delta_2 = 0, \delta_3 = \delta_4 = 1 \\ \sigma_{23} = \sigma_{24} = 1 \\ p_{13} = -1 \\ \text{de overige } \sigma \text{'s en } p \text{'s zijn } 0 \\ \theta_0 = 1 \end{array} \right. \quad (6.29)$$

Het optimale schema voor projectduur 8 is dus

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1=0, t_2=3, t_3=5, t_4=8 \\ y_{12}=3, y_{13}=5, y_{23}=2, y_{24}=5, y_{34}=3 \end{array} \right. \quad (6.30)$$

Van de laatste<sup>6)</sup> fase geven we alleen het resultaat:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1=0, t_2=3, t_3=5, t_4=7 \\ y_{12}=3, y_{13}=5, y_{23}=2, y_{24}=4, y_{34}=2 \end{array} \right. \quad (6.31)$$

We beschouwen nu het verloop van de opbrengstfunctie. In het tijdsinterval dat correspondeert met de bekorting bij één fase, neemt  $W(T)$  altijd lineair af. Daar het bekorten steeds "moeilijker" wordt zal de daling steeds sneller geschieden in een volgende fase, of althans minstens even snel. De opbrengstfunctie is dus concaaf (zie Hoofdstuk XIII, § 2). In fig. 6.7 is  $W(T)$  geschetst voor het uitgewerkte voorbeeld.

---

6) Dat deze fase inderdaad de laatste is kan men o.a. inzien door na te rekenen dat  $m=7$ .



De dik getekende punten corresponderen met waarden van

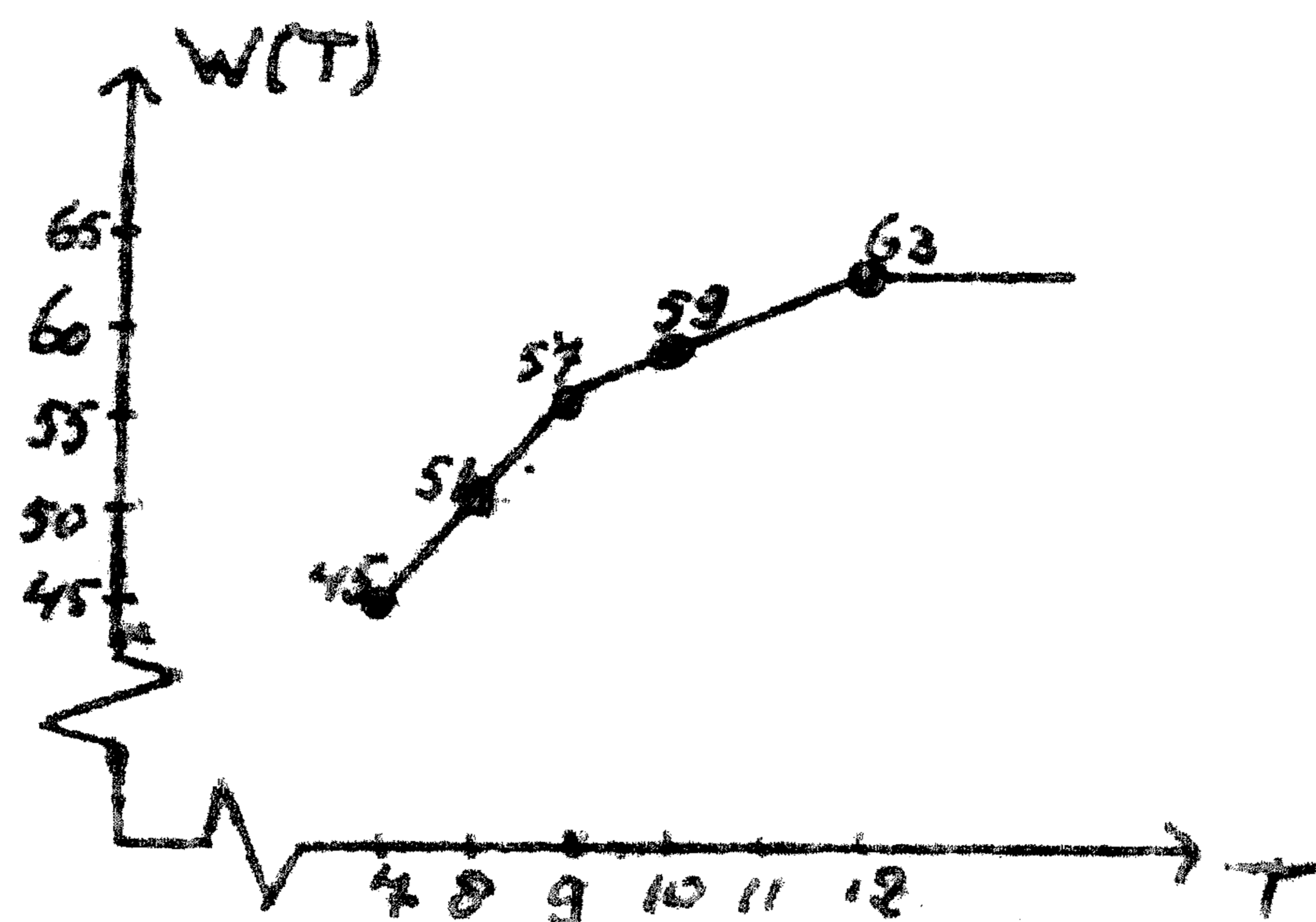


Fig. 6.7

De opbrengst als functie van T

T waarvan de ene fase naar de volgende wordt overgegaan.

De "Critical Path Method" is voor het eerst toegepast bij de bouw van een chemische fabriek. Een beknopte beschrijving hiervan, en van vele andere niet-wiskundige aspecten van de methode kan men vinden in de brochure "Critical-Path Planning and Scheduling" door James E. Kelley Jr. en Morgan R. Walker (1959 Proceedings of the Eastern Joint Computer Conference).

### 7. Beperkte hulpbronnen

Veronderstel dat men bij het plannen volgens Pert een schema heeft gevonden dat een redelijke kans heeft om binnen een bepaalde tijd klaar te komen, of bij het plannen volgens CPM een schema dat de totale kosten minimaliseert. Het kan nu gebeuren dat het buiten beschouwing laten van de beperktheid der benodigde hulpbronnen een schema heeft opgeleverd dat in de praktijk onuitvoerbaar is. In paragraaf 3 is hiervan al een eenvoudig voorbeeld genoemd.

Het uitbreiden der hulpbronnen (meer arbeidskrachten aanstellen, meer machines aanschaffen, e.d.) om



ervoor te zorgen dat zulke schema's toch uitvoerbaar zijn, is alleen dan efficiënt als deze hulpbronnen ook voor een belangrijk deel van de tijd gebruikt kunnen worden.

Men kan trachten de ideale situatie waarin van alle hulpbronnen steeds de maximale capaciteit wordt benut, te benaderen door bijv. activiteiten met een grote speelruimte enige tijd uit te stellen. Meestal zal het echter noodzakelijk zijn om de projectduur te verlengen. Het is natuurlijk lastig om een geschikt criterium op te stellen dat het verlagen van de pieken afweegt tegen het uitstellen van de voltooiing. Maar ook in het geval dat gevraagd wordt een schema op te stellen van minimale duur, onder de voorwaarde dat het gebruik per tijds-eenheid van iedere hulpbron een gegeven grens niet mag overschrijden, blijft een bijzonder moeilijk probleem bestaan.

Er is een computer-algorithme<sup>1)</sup> bekend die volgens een probeermethode een benaderende oplossing geeft van dit probleem. Deze oplossing voldoet weliswaar aan de voorwaarden, maar garandeert geen minimale projectduur. Afgezien hiervan heeft de algorithme het bezwaar dat vrije grenzen moeten worden opgelegd aan het toegestane aantal hulpbronnen en het aantal capaciteitsniveaux.

Een verdere complicatie die kan optreden is het feit dat hulpbronnen elkaar soms gedeeltelijk kunnen

---

1) W.A. Gray en E.M. Kidd, Critical Path Scheduling with Resource Leveling on the I.B.M. 7090; Union Carbide Nuclear Company; A.E.C. Research and Development Report, K-1499, 1962.



vervangen. Het probleem wordt nog complexer wanneer aan meer dan één project tegelijk wordt gewerkt. Ook hier doet zich vooral de moeilijkheid voor dat eerst een geschikt criterium moet worden gevonden, bijv. om de kortingen van verschillende projecten tegen elkaar af te wegen.