STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

S 342

INLEIDING TOT DE BESLISKUNDE

Hoofdstuk I

Het beslissingsprobleem en het bijbehorende model

door

Prof.Dr. G. de Leve

maart 1965

Printed at the Mathematical Centre at Amsterdam,49,2nd Boerhaavestraat.
The Netherlands.

The Mathematical Centre, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Scientific Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

1. Inleiding

Het zal slechts weinigen zijn ontgaan dat er situaties bestaan waarin beslissingen moeten worden genomen. Van een groot aantal beslissingen zijn wij ons evenwel niet bewust, omdat, gezien onze instelling en ervaring, de te nemen beslissingen zo vanzelfsprekend of van zo'n ondergeschikt belang zijn, dat zij zonder enig nadenken kunnen worden genomen.

Er bestaan echter ook situaties waarin wij niet zonder gevoelens van twijfel een keuze maken uit de verschillende mogelijkheden. Naarmate de situatie waarin men moet beslissen ingewikkelder wordt van structuur, naarmate de tijd beschikbaar om tot een beslissing te komen korter wordt, ontstaat de behoefte aan een minder intuïtieve werkwijze.

Besliskunde is inherent met een natuurwetenschappelijke benadering van het beslissingsprobleem. Wat is kenmerkend voor deze benadering?

In de natuurwetenschappen probeert men dikwijls met veel succes de waargenomen verschijnselen te beschrijven met behulp van wiskundige begrippen. Een groot deel van het instrumentarium van de wiskundige wordt dienstbaar gemaakt om de waargenomen of hypothetische samenhang tussen verschijnselen aan te duiden. Uit onze middelbare-schooljaren kennen wij nog de relaties:

$$\frac{PV}{T} = R = \text{constant} \quad \text{(wet van Boyle - Gay-Lussac)}$$

in woorden: druk (P) maal volume (V) is evenredig met de temperatuur (T), en

$$V = IR \quad \text{(wet van Ohm)}$$

in woorden: spanningsverschil (V) is stroomsterkte (I) maal weerstand (R). Bovendien herinneren wij ons nog wel de uitspraak (1$^{\text{ste}}$ wet van Kepler): "De baan van een planeet om de zon kan worden beschreven met behulp van een ellips met de zon in één van de brandpunten".

Relaties van dit type en andere wiskundige uitdrukkingen vormen tezamen het z.g.n. <u>Mathematisch model</u> van het beschouwde fenomeen.

In tegenstelling tot andere modellen (beschrijvingsvormen van een situatie) zoals etalagepoppen, maquettes etc. mist het mathematisch model de fysische gelijkenis met haar object.

Gelijk in elk ander model krijgt alleen dat wat de waarnemer opmerkt en op een bepaald moment karakteristiek vindt, zijn plaats in het mathematisch model. In de wet van Boyle - Gay-Lussac wordt niet gesproken over de vorm van het volume. In de eerste wet van Kepler wordt de - voor aardse begrippen redelijke - omvang van de zon samengeperst in een punt zonder afmetingen. Verder zal de waarnemer zijn gebrek aan kennis dikwijls aanvullen met veronderstellingen die niet vervuld behoeven te zijn.

Het mathematisch model geeft dus in principe een onvolledig en misschien zelfs een onjuist "wiskundig" beeld van de beschouwde situatie. Het gebeurt dan ook vaak dat het gangbare mathematisch model na het verkrijgen van meer informatie vervangen dient te worden. Dit laatste geschiedde bij het model van Boyle - Gay-Lussac. Een aantal gassen vertoonden bij hoge druk belangrijke afwijkingen van de gelijknamige wet. Van der Waals verkoos voor die gevallen het iets afwijkende model

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2},$$

waarbij a, b en R constanten zijn.

Met behulp van een mathematisch model kunnen wij hypothesen toetsen, voorspellingen doen en zoals wij straks zullen zien beslissingen aanwijzen.

Ook in vele niet-natuurwetenschappen kan deze werkwijze zijn nut afwerpen. De toepassing in de Psychologie en de Economie hebben geleid tot jonge wetenschappen: de Psychometrie en de Econometrie.

Ook in situaties waarin beslissingen genomen moeten worden kan men dikwijls de samenhang tussen de relevante factoren op een wiskundige wijze uitbeelden. In een besliskundige aanpak probeert men, door invoering van een mathematisch model van de beslissingssituatie, het beslissingsprobleem te vertalen in een wiskundig probleem en wel een wiskundig optimum probleem.

De oplossing van het wiskundig probleem geeft na terugvertalen het antwoord op het beslissingsprobleem. Ook hier dient men zich ervan bewust te zijn dat de gevonden beslissing uiteindelijk afhangt van de keuze van het mathematisch model. Dikwijls wordt deze keuze geleid door de wens om na vertaling een wiskundig optimum probleem te verkrijgen dat oplosbaar is.

De meeste toepassingen van de besliskunde komen uit de bedrijfseconomische sector. Dit neemt echter niet weg dat ook in andere gebieden van het menselijk handelen de besliskunde haar bijdrage kan leveren tot de oplossing van beslissingsproblemen. Bijgevolg kan een besliskundig onderzoek een bundeling zijn van een aantal uiteenlopende activiteiten, zoals marktonderzoek, tijdstudies, wiskundige research etc. Het onderscheidt zich van ieder ander onderzoek doordat het gericht is op de vertaling van het beslissingsprobleem in een wiskundig optimum probleem. De theorie welke zich, binnen het mathematisch model, bezig houdt met dit type van optimum problemen zullen wij in het vervolg aangeven met <u>Mathematische besliskunde</u>.

Keren wij thans terug tot de in het begin van deze paragraaf gemaakte opmerking waarin melding wordt gemaakt van een behoefte aan een minder intuïtieve werkwijze.

In de volgende paragraaf zullen wij aan de hand van een aantal beslissingsproblemen nagaan welke wensen men koestert met betrekking tot zo'n werkwijze.

In §3 zullen wij laten zien, dat de hierboven genoemde benadering in principe aan deze wensen tegemoet kan komen. In die paragraaf komt tevens tot uitdrukking hoe de vertaling van het beslissingsprobleem in een wiskundig probleem verloopt.

In §4 zullen wij ons echter afvragen wanneer het wel en wanneer het niet zinvol is om de hulp van de wiskunde in te roepen.

2. Het beschrijven van beslissingsproblemen

In deze paragraaf zullen wij eerst een vijftal beslissingsproblemen formuleren. Onder deze problemen bevindt zich slechts één, die op een ondubbelzinnige wijze kan worden opgelost. De formulering van de overige problemen is nog niet geheel rond. Noodzakelijke gegevens ontbreken nog.

Het eerste voorbeeld

Een fabrikant wil veevoeder op de markt brengen dat verkregen wordt door een aantal grondstoffen in een geschikte verhouding te mengen. Hij koopt daartoe elke vrijdag zoveel grondstoffen in als nodig is voor de productie van de komende week. In tabel 2.I vindt men behalve de gedeeltelijke samenstelling van grondstoffen ook hun prijzen vermeld.

Tabel 2.I. Gegevens over beschikbare grondstoffen op 7-4-1955

%	Vocht	Verteerbaar ruw eiwit	eiwit	Ruw vet	Zetmeel	Ruwe celstof	Prijs in f/100 kg.
Rogge	9,5	6,6	7,9	1,2	49,7	1,7	22,75
Milocorn	8,5	5,7	7,4	2,3	52,1	2,4	22,35
Paardebonen	10	15,4	17,5	1	46,9	5,6	30,25
Sojaschroot	8,1	29,8	33	0,6	48,9	4,5	38,25
Cocoskoeken	7,1	11,8	14	7	54,7	11,5	32,50
Palmpitschroot	8,1	12,7	13,2	1,8	43	18	26,50
Negerzaadschilfers	7,3	20,2	22,8	3,6	41,7	12,2	32,50

Aan de samenstelling van het veevoeder zijn enkele eisen gesteld. Deze restricties worden aangegeven in tabel 2.II.

Tabel 2.II. Eisen, opgelegd aan de samenstelling van het veevoeder

Ingrediënten	Maximaal %	Minimaal %
Rogge	20	
Milocorn	15	
Paardebonen	7	
Sojaschroot		5
Cocoskoeken		2
Palmpitschroot		8
Negerzaadschilfers	10	
Eiwit		14,7
Verteerbaar ruw eiwit		12
Vocht	7,6	
Zetmeel		42
Ruwe vezels	8,4	
Vet		2,1

De mengverhouding zal nu zo moeten worden gekozen dat b.v. het totale eiwitgehalte, resulterend uit de diverse bijdragen minimaal 14,7 % is. Op overeenkomstige wijze zullen ook de overige eisen aan de samenstelling van het veevoeder (tabel 2.II) beperkingen opleggen.

Uiteraard wil men het produkt met de hierboven aangegeven eigenschappen zo goedkoop mogelijk produceren. De ondernemer zal, rekening houdend met de prijzen der grondstoffen, die mengverhouding moeten vinden, waarbij tegen zo laag mogelijke totale kosten aan grondstoffen een product met de vereiste eigenschappen wordt verkregen.

Heeft hij dit probleem opgelost en blijven zowel de samenstellingen als de prijzen van de grondstoffen constant, dan weet hij voor eens en voor altijd in welke gewichtsverhouding hij zijn grondstoffen zal moeten inkopen.

Zijn de prijzen en/of de samenstellingen van de grondstoffen aan wijzigingen onderhevig dan zal de mengverhouding steeds moeten worden aangepast.

Het tweede voorbeeld

Een automobilist heeft een schadeverzekering afgesloten. In de bijbehorende polis worden o.a. de volgende voorwaarden vermeld:

1) De looptijd van de verzekering is één jaar. Aan het eind van ieder jaar kan zij worden verlengd. De premie moet aan het begin van ieder premie-jaar worden voldaan.
2) De premie bedraagt ƒ 320,-, tenzij
   a) in de voorafgaande periode van één jaar geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie ƒ 280,-, tenzij
   b) in de voorafgaande periode van twee jaar geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie ƒ 240,-, tenzij
   c) in de voorafgaande periode van drie jaar geen schade is geclaimd. In dat geval bedraagt de premie ƒ 220,-.
3) Indien men een schade wil claimen dient dit onmiddellijk te geschieden. Slechts het verschil tussen de schade en een vast bedrag van ƒ 80,-, het zogenaamde eigen risico, wordt door de verzekering uitbetaald.

Gevraagd wordt voor elk tijdstip aan te geven welke schaden geclaimd moeten worden.

Het is duidelijk dat de automobilist nooit een schade van minder dan ƒ 80,- zal claimen. Het is ook duidelijk, dat hij, als nog geen schade is geclaimd dat jaar, met het oog op de premie reducties voor schade-vrij rijden geen schaden zal claimen, welke slechts een weinig hoger zijn dan het eigen risico. De vraag is nu waar precies de grens ligt tussen de schaden die wel en die niet moeten worden geclaimd. Het behoeft geen betoog, dat de grenswaarden zullen afhangen van de laatst betaalde premie en van het tijdstip in het premiejaar.

Het derde voorbeeld

Een fabriek kan hoogstens drie gelijke machines inschakelen bij de vervaardiging van één product. Voor het product geldt dat de gemiddelde vraag per tijdseenheid kleiner is dan de gezamenlijke productie van drie machines per tijdseenheid. De voorraad capaciteit is beperkt en bedraagt M eenheden. De voorraadkosten per tijdseenheid zijn evenredig met de

grootte van de voorraad. De productiekosten per tijdseenheid worden mede bepaald door het aantal ingeschakelde machines. Het omschakelen naar hogere of lagere productiesnelheden brengt extra kosten met zich mede, die afhangen van de volgorde van het betreffende tweetal productiesnelheden. Indien de voorraad niet toereikend is dan worden de gevraagde goederen geleverd via een zusterfabriek. De tussen beide fabrieken overeengekomen verrekeningsprijs ligt hoger dan de gemiddelde kostprijs.
Gevraagd wordt voor iedere productiesnelheid na te gaan bij welke voorraden men moet omschakelen en waarheen?

Het vierde voorbeeld

Een inkoper van een speciaalzaak in dameshoedjes gaat ieder najaar naar Parijs om een nieuwe collectie samen te stellen. Deze hoedjes worden dan het volgende voorjaar tussen 1 februari en 1 juli in de normale verkoop gebracht. Tijdens de uitverkoop (1 - 15 juli) worden de hoedjes tegen een sterk gereduceerde prijs aangeboden. De ervaring leert dat alle restanten in de uitverkoop kunnen worden opgeruimd.

In elk najaar moet de inkoper dus beslissen welke typen en hoeveel van elk moeten worden ingekocht. Hij weet hoeveel overeenkomstige hoedjes in de afgelopen jaren in de normale verkoop zijn verkocht. Bovendien zijn hem de inkoop- en verkoopprijzen bekend.

Het vijfde voorbeeld

Een meisje hoopt op een uitnodiging voor een studentenbal in het onmiddellijke verschiet. Op een morgen op weg naar college beseft ze dat het er die dag om zal gaan. Zo direct zal ze Peter ontmoeten, een haar zeer toegewijde jongen. Zij geeft zichzelf een grote kans dat hij haar zal uitnodigen. Hij is echter een beetje gierig en zal haar vermoedelijk ter gelegenheid van het bal een corsage van slechts twee gulden aanbieden. Tijdens de lunch zal ze Frank ontmoeten. Als Frank haar vraagt dan komt hij zeker met een corsage van vier gulden voor de dag. In de loop van de middag zal zij op het sportveld René zien. René is tamelijk royaal en zal zeker met een corsage van vijf gulden komen opdraven.

De kans dat hij haar vraagt is echter niet zo groot. Eerst 's avonds evenwel ontmoet zij haar idool, Rob. Deze is erg gul en heeft voor het meisje waar hij mee uitgaat wel een corsage van acht gulden over. Helaas heeft hij nog veel andere interessen onder de meisjes en de kans op een uitnodiging is zeer gering.

Het meisje begrijpt dat zij bij een eventuele uitnodiging direct moet beslissen. Ze vraagt zich nu af wat zij die dag moet doen als zij niet alleen naar het bal wil maar ook zo mooi mogelijk wil verschijnen.

Wanneer men deze voorbeelden met elkaar vergelijkt vertonen zij op het eerste gezicht weinig punten van overeenkomst.

Immers het eerste voorbeeld is een mengprobleem, het tweede een verzekeringsprobleem, het derde een productieprobleem, terwijl het vierde en het vijfde respectievelijk een inkoop- en een "bal"probleem voorstellen.

De vijf problemen zijn inderdaad qua vorm verschillend maar dit betekent nog niet dat de wijzen van oplossen verschillend zijn. Een indeling van de beslissingsproblemen in transport-, voorraad-, productie-, vervangingsproblemen etc. leidt in het algemeen niet tot groepen van beslissingsproblemen met identieke oplossingsmethoden. In §3 zullen wij b.v. zien, dat in de mathematische modellen een dergelijk fysisch onderscheid niet eens gemaakt wordt. Bovendien verkrijgt men juist een beter inzicht in de structuur van de beslissingssituatie als men in staat is het probleem te formuleren <u>zonder</u> gebruik te maken van begrippen als voorraad, machine, haven, etc. Door invoering van een uniforme karakterisering van het beslissingsprobleem onderkent men identieke oplossingsmogelijkheden voor problemen, welke in hun oorspronkelijke vorm weinig gelijkenis vertoonden.

Door het beslissingsprobleem te lichten uit zijn locale sfeer verschaft men zich dikwijls veel inzicht. Om een uniforme beschrijving van het beslissingsprobleem mogelijk te maken zullen wij een aantal begrippen invoeren. Met behulp van deze begrippen zullen wij tevens trachten het beslissingsprobleem te analyseren. Men merke op dat iedere beschrijving van een beslissingssituatie een model van die situatie weergeeft. Het is immers ondoenlijk om hoe dan ook een situatie in al zijn bijzonderheden te schilderen.

Het object in onze beschouwing zullen wij steeds aanduiden met de naam "systeem".

In het eerste voorbeeld is het systeem "de productie van veevoeder". Wij bedoelen met de productie van veevoeder de gehele bedrijvigheid, welke zich rond het mengen afspeelt. In het derde voorbeeld wordt het systeem gevormd door de productie en de voorraad tezamen. In het tweede, vierde en vijfde voorbeeld beschouwen wij respectievelijk de systemen "verzekering", "hoeden collectie" en "bal".

In handelsondernemingen zal men misschien de voorkeur geven aan de woorden "zaak" of "zaken" boven dat van systeem.

Het tweede begrip waarvan wij ons zullen bedienen is "de toestand van het systeem". Immers, zoals uit de voorbeelden blijkt, zal de te nemen beslissing mede afhangen van de toestand waarin het systeem zich op het moment van beslissen bevindt. Uit de formulering van het beslissingsprobleem kan veelal worden opgemaakt welke factoren voor het vaststellen van die toestand relevant zijn. Bij de keuze van de factoren die de toestand van het systeem zullen bepalen, laten wij ons leiden door het principe dat deze factoren slechts die informatie mogen verschaffen welke kenmerkend is voor het beschouwde moment. Misschien is de keuze van "toestandsfactoren" onvolledig en wordt daardoor het model minder geschikt. In het eerste voorbeeld kan de toestand van het systeem worden gegeven door:

a) de huidige samenstelling van het veevoeder;
b) de samenstelling van de grondstoffen welke worden aangeboden;
c) de prijzen van deze grondstoffen.

In de toestand van het systeem zal men dus niet de kwaliteitseisen, opgegeven in tabel 2.II, verwerken. Deze eisen zijn niet kenmerkend voor een bepaald moment. Zij worden op ieder moment gesteld.

In ons model wordt de toestand van het systeem in het tweede voorbeeld bepaald door:

a) de laatst betaalde premie;
b) het tijdstip in het premiejaar;
c) het eventueel te claimen bedrag;
d) de omstandigheid of de verzekerde dat jaar al eerder een schade heeft geclaimd.

In de toestand van het systeem wordt dus geen plaats ingeruimd voor de in de polis genoemde premiebedragen en het eigen risico. Noch wordt vastgesteld dat men na het claimen van een schade het daaropvolgende jaar weer de hoogste premie moet betalen. Deze gegevens zijn niet kenmerkend voor het beschouwde tijdstip. Zij liggen eens voor altijd vast.

De toestand van het systeem in het derde voorbeeld wordt wellicht gegeven door:

a) de voorraad;

b) de productiesnelheid.

In de toestand van het systeem wordt niet aangegeven op welke wijze de klanten aankomen en hun bestellingen afgeven. De aankomsten en de bestellingen van klanten vloeien voort uit een proces dat voor alle tijdstippen tezamen beschreven moet worden (zie derde begrip!).

In het vierde voorbeeld wordt op het moment van inkopen de toestand van het systeem wellicht gekenmerkt door:

a) de inkoopprijzen;

b) de verkoopprijzen.

Wij vinden tenslotte voor het vijfde beslissingsprobleem de volgende toestandsgrootheden:

a) de ontmoeting (Peter, Frank, René of Rob);

b) de omstandigheid of zij bij deze ontmoeting wordt uitgenodigd;

c) de omstandigheid of zij reeds een uitnodiging heeft aanvaard. Zo ja, van wie?

De prijzen van de corsages waren reeds bekend en komen dus in de toestand van het systeem niet voor.

Het derde begrip dat wij zullen gebruiken heet "ontwikkeling in de toestand van het systeem". Bij zeer veel beslissingsproblemen wijzigt zich de toestand van het systeem in de loop van de tijd. De wijze waarop dit geschiedt zal mede de keus van de te nemen beslissing bepalen. Zowel in het eerste als in het vierde voorbeeld brengen prijsfluctuaties toestandsveranderingen te weeg. Schaden en uitnodigingen brengen in het tweede respectievelijk vijfde probleem droeve en welkome veranderingen in de toestand van het systeem.

De hierboven geschetste ontwikkelingen in de toestand van het systeem voltrekken zich min of meer buiten de wil van de beslisser om. Er bestaan echter ook toestandsveranderingen die een direct gevolg zijn van de activiteiten van de beslisser. Zo zal in het derde voorbeeld de beslissing die het omschakelen van de productie ten gevolge heeft uiteraard de toestand van het systeem doen veranderen. Ook in de overige voorbeelden kan men zien hoe beslissingen veranderingen aanbrengen in de toestand van het systeem.

Tegenover al deze ontwikkelingen in de toestand van het systeem staat de beslisser niet geheel onverschillig. Wij komen nu tot het volgende aspect van het beslissingsprobleem. De beslisser zal in het algemeen aan deze ontwikkelingen waarderingen toekennen en wel meestal in de vorm van kosten.

Wij hebben reeds vastgesteld dat de beslisser door het doen van beslissingen de ontwikkelingen in de toestand van het systeem kan beïnvloeden.

Zijn beslissingen zullen er dan ook op gericht zijn om door het teweeg brengen van toestandsveranderingen ongunstige ontwikkelingen tegen te gaan.

Indien men bij het zoeken naar een oplossing van een beslissingsprobleem behoefte heeft aan steun dan zullen de gedachten uitgaan naar methoden, die

1) de aanwezige of de nog in te winnen informatie over de toestand van het systeem in een te hanteren vorm kunnen uitdrukken;
2) de aanwezige of de nog in te winnen informatie over de toekomstige ontwikkelingen in de toestand van het systeem op een overzichtelijke wijze kunnen beschrijven;
3) de toegelaten beslissingen op een overzichtelijke wijze kunnen aangeven;
4) waarderingen kunnen toekennen aan ontwikkelingen in de toestand van het systeem en daardoor ook aan beslissingen die mede tot deze ontwikkelingen hebben bijgedragen. Het liefst zag men deze laatste waarderingen uitgedrukt in de vorm van een criterium voor het vergelijken van toegelaten beslissingen;

5) voor de toestand waarin de beslisser zich bevindt of voor alle toestanden waarin de beslisser kan komen te verkeren, de optimale beslissing kunnen aanwijzen.

3. Het wiskundig beschrijven van beslissingsproblemen

Gelijk wij reeds in §1 opmerkten laat een niet-wiskundig gebeuren zich weleens beschrijven met behulp van een wiskundige taal.

De vraag rijst nu of de wiskunde ook over de benodigde instrumenten beschikt als een beslissingssituatie beschreven moet worden. Wij zullen dit nu nagaan aan de hand van de vijf hierboven geformuleerde wensen. Een eventuele wiskundige beschrijving geeft dan het mathematisch model van de beschouwde situatie weer.

Eerste wens

In de toelichting op het begrip "toestand van het systeem" werd verondersteld dat de toestand van het systeem in het derde voorbeeld kon worden gegeven door de voorraad en de productiesnelheid. Beide toestandsgrootheden zijn kwantitatief. Indien wij een assenstelsel invoeren van twee onderling loodrecht op elkaar staande assen (zie fig. 3.1) dan kunnen wij de toestand van het systeem op elk tijdstip aangeven met een punt s in het coördinatenvlak. Voor het geval de voorraad 200 stuks bedraagt en twee machines zijn ingeschakeld in de productie dan wordt de toestand van het systeem aangegeven door het punt s in figuur 3.1.

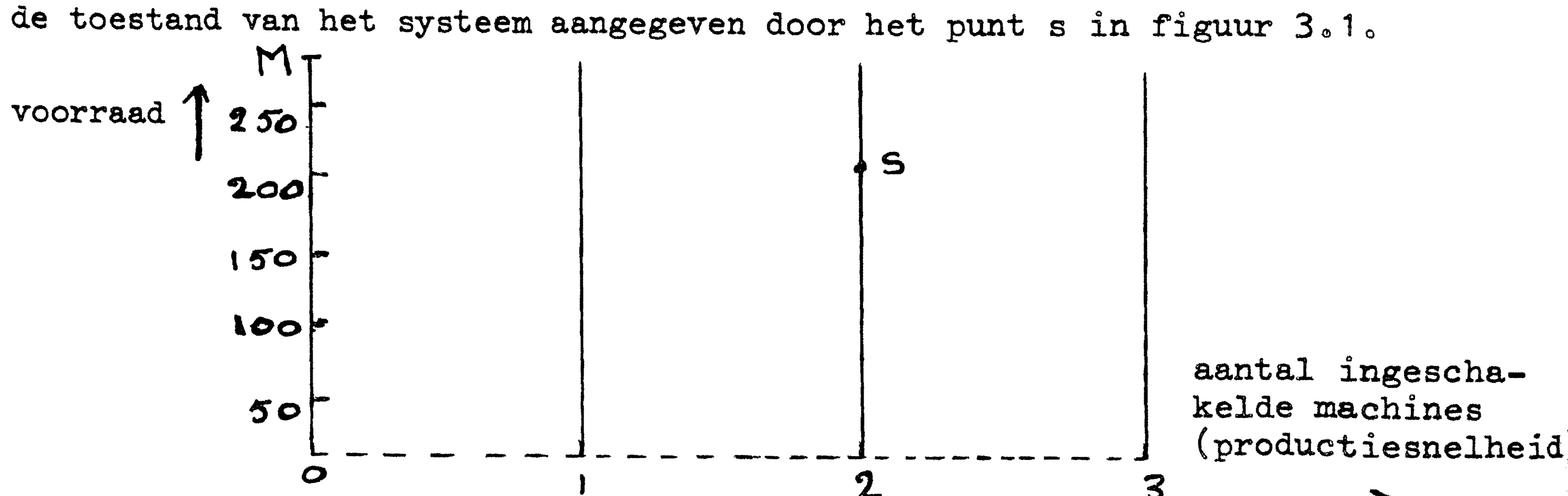


fig. 3.1

Toestandsruimte behorende bij het derde voorbeeld

De ruimte opgespannen door deze twee coördinaat-assen noemen wij de "toestandsruimte S".

Uit deze beschouwing volgt dat de toestand van het systeem in het derde voorbeeld steeds kan worden geïdentificeerd met een punt in een vlak.

De toestandsgrootheden van het tweede voorbeeld worden gegeven door:

a) de laatst betaalde premie;
b) het tijdstip in het premiejaar;
c) de eventueel te claimen schade;
d) de omstandigheid of er al eerder in het premiejaar een schade is geclaimd of niet.

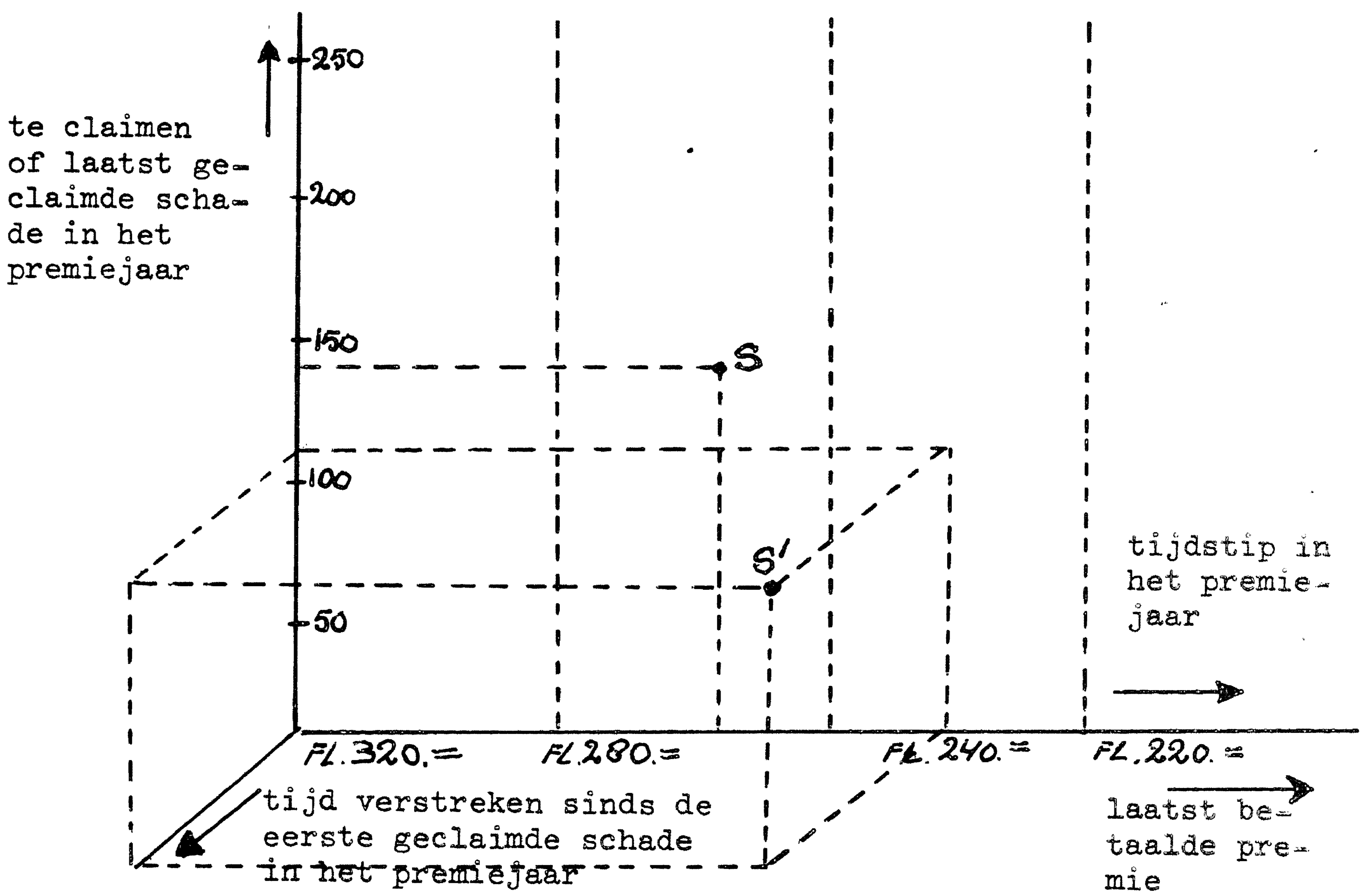


fig. 3.2

Toestandsruimte behorende bij het tweede voorbeeld

De omstandigheid of er al eerder in het premiejaar een schade is geclaimd of niet, kan men weergeven door de tijd te noteren die verstreken is sinds de eerste geclaimde schade in het premiejaar. De laatstgenoemde tijdsduur wordt gelijk aan nul gekozen, indien nog geen schade is geclaimd.

In figuur 3.2 zijn op de horizontale as in het vlak van tekening vier tijdsintervallen van één premiejaar getekend; elk interval correspondeert met een premie. Op de vertikale as wordt de te claimen schade of als geen schade te claimen is de laatst geclaimde schade in het premiejaar uitgezet. Indien nog geen schade is geclaimd in het premiejaar, dan wordt deze schade gelijk aan nul gekozen. De derde as dient om de tijd aan te geven verstreken sinds de eerste geclaimde schade in het premiejaar. Het punt s in fig. 3.2 geeft de toestand van het systeem aan $7\frac{1}{2}$ maand na de betaling van een premie van f 280,-. Op dat tijdstip had de verzekerde een schade van f 140,-, terwijl in het toen lopende premiejaar nog geen schade was geclaimd. Het punt s' in fig. 3.2 geeft de toestand van het systeem aan $6\frac{1}{2}$ maand na de betaling van een premie van f 240,-. Op dat tijdstip had de verzekerde een schade van f 148,-, terwijl in het toen lopende premiejaar reeds een schade was geclaimd.

Ook voor de overige voorbeelden kan men een passende toestandsruimte construeren.

In een wiskundige formulering zal men voor elk tijdstip de toestand van het systeem aangeven met een punt in een één of meer dimensionale Cartesische ruimte S. Deze ruimte wordt steeds de toestandsruimte genoemd.

Tweede wens

De ontwikkelingen in de toestand van het systeem manifesteren zich in de wiskundige beschrijving door "wandelingen" en "sprongen" van het systeem in de toestandsruimte.

Er bestaan beslissingssituaties waarin de toestand van het systeem zich in 't geheel niet wijzigt. Een dergelijke situatie treedt op in het eerste voorbeeld als de prijzen en samenstellingen van grondstoffen constant blijven.

De wandeling is dan ontaard in een "pas op de plaats". Wij blijven ook in dit geval spreken van een wandeling.

Wij hebben reeds opgemerkt dat de wijze waarop de toestand van het systeem zich in de toekomst al of niet zal wijzigen dikwijls van invloed is op de nu te nemen beslissing.

Als de ontwikkelingen in de toestand van het systeem deterministisch van aard zijn dan kan men dikwijls gedeelten van de wandeling in de toestandsruimte beschrijven met behulp van "bewegingsvergelijkingen" uit de klassieke mechanica. Indien b.v. een voorraad op het tijdstip t_n $s^{(n)}$ eenheden groot is en als gedurende het tijdsinterval (t_n, t_{n+1}) een constante goederenstroom van α eenheden per tijdseenheid de voorraad verlaat, dan wordt de voorraad op een tijdstip t in het tijdsinterval (t_n, t_{n+1}) gegeven door

$$s^{(t)} = s^{(n)} - \alpha(t - t_n). \qquad (3.1)$$

Als de voorraad de enige factor is die de toestand van het systeem karakteriseert dan geeft (3.1) de wandeling aan in S voor de tijdsperiode (t_n, t_{n+1}). Relaties van het type (3.1) geven in de klassieke mechanica de nog door het bewegend lichaam af te leggen afstand aan, wanneer de oorspronkelijke afstand $s^{(n)}$, de constante snelheid α en het op het tijdstip t_n vertrokken is.

Indien echter de ontwikkelingen in de toestand van het systeem stochastisch van aard zijn, dan maakt het systeem een "verrassingsrit" door de toestandsruimte S. In het derde voorbeeld (zie fig. 3.1) beklimt het systeem gestadig één van de vertikale lijnstukken. Telkens als er een klant binnenkomt valt het weer een stuk terug. Indien de behoefte van de klant van tevoren niet bekend is, dan maakt het een val van stochastische lengte. Wanneer de beslisser vindt dat het systeem te goed of te slecht klimt moet het op dezelfde hoogte op een andere "paal" verder proberen.

In de waarschijnlijkheidsrekening en wel in het bijzonder in de theorie van de stochastische processen weet men dikwijls wel raad met stochastische wandelingen van dit type. Bijgevolg geschiedt de wiskundige beschrijving van deze ontwikkelingen in de toestand van het systeem geheel overeenkomstig.

Derde wens

Als derde wens hebben wij geformuleerd de mogelijkheid om de toegelaten beslissingen op een overzichtelijke wijze aan te duiden. In het eerste voorbeeld wordt de beslissing gegeven door de gekozen percentages van de verschillende grondstoffen in het mengsel. Het percentage rogge in het mengsel zullen wij aangeven met x_1 en dát van milocorn, paardebonen, sojaschroot, cocoskoeken, palmpitschroot en negerzaadschilfers respectievelijk met x_2 tot en met x_7. In de wiskundige formulering van het beslissingsprobleem kan men de beslissing doorgaans aangeven met een rij van getallen.

Stel dat een beslissing kan worden gegeven door twee getallen x'_1 en x'_2. Een beslissing $x' = (x'_1, x'_2)$ kan dan worden geïdentificeerd met een punt in een twee-dimensionale cartesische ruimte X (zie fig. 3.3).

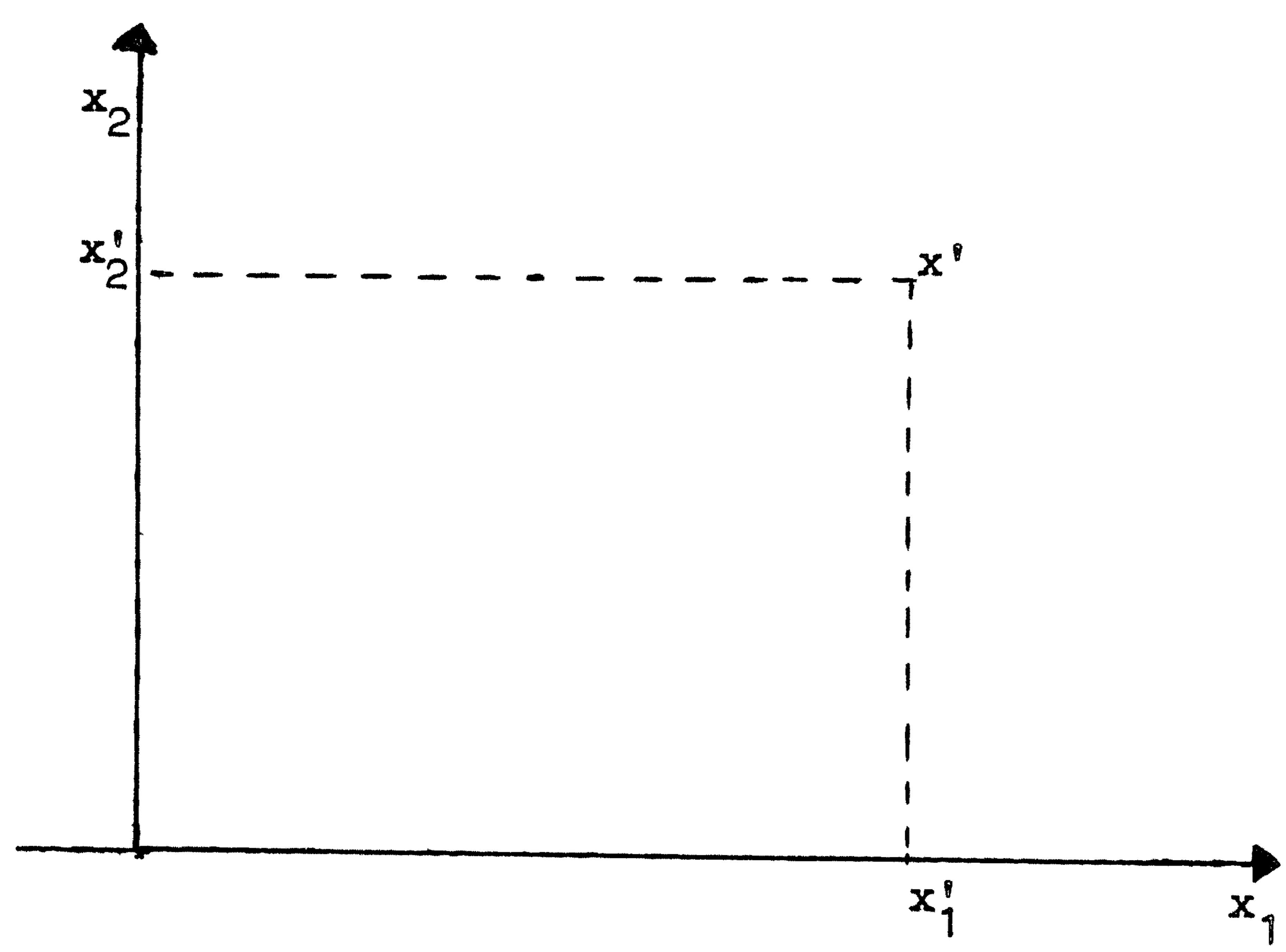


fig. 3.3

Een 2-dimensionale beslissingsruimte X

Vaak zal men behoefte hebben aan een ruimte van meer dimensies om een beslissing te kunnen vastleggen. Zo'n ruimte noemen wij steeds een beslissingsruimte X.

Uit tabel 2.II van het eerste voorbeeld volgt dat de beslissingsvariabelen x_i niet vrij gekozen mogen worden. Zij moeten aan de volgende ongelijkheden voldoen:

$$\begin{aligned} &x_1 \leq 20 && x_5 \geq 2 \\ &x_2 \leq 15 && x_6 \geq 8 \\ &x_3 \leq 7 && x_7 \leq 10. \\ &x_4 \geq 5 && \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Aangezien het eiwit-gehalte minimaal 14,7% moet bedragen vinden wij bovendien als voorwaarde (zie ook tabel 2.I):

$$7{,}9x_1 + 7{,}4x_2 + 17{,}5x_3 + 33x_4 + 14x_5 + 13{,}2x_6 + 22{,}8x_7 \geq 14{,}7. \qquad (3.3)$$

Verder gelden voor verteerbaar ruw eiwit, vocht, zetmeel, ruwe vezels en vet analoge ongelijkheden.

Laten wij om de gedachten te bepalen terugkeren tot het geval, waarin een beslissing kan worden vastgelegd met behulp van 2 beslissingsgrootheden x_1 en x_2 (zie fig. 3.3). Stel vervolgens dat uit de probleemstelling volgt:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0. \end{aligned} \qquad (3.4)$$

De toegelaten beslissingen (x_1, x_2) liggen nu in het gearceerde gedeelte van de beslissingsruimte (fig. 3.4). Immers alleen voor punten (x_1, x_2) in dit gebied gelden beide ongelijkheden.

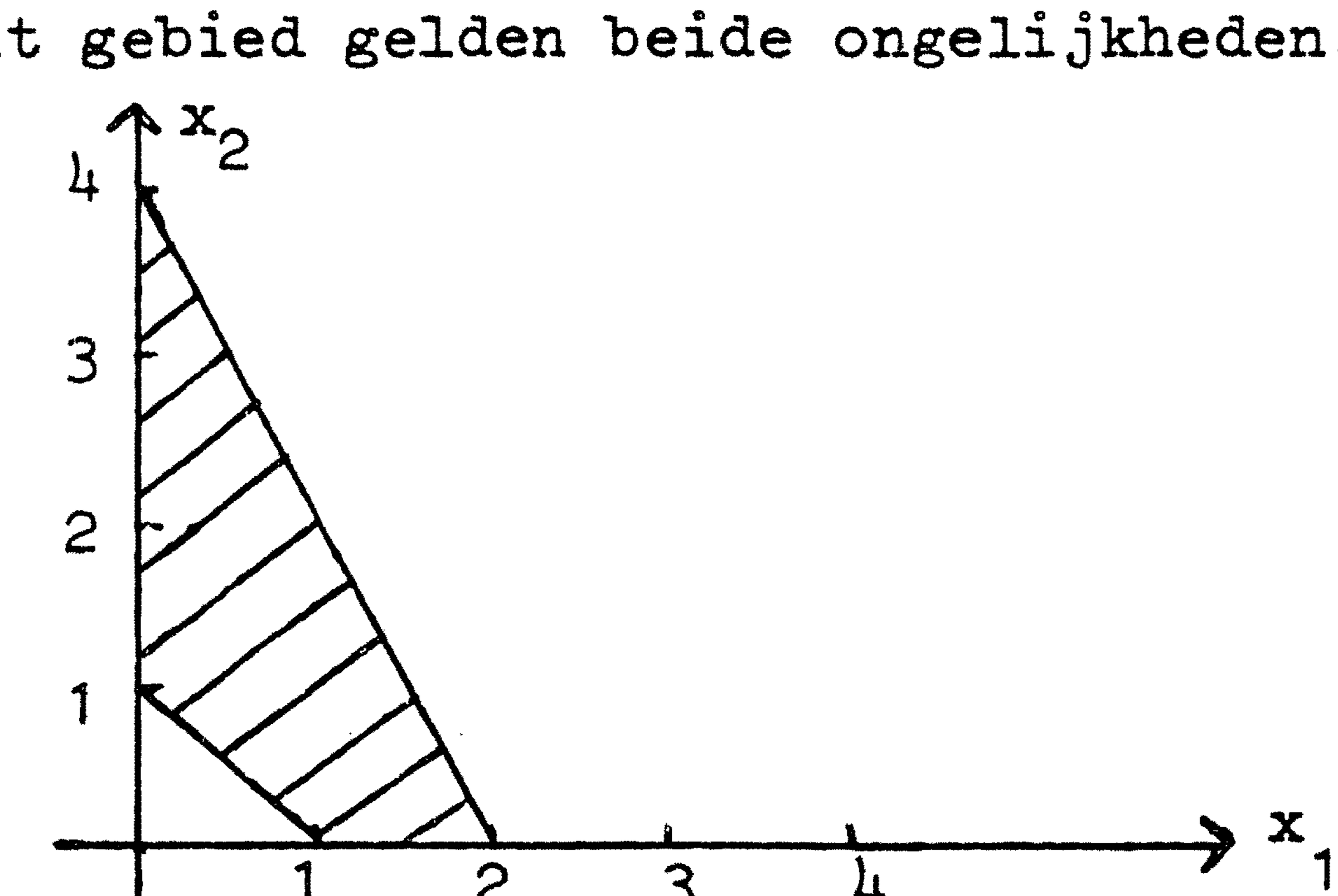


fig. 3.4

Een voorbeeld van een gebied van toegelaten beslissingen in de beslissingsruimte

Evenzo correspondeert met de ongelijkheden in het veevoederprobleem een gebied in de bij dat probleem behorende beslissingsruimte X. Dit gebied noemen wij het gebied van de toegelaten beslissingen. Wij merken op dat de getallen 7,9 , 7,4 etc. in (3.3) componenten zijn van de toestand s. Immers zij geven de huidige samenstelling van de grondstoffen aan. Aangezien (3.3) mede het gebied van de toegelaten beslissingen bepaalt, zal de vorm van dit gebied afhangen van de toestand s van het systeem.

Wij zullen in het hierna volgende steeds aannemen dat het gebied van de toegelaten beslissingen, aangegeven met X(s), mede bepaald wordt door de toestand van het systeem op het beslissingstijdstip.

Wij onderscheiden twee typen van beslissingsproblemen. In een z.g.n. één-stapsbeslissingsprobleem behoeft de beslisser slechts één enkele beslissing te nemen. In een meer-stapsbeslissingsprobleem wordt van hem verwacht dat hij in een tijdsbestek een reeks van beslissingen neemt. De oplossing van het één-stapsbeslissingsprobleem wijst een beslissing x aan, terwijl in het meer-stapsbeslissingsprobleem de oplossing wordt gegeven in de vorm van een strategie. Een strategie z is een beslissingsvoorschrift dat in elke toestand s aangeeft welke beslissing x = z(s) moet worden genomen. Wiskundigen zeggen dat een strategie een afbeelding is van de toestandsruimte S in de beslissingsruimte X.

Het toekennen van waarderingen aan ontwikkelingen in de toestand van het systeem is dikwijls een zeer moeilijke opgave. Deze waarderingen heeft men nodig om tot een kriterium te komen voor het vergelijken van de toegelaten beslissingen. Veelal zijn deze waarderingen niets anders dan de kosten of de winst die aan de beschouwde ontwikkelingen - wandelingen van het systeem door de toestandsruimte - zijn verbonden.

Voor één-stapsbeslissingsproblemen wordt het kriterium voor de optimale beslissing gegeven in de vorm van een reële x-functie $y(s_0; x)$, waarin s_0 de toestand aangeeft op het moment van beslissen en x de beslissing. Als de toekomstige ontwikkeling in de toestand van het systeem van te voren bekend is, stelt $y(s_0; x)$ meestal de totale te maken kosten voor. Indien echter de toekomstige ontwikkeling op het moment van beslissen nog onbekend is stelt $y(s_0; x)$ de verwachting voor van de aan deze ontwikkeling verbonden kosten.

Als wij aannemen dat de weekproductie veevoeder 10000 kg bedraagt dan wordt in het eerste probleem de x-functie $y(s_0; x)$ gegeven door

$$y = 22,75x_1 + 22,35x_2 + 30,25x_3 + 38,25x_4 + 32,50x_5 + 26,50x_6 + 32,50x_7. \tag{3.5}$$

Uit (3.5) volgt dat y inderdaad een functie is van x en dat de gedaante van deze functie mede bepaald wordt door de toestand s_0 van het systeem. Immers de prijzen van rogge etc. die in (3.5) voorkomen zijn componenten van de toestand s_0.

In de inleiding hebben wij gezegd dat ieder besliskundig onderzoek gericht is op de vertaling van het beslissingsprobleem in een wiskundig optimum probleem. Het eerste beslissingsprobleem kan men nu vertalen in het volgende optimum probleem: "Bepaal het minimum van (3.5) onder de bijvoorwaarden (3.2), (3.3) etc." In zijn algemene vorm luidt het mathematische één-stapsbeslissingsprobleem als volgt:

"Bepaal het minimum van $y(s_0; x)$ onder de bijvoorwaarden $x \in X(s_0)$".

Voor meerstapsbeslissingsproblemen vindt men een kriterium-functie van de vorm $y(s_0; z)$, waarbij s_0 de begintoestand en z de toegepaste strategie voorstelt. Indien een optimale strategie moet worden ontworpen voor een onbegrensde tijdsperiode dan zullen veelal onverschillig de gebruikte strategie de totale kosten onbegrensd hoog zijn. Bijgevolg kunnen deze kosten niet dienen als kriterium. Zowel voor stochastische als deterministische ontwikkelingen in de toestand van het systeem kan men de kosten gaan verdisconteren. Dit wil zeggen dat men op een voorgeschreven wijze aan kosten in het verre verschiet minder gewicht toekent dan aan kosten van gelijke omvang in de nabije toekomst. Voor een dergelijke handelwijze bestaat een economische rechtvaardiging. Voor het geval de ontwikkeling in de toestand van het systeem stochastisch is dan zal men als kriterium kiezen de verwachting van de totale verdisconteerde kosten. Voor het geval de ontwikkeling in de toestand van het systeem deterministisch is dan kiest men de verdisconteerde kosten zelf als kriterium. In sommige situaties kan men beter de over de gehele wandeling gemiddelde kosten per tijdseenheid als kriterium kiezen. Hoe dan ook het mathematische meer-stapsbeslissingsprobleem luidt als volgt:

"Bepaal het minimum van de reële z-functie $y(s_0; z)$ onder de bijvoorwaarden $x = z(s) \in X(s)$ voor elke $s \in S$".

Voor het bepalen van de extreme waarden van de x-functie $y(s_0; x)$ en de z-functie $y(s_0; z)$ bestaan een aantal wiskundige technieken.

Tenslotte zullen wij laten zien dat een strategie soms op een aanschouwelijke wijze kan worden uitgebeeld.

In het tweede voorbeeld zal men zodra een schade zich voordoet moeten beslissen of deze schade geclaimd zal worden of niet. In figuur 3.5 hebben wij een strategie aangegeven, die de beslisser adviseert geen schade te claimen wanneer het systeem vanwege die schade een toestand aanneemt in het gearceerde gebied in het achtervlak. Uit het bovenstaande volgt dat de oplossing van het tweede beslissingsprobleem in wezen een keuze is uit de verzameling van alle mogelijke gearceerde gebieden in het achtervlak.

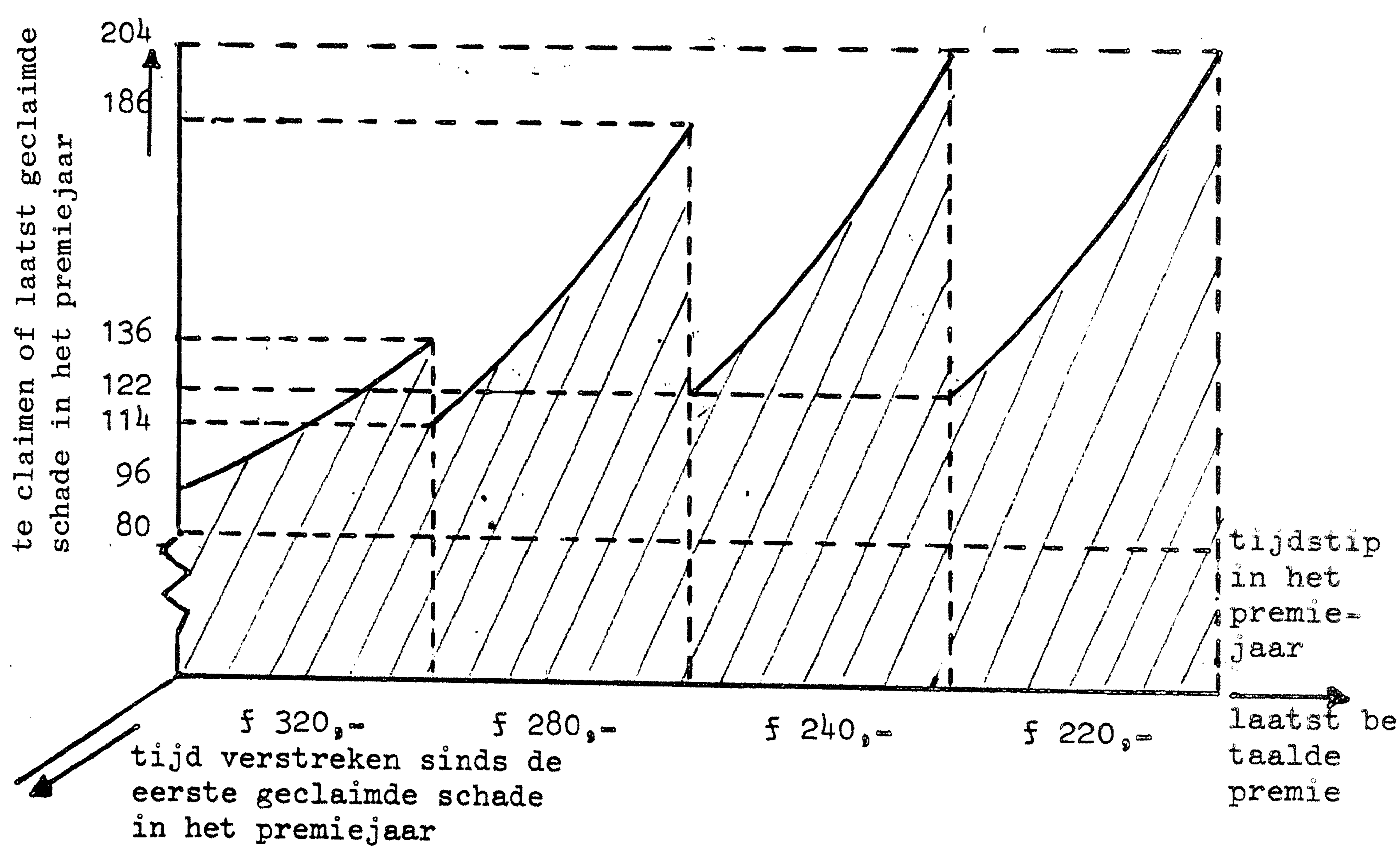


fig. 3.5

Toestandsruimte met aangegeven strategie behorende bij het eerste voorbeeld

Voor het derde probleem wordt in figuur 3.6 een strategie uitgebeeld. Zodra het systeem een toestand aanneemt welke correspondeert met een punt van een dik getrokken lijnstuk, dan wordt de productiesnelheid op de aangegeven wijze veranderd.

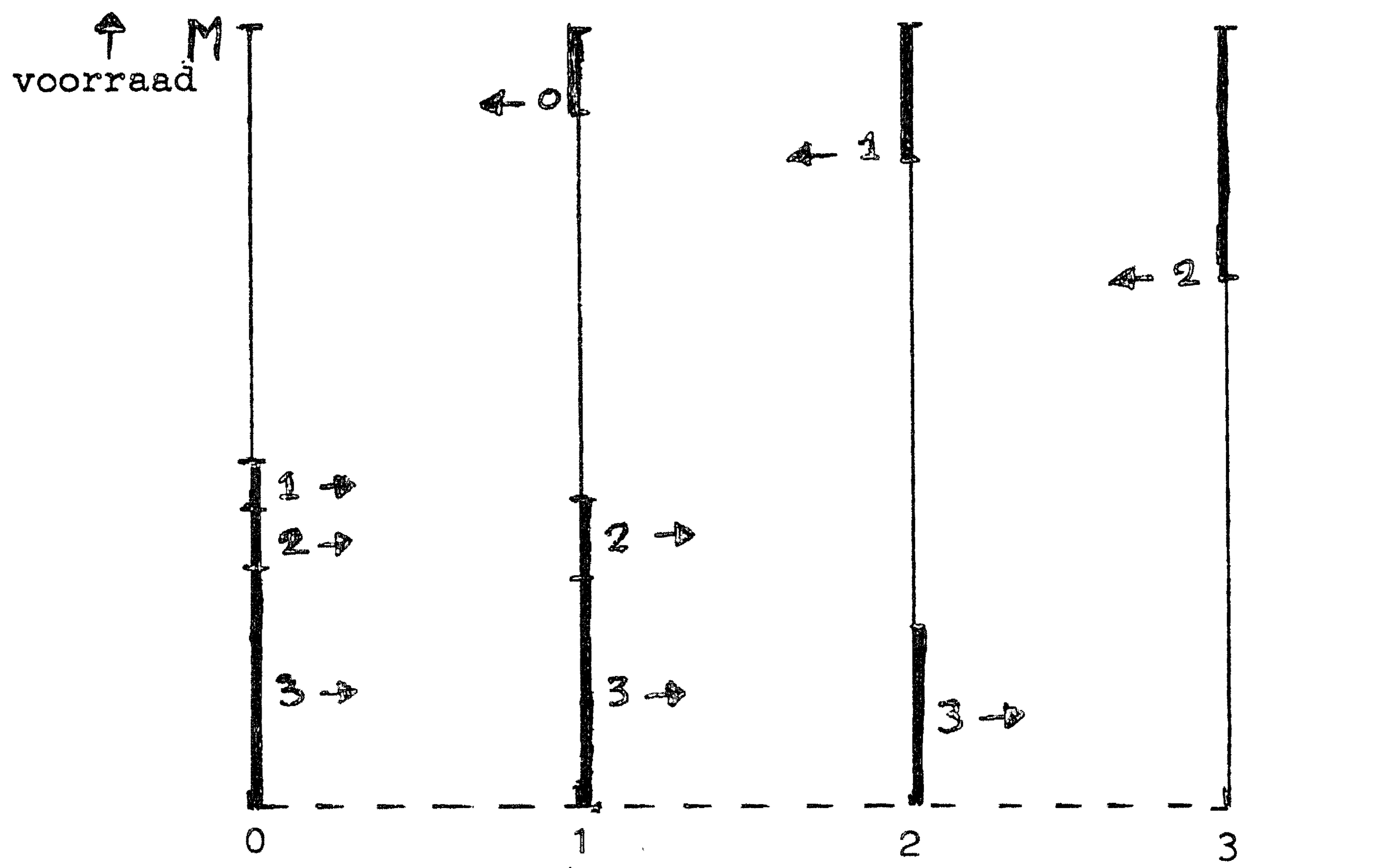


fig. 3.6

<u>Toestandsruimte met strategie behorende bij het derde beslissingsprobleem</u>

In bovenstaande beschouwingen hebben wij aan de hand van vijf concrete wensen laten zien, dat de wiskunde over instrumenten beschikt, die bij het zoeken naar oplossingen voor beslissingsproblemen van nut kunnen zijn. Verder hebben wij kunnen constateren dat het gebruik van deze instrumenten leidt tot een vertaling van het beslissingsprobleem in een wiskundig optimum probleem. Wij hebben niet nagelaten te wijzen op het feit dat <u>elke</u> beschrijving van een beslissingssituatie - ook een wiskundige - een model van die situatie weergeeft. Wij dienen dus de terug-vertaling van het wiskundig optimum probleem met enige reserve te ontvangen.

In de volgende paragraaf zullen wij nagaan aan welke eigenschappen beslissingsproblemen moeten voldoen opdat zij op een besliskundige wijze kunnen worden behandeld.

4. Is een besliskundige benadering altijd zinvol

Alhoewel alleen het veevoeder probleem uit §2 op een ondubbelzinnige wijze vertaald kon worden in een wiskundig optimum probleem, mogen wij toch wel vaststellen dat alle beslissingsproblemen uit die paragraaf zich in een vergevorderd stadium van formuleren bevonden. Een beslissingsprobleem maakt in het algemeen een rijpingsproces door. Natuurlijk zijn er ook beslissingsproblemen die vrij plotseling ontstaan. Een machine valt bijvoorbeeld uit en de beslisser wordt geconfronteerd met de vraag òf hij een nieuw exemplaar van het beproefde type zal kopen òf dat hij met het oog op een eventuële uitbreiding een grotere zal aanschaffen. Het door het probleem opgeroepen beeld van de beslissingssituatie is vrij scherp getekend. Wellicht dat er hier en daar nog wat informatie moet worden ingewonnen. Misschien moet er nog wat gerekend worden, maar de verschillende keuze-mogelijkheden zijn aangegeven. De meeste beslissingsproblemen worden echter niet in één nacht geboren. Aan de formulering gaat meestal een lange periode van onbehagen vooraf. In zo'n periode zoekt men eerst de schuldige en daarna de oorzaak van de ongewenste toestand. Tot het zoeken naar een remedie komt men niet of pas veel later. Het is merkwaardig hoeveel mensen reeds gerustgesteld zijn, zodra zij weten waarom iets is misgelopen of dreigt mis te lopen. Waarschijnlijk waren zij alleen maar teleurgesteld omdat de verklaring ontbrak. Er ontstaat pas een beslissingssituatie wanneer men het gevoel krijgt dat er ook iets aan gedaan kan worden. Maar wat?

Als wij spreken van een ongewenste situatie dan behoeven wij nog niet te bedoelen dat de toestand van het systeem ons als onaangenaam voorkomt. Het kan best zijn dat wij die toestand juist gaarne gehandhaafd zouden zien maar dat de ontwikkeling in de toestand van het systeem ons zorgen baart. In het beslissingsprobleem gaat men dan uit van de veronderstelling dat door het nemen van beslissingen een gevreesde ontwikkelingsgang kan worden omgebogen.

Een besliskundige aanpak impliceert de invoering van een mathematisch model. Een mathematisch model van een beslissingssituatie vereist een kwantitatieve beschrijving van

a) de toestand van het systeem;

b) de mogelijke beslissingen;

c) de ontwikkelingen in de toestand van het systeem die mede een gevolg zijn van de te nemen beslissingen;

d) de waardering die men toekent aan deze ontwikkelingen in de toestand van het systeem;

e) de waardering die men toekent aan een beslissing of strategie.

Deze laatste waardering noemt men het kriterium voor de optimale beslissing of strategie. Tussen de waarderingen genoemd onder d) en e) bestaat een zeer nauw verband. In d) zijn de kosten van een beslissing of van het toepassen van een strategie veelal niet opgenomen.

Na deze beschrijvingen volgt het opstellen van het wiskundig optimum probleem. Tenslotte zal gezocht moeten worden naar een techniek om het wiskundig optimum probleem te kunnen oplossen. Dit werkschema kan men niet punt voor punt afwerken. Zo kan men bijvoorbeeld bij het beschrijven van de ontwikkelingen in de toestand van het systeem ontdekken dat men de toestand van het systeem beter op een andere wijze had kunnen aangeven. Ook gebeurt het wel eens dat slechts één of een combinatie van een klein aantal toestandsgrootheden bij de bepaling van de optimale beslissing een rol spelen. In dat geval had men kunnen volstaan met een toestandsruimte van eenvoudiger structuur. Bijgevolg keert men dan tot dat punt van het werkschema terug. Eigenlijk wordt er aan alle punten min of meer tegelijk gewerkt.

Men zal dus tijdens het oplossen van het beslissingsprobleem meer dan eens moeten nagaan welke factoren in het begrip toestand dienen te worden opgenomen, opdat in dat stadium van oplossen relevant geachte informatie kan worden verwerkt. Een aantal van deze factoren zijn mogelijkerwijs niet kwantitatief, maar kunnen wel kwantitatief gemaakt worden. Men denke b.v. aan factoren, die in wezen een vraag inhouden welke met ja of neen moeten worden beantwoord. Zulke factoren laten wij doorgaans de waarden 0 (ja) en 1 (neen) aannemen. Het behoeft geen betoog dat van vele systemen de mogelijke toestanden zich niet op een ondubbelzinnige kwantitatieve wijze laten beschrijven.

Hoe zou men b.v. de toestand(of sfeer)van een systeem "vergadering" kwantitatief moeten aangeven? Door het aantal aanwezigen? Of door het verschil tussen de aantallen keren instemmend en honend lachen? Alhoewel er geen objectieve maatstaven bestaan met behulp waarvan men ondubbelzinnig kan vaststellen of de toestanden van een bepaald systeem zich wel of niet kwantitatief laten beschrijven, kan men toch stellen dat, als de factoren met de gewenste kwantitatieve eigenschap op een geforceerde wijze naar boven komen, men wellicht beter van een besliskundige aanpak kan afzien. Met het oog op het aangeven van de ontwikkelingen in de toestand van het systeem zal men tevens moeten trachten het aantal beschrijvende factoren zo klein mogelijk te houden.

Laten wij vervolgens onze aandacht richten op de beslissingen. Welke beslissingen kan men alzo nemen? Het antwoord op deze vraag verlangt dikwijls een onderzoek naar de mogelijkheden om het proces te beïnvloeden. Afhankelijk van de toestand van het systeem zullen aan deze mogelijkheden beperkingen zijn opgelegd. Vanwege de beperkte voorraad capaciteit zal men in het derde probleem de productie moeten stil leggen als de voorraad M bedraagt. Het onderzoek naar de mogelijke wijzen van beïnvloeding is uiterst belangrijk. Misschien heeft het ten gevolge gehad, dat een nieuwe grondstof aan het reeds bekende pakket van toegelaten grondstoffen voor veevoeders is toegevoegd.

Men moet zich echter wel rekenschap geven van het feit dat voor iedere beslissing of strategie moet gelden dat de mede door deze beslissing of strategie plaats vindende ontwikkeling in de toestand van het systeem kan worden aangegeven. Dit geldt ook voor beslissingen en strategieën die nog nooit zijn toegepast en waarvoor dus van de bijbehorende ontwikkelingen in de toestand van het systeem geen waarnemingen beschikbaar zijn. Dit betekent dat men bij het bepalen van het effect van een beslissing op de ontwikkeling in de toestand van het systeem te werk moet gaan volgens een gepostuleerd principe, dat wij in deze paragraaf het "resultante-principe" zullen noemen. Het resultante-principe gaat uit van de veronderstelling dat er een basisproces bestaat, hetwelk zich niet laat beïnvloeden door de beslisser. De ontwikkeling in de toestand van het systeem, die mede een gevolg is van een toegepaste strategie, kan, volgens het "resultante-principe", met behulp van het basisproces, de toegepaste strategie en een stel – van elke strategie onafhankelijke – richtlijnen worden bepaald. Indien men behoefte heeft aan visuele voorstelling, dan kan men dit basisproces zien als een stevige bries op een meer. Een zeilboot in de toestandsruimte (meer) vervult in die voorstelling de rol van systeem. De beslisser is de zeiler en de gang van de boot is de ontwikkeling in de toestand van het systeem. De gang van de boot is een gevolg van het basisproces (de bries) en de (zeil-) strategie van de zeiler. De bries zal door het gedrag van de zeiler niet aanwakkeren of afnemen. Indien men beschikt over enige zeilkennis (richtlijnen) dan kan men de gang van de boot door een superpositie van strategie op basisproces bepalen. Bij een constante bries is de gang nagenoeg deterministisch, terwijl het schip een "stochastische gang" zal maken, wanneer er op aselecte tijdstippen windvlagen optreden. Indien wij het "resultante-principe" willen toepassen, dan zullen wij uiteraard enige model veronderstellingen moeten maken. Wij zullen dit nu toelichten aan de hand van het derde en het tweede beslissingsprobleem uit §2. Bij het derde beslissingsprobleem gaan wij uit van de volgende model-veronderstellingen:

1) het aankomstpatroon van de klanten hangt niet af van de ervaringen die deze klanten hebben opgedaan in hun relatie met de fabriek;
2) de door de klanten gestelde vraag naar goederen hangt niet af van de ervaringen die deze klanten hebben opgedaan in hun relatie met de fabriek.

Bijgevolg zal het proces, dat, binnen het mathematisch model, de vraag naar goederen beschrijft niet afhangen van de te volgen strategie. Een realisering van dit proces kan men geven door de tijdstippen waarop de klanten binnen kwamen en de op die tijdstippen gestelde vraag naar goederen te noteren. Indien wij nu op grond van waarnemingen in staat zijn zo'n vraagproces te beschrijven dan ligt voor iedere strategie en iedere realisering van het proces de te maken wandeling in de toestandsruimte vast (zie fig. 3.6).

In het auto-verzekerings-probleem kampt de automobilist-verzekerde met de moeilijkheid dat hij te weinig waarnemingen heeft. Indien hij doorgaans veel ongelukken maakt dan kan hij misschien spoedig over een schat van gegevens beschikken. Hij zal zich dan ongetwijfeld gaan bezighouden met de vraag of het ontstaan van schaden al of niet bevorderd wordt door de reeds verkregen premiereducties. Indien het gestelde niet statistisch aantoonbaar is, d.w.z. indien het aantal premiereducties geen aantoonbare invloed heeft op de rijtrant, dan zal hij willen nagaan of er een verband bestaat tussen opéénvolgende ongelukken. Wanneer na een nadere precisering een dergelijk verband niet statistisch aantoonbaar is (mathematische statistiek), dan kan hij misschien veronderstellen dat

a) de tijdslengten tussen opéénvolgende ongelukken onafhankelijk verdeeld zijn volgens een zelfde negatief-exponentiële verdeling;
b) de opéénvolgende schaden onafhankelijk verdeeld zijn volgens een zelfde verdeling van gegeven type.

De parameterwaarden behorende bij deze kansverdelingen moeten uit het waarnemingsmateriaal worden geschat. Al deze veronderstellingen zijn model-veronderstellingen en kunnen al of niet gecombineerd worden getoetst (mathematische statistiek).

Als alle bovengenoemde veronderstellingen niet behoeven te worden verworpen dan volgt uit het eerder genoemde "resultante-principe" dat, ook als de automobilist een strategie volgt, de ontwikkeling in de toestand van het systeem binnen het mathematisch model vast ligt. Immers het proces dat voor de ongelukken zorgt is nu het basisproces en kan worden beschreven met behulp van twee kansverdelingen. De aselecte trekkingen uit de eerste kansverdeling geven de tijdslengten tussen de opéénvolgende ongelukken aan, terwijl de aselecte trekkingen uit de tweede kansverdeling de bijbehorende schadebedragen opleveren. Voor elke strategie van het beschouwde type (zie fig. 3.5) is nu de ontwikkeling in de toestand van het systeem vastgelegd.

Indien de gemaakte veronderstellingen moeten worden verworpen dan zal men tot een ingewikkelder beschrijvingswijze moeten komen.

Bijgevolg zal de automobilist over veel meer waarnemingen moeten beschikken. Deze waarnemingen zal hij misschien nodig hebben om er achter te komen wat het effect is van de te betalen premie op het ontstaan van schaden. Het verzamelen en het verwerken van deze waarnemingen kost uiteraard veel tijd. Gunstiger ligt het probleem bij een bedrijf met een homogeen wagenpark, waarvan een groot aantal automobilisten gebruik maakt. Indien de automobilisten steeds op een aselecte wijze een auto kiezen (model-veronderstelling) en indien de schaden steeds volledig worden hersteld dan is het enerzijds aannemelijk dat voor iedere auto afzonderlijk aan de gemaakte veronderstellingen is voldaan, terwijl anderzijds over de benodigde gegevens sneller kan worden beschikt.

Wij zullen thans het "hoedjesprobleem" (§2, voorbeeld 4) aan een beschouwing onderwerpen, omdat hier in eerste instantie geen beroep op het z.g.n. "resultante-principe" kan worden gedaan. Op het moment van inkoop beschikt de inkoper over de verkoop cijfers van de afgelopen jaren. Misschien heeft hij ook een marktonderzoek onder zijn klanten verricht. Mogelijkerwijs gaf dit onderzoek enig inzicht in de wensen van zijn toekomstige kopers. Indien hij slechts één type hoedje gaat verkopen dan kan hij wellicht met enig succes een kansverdeling van de toekomstige vraag construeren. Moeilijker wordt het wanneer hij meerdere typen hoedjes gaat aanbieden. De dames gaan nu kiezen uit de collectie en als het gewenste type is uitverkocht dan zijn er twee mogelijkheden:

a) zij kopen een ander;

b) zij verlaten de winkel zonder nieuwe hoed.

Bijgevolg stimuleert, binnen één seizoen, een uitverkocht type de verkoop van de andere typen. Dit betekent dat de kansverdeling van de vraag naar een bepaald type niet alleen afhangt van de omvang en indeling van de collectie als geheel en dus van de genomen beslissing, maar ook van de geneigdheid om iets anders te kopen. Dit laatste kan men niet zomaar in een "resultante-principe" verwerken. Nu kan men een model maken van het verkoopproces door de dames op één of andere aselecte wijze de winkel te laten binnen komen en ze daarna op een aselecte wijze te laten trekken uit een urn met briefjes, waarop òf het model van het te kopen hoedje staat òf wordt aangeraden de winkel te verlaten.

De parameters van beide kansmechanismen kan men laten variëren met de tijd (seizoen-invloed) en de aanwezige voorraden hoedjes. Met behulp van deze variatie mogelijkheid kunnen wij trachten de reactie van de klant op de resterende collectie te beschrijven. Het antwoord op de vraag: "Hoe moeten wij variëren" vereist echter een aparte studie. Bij een dergelijke studie zal waarschijnlijk de hulp van een psycholoog onontbeerlijk zijn.
Het blijft de vraag of zo'n urn-model een aanvaardbaar beeld van de werkelijkheid geeft en of de waarden van de parameters van dit model met behulp van de ter beschikking staande gegevens geschat kunnen worden. Bij het vaststellen van de toestand van het systeem "hoeden-collectie" hebben wij alleen aan het tijdstip van inkoop gedacht. Voor het bepalen van de winst en dus voor het toekennen van een waardering aan de te maken wandeling is het wenselijk om ook voor ieder type hoedje het aantal resterende hoedjes in de toestand van het systeem op te nemen. Het urn-model met zijn variërende samenstelling geeft nu tussen twee inkopen de ontwikkeling in de toestand van het systeem op een ondubbelzinnige wijze aan. Het is bekend dat assortiments-problemen van dit type moeilijk zijn te beschrijven en op te lossen.

Bij de beschrijving van de ontwikkelingen in de toestand van het systeem kunnen zich uiteraard ook andere moeilijkheden voordoen. Om in het "bal-probleem" de ontwikkelingen kans theoretisch te kunnen aangeven zou men voor iedere ontmoeting de kans op een uitnodiging moeten kennen. Hoe zou men deze kansen kunnen schatten? Alleen een eeuwig-studente met een even eeuwig jeugdig voorkomen, die haar vriendjes in groepen heeft ingedeeld zou misschien genoeg waarnemingen kunnen verzamelen om met behulp van een statistische analyse tot schattingen te komen.

Of een ontwikkeling in de toestand van het systeem de beslisser al of niet aanstaat zal hij tot uitdrukking moeten brengen in de <u>waardering</u> die hij aan deze ontwikkeling zal toekennen.

Het vaststellen van waarderingen is in het algemeen geen eenvoudige zaak. Het meisje waardeert haar vriendjes op grond van de prijs van de haar aangeboden corsage. Zij heeft kennelijk geen oog voor hun studieresultaten, hun kennis van de moderne literatuur of hun verrichtingen op het sportveld. Indien zij een meer genuanceerder kijk op haar vriendjes had, hoe zou zij hen dan noteren? Bovendien wil zij niet alleen een mooie corsage hebben maar ook het bal bezoeken. Dit zijn twee meer of minder strijdige wensen. Met betrekking tot de eerste wens kunnen wij aan iedere ontwikkeling een waardering toekennen gelijk aan de prijs van de corsage, die tijdens deze ontwikkeling wordt overhandigd. Als de ontwikkeling niet leidt tot een uitnodiging dan wordt de waardering gelijk gekozen aan nul.

Met betrekking tot de tweede wens worden aan alle ontwikkelingen die leiden tot een uitnodiging een gelijke waardering toegekend. Deze laatste waardering is moeilijk in geld uit te drukken. Hoe stellen wij nu de twee waarderingen samen tot één, als beide wensen tegelijk kenbaar worden gemaakt?

Het toekennen van waarderingen aan ontwikkelingen wordt nog moeilijker als naast kosten ook mensen-levens een rol spelen. Wij behoeven daarbij niet eens te denken aan oorlogshandelingen. Wij noemen slechts de verkeersproblemen. Een besliskundige benadering kan dus falen wanneer verlangens leiden tot niet-vergelijkbare waarderingen.

In het "hoedjes-probleem" zal een verkochte hoed op een ondubbelzinnige wijze haar bijdrage tot de waardering van de desbetreffende ontwikkeling kunnen leveren. Maar wat doen wij als een klant onverrichterzake de winkel verlaat omdat het door haar gewenste hoedje is uitverkocht? Hoe groot is het verlies aan Good Will? Indien deze schade, die <u>wel</u> vergelijkbaar is met de overige kosten, niet kan worden vastgesteld dan hangt elke beslissing met betrekking tot de samenstelling van de collectie in de lucht. Wij komen hier straks op terug.

Met behulp van deze waarderingen kunnen ook aan beslissingen en strategieën, die tot deze ontwikkelingen aanleiding hebben gegeven een waardering worden toegekend. De relatie tussen waarderingen enerzijds en beslissing of strategie anderzijds noemen wij de <u>kriteriumfunctie</u>. De oplossing van het beslissingsprobleem bestaat nu daarin, dat wij moeten zoeken naar die beslissing of strategie waarvoor de kriteriumfunctie maximaal is. Soms slaagt men er wel in om voor iedere beslissing of strategie afzonderlijk de bijbehorende waarde van de kriteriumfunctie te bepalen, terwijl het onmogelijk is om het kriterium expliciet te geven als functie van beslissing of strategie. Hoe bepaalt men nu de optimale beslissing of strategie?

Wij zijn thans in een stadium aangeland, waarin het oorspronkelijke beslissingsprobleem vertaald is in een wiskundig optimumprobleem. Helaas is de "Mathematische besliskunde", het vak dat zich met dit soort wiskundige optimumproblemen bezighoudt, niet altijd een veilige haven. Tal van mathematische beslissingsproblemen wachten nog op een antwoord. Mede dank zij de moderne rekenapparatuur worden echter jaarlijks enorme vorderingen gemaakt. Wat vandaag nog een uitzichtloos probleem lijkt, kan morgen bij wijze van spreken een routine-probleem zijn.

Als het wiskundig optimumprobleem is opgelost en als het antwoord is terugvertaald in de oorspronkelijke terminologie, dan dient men er zich van te overtuigen dat het antwoord ook bruikbaar is. Zo niet, dan moet het model aan een kritische beschouwing worden onderworpen. Stap voor stap zullen wij dan moeten controleren of wij niet ergens te lichtvaardig zijn omgesprongen met veronderstellingen, waardoor sommige structuële relaties geen plaats kregen in het model.

Keren wij thans nog even terug naar de kriteriumfunctie. Het opstellen van deze functie wordt soms bemoeilijkt doordat een aantal gegevens ontbreken. Hierboven hebben wij bijvoorbeeld reeds gewezen op het feit dat in het z.g.n. "hoedjesprobleem" het verlies aan "Good will" bij een gemiste verkoopkans moeilijk te bepalen was. Dit betekent niet dat een besliskundige aanpak nu zinloos is. Wij zullen dit nu toelichten met behulp van een vereenvoudigde versie van dit probleem.

Stel dat de inkoper maar één type hoedje in zijn collectie opneemt en stel vervolgens dat hij beschikt over de hieronder te vermelden gegevens:

a) de inkoopprijs van een hoedje bedraagt dertig gulden;

b) de verkoopprijs in de normale verkoop bedraagt vijftig gulden;

c) de verkoopprijs in de uitverkoop is twintig gulden;

d) de voorraadkosten bedragen vijf gulden per seizoen per hoedje;

e) de kansverdeling van de vraag y wordt gegeven door de kansdichtheid

$$f(y) = (0{,}02)^2 \, y \, e^{-0{,}02y} \, .$$

(De verwachting van de vraag naar dit type hoedje is 100).

De vraag is nu: "Hoeveel hoedjes moet de inkoper bestellen?". Dit aantal wordt mede bepaald door het z.g.n. verlies aan good-will. Door het ontbreken van een numerieke waarde van deze schade, kunnen wij strikt genomen het beslissingsprobleem niet oplossen. Wat wij echter wel kunnen doen is de optimale bestelgrootte bepalen voor verschillende waarden van dit verlies.

In onderstaande tabel vindt men het gevonden resultaat.

Tabel 4.1

Invloed van verlies aan good-will op optimale bestelgrootte

verlies aan good-will in guldens	optimale bestelgrootte
0	88
5	96
10	109
15	117
20	124
25	130
30	136

Uit bovenstaande tabel blijkt dat een besliskundige aanpak, ook als essentiële gegevens ontbreken, de beslisser nuttige informatie kan verschaffen. Komen wij tenslotte tot de vraag: "Is een besliskundig onderzoek altijd zinvol?"

Altijd ongetwijfeld niet! De studente kan met haar "balprobleem" veel beter een vriendin dan een besliskundige raadplegen.

Bij vele andere problemen kan men niet zomaar van te voren vaststellen of een besliskundig onderzoek zinvol is. Wellicht komt men bij het opstellen van het mathematische model reeds tot onoverkomelijke moeilijkheden doordat òf de situatie zich niet door een eenvoudige structuur laat beschrijven òf de noodzakelijke gegevens ontbreken. Het gebeurt ook wel eens dat men pas bij het oplossen van het mathematische beslissingsprobleem struikelt.

Zonder een alternatieve benadering te kort te willen doen, kan men toch stellen dat ook menig onvoltooid besliskundig onderzoek zinvol is, omdat men, door zijn speciale aanpak, op een systematische wijze aan het denken wordt gezet.

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

S 342

INLEIDING TOT DE BESLISKUNDE

Hoofdstuk II

Het één-stapsbeslissingsprobleem

door

Prof.Dr. G. de Leve

maart 1965

1. Enkele voorbeelden van één-stapsbeslissingsproblemen

Zoals op p.19 reeds werd vastgesteld luidt het mathematische één-stapsbeslissingsprobleem als volgt:

"Bepaal het minimum van de x-functie $y(s_0; x)$ onder de bijvoorwaarde $x \in X(s_0)$, waarbij $X(s_0)$ de verzameling van de - in de toestand s_0 - toegelaten beslissingen aangeeft."

Wij zullen in deze paragraaf een tweetal voorbeelden geven van één-stapsbeslissingsproblemen, die zonder gebruik van speciale wiskundige technieken kunnen worden opgelost.

In §2 zullen wij onze aandacht richten op een klasse van mathematische één-stapsbeslissingsproblemen, die met behulp van Lineaire Programmering kunnen worden opgelost.

In §3 worden de transportproblemen besproken. Laatstgenoemde één-stapsbeslissingsproblemen danken hun niet-wiskundige naam aan hun eerste toepassingsgebied.

Wij beschouwen nu het volgende probleem:

Het eerste beslissingsprobleem

"Een fabriek heeft voor een speciale opdracht een grote hoeveelheid entabogeen nodig. Entabogeen kan ter plaatse op elk tijdstip worden ingekocht in iedere gewenste hoeveelheid à ƒ 5000,- per kilo. Men kan ook jaarlijks op 1 juli entabogeen inkopen in Centraal Afrika en deze per boot laten verzenden naar de fabriek. Indien men een hoeveelheid van x kg inkoopt, dan komen de totale kosten inclusief vervoer op

$$3000x + 20x^2 \tag{1.1}$$

guldens [1].

---

1) Verspreid over grote gebieden wordt entabogeen in kleine hoeveelheden gevonden. Grote hoeveelheden kunnen slechts ten koste van veel inspanning worden verkregen. Vandaar dat de inkoopkosten per eenheid

$$\frac{3000x + 20x^2}{x} = 3000 + 20x \tag{1.2}$$

monotoon toenemen als functie van de omvang x van de bestelling.

Verder is gegeven dat

a) de fabriek het benodigde geld moet lenen à 8% per jaar;
b) met het werk direkt na aankomst van de grondstoffen uit Afrika wordt begonnen;
c) het werk negen maanden zal duren;
d) het verbruik van entabogeen constant zal zijn en dat men in totaal 60 kg nodig heeft;
e) de opdrachtgever zal betalen zodra het project wordt opgeleverd.

Gevraagd wordt nu hoeveel kg entabogeen in Afrika en hoeveel kg ter plaatse moet worden ingekocht?"

Oplossing

In dit probleem zullen wij aannemen dat de toestand van het systeem gegeven kan worden met behulp van de volgende twee toestandsgrootheden:

1) de hoeveelheid entabogeen uit Afrika nog in voorraad;
2) de hoeveelheid entabogeen reeds gekocht op de plaatselijke markt.

De toestandsruimte S is dus een twee-dimensionale cartesische ruimte.

Als de beslissing x de in Afrika in te kopen hoeveelheid entabogeen voorstelt en als in Nederland slechts entabogeen wordt ingekocht voor onmiddellijk gebruik (geen voorraadvorming), dan wordt in fig. 1.1 de ontwikkeling in de toestand van het systeem aangegeven.

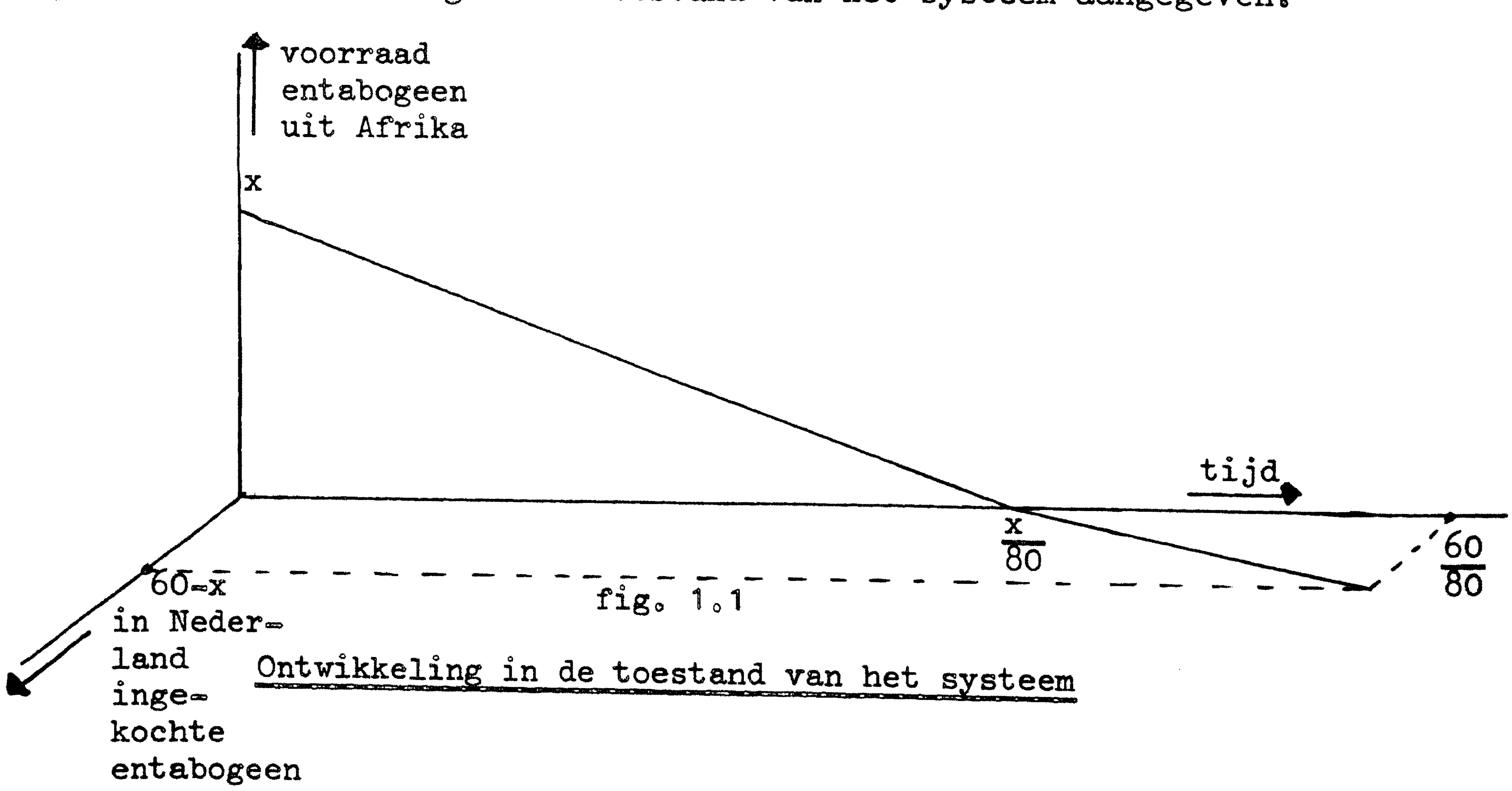


fig. 1.1

Ontwikkeling in de toestand van het systeem

De toe te kennen waardering aan deze ontwikkeling van het systeem (inclusief beslissingskosten) wordt gevormd door:

a) <u>inkoopkosten</u> $3000x + 20x^2$ (Afrika)

$+ (60 - x) \cdot 5000$ (Holland)

b) <u>rente</u>

1) te betalen aan de bank vanwege de financiering van de in Afrika ingekochte hoeveelheid entabogeen

$\frac{60}{80}$ (tijd) $\cdot$ 0,08 (rente) $\cdot$ $(3000x + 20x^2)$;

2) te betalen aan de bank vanwege de financiering van de <u>continue</u> inkoop van entabogeen in Holland (zie fig. 1.2 + toelichting)

$\frac{1}{2} \cdot \frac{60-x}{80}$(tijd) $\cdot$ 0,08 (rente) $\cdot$ $(60 - x) \cdot 5000$.

Wij zullen nu de renteberekening in punt 2 nader toelichten.

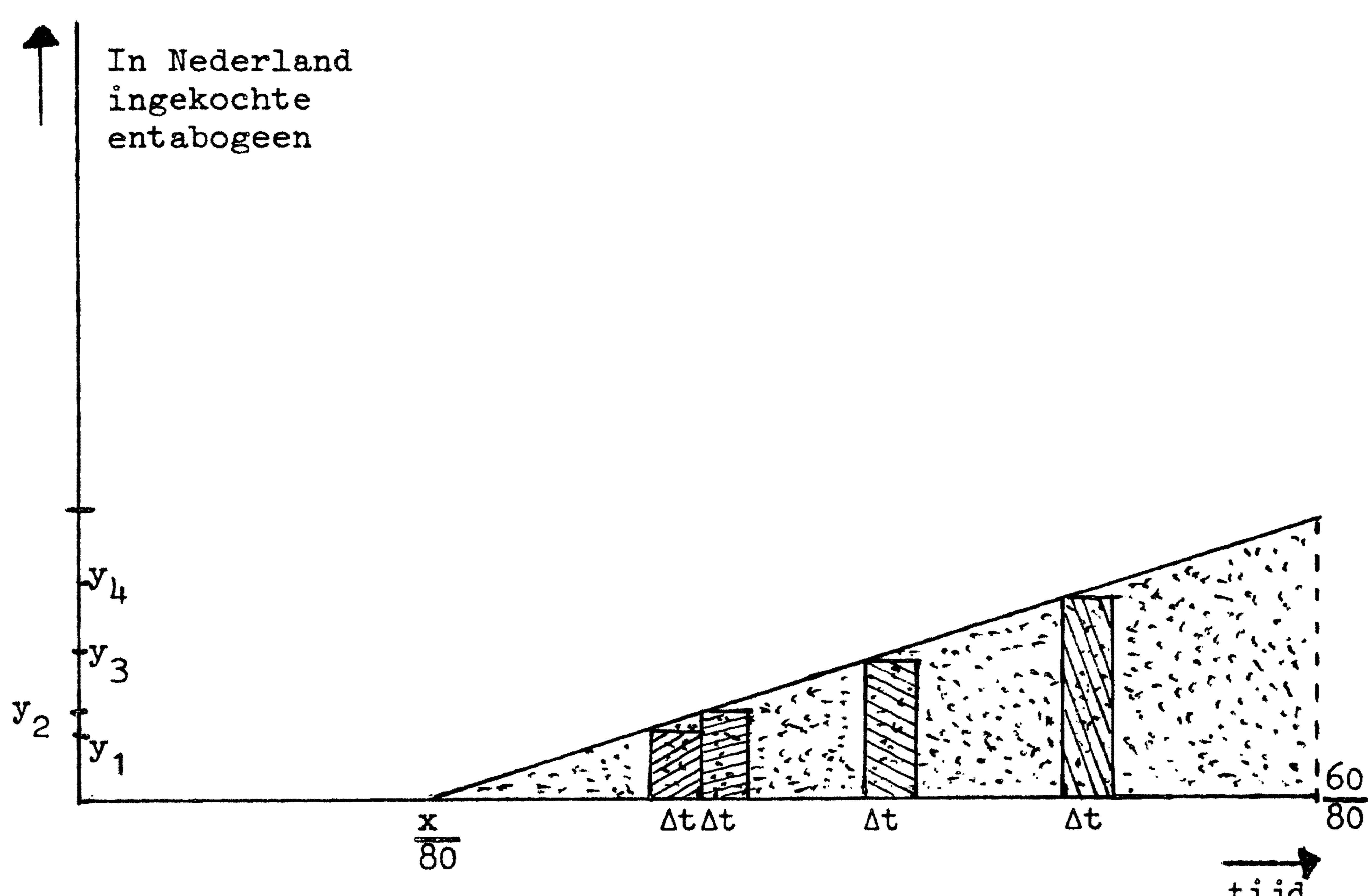


fig. 1.2

De renten verschuldigd over de perioden met lengten Δt worden in eerste benadering gegeven door

$$0{,}08 \text{ (rente)} \circ \Delta t \text{ (tijd)} \circ y_i^{\circ} \text{ (hoeveelheid)} \circ 5000 \text{ (prijs)}$$

of in andere woorden door 0,08 ∘ 5000 maal het oppervlak van het bijbehorende gearceerde gebied.
Men kan nu eenvoudig inzien dat de rente over de gehele tijdsperiode $(\frac{x}{80}, \frac{60}{80})$ gegeven wordt door

0,08 ∘ 5000 ∘ het oppervlak van het gestippelde gebied

en dus door

$$\frac{1}{2} \circ \frac{(60 - x)}{80} \circ (60 - x) \circ 0{,}08 \circ 5000.$$

De toe te kennen waardering wordt nu gelijk gekozen aan de totale kosten

$$(1 + \frac{9}{12} \circ 0{,}08)(3000x + 20x^2) + (1 + \frac{1}{2} \circ \frac{(60 - x)}{80} \circ 0{,}08)(60 - x)5000 =$$

$$= 23{,}7(x - 44{,}7257)^2 + 261590{,}7987. \qquad (1.3)$$

Het kriterium voor de optimale beslissing de x-functie wordt nu gegeven door

$$y(s_0; x) = 23{,}7(x - 44{,}7257)^2 + 261590{,}7987. \qquad (1.4)$$

Men kan eenvoudig nagaan dat (1.4) minimaal is, wanneer x gelijk gekozen wordt aan 44,7257.

Veronderstel nu dat men in Afrika alleen partijen kan inkopen welke groter dan of gelijk zijn aan 50 kg. De verzameling van toegelaten beslissingen $X(s_0)$ bestaat dan uit de volgende beslissingen:

$$x = 0 \qquad \text{en} \qquad x \geq 50. \qquad (1.5)$$

Uit (1.4) volgt, dat vanwege de term $23{,}7(x - 44{,}7257)^2$ de keuze moet vallen op die toegelaten waarde van x welke het minst "ver" van 44,7257 verwijderd is. Bijgevolg wordt onder de bijvoorwaarde (1.5) de optimale beslissing gegeven door x = 50.

Het tweede beslissingsprobleem

Ons tweede voorbeeld is een iets vereenvoudigde versie van het vierde voorbeeld uit hoofdstuk I (zie ook p. 30 en 31).

Een inkoper van een speciaalzaak in dameshoedjes gaat ieder najaar naar Parijs om één type hoedje te bestellen. Deze hoedjes worden dan het volgende voorjaar tussen 1 februari en 1 juli in de normale verkoop gebracht. Tijdens de uitverkoop (1 - 15 juli) worden de hoedjes tegen een sterk gereduceerde prijs aangeboden. De ervaring leert dat alle restanten in de uitverkoop kunnen worden opgeruimd.

In elk najaar moet de inkoper dus beslissen hoeveel hoedjes hij zal bestellen. Zijn keuze zal afhangen van de volgende gegevens:

a) de inkoopkosten bedragen $\phi(x)$ voor een partij van de omvang x;

b) de verkoopprijs in de normale verkoop bedraagt a_1;

c) de verkoopprijs in de uitverkoop bedraagt a_2 per hoedje;

d) de voorraadkosten bedragen b voor ieder hoedje een geheel seizoen in voorraad (wij denken hierbij in de eerste plaats niet aan rentederving, maar aan huur voorraadruimte, etc.).

e) de schade aan Good-will, welke het modehuis door "neen-verkoop" lijdt, bedraagt c;

f) de kansverdeling van de vraag $\underline{v}$ wordt gegeven door de kansdichtheid f(v) [2].

De kansverdeling onder f) is uiteraard een benadering van de werkelijke vraagverdeling, die discreet is.

Laten wij ons beperken tot één toestandsgrootheid en wel die, welke aangeeft hoeveel hoedjes van het bewuste type nog in voorraad zijn.

Uitgaande van de model-veronderstelling dat de vraag gelijkmatig over de periode 1 februari - 1 juli is verspreid zullen wij de volgende twee alternatieve mogelijkheden aan een beschouwing onderwerpen:

1) In de behoefte kan door de voorraad worden voorzien ($\underline{v} \leq x$).

Als de vraag naar hoedjes in de periode 1 februari - 1 juli v bedraagt, dan wordt de ontwikkeling in de toestand van het systeem aangegeven in fig. 1.3.

---

[2] Stochastische variabelen worden altijd onderstreept.

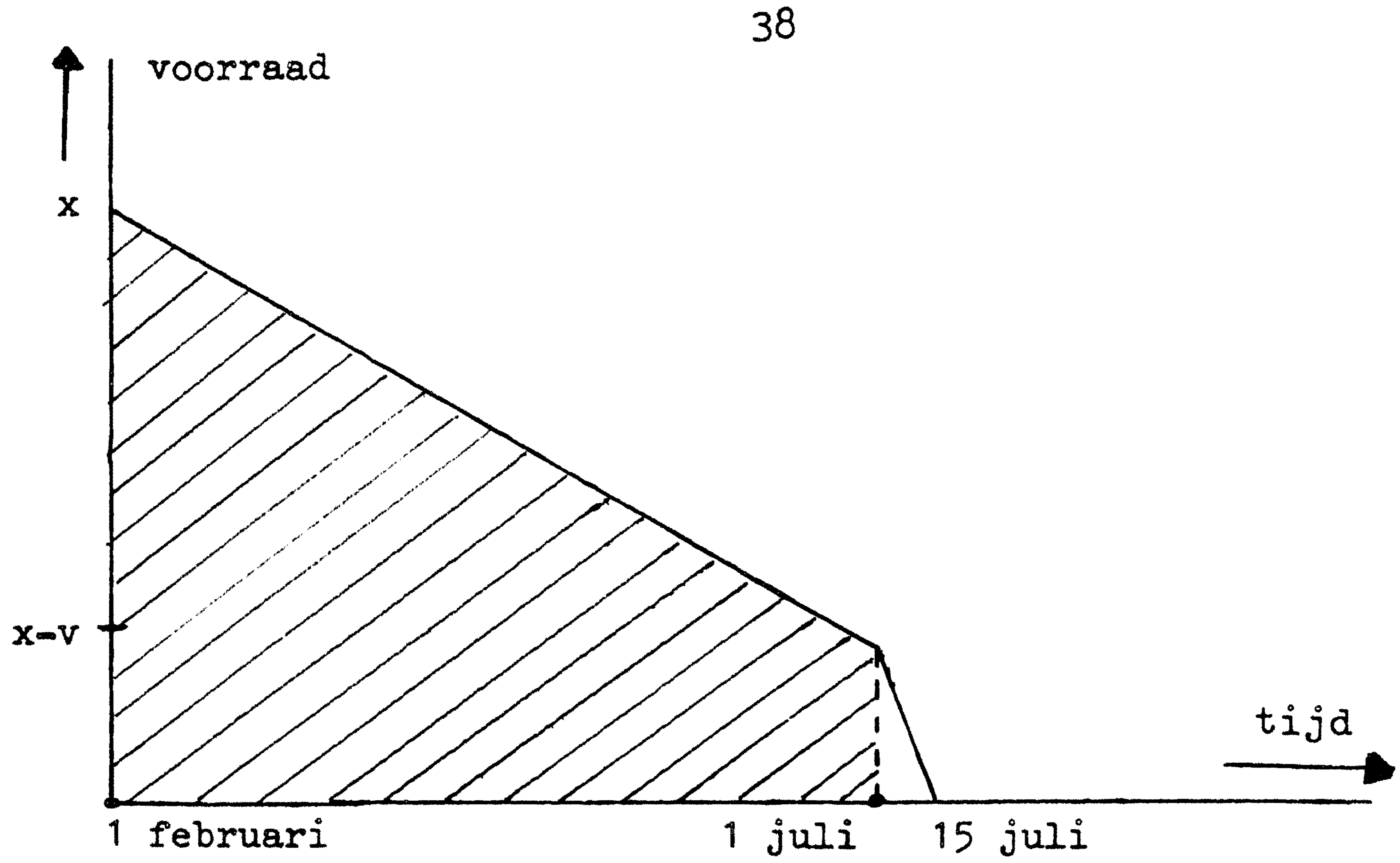


fig. 1.3

Ontwikkeling in de toestand van het systeem

Indien wij de voorraadkosten voor de uitverkoop-periode verwaarlozen en indien wij de voorraadkosten steeds berekenen over de restant-voorraad, dan zijn deze kosten evenredig met het oppervlak van het gearceerde gebied (zie fig. 1.2 + toelichting); dit is $\frac{x + (x - v)}{2}$, als de lengte van de periode 1 februari - 1 juli gelijk aan 1 gekozen wordt. Bijgevolg worden de voorraadkosten gegeven door

$$\frac{x + (x - v)}{2}\, b = \left(x - \frac{v}{2} \right) b. \tag{1.6}$$

De inkoopkosten bedragen $\phi(x)$, terwijl de inkomsten gegeven worden door

$$a_1 v + a_2 (x - v). \tag{1.7}$$

Wij kunnen derhalve aan deze realisering van de ontwikkeling in de toestand van het systeem de volgende waardering (winst) toekennen

$$a_1 v + a_2 (x - v) - \phi(x) - \left(x - \frac{v}{2}\right) b. \tag{1.8}$$

2) <u>In de behoefte kan niet door de voorraad worden voorzien ($v > x$)</u>

Als de vraag naar hoedjes in de periode 1 februari - 1 juli wederom v bedraagt, dan wordt de ontwikkeling in de toestand van het systeem aangegeven in fig. 1.4.

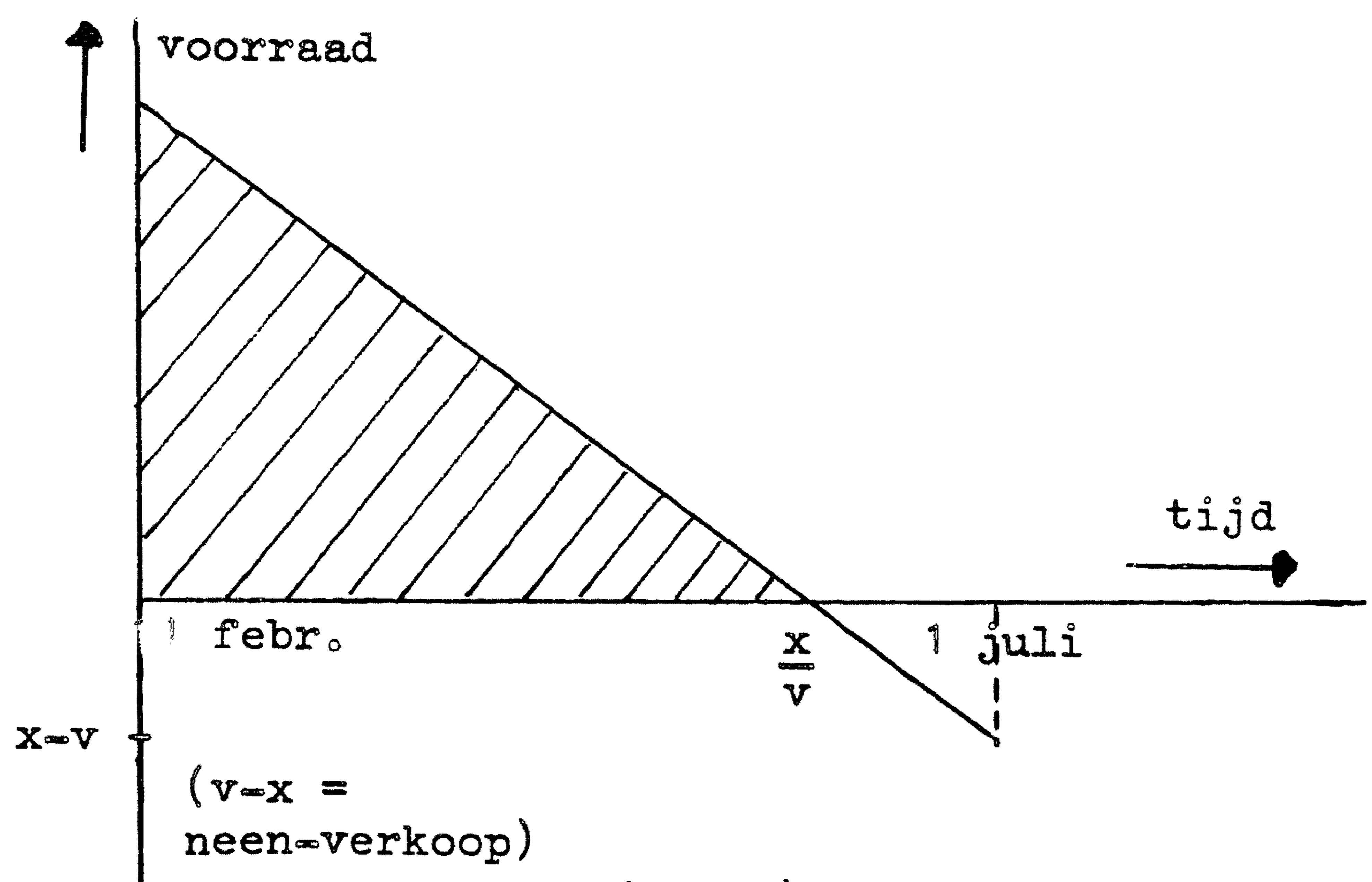


fig. 1.4

<u>Ontwikkeling in de toestand van het systeem</u>

De voorraadkosten zijn ook nu evenredig met het oppervlak van het gearceerde gebied; dit is $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{v} = \frac{1}{2}\frac{x^2}{v}$. Bijgevolg worden de voorraadkosten gegeven door $\frac{1}{2}\frac{x^2}{v}$ b. De inkoopkosten bedragen $\phi(x)$, terwijl het verlies aan Good-will gegeven wordt door $c(v - x)$. Voor de inkomsten vinden wij ax.

Wij kunnen derhalve aan deze realisering van de ontwikkeling in de toestand van het systeem de volgende waardering (winst) toekennen

$$a_1x - \phi(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{v} b - c(v - x). \qquad (1.9)$$

Samenvattende: Als de vraag naar hoedjes in de periode 1 februari - 1 juli v bedraagt dan wordt de toe te kennen waardering aan een realisering van de ontwikkeling in de toestand van het systeem gegeven door

$$
\begin{aligned}
&a_1 v + a_2(x - v) - \phi(x) - (x - \tfrac{v}{2})b, && \text{als } v \leq x \\
&a_1 x - \phi(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{v} b - c(v - x), && \text{als } v \geq x.
\end{aligned}
\qquad (1.10)
$$

Aangezien de vraag $\underline{v}$ stochastisch is, is ook de ontwikkeling in de toestand van het systeem van te voren niet bekend. Het ligt voor de hand om aan deze stochastische ontwikkeling de verwachting van de winst als waardering toe te kennen. Wij vinden derhalve voor de waardering

$$
\int_0^x \left\{a_1 v + a_2(x - v) - \phi(x) - (x - \tfrac{v}{2})b\right\} f(v)dv + \int_x^\infty \left\{a_1 x - \phi(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{v} b - c(v - x)\right\} f(v)dv. \qquad (1.11)
$$

Het kriterium voor de optimale beslissing wordt nu gegeven door

$$
y(s_0; x) = \int_0^x \; a_1 v + a_2(x - v) - \phi(x) - (x - \tfrac{v}{2})b\} f(v)dv + \int_x^\infty \left\{a_1 x - \phi(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{v} b - c(v - x)\right\} f(v)dv. \qquad (1.12)
$$

Het wiskundige optimum probleem luidt nu:

"Bepaal het maximum van (1.12)".

Met behulp van de differentiaalrekening kan men aantonen dat voor de gezochte waarde van x moet gelden

$$
\frac{dy(s_0; x)}{dx} = 0 \qquad (1.13)
$$

of

$$
a_2 - b + \int_x^\infty (a_1 + c - \frac{bx}{v} - a_2 + b) f(v)dv - \phi'(x) = 0. \qquad (1.14)
$$

Van het bovenstaand resultaat zullen wij thans een toepassing bespreken. Wij zullen uitgaan van de volgende gegevens:

a) de inkoopprijs van een hoedje bedraagt dertig gulden, m.a.w. $\phi(x) = 30x$;

b) de verkoopprijs in de normale verkoop bedraagt vijftig gulden, m.a.w. $a_1 = 50$;

c) de verkoopprijs in de uitverkoop is twintig gulden, m.a.w. $a_2 = 20$;

d) de voorraadkosten bedragen vijf gulden per seizoen per hoedje, dus $b = 5$;

e) de kansverdeling van de vraag wordt gegeven door de gamma-verdeling

$$f(v) = (0{,}02)^2 \; ve^{-0{,}02v} \tag{1.15}$$

(de verwachte vraag is dus 100 hoedjes);

f) het verlies c aan Good-will voor ieder hoedje te weinig in voorraad, wordt achtereenvolgens getaxeerd op 0, 5, 10, 15, 20, 25 en 30 gulden.

De relatie (1.14) wordt voor deze toepassing gegeven door

$$(35 + c) \int_x^\infty (0{,}02)^2 \; ve^{-0{,}02v} \, dv - 5x \int_x^\infty (0{,}02)^2 \; e^{-0{,}02v} \, dv = 15. \tag{1.16}$$

Na enig rekenen gaat (1.16) over in

$$(0{,}6 + 0{,}02c)xe^{-0{,}02x} + (35 + c)e^{-0{,}02x} = 15. \tag{1.17}$$

Indien wij deze vergelijking oplossen naar x, dan vinden wij het reeds op p.31 vermelde resultaat:

Tabel 1.I

Invloed van verlies aan Good-will op optimale bestelgrootte

verlies aan Good-will in guldens	optimale bestelgrootte
0	88
5	96
10	109
15	117
20	124
25	130
30	136

2. Lineaire programmeringsproblemen

In deze paragraaf zullen wij ons bezig houden met één-staps-beslissingsproblemen, die opgelost kunnen worden met behulp van een wiskundige techniek, de Lineaire programmering.

Alvorens deze techniek toe te lichten zullen wij eerst een drietal lineaire programmeringsproblemen aan een beschouwing onderwerpen.

Het eerste probleem

De Buizerdfabrieken N.V. beschikken over vier bedrijfmachines; de M.G. 11, de Zodax, de Bim X en de Velox mix. Met behulp van deze machines kunnen drie verschillende producten worden gemaakt. De producten zijn de Buizerd super, de Buizerd ideaal en de Buizerd de luxe.

Voor de productie van
Buizerd super wordt gebruik gemaakt van M.G. 11 en Zodax
Buizerd ideaal " " " " Zodax en Velox m
Buizerd de luxe " " " " M.G. 11, Bim X en Velox m.
In tabel 2.I wordt aangegeven hoeveel eenheden van een bepaald product de machines maximaal kunnen verwerken, als zij gedurende een maand alleen voor de vervaardiging van dat product zijn ingeschakeld.

Tabel 2.I

Productie-capaciteit

	M.G. 11	Zodax	Bim X	Velox mix
Buizerd Super	4000	3500	-	-
Buizerd Ideaal	-	2500	-	1500
Buizerd de Luxe	2000	-	3000	2000

Voor de eenvoud zullen wij aannemen dat bij het omschakelen van productie geen capaciteit verloren gaat.

In tabel 2.II vindt men voor ieder product de minimale en de maximale vraag per maand, berekend op grond van contractuele verplichtingen en marktonderzoekingen. Benevens is voor ieder product aangegeven hoeveel de winst per eenheid bedraagt.

Tabel 2.II

Productie-eisen en winsten

	Min. prod.	max. prod.	winst per eenheid
Buizerd Super	1500	2200	ƒ 50,-
Buizerd Ideaal	1000	1750	ƒ 60,-
Buizerd de Luxe	500	1500	ƒ 70,-

Gevraagd wordt nu vast te stellen hoeveel eenheden van ieder product maandelijks moeten worden vervaardigd opdat de totale winst maximaal is.

Wij zullen thans proberen dit productie-probleem te vertalen in een wiskundig optimum probleem.

Stel de te kiezen productie-grootten gelijk aan x_i $(i = 1, 2, 3)$. De totale winst wordt dan gegeven door (zie tabel 2.II)

$$y(s_0; x) = 50x_1 + 60x_2 + 70x_3. \qquad (2.1)$$

In de keuze van de beslissing x is men echter niet geheel vrij. In de eerste plaats moet men er voor zorgen dat de totale productie-capaciteit niet wordt overschreden. Indien men x_1 eenheden Buizerd Super maakt dan legt men beslag op $\frac{x_1}{4000}$ van de productie-capaciteit van M.G. 11.

Evenzo vindt men voor x_3 eenheden Buizerd de Luxe dat M.G. 11 voor $\frac{x_3}{2000}$ is bezet. Uiteraard moet voor M.G. 11 gelden:

$$\frac{x_1}{4000} + \frac{x_3}{2000} \leq 1. \qquad (2.2)$$

Op analoge wijze vinden wij voor de overige productie-capaciteiten:

$$\frac{x_1}{3500} + \frac{x_2}{2500} \leq 1 \qquad \text{(Zodax)} \qquad (2.3)$$

$$\frac{x_3}{3000} \leq 1 \qquad \text{(Bim X)} \qquad (2.4)$$

$$\frac{x_2}{1500} + \frac{x_3}{2000} \leq 1 \qquad \text{(Velox mix).} \qquad (2.5)$$

Verder volgen uit de productie-eisen vermeld in tabel 2.II de volgende ongelijkheden:

$$1500 \leq x_1 \leq 2200 \tag{2.6}$$

$$1000 \leq x_2 \leq 1750 \tag{2.7}$$

$$500 \leq x_3 \leq 1500. \tag{2.8}$$

Het hier boven geschetste één-stapsbeslissingsprobleem kan dus vertaald worden in het volgende wiskundige optimum probleem:

Bepaal het maximum van (2.1) onder de bijvoorwaarden (2.2) t/m (2.8).

Het tweede probleem

De ijzergiet- en walserij "de Eendracht" heeft voor de komende maanden de behoefte van de walserij aan blokken staal als volgt gespecificeerd:

Tabel 2.III

Behoefte aan blokken staal

Maand	blokken
Maart 1965	4000
April	3500
Mei	3200
Juni	2500
Juli	4500
Augustus	3500
September	3800
Oktober	3600
November	2000
December	2500
Januari 1966	2800
Februari	2400

De in tabel 2.III beschreven aantallen blokken dienen op de eerste dag van de desbetreffende maand aanwezig te zijn en zullen derhalve in de voorafgaande maanden moeten worden gegoten.

Verder is gegeven dat

a) het ƒ 100,- kost om de maand-productie aan het begin van de maand met één blok te verhogen;

b) het ƒ 40,- kost om de maand-productie aan het begin van de maand met één blok te verlagen;

c) ƒ 25,- schade wordt geleden wanneer één blok één maand onnodig in voorraad is;

d) de voorraad op 1 februari 1965 2000 blokken groot zal zijn;

e) de giet-productie in januari 1965 2500 blokken bedraagt;

f) de maximale voorraad-capaciteit 8000 blokken is.

Hoeveel blokken moeten er in de maanden februari 1965 t/m januari 1966 worden gegoten, opdat aan alle behoeften kan worden voldaan en tevens de totale kosten minimaal zijn?

Laten wij de productie voor de maanden februari 1965 t/m januari 1966 vaststellen op x_i ($i = 1, 2, \ldots, 12$) en laten wij de behoeften voor de maanden maart 1965 t/m februari 1966 aangeven met d_i ($i = 1, 2, \ldots, 12$).

Uit tabel 2.III volgen nu de ongelijkheden:

$$2000 + \sum_{j=1}^{i} x_j \geq \sum_{j=1}^{i} d_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, 12). \tag{2.9}$$

Uit punt f) volgen de ongelijkheden:

$$2000 + \sum_{j=1}^{i} x_j - \sum_{j=1}^{i} d_j \leq 8000 \quad (i = 1, 2, \ldots, 12). \tag{2.10}$$

Voor de totale voorraad-kosten vinden wij

$$25 \sum_{i=1}^{12} \left(2000 + \sum_{j=1}^{i} x_j - \sum_{j=1}^{i} d_j\right). \tag{2.11}$$

Om de kosten te kunnen bepalen welke verband houden met veranderingen in de productie voeren wij de nieuwe variabelen x_i^{*} en x_i^{**} $(i = 1, 2, \ldots, 12)$ in, die gedefiniëerd worden door:

$$x_i^{*} = \begin{cases} x_i - x_{i-1}, & \text{als } x_i \geq x_{i-1} \\ 0, & \text{als } x_i < x_{i-1} \end{cases} \tag{2.12}$$

en

$$x_i^{**} = \begin{cases} x_{i-1} - x_i, & \text{als } x_i \leq x_{i-1} \\ 0, & \text{als } x_i > x_{i-1}, \end{cases} \tag{2.13}$$

waarbij x_0 (productie januari 1965) = 2500.

Men merke op dat altijd geldt: $x_i^{*} \geq 0$, $x_i^{**} \geq 0$.

Zoals men eenvoudig kan nagaan worden de kosten die voortvloeien uit productie-veranderingen gegeven door

$$\sum_{i=1}^{12} (100x_i^{*} + 40x_i^{**}). \tag{2.14}$$

Wij zullen nu in (2.9) t/m (2.11) de variabelen x_j vervangen door de nieuwe beslissingsvariabelen x_j^{*} en x_j^{**}.

Eenvoudig kan worden aangetoond dat

$$x_j = x_0 + \sum_{k=1}^{j} x_k^{*} - \sum_{k=1}^{j} x_k^{**} \quad (j = 1, 2, \ldots, 12). \tag{2.15}$$

Bijgevolg vinden wij

$$\sum_{j=1}^{i} x_j = ix_0 + \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{j} (x_k^{*} - x_k^{**}) = ix_0 + \sum_{k=1}^{i} (i-k+1)(x_k^{*} - x_k^{**}). \tag{2.16}$$

Vanwege (2.16) gaan de ongelijkheden (2.9) en (2.10) over in

$$2000 + ix_0 + \sum_{k=1}^{i} (i-k+1)(x_k^{*} - x_k^{**}) \geq \sum_{j=1}^{i} d_j \quad (i = 1, \ldots, 12), \qquad (2.17)$$

$$2000 + ix_0 + \sum_{k=1}^{i} (i-k+1)(x_k^{*} - x_k^{**}) - \sum_{j=1}^{i} d_j \leq 8000. \qquad (2.18)$$

Aangezien $x_i \geq 0$ volgt uit (2.15)

$$x_0 = 2500 \geq \sum_{k=1}^{i} x_k^{**} - \sum_{k=1}^{i} x_k^{*} \quad (i = 1, \ldots, 12). \qquad (2.19)$$

Met behulp van (2.15) kunnen wij (2.11) herleiden tot

$$25 \sum_{i=1}^{12} \left[2000 + ix_0 + \sum_{k=1}^{i} (i-k+1)(x_k^{*} - x_k^{**}) - \sum_{j=1}^{i} d_j \right]. \qquad (2.20)$$

De totale kosten worden dus gegeven door:

$$\sum_{i=1}^{12} (100x_i^{*} + 40x_i^{**}) + 25 \sum_{i=1}^{12} \left[2000 + ix_0 + \sum_{k=1}^{i} (i-k+1)(x_k^{*} - x_k^{**}) - \sum_{j=1}^{i} d_j \right]. \qquad (2.21)$$

Het mathematische optimum probleem luidt nu als volgt:

"Bepaal het minimum van de (x^{*}, x^{**})-functie (2.21) onder de bijvoorwaarden (2.17), (2.18), (2.19) en

$$x_i^{*} \geq 0, \; x_i^{**} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 12)." \qquad (2.22)$$

Het derde probleem

Als derde voorbeeld kiezen wij het eerste voorbeeld uit hoofdstuk 1.

Indien wij een mengsel maken van 100 kg en indien wij het aantal kilo's rogge, milocorn, paardebonen, etc. in het mengsel aangeven met x_1 t/m x_7, dan vinden wij voor de kriterium-functie (kosten per 100 kg):

$$y(s_0; x) = 0{,}2275x_1 + 0{,}2235x_2 + 0{,}3025x_3 + 0{,}3825x_4 + 0{,}3250x_5 + $$
$$+ 0{,}2650x_6 + 0{,}3250x_7. \qquad (2.23)$$

De variabelen x_1, x_2, ..., x_7 mogen niet negatief gekozen worden en moeten bovendien voldoen aan de vergelijking:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_7 = 100. \qquad (2.24)$$

Uit de tabellen 2.I en 2.II kunnen wij afleiden aan welke voorwaarden de variabelen x_1 t/m x_7 verder nog moeten voldoen.
Deze voorwaarden luiden:

$$\begin{array}{ll} 0 \leq x_1 \leq 20 & x_5 \geq 2 \\ 0 \leq x_2 \leq 15 & x_6 \geq 8 \\ 0 \leq x_3 \leq 7 & 0 \leq x_7 \leq 10 \\ x_4 \geq 5 & \end{array} \qquad (2.25)$$

$$\begin{array}{l}
0{,}095x_1 + 0{,}085x_2 + 0{,}100x_3 + 0{,}081x_4 + 0{,}071x_5 + 0{,}081x_6 + 0{,}073x_7 \leq 8{,}6 \\
0{,}066x_1 + 0{,}057x_2 + 0{,}154x_3 + 0{,}298x_4 + 0{,}118x_5 + 0{,}127x_6 + 0{,}202x_7 \geq 12 \\
0{,}079x_1 + 0{,}074x_2 + 0{,}175x_3 + 0{,}330x_4 + 0{,}140x_5 + 0{,}132x_6 + 0{,}228x_7 \geq 14{,}7 \\
0{,}012x_1 + 0{,}023x_2 + 0{,}010x_3 + 0{,}006x_4 + 0{,}070x_5 + 0{,}018x_6 + 0{,}036x_7 \geq 1{,}8 \\
0{,}497x_1 + 0{,}521x_2 + 0{,}469x_3 + 0{,}486x_4 + 0{,}547x_5 + 0{,}430x_6 + 0{,}417x_7 \geq 42 \\
0{,}017x_1 + 0{,}024x_2 + 0{,}056x_3 + 0{,}045x_4 + 0{,}115x_5 + 0{,}180x_6 + 0{,}122x_7 \leq 8{,}4
\end{array} \qquad (2.26)$$

Het probleem waar voor wij ons gesteld zien kan nu als volgt worden geformuleerd: minimaliseer (2.23) onder de bijvoorwaarden (2.24), (2.25) en (2.26).

De hierboven gegeven voorbeelden leiden alle drie tot het zelfde wiskundig optimum probleem:

"Bepaal het maximum (of minimum) van de functie

$$y(s_0;x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.27}$$

onder de bijvoorwaarden:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &= b_i \qquad (i = 1,2,\dots,r) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &\leq b_i \qquad (i = r+1,\dots,r+s) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &\geq b_i \qquad (i = r+s+1,\dots,r+s+t) \\ x_j &\geq 0 \qquad (j = 1,\dots,n) \end{aligned} \tag{2.28}$$

waarbij c_j, a_{ij} en b_i gegeven constanten zijn".

Meetkundig stelt de relatie

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j = b_i \tag{2.29}$$

een rechte lijn voor in een twee-dimensionale beslissingsruimte.
De gelijkheid

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = b_i \tag{2.30}$$

correspondeert met een plat vlak in een drie-dimensionale beslissingsruimte. De generalisatie van lijn en plat vlak voor hogere dimensionale beslissingsruimten heet hypervlak en wordt gegeven door

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ . \tag{2.31}$$

De meetkundige plaats van de punten, die voldoen aan de ongelijkheid

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j < b_i \tag{2.32}$$

is een gebied in de twee dimensionale beslissingsruimte, dat ligt langs één kant van de rechte

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j = b_i \; . \tag{2.33}$$

De ongelijkheid

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j \leq b_i \tag{2.34}$$

geeft de vereniging aan van het hierboven genoemde gebied met de punten van zijn begrenzing, de lijn (2.33). Deze vereniging noemt men een halfvlak.

De meetkundige plaats van de punten, die voldoen aan de ongelijkheid

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j < b_i \tag{2.35}$$

is een gebied in de drie dimensionale beslissingsruimte, dat ligt langs één kant van het platte vlak

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j = b_i \; . \tag{2.36}$$

De ongelijkheid

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \leq b_i \tag{2.37}$$

geeft de vereniging aan van het zojuist genoemde gebied met de punten van zijnbegrenzing, het platte vlak (2.36). Deze vereniging noemt men een halfruimte.

De meetkundige plaats van de punten, die voldoen aan de ongelijkheid

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i \tag{2.38}$$

is een gebied in de n-dimensionale beslissingsruimte, dat ligt langs één kant van het hypervlak

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ . \qquad (2.39)$$

De ongelijkheid

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \qquad (2.40)$$

geeft de vereniging aan van het zojuist genoemde gebied met de punten van zijn begrenzing, het hypervlak (2.39). Ook deze vereniging noemt men een halfruimte.

Het behoeft geen betoog dat aan ongelijkheden van het type

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \qquad (2.41)$$

ook halfruimten in X kunnen worden toegevoegd.

De gelijk- en ongelijkheden (2.28) geven tezamen in de beslissingsruimte X het gebied $X(s_0)$ van de toegelaten beslissingen aan.

In fig. 1.5 en fig. 1.6 is voor $n = 2$, $r = 0$, $s = 1$ en $t = 2$ (zie (2.28)) een gebied $X(s_0)$ aangegeven.

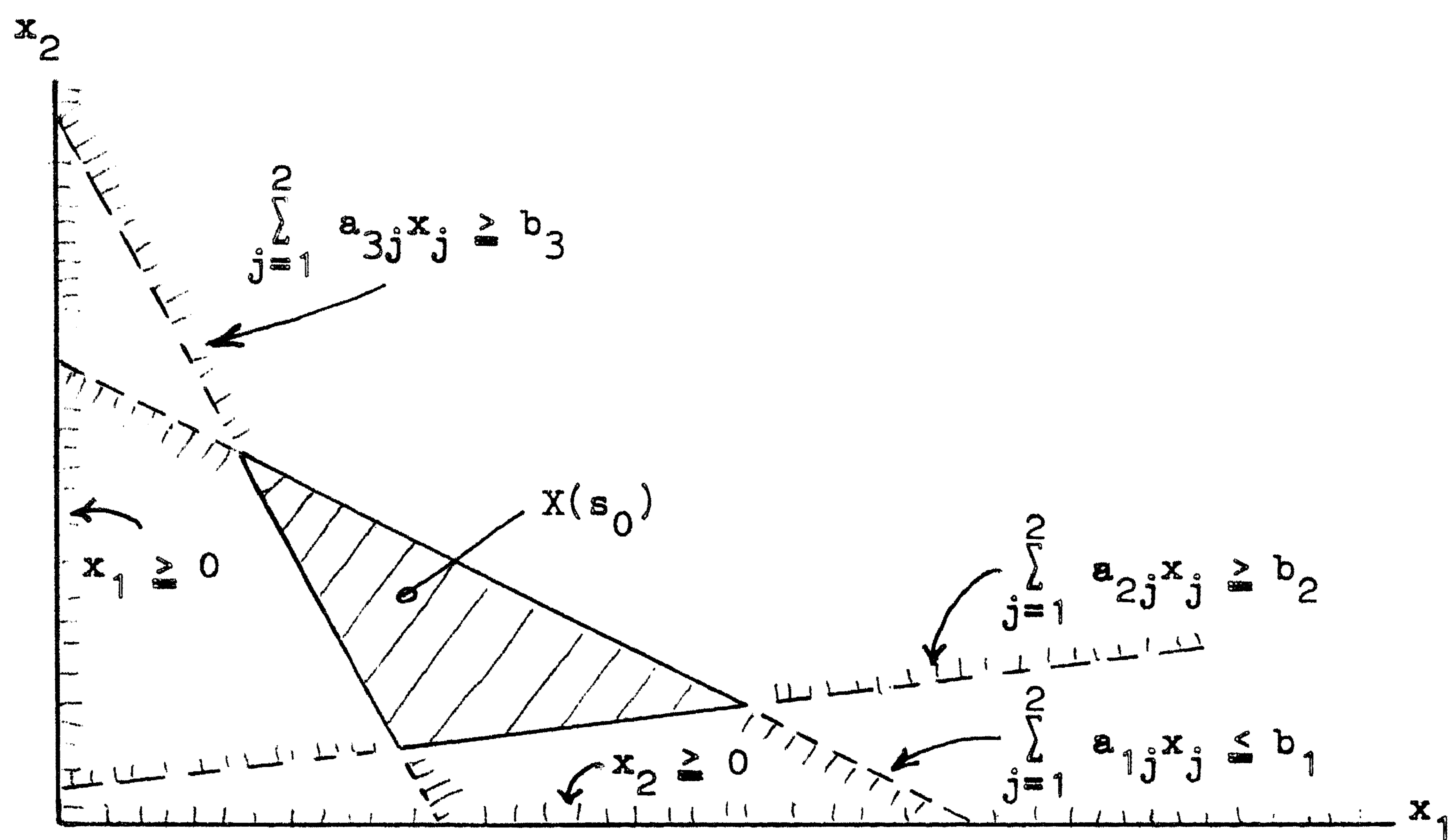
In fig. 1.7 is voor het geval $n = 2$, $r = 1$, $s = 1$ en $t = 1$ een gebied $X(s_0)$ getekend.

In fig. 1.8 is tenslotte een poging gedaan om in een drie dimensionale beslissingsruimte een gebied $X(s_0)$ aan te geven. In de laatste figuur zijn slechts twee van de samenstellende zijvlakken alsmede hun snijlijn getekend.

In de figuren 1.5, 1.6 en 1.7 is voor iedere ongelijkheid afzonderlijk aangeduid in welk halfvlak van de beslissingsruimte de toegelaten beslissingen liggen. Met behulp van deze aanwijzingen is het gebied $X(s_0)$ eenvoudig te construeren.

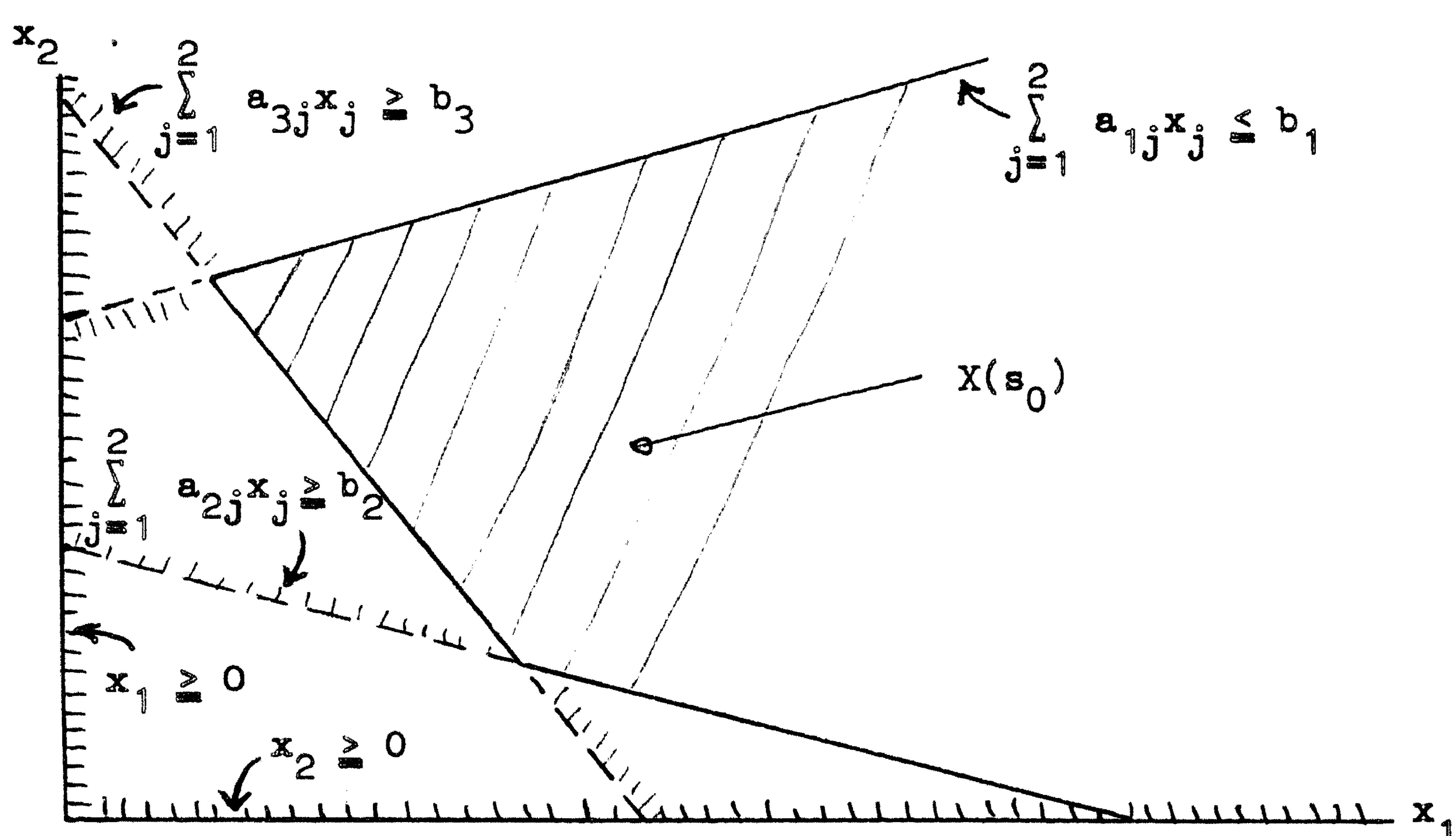
In fig. 1.7 ziet men dat tengevolge van de gelijkheid $\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j = b_1$ de dimensie van $X(s_0)$ niet twee maar één bedraagt.
In het algemeen zal, als $r \geq 1$, vanwege de r gelijkheden in (2.28) de dimensie van $X(s_0)$ niet n maar (n-r) zijn.

In een twee-dimensionale beslissingsruimte X bestaan de begrenzingen van het gebied $X(s_0)$ uit lijnen. Er zijn paren van deze



<u>fig. 1.5</u>

<u>Een voorbeeld van een gebied $X(s_0)$ (n=2, r=0, s=1 en t=2)</u>



<u>fig. 1.6</u>

<u>Een voorbeeld van een gebied $X(s_0)$ (n=2, r=0, s=1 en t=2)</u>

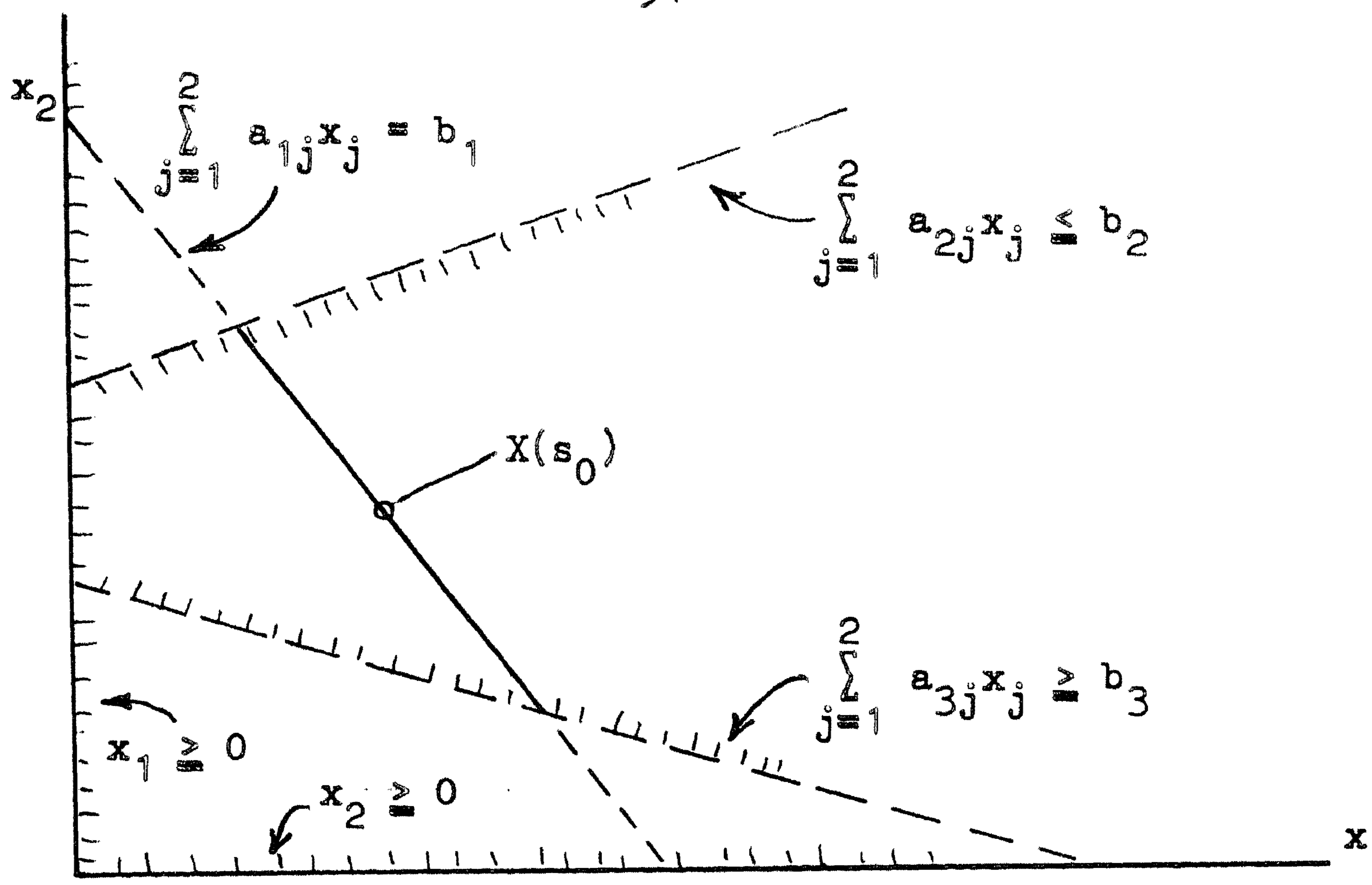


fig. 1.7

Een voorbeeld van een gebied $X(s_0)$ ($n=2$, $r=1$, $s=1$ en $t=1$)

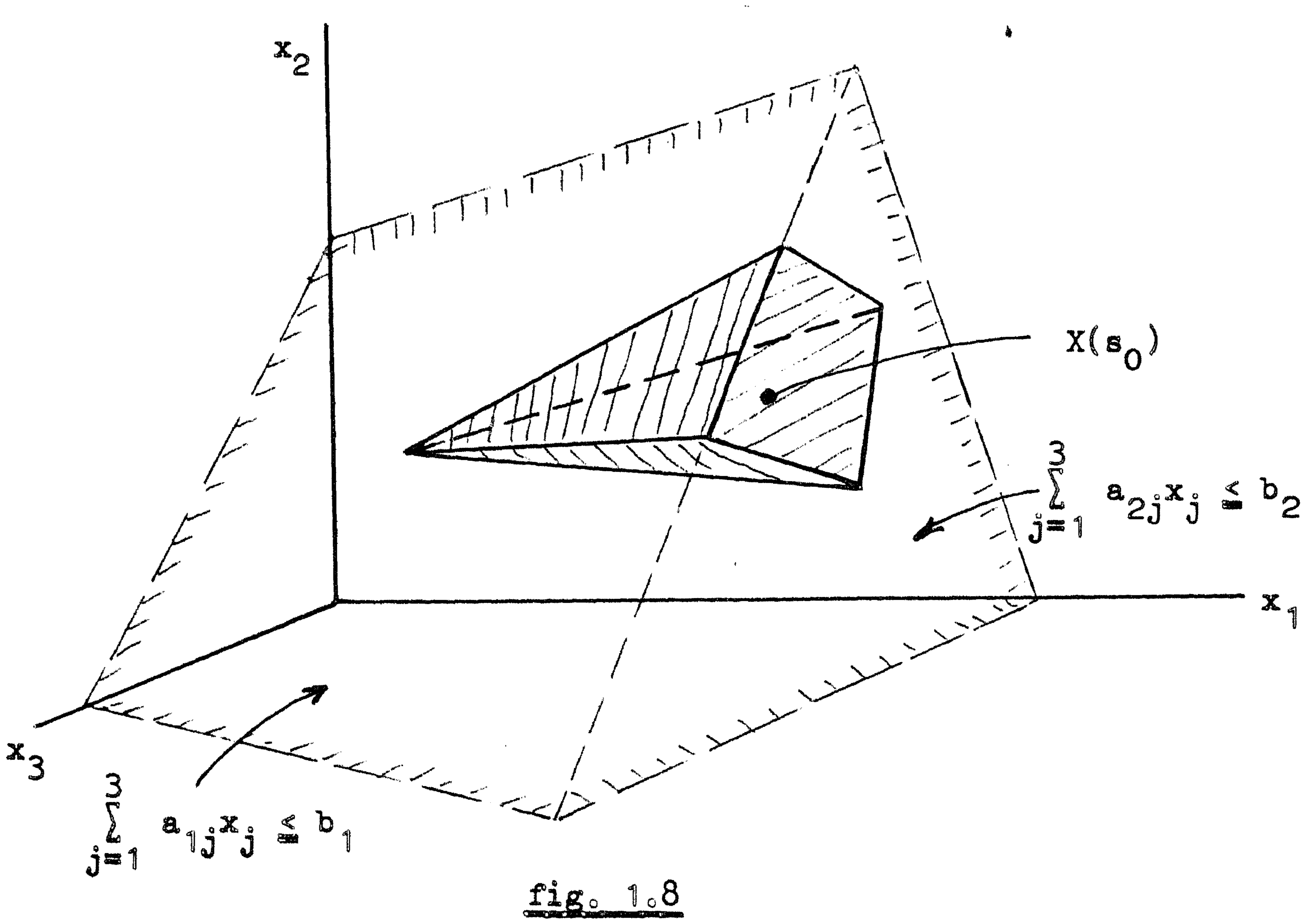


fig. 1.8

Een voorbeeld van een drie-dimensionaal gebied $X(s_0)$

lijnen, die elkaar snijden in hoekpunten van $X(s_0)$. (Zie fig. 1.5 en fig. 1.6).

In een drie-dimensionale beslissingsruimte X bestaan de begrenzingen van het gebied $X(s_0)$ uit platte vlakken. Er zijn paren van deze vlakken, die elkaar snijden volgens ribben van $X(s_0)$. Er zijn drietallen van deze vlakken die elkander snijden in een hoekpunt van $X(s_0)$. In zo'n hoekpunt komen dan ook minstens drie ribben tezamen. In fig. 1.8 komen in één van de hoekpunten vier ribben tezamen, terwijl in de overige hoekpunten men slechts drie ribben aantreft.

In een vier-dimensionale beslissingsruimte X bestaan de begrenzingen van het gebied $X(s_0)$ uit hypervlakken van het type

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}x_j = b_i \qquad x_j = 0 \,. \tag{2.42}$$

Er zijn paren van deze hypervlakken die elkander snijden volgens platte (rand-)vlakken. Er bestaan geen paren die slechts één ribbe of een hoekpunt gemeen hebben. Er zijn drietallen hypervlakken (2.42) die elkaar snijden volgens een ribbe. Misschien zijn er ook drietallen die elkander snijden volgens een plat vlak. Er zijn in ieder geval geen drietallen die slechts een hoekpunt van $X(s_0)$ gemeen hebben. Er zijn viertallen hypervlakken die elkander snijden in een hoekpunt van $X(s_0)$. Wellicht zijn er viertallen die elkaar snijden volgens platte (rand-)vlakken of ribben van $X(s_0)$. In een hoekpunt van $X(s_0)$ komen minstens vier ribben en zes platte vlakken tezamen. Deze aantallen kan men eenvoudig verifiëren als men bedenkt dat

a) iedere combinatie van drie van de vier in het betreffende hoekpunt samenkomende hypervlakken een ribbe oplevert $\left[\binom{4}{3} = 4\right]$;

b) iedere combinatie van twee van de vier in het betreffende hoekpunt samenkomende hypervlakken een plat vlak oplevert $\left[\binom{4}{2} = 6\right]$.

In het algemeen: In een n-dimensionale beslissingsruimte X bestaan de begrenzingen van het gebied $X(s_0)$ uit hypervlakken van het type

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (2.43)$$

$$x_j = 0 .$$

Er zijn paren van deze hypervlakken die elkaar snijden volgens een (n-2)-dimensionale (rand-)ruimte. Er zijn k-tallen van deze hypervlakken, die elkander snijden volgens (n-k)-dimensionale (rand-)ruimten. Wellicht zijn er k-tallen die elkaar snijden volgens een hogere dimensionale (rand-)ruimte. Er bestaan echter geen k-tallen die slechts punten uit een lagere dimensionale (rand-)ruimte gemeen hebben. Dit betekent dat

a) door een hoekpunt van $X(s_0)$ minstens n hypervlakken gaan ($k = n$);
b) bij elke combinatie van (n-1) van n - slechts door één hoekpunt gaande - hypervlakken een ribbe behoort; de snijlijn van deze hypervlakken ($k = n-1$). Bijgevolg komen minstens n ribben in een hoekpunt tezamen.

Indien een randpunt van $X(s_0)$ ligt in de doorsnede van k hypervlakken van het type

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (2.43)$$

$$x_j = 0$$

dan behoort dat punt tot een (n-k) of hoger dimensionale (rand-)-ruimte. Men merke op dat een hoekpunt van $X(s_0)$ een 0-dimensionale randruimte is. Een niet-hoekpunt op een ribbe ligt in een één-dimensionale randruimte. Men treft op de rand van $X(s_0)$ allerlei randruimten aan van verschillende dimensies (zie fig. 1.8; hoekpunt, ribbe en plat randvlak).

In het hiernavolgende zullen wij een aantal uitspraken doen. Wij spreken met opzet over uitspraken en niet over stellingen, omdat wij geen wiskundige bewijzen zullen geven.

Wij volstaan met het plausibel maken van deze uitspraken. Overeenkomstige stellingen kunnen worden bewezen.

Wij komen nu tot de eerste uitspraak:

Uitspraak no. 1

De begrenzingen van $X(s_0)$, gegeven door (2.28), bestaan uit hypervlakken van het type

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &= b_i \qquad i=1,\dots,r+s+t \\ x_j &= 0 \qquad j=1,\dots,n \;. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Door ieder hoekpunt van $X(s_0)$ gaan minstens n van deze hypervlakken. In ieder hoekpunt komen minstens n ribben tezamen.

Indien x' en x'' twee beslissingspunten zijn in de beslissingsruimte X, dan kan door een geschikte keuze van λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) ieder punt x op de verbindingslijn worden weergegeven met behulp van de uitdrukking

$$x = (1-\lambda)x' + \lambda x'' \;. \tag{2.44}$$

Voor het punt x' vinden wij $\lambda = 0$, terwijl voor x'' geldt: $\lambda = 1$.

Wij zullen nu aantonen dat (2.44) een rechte lijn voorstelt.

De uitdrukking (2.44) impliceert dat voor de coördinaten x_j van x geldt:

$$x_j = (1-\lambda)x'_j + \lambda x''_j \qquad (j=1,\dots,n) \tag{2.45}$$

De afstand $d(x,x')$ tussen x en x' wordt gegeven door

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j-x'_j)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda^2(x''_1-x'_j)^2} = \lambda\, d(x',x'') \;.$$

Bijgevolg is λ evenredig met de afstand (x,x').

Voor n = 2 vindt men na eliminatie van λ uit (2.45)

$$x_2 = x_2' + (x_1 - x_1') \frac{x_2' - x_2''}{x_1' - x_1''} \quad . \tag{2.46}$$

Zoals men eenvoudig kan nagaan stelt (2.46) een lijn voor in een twee-dimensionale beslissingsruimte. Evenzo kan men voor $n \geq 2$ door eliminatie van λ de volgende relaties verkrijgen:

$$x_k = x_k' + (x_1 - x_1') \frac{x_k' - x_k''}{x_1' - x_1''} \qquad (k=2,\ldots,n) \quad . \tag{2.47}$$

Deze (n-1) relaties zijn onafhankelijk. Alle overige relaties

$$x_k = x_k' + (x_j - x_j') \frac{x_k' - x_k''}{x_j' - x_j''} \qquad (k \neq j \neq 1) \;, \tag{2.48}$$

die eveneens door eliminatie van λ uit (2.45) volgen, kunnen ook via (2.47) worden afgeleid. Er zijn dus slechts (n-1) onafhankelijke relaties. Indien wij (2.47) herleiden tot

$$\frac{x_k' - x_k''}{x_1' - x_1''} x_1 - x_k = x_1' \frac{x_k' - x_k''}{x_1' - x_1''} - x_k' \tag{2.49}$$

en indien wij ons realiseren dat zowel

$$\frac{x_k' - x_k''}{x_1' - x_1''} \qquad \text{als} \qquad x_k' - x_1' \frac{x_k' - x_k''}{x_1' - x_1''}$$

constanten zijn, dan kunnen wij eenvoudig inzien dat de relaties (2.47) corresponderen met (n-1) hypervlakken. De punten (2.44) zijn dus die punten in X welke tot elk van de hypervlakken behoren. Zij vormen derhalve de snijlijn van deze hypervlakken. (n-1) onafhankelijke hypervlakken snijden elkaar volgens een rechte lijn.
(Ga na voor n = 3 ! ; bedenk dat voor n = 3 een hypervlak = plat vlak!).
Bijgevolg liggen de punten (2.44) op een rechte lijn.

Laten wij nu veronderstellen dat zowel x' als x'' voldoen aan (2.28). Indien wij het rechter en het linkerlid van (2.28) met λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) vermenigvuldigen dan geldt voor x''

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x''_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda x''_j \begin{matrix} = \\ \leq \\ \geq \end{matrix} \lambda b_i \qquad (2.50)$$

$$\lambda x''_j \geq 0 \; .$$

Evenzo geldt voor x'

$$(1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(1-\lambda)x'_j \begin{matrix} = \\ \leq \\ \geq \end{matrix} (1-\lambda)b_i \qquad (2.51)$$

$$(1-\lambda)x'_j \geq 0 \; .$$

Als overeenkomstige gelijk- en ongelijkheden worden opgeteld dan vinden wij met behulp van (2.44)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x''_1 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(1-\lambda)x'_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{matrix} = \\ \leq \\ \geq \end{matrix} \lambda b_i + (1-\lambda)b_i = b_i \qquad (2.52)$$

$$\lambda x''_j + (1-\lambda)x'_j = x_j \geq 0 \; .$$

Met andere woorden het punt x, gegeven door (2.44), voldoet aan (2.28).

Onze tweede uitspraak luidt derhalve:

<u>Uitspraak no. 2</u>

Als twee beslissingspunten x' en x'' behoren tot het gebied $X(s_0)$ dan ligt de verbindingslijn ook in het gebied $X(s_0)$.

Een gebied met deze eigenschap noemt men convex.

Onderwerpen wij nu de kriteriumfunctie

$$y(s_0;x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.53)$$

aan een nadere beschouwing. Uit (2.27) volgt dat voor $n = 2$ de beslissingspunten met gelijke kriteriumwaarde, zeg y_0, op een lijn

$$c_1x_1 + c_2x_2 = y_0 \tag{2.54}$$

in X liggen.

In fig. 1.9 zijn voor verschillende kriteriumwaarden zulke lijnen getekend. Men merke op dat deze "kriterium-lijnen" evenwijdig zijn.

Voor $n = 3$ geldt dat de punten met gelijke kriteriumwaarde in een plat vlak liggen. In fig 1.10 zijn voor verschillende kriteriumwaarden zulke platte vlakken getekend. Ook nu zien wij dat deze platte vlakken evenwijdig zijn.

In het algemene geval liggen de beslissingspunten met gelijke kriteriumwaarden in een hypervlak. Steeds zal gelden dat de hypervlakken evenwijdig zijn.

Stel dat x' en x'' twee beslissingspunten in X zijn. De lijn waarop deze punten liggen wordt gegeven door

$$x = (1-\lambda)x' + \lambda x'' \ . \tag{2.55}$$

De parameter λ mag nu elke waarde aannemen $(-\infty \leq \lambda \leq +\infty)$.

Afgezien van het teken is λ evenredig met de afstand $d(x, x')$. Het teken geeft de oriëntering aan met betrekking tot de richting (x', x''). De waarden van de kriteriumfunctie in de punten van de lijn (2.55) worden gegeven door

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \{(1-\lambda)x_j' + \lambda x_j''\} = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j' + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j'' - x_j') . \tag{2.56}$$

Nu zijn er drie mogelijkheden:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j'' - x_j') < 0 \\ &\text{b)} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j'' - x_j') = 0 \\ &\text{c)} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j'' - x_j') > 0 . \end{aligned} \tag{2.57}$$

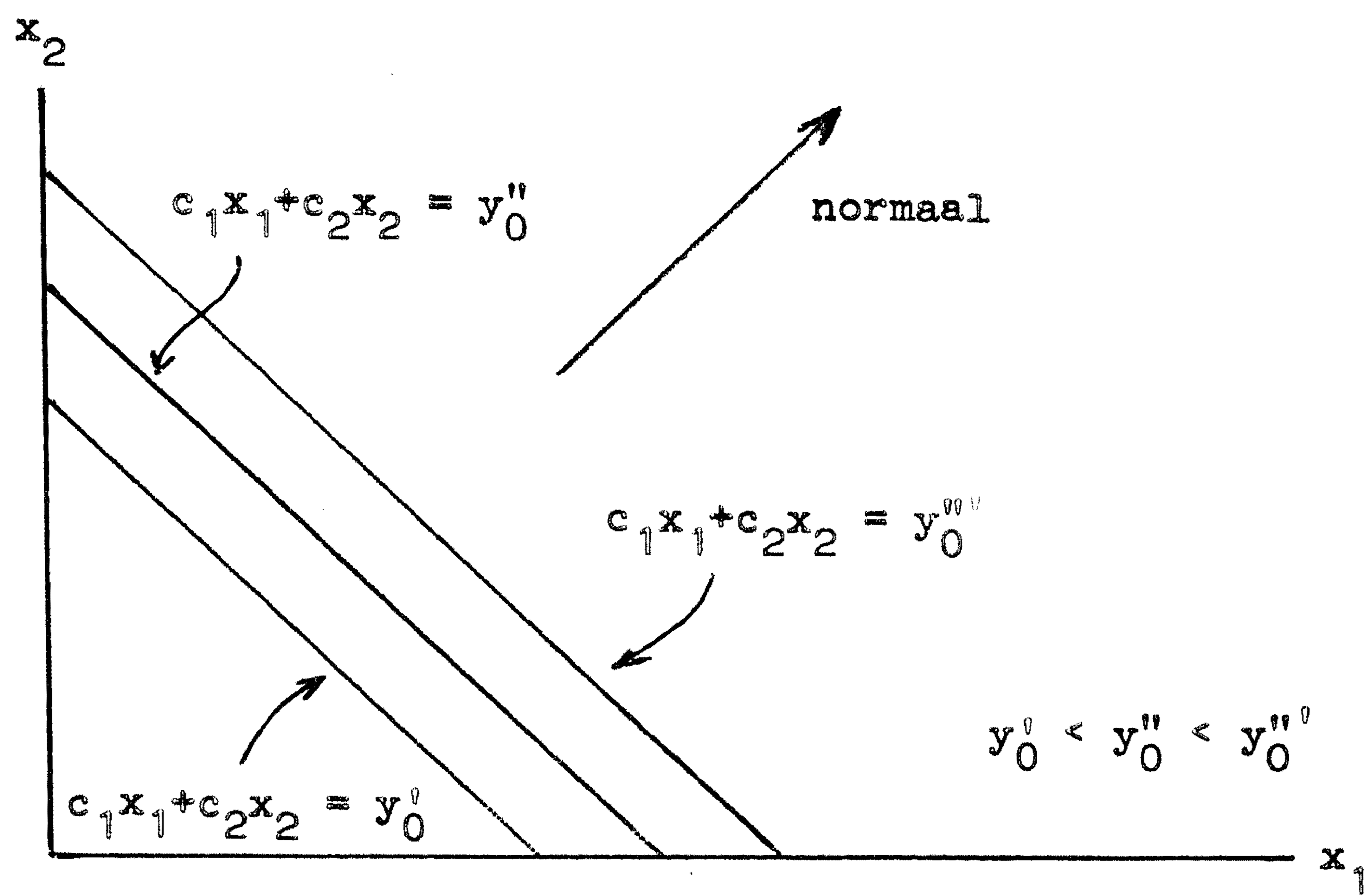


fig. 1.9

lijnen van (beslissings-)punten met gelijke kriterium-waarde + normaal

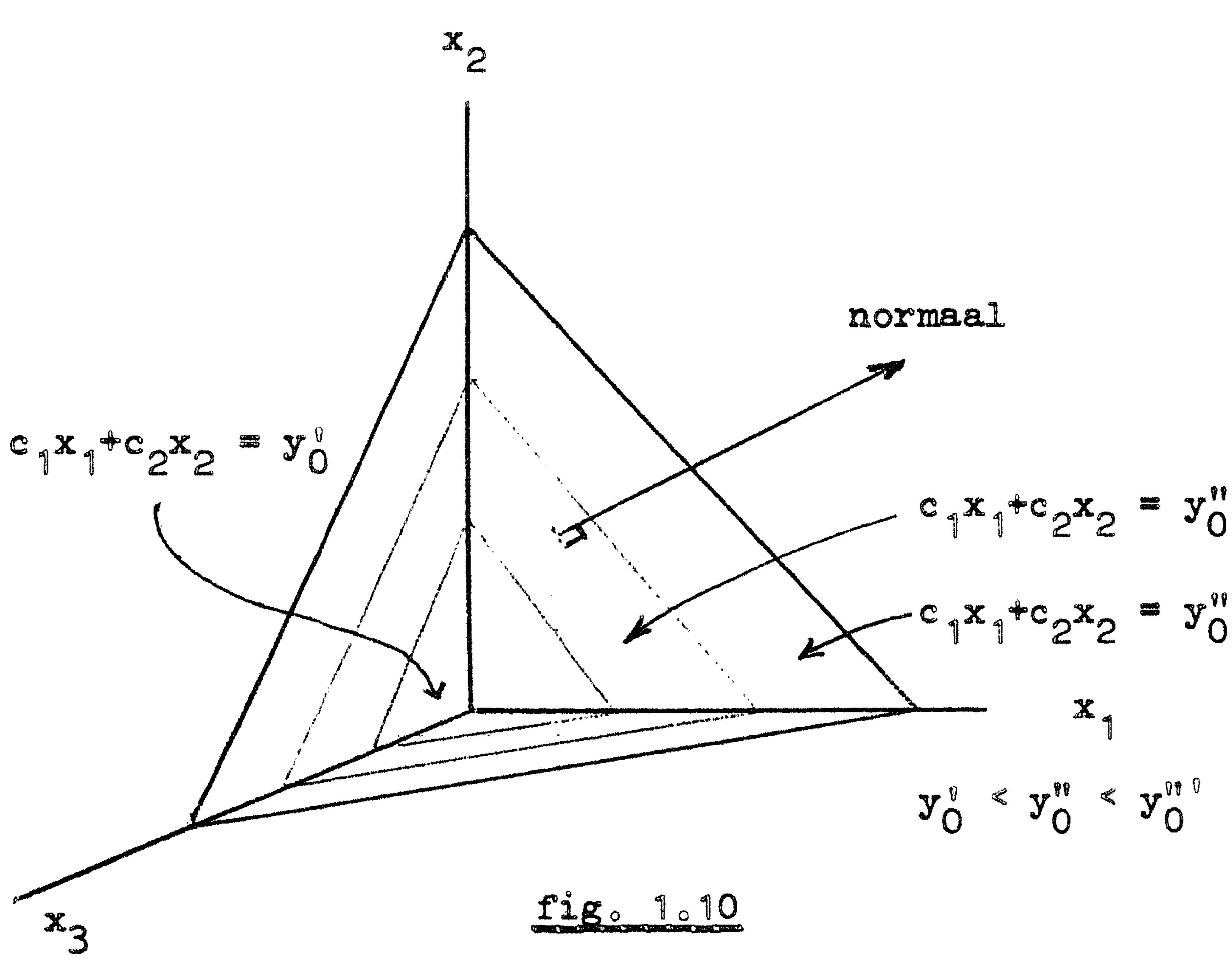


fig. 1.10

vlakken van (beslissings-)punten met gelijke kriterium-waarde + normaal

In geval a) neemt de kriteriumfunctie af als λ toeneemt.
In geval b) blijft de kriteriumwaarde constant, wanneer λ verandert. Dit komt omdat (2.55) ligt in een "kriterium-hypervlak". In geval c) neemt de kriteriumfunctie toe als λ afneemt.
Als x' en x'' niet in hetzelfde kriterium-hypervlak liggen, dan hebben alle kriterium-hypervlakken een snijpunt met de rechte (2.55). De kriteriumwaarde van het nulpunt is uiteraard gelijk aan die welke behoort bij het betreffende kriterium-hypervlak. Aangezien de kriterium-hypervlakken evenwijdig zijn en de kriteriumfunctie langs (2.55) hetzij monotoon toe- hetzij monotoon afneemt, moeten ook de kriterium-hypervlakken gerangschikt zijn naar opklimmende waarde van de kriteriumfunctie. De kortste afstand van een beslissingspunt tot een kriterium-hypervlak gaat langs de loodlijn vanuit dat punt op het hypervlak.

Nu is het ook duidelijk dat bij gelijke verplaatsingen vanuit een beslissingspunt de richting loodrecht op het kriterium-hypervlak de grootste toe- en afname geeft. De richting van de grootste toename van de kriteriumfunctie zullen wij normaal noemen. De normaal staat dus loodrecht op het kriterium-hypervlak.

Uitspraak no. 3

De meetkundige plaats van de beslissingspunten met een gelijke kriteriumwaarde y_0 is het hypervlak

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = y_0 . \tag{2.58}$$

De kriterium-hypervlakken zijn evenwijdig en zijn bovendien geordend naar de opklimmende waarden van de kriteriumfunctie. Vanuit ieder beslissingspunt is de toename van de kriteriumfunctie het grootst in de richting van de normaal op het kriterium-hypervlak.

Indien $x' \in X(s_0)$ dan kan men op een meetkundige wijze de optimale beslissing bepalen door het kriterium-hypervlak (2.58) evenwijdig aan zich zelf te verschuiven in de richting van de normaal en wel tot het moment waarop dit vlak voor het laatst nog een punt (of punten) met $X(s_0)$ gemeen heeft (zie fig. 1.11 en 1.12).

De met deze laatste stand corresponderende kriteriumwaarde geeft dan voor $x \in X(s_0)$ het maximum van de kriteriumfunctie aan.

Zowel in fig. 1.11 als in fig. 1.12 bereikt de kriteriumfunctie zijn maximum voor $x \in X(s_0)$ in een hoekpunt van $X(s_0)$. Het is duidelijk dat het maximum van deze functie nooit in een inwendig punt van $X(s_0)$ wordt aangenomen. Immers in zo'n inwendig punt kan het kriterium-hypervlak altijd nog een "eindje" evenwijdig aan zich zelf worden verschoven. Een randpunt van $X(s_0)$ dat in een k-dimensionale randruimte ligt (zie blz. 56) maar <u>niet</u> in een (k-1)-dimensionale randruimte (b.v. wel op een randvlak maar niet op een ribbe), kan slechts dan een maximum van de kriteriumfunctie opleveren, als de k-dimensionale randruimte evenwijdig is aan het kriterium-hypervlak. Wij zullen dit nu nader toelichten.

Daar het bewuste randpunt <u>niet</u> in een (k-1)-dimensionale randruimte ligt, is het een inwendig punt van de k-dimensionale randruimte. Als deze randruimte niet evenwijdig is aan het kriterium-hypervlak, dan bestaan er richtingen binnen de randruimte waarin vanuit het betreffende randpunt een verhoging van de kriteriumwaarde kan worden verkregen. Derhalve wordt het maximum <u>niet</u> in dit randpunt bereikt.

Als de randruimte <u>wel</u> evenwijdig is aan het kriterium-hypervlak, dan bezitten ook de hoekpunten van $X(s_0)$ in deze randruimte dezelfde kriteriumwaarde.

Wij komen nu tot de volgende uitspraak:

<u>Uitspraak no. 4</u>

Als voor $x \in X(s_0)$ het maximum van de kriteriumfunctie eindig is, dan bereikt deze functie onder de bijvoorwaarde $x \in X(s_0)$ zijn maximum in een hoekpunt van $X(s_0)$.

Bij het kriterium-hypervlak dat door een beslissingspunt x' gaat behoort een half-ruimte, waarvan het hypervlak het grensvlak is. Alle richtingen vanuit x, die een hoek van 90° of meer maken met de normaal, liggen binnen deze half-ruimte.

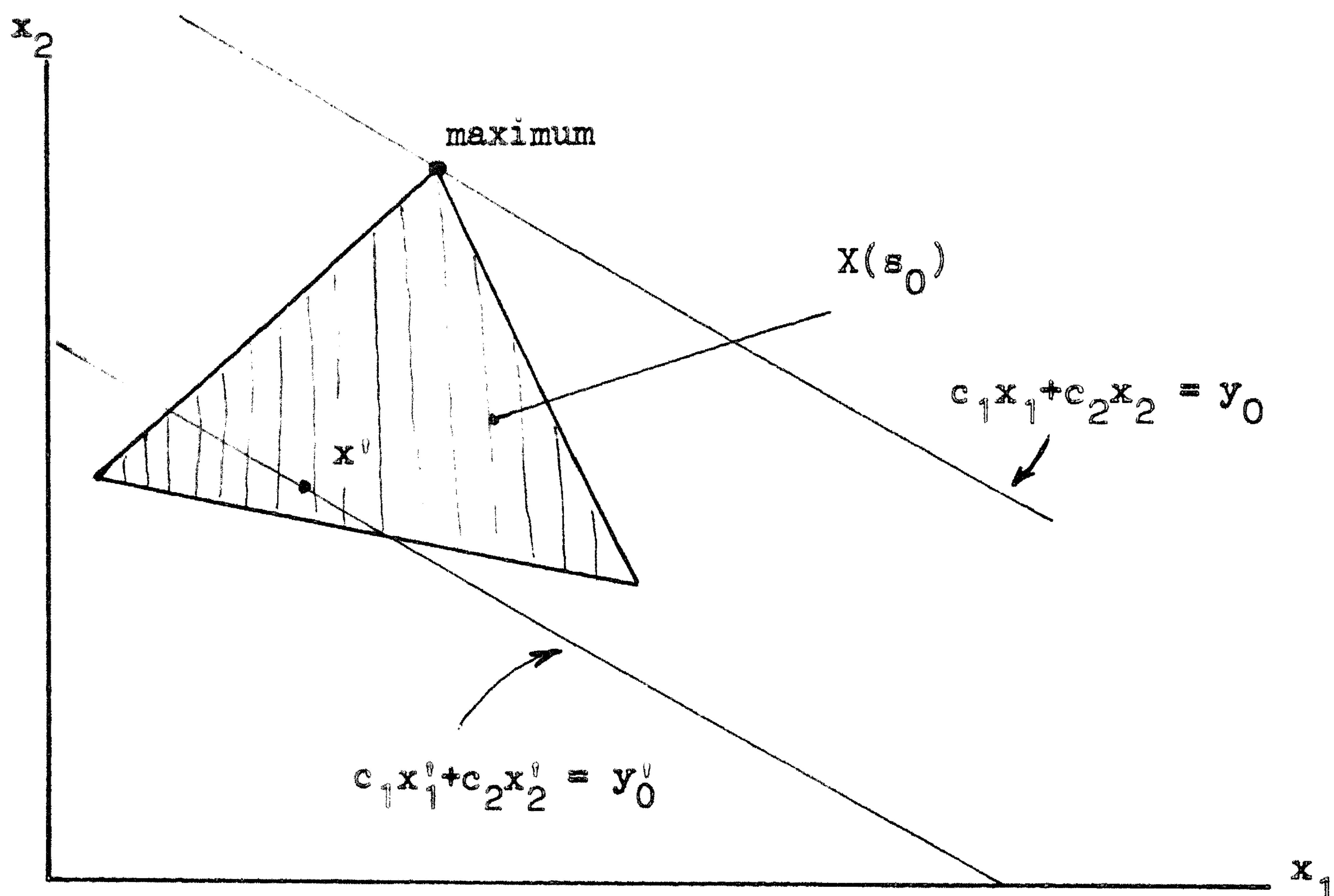


fig. 1.11

Meetkundige oplossing van het probleem

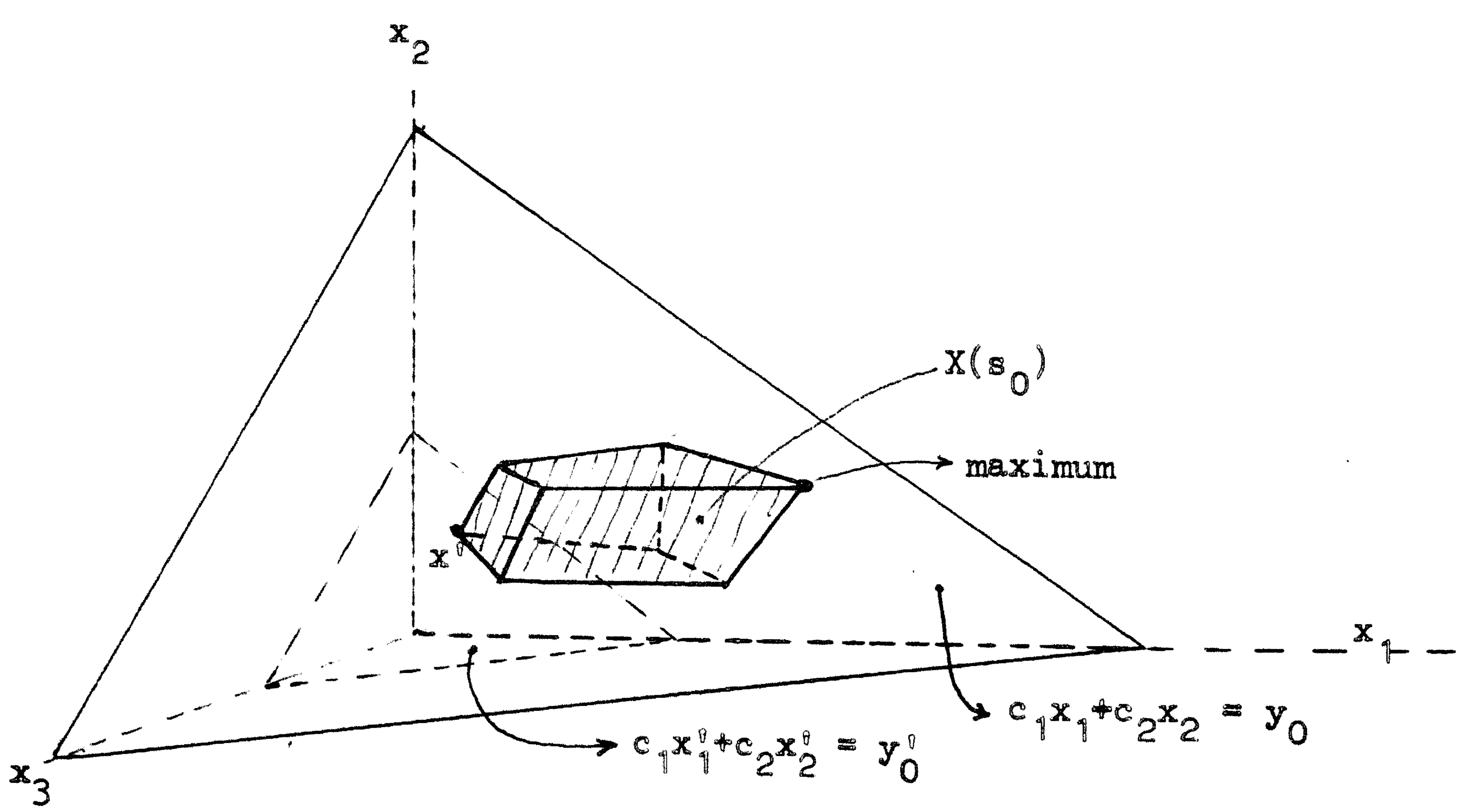


fig. 1.12

Meetkundige oplossing van het probleem

Als een richting een hoek van 90° of meer maakt met de normaal, dan neemt de kriteriumfunctie bij een verplaatsing in die richting af.

Als het beslissingspunt x' van $X(s_0)$ een hoekpunt is van $X(s_0)$ en als alle ribben vanuit x' in de hierbovengenoemde halfruimte liggen, dan behoort iedere lijn vanuit x' binnen $X(s_0)$ getrokken tot die halfruimte (zie fig. 1.13 en 1.14).

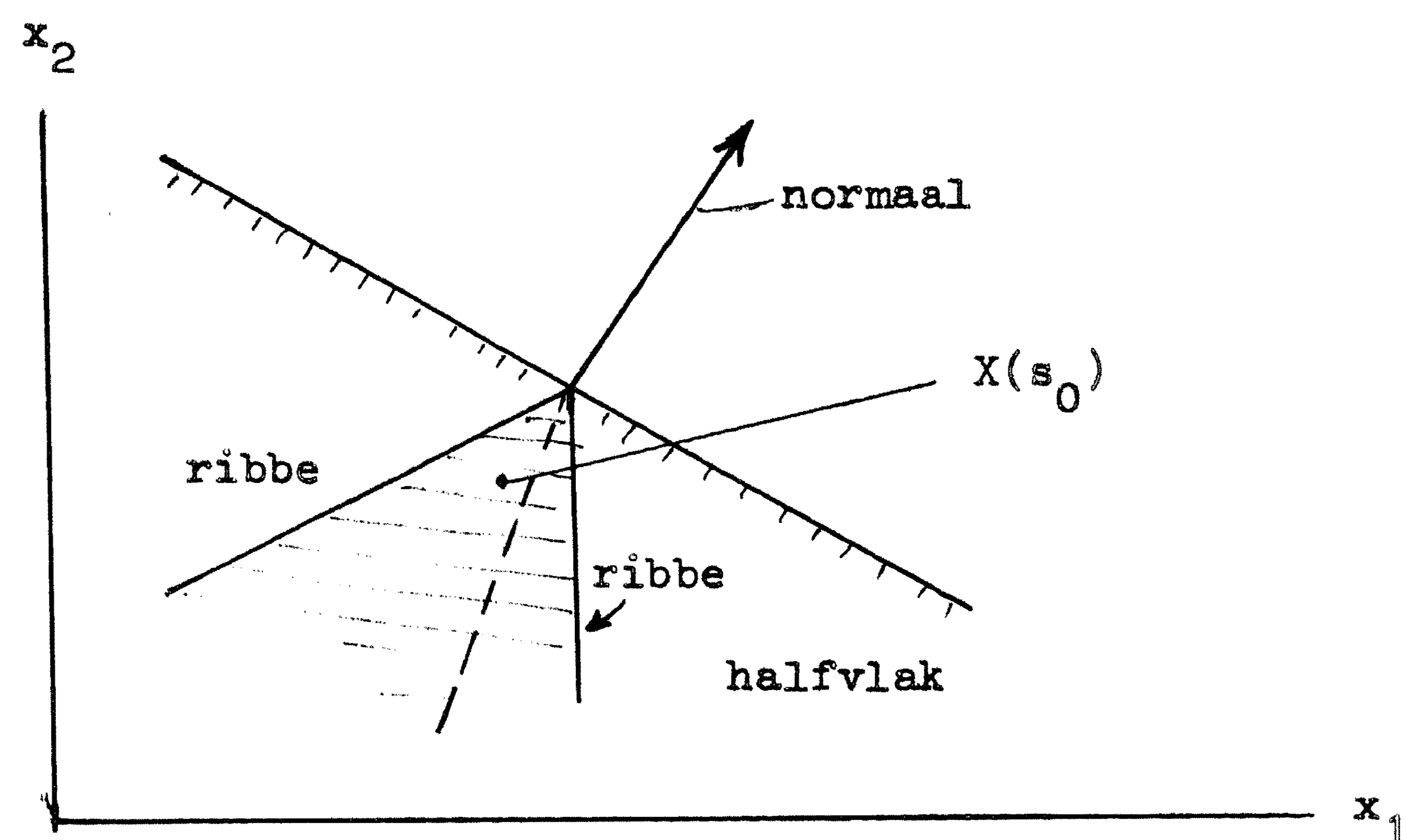


fig. 1.13

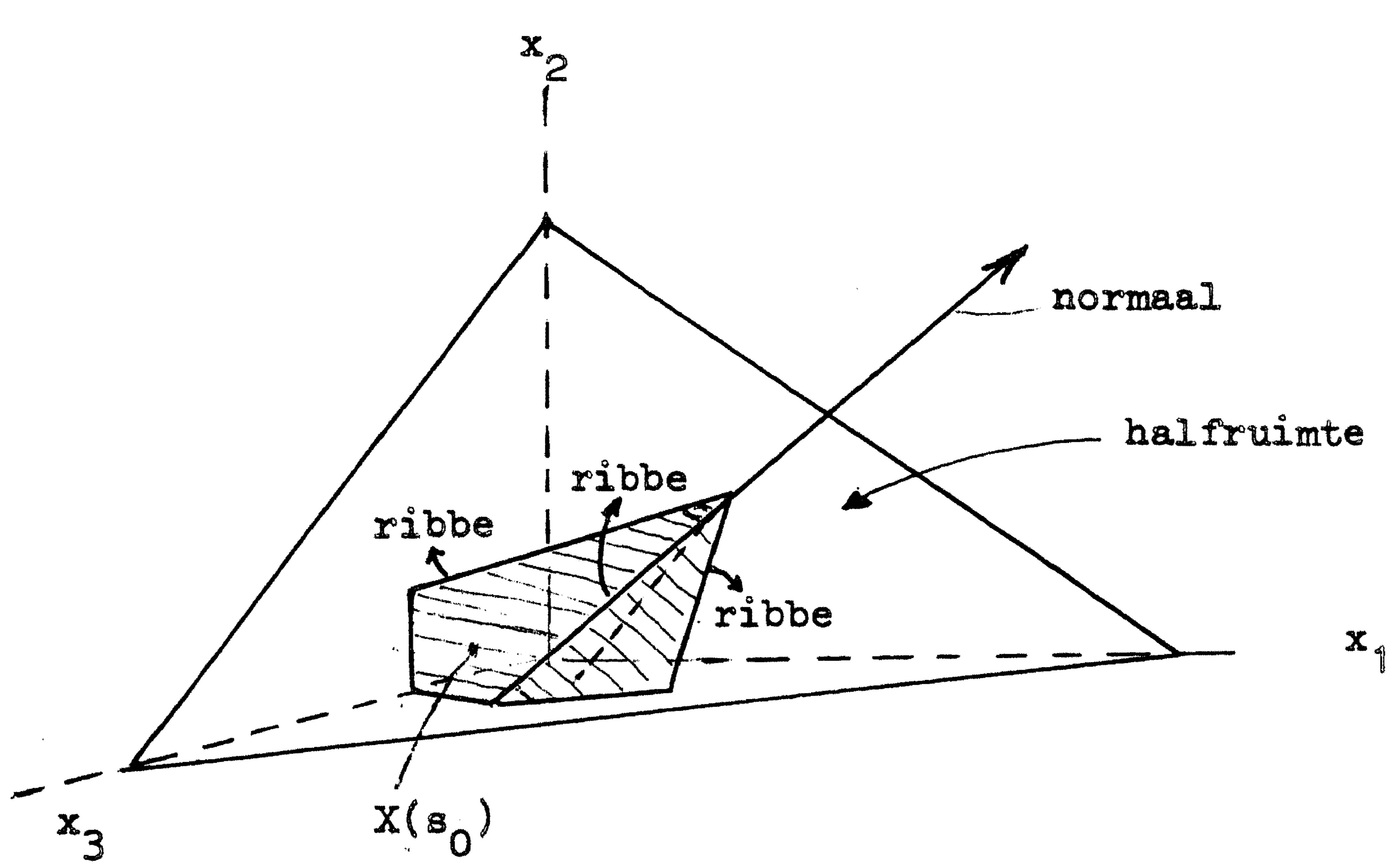


fig. 1.14

Dit impliceert dat in zo'n situatie de kriteriumfunctie bij een verplaatsing langs iedere lijn vanuit x' binnen $X(s_0)$ niet toeneemt. Stel nu dat de kriteriumfunctie voor $x \in X(s_0)$ zijn maximum bereikt bij x''. Als onder $x \in X(s_0)$ de kriteriumfunctie niet maximaal is voor x', dan geldt $x' \neq x''$. Volgens uitspraak no. 2 ligt de verbindingslijn (x', x'') binnen $X(s_0)$. Aangezien de verbindingslijn door x' gaat, neemt de kriteriumfunctie bij een verplaatsing langs die lijn in de richting van x'' niet toe. Dit laatste is in strijd met de veronderstelling dat de kriteriumfunctie voor $x = x''$ zijn maximum bereikt. Bijgevolg is de veronderstelling $x \neq x''$ onjuist.

Dit resultaat geeft aanleiding tot de volgende uitspraak:

Uitspraak no. 5

Als vanuit een hoekpunt x' een verplaatsing langs geen van de ribben een toename van de kriteriumfunctie oplevert, dan bereikt deze functie zijn maximum in x'.

Wij zijn nu in staat een oplossingsprincipe aan te geven voor het lineaire programmeringsprobleem.

Het oplossingsprincipe

Gestart wordt in één of ander hoekpunt. Maken alle ribben een hoek van 90° of meer met de normaal dan is het optimum bereikt (uitspraak no. 5). Indien dit echter niet het geval is, dan wordt verder gegaan langs die ribbe, welke de kleinste hoek maakt met de normaal. Zodra een volgend hoekpunt wordt bereikt, wordt de gehele procedure herhaald.

Op grond van theoretische overwegingen kan men met recht betogen, dat dit principe niet in alle gevallen tot een optimale beslissing behoeft te leiden. Wij komen hier later nog op terug.

In het hierna volgende zullen wij nog een aantal veronderstellingen invoeren. Deze veronderstellingen worden echter later teruggenomen.

Veronderstelling no. 1

Wij beperken ons tot lineaire programmeringsproblemen van het volgende type:

Bepaal het maximum van

$$y(s_0; x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.59}$$

onder de bijvoorwaarden

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ \qquad\qquad x_1 \geq 0 \\ \qquad\qquad x_2 \geq 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad x_n \geq 0 \end{array} \tag{2.60}$$

Wij maken daarbij de volgende beperkingen:

1) alle ongelijkheden (2.60) zijn onafhankelijk d.w.z. geen van de ongelijkheden is af te leiden uit de overigen;
2) voor alle constanten b_i $(i = 1, \ldots, m)$ geldt:

$$b_i \geq 0. \tag{2.61}$$

Met behulp van een nieuw stel variabelen x_{n+i} $(i = 1, \ldots, m)$ kunnen wij de ongelijkheden (2.60) herschrijven als

$$\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & = b_2 \\
\vdots & & & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots & & + x_{n+m} & = b_m
\end{array}$$

$$x_j \geqq 0 \qquad (j=1,\ldots,n+m) . \tag{2.62}$$

In iedere gelijkheid komt slechts één variabele x_{n+i} $(i=1,\ldots,m)$ voor.

De toegevoegde variabelen x_{n+i} $(i=1,\ldots,m)$ zullen wij aanduiden met de naam verschilvariabelen. Een m-tal variabelen zullen wij aangeven met de naam basisvariabelen. Elke basisvariabele komt slechts voor in één vergelijking van (2.62), terwijl omgekeerd iedere vergelijking slechts één basisvariabele bevat. In (2.62) zijn de verschilvariabelen tevens basisvariabelen en omgekeerd. Wij zullen straks echter basisvariabelen ontmoeten, die geen verschilvariabelen zijn.

Als

$$c_{n+i} \overset{def}{=} 0 \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{2.63}$$

dan mogen wij in plaats van (2.59) ook schrijven

$$y(s_0;x) = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j . \tag{2.64}$$

Het gestelde probleem kan men ook als volgt formuleren:
Standaardprobleem "Bepaal het maximum van (2.64) onder de bijvoorwaarden (2.62)".

Welke betekenis kunnen wij nu toekennen aan de nieuwe coördinaten van het beslissingspunt x^0. Wij weten dat de coördinaat x_j^0 $(j=1,\ldots,n)$ de afstand aangeeft van het punt x^0 tot het hypervlak $x_j = 0$. Men kan nu de coördinaat x_{n+i}^0 $(i=1,\ldots,m)$ interpreteren als de afstand van x^0 tot het hypervlak

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i , \tag{2.65}$$

uitgedrukt in niet-genormeerde leng eenheden.

Wij weten dus dat, als $x'_{n+i} = 0$, het punt x' in (2.65) ligt.

Volgens uitspraak no. 1 gaan door een hoekpunt van $X(s_0)$ minstens n hypervlakken van het type

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &= b_i \qquad (i=1,\ldots,m) \\ x_j &= 0 \qquad (j=1,\ldots,n)\ . \end{aligned} \tag{2.66}$$

Bijgevolg zijn in een hoekpunt minstens n van de coördinaten x_j $(j=1,\ldots,n+m)$ gelijk aan nul. Met andere woorden hoogstens m coördinaten x_j $(j=1,\ldots,n+m)$ zijn positief in een hoekpunt van $X(s_0)$.

Wij komen nu tot de volgende uitspraak (vgl. uitspraak no. 4):

<u>Uitspraak no. 6</u>

Er bestaat een optimale beslissing x, waarvan hoogstens m van de componenten ongelijk aan nul zijn.

Men kan eenvoudig nagaan, dat

$$\begin{aligned} x_j &= 0 \qquad (j=1,\ldots,n) \\ x_{n+i} &= b_i \qquad (i=1,\ldots,m) \end{aligned} \tag{2.67}$$

voldoet aan (2.62). Het beslissingspunt (2.67) is een hoekpunt en tevens de oorsprong van het Cartesisch coördinaten stelsel in de beslissingsruimte. Indien wij nu de n-1 çoördinaten

$$x_j \qquad (j=1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n)$$

niet veranderen maar de coördinaten x_k wel monotoon laten toenemen, dan zal het beslissingspunt het hoekpunt verlaten en zich langs de ribbe (coördinaten as aangegeven met x_k) gaan verplaatsen. Deze ribbe is de snijlijn van de n-1 hypervlakken

$$x_j = 0 \qquad (j \neq k,\ j \leq n)\ . \tag{2.68}$$

Opdat de gelijkheden (2.62) geldig blijven, moet uit een verplaatsing over een lengte ρ langs de ribbe (2.68) voor de variabelen x_{n+i} een afname van de grootte $a_{ik}\rho$ resulteren $(i=1,\ldots,m)$.

Tengevolge van deze plaatsing neemt de kriterium functie toe met

$$c_k\rho - \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\rho c_{n+i} = \rho(c_k - \sum_{i=1}^{m} a_{ik}c_{n+i}) \qquad (k=1,\ldots,n)\,. \tag{2.69}$$

Volgens het oplossingsprincipe moeten wij in de oorsprong die ribbe kiezen, welke de kleinste hoek maakt met de normaal. Dit is de ribbe waarvoor geldt dat de toename van de kriterium functie per eenheid van verplaatsing het grootst is. Als wij voor geen van de ribben een toename vinden, d.w.z.

$$\max_k \{c_k - \sum_{i=1}^{m} a_{ik}c_{n+i}\} \leq 0\,, \tag{2.70}$$

dan hebben wij volgens uitspraak no. 5 het maximum bereikt. Indien dit echter niet het geval is, dan vinden wij de gewenste ribbe door na te gaan welke van de variabelen x_k $(k=1,\ldots,n)$ men volgens het oplossingsprincipe van nul verschillend moet kiezen. Dit komt neer op de bepaling van die index k, waarvoor

$$c_k - \sum_{i=1}^{m} a_{ik}c_{n+i} \tag{2.71}$$

maximaal is. Stel dat dit laatste het geval is voor $k = h$. Wij laten de variabele x_h dus monotoon toenemen. Wij hebben zojuist vastgesteld, dat uit een toename ρ van x_h een afname $a_{ih}\rho$ van x_{n+i} $(i=1,\ldots,m)$ moet resulteren. Aangezien voor x_{n+i} moet gelden $x_{n+i} \geq 0$ volgt uit (2.67) voor ρ

$$b_i - a_{ih}\rho \geq 0 \qquad (i=1,\ldots,m)\,. \tag{2.72}$$

Als voor elke index i geldt $a_{ih} < 0$, dan mag men ρ onbegrensd groot kiezen. Uit (2.69) volgt, dat dan ook het maximum van de kriterium functie onbegrensd groot is. Dit houdt in dat voor $a_{ih} < 0$ $(i=1,\ldots,m)$

$$x_h = \infty \qquad \text{en} \qquad x_i = 0 \qquad (i \neq h,\ i=1,\ldots,m)$$

een oplossing is van het gestelde probleem.

Als voor een index i echter geldt dat $a_{ih} > 0$ is, dan mag ρ niet groter gekozen worden dan $\frac{b_i}{a_{ih}}$.

Wanneer N de verzameling aangeeft van die indices i waarvoor geldt $a_{ih} > 0$, dan wordt ρ gelijk gekozen aan

$$\rho = \min_{i \in N} \frac{b_i}{a_{ih}} . \tag{2.73}$$

Stel dat het minimum bereikt wordt voor $i = r$. Na een verplaatsing over een afstand van de lengte (2.73) langs de ribbe (x_h), die de snijlijn is van de hypervlakken

$$x_j = 0 \qquad (j=1,\ldots,h-1,h+1,\ldots,n) , \tag{2.74}$$

komen wij dus terecht in een punt waarvoor geldt

$$x_{n+r} = 0 . \tag{2.75}$$

Met andere woorden in een punt van het hypervlak

$$\sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j = b_r . \tag{2.76}$$

Voor een grotere verplaatsing dan (2.73) wordt een beslissingspunt buiten $X(s_0)$ gevonden. Bijgevolg zijn wij aan het eind van de ribbe (2.74) gekomen en dus in een hoekpunt van $X(s_0)$.

Veronderstelling no. 2

Het minimum van $\frac{b_i}{a_{ih}}$ voor $i \in N$ is positief (m.a.w. $c > 0$ en $b_i > 0$ voor $i \in N$).

Uit veronderstelling no. 2 volgt dat na een verplaatsing over een afstand van de lengte (2.73) een nieuw hoekpunt van $X(s_0)$ wordt bereikt. De kriteriumwaarde voor dit hoekpunt zal hoger zijn dan dat voor het punt van uitgang. Door het nieuwe hoekpunt gaan in ieder geval de hypervlakken (2.74) en (2.76). Of er nog meer hypervlakken door dit hoekpunt gaan hangt af van het feit of het quotiënt $\frac{b_i}{a_{ih}}$ haar minimum bereikt ook voor andere indices $i \in N$ dan $i = r$. Voor elk van de "minimaliserende" indices i vinden wij een hypervlak door het nieuwe hoekpunt.

Veronderstelling no. 3

Het minimum van $\frac{b_i}{a_{ih}}$ voor $i \in N$ wordt slechts bereikt voor één index i.

Met het nieuwe hoekpunt correspondeert de beslissing $\{x_j = 0 \ (j \neq h, \ j \leq n), \ x_h = \frac{b_r}{a_{rh}}\}$. De bijbehorende waarde van de kriterium functie is

$$c_r \frac{b_r}{a_{rh}} .$$

Indien wij de coördinaten behorende bij het oude en het nieuwe hoekpunt vergelijken, dan valt het ons op dat de coördinaten x_h en x_{n+r} de rollen hebben verwisseld. In het eerste hoekpunt was x_h gelijk aan nul en x_{n+r} positief, terwijl in het nieuwe hoekpunt juist het omgekeerde het geval is. Wij zullen deze rolverwisseling nu ook tot uitdrukking brengen in het stelsel gelijkheden. Dit impliceert dat het stelsel gelijkheden moet worden herleid tot een equivalent stelsel, waarin x_h slechts in één gelijkheid voorkomt en wel met een coëfficiënt gelijk aan 1.

Om dit te bereiken delen wij eerst de r^{de} regel van (2.62) door a_{rh}

$$\sum_{j\neq h}^{n} \frac{a_{rj}}{a_{rh}} x_j + x_h + \frac{1}{a_{rh}} x_{n+r} = \frac{b_r}{a_{rh}} . \tag{2.77}$$

Wij zien dat x_h in (2.77) de gewenste coëfficiënt bezit. Nu moeten wij er nog voor zorgen dat x_h in de overige regels niet meer voorkomt. Wij kunnen x_h uit de i^{de} regel van (2.62) elimineren door (2.77) te vermenigvuldigen met a_{ih} en deze van de i^{de} regel af te trekken. Wij vinden dan

$$\sum_{j\neq h}^{n} \left(a_{ij} - a_{ih} \frac{a_{rj}}{a_{rh}}\right) x_j - \frac{a_{ih}}{a_{rh}} x_{n+r} + x_{n+i} = b_i - \frac{a_{ih}}{a_{rh}} b_r . \tag{2.78}$$

Zo men wil, kan men nieuwe coëfficiënten a'_{ij} en b'_i invoeren, die gedefiniëerd zijn door

$$\begin{aligned}
a'_{ij} &= a_{ij} - a_{ih} \frac{a_{rj}}{a_{rh}} , && (j \neq h;\ j \leq n;\ i \neq r;\ i \leq m) \\
a'_{rj} &= \frac{a_{rj}}{a_{rh}} , && (j \neq h,\ j \leq n) , \\
a'_{i\ n+r} &= - \frac{a_{ih}}{a_{rh}} , && (i \neq r;\ i \leq m) , \\
a'_{r\ n+r} &= \frac{1}{a_{rh}} , && \\
b'_i &= b_i - \frac{a_{ih}}{a_{rh}} b_r , && (i \neq r;\ i \leq m) , \\
b'_r &= \frac{b_r}{a_{rh}} . &&
\end{aligned} \tag{2.79}$$

De gelijkheden (2.77) en (2.78) gaan dan over in

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\neq h}^{n} a'_{ij} x_j + a'_{i\ n+r}\, x_{n+r} + x_{n+i} = b'_i \quad (i \neq r) \\
&\sum_{j\neq h}^{n} a'_{rj} x_j + a'_{r\ n+r}\, x_{n+r} + x_h \quad = b'_r .
\end{aligned} \tag{2.80}$$

Vullen wij het stelsel (2.80) aan met de ongelijkheden

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n+m) \tag{2.81}$$

dan beschrijven (2.80) en (2.81) het zelfde gebied $X(s_0)$ als (2.62).

Voor het verkrijgen van een meetkundige voorstelling zou men nu ook een n-dimensionaal coördinatenstelsel kunnen invoeren op welks assen de variabelen x_j $(j \neq h,\ j \leq n)$ en x_{n+r} zijn uitgezet in plaats van x_j $(j \leq n)$. De beslissing, behorende bij het nieuwe hoekpunt en gegeven door

$$\{x_j = 0\ (j \neq h,\ j \leq n),\ x_h = \frac{b_r}{a_{rh}}\} \tag{2.82}$$

heeft als nieuwe coördinaten (r.g.l (2.77))

$$\{x_j = 0\ (j \neq h,\ j \leq n),\ x_{n+r} = 0\}\ . \tag{2.83}$$

Deze beslissing kan dus worden geïdentificeerd met de oorsprong van het nieuwe coördinatenstelsel.

Het gebied van de toegelaten beslissingen $X(s_0)$ in deze nieuwe beslissingsruimte is niet congruent met dat in de oude beslissingsruimte. Wel is er een 1-1 correspondentie tussen hoekpunten, ribben en randruimten van $X(s_0)$ in de ene en in de andere beslissingsruimte. Dit laatste kan men eenvoudig inzien, wanneer men bedenkt dat in beide ruimten de begrenzingen van $X(s_0)$ gekarakteriseerd worden door

$$x_j = 0 \qquad (j=1,\ldots,m+n)\ . \tag{2.84}$$

De hoekpunten, ribben en randruimten van $X(s_0)$ zijn voor beide ruimten de doorsneden van de zelfde combinaties uit (2.84).

Bedenk dat in de nieuwe beslissingsruimte het hypervlak $x_h = 0$, gegeven wordt door

$$\sum_{j \neq h}^{n} a'_{rj} x_j + a'_{r\ n+r}\ x_{n+r} = b'_r\ . \tag{2.85}$$

Bijgevolg correspondeert met een verplaatsing langs een ribbe in de nieuwe beslissingsruimte op een ondubbelzinnige wijze een verplaatsing langs een ribbe in de oude beslissingsruimte.

Indien wij het oplossingsprincipe volgende, voor de tweede maal in de oude beslissingsruimte een hoekpunt van $X(s_0)$ willen bepalen, dan komt dit neer op het herhalen van de procedure voor het vinden van het eerste hoekpunt maar nu in de nieuwe beslissingsruimte en gebruik makende van (2.80). De basisvariabelen zijn dan

$$x_{n+i} \quad \text{en} \quad x_h \quad (i \neq r) \; . \tag{2.86}$$

In deze gedachtengang neemt de variabele x_{n+r} volledig de plaats in van x_h en omgekeerd. Het uitgangshoekpunt wordt vastgelegd door de niet-basisvariabelen gelijk aan nul te stellen.

Wij zullen nu deze werkwijze bij ieder hoekpunt proberen te herhalen. Wij spreken met opzet van proberen te herhalen, omdat het van te voren niet zeker is of in die hoekpunten aan de gemaakte veronderstellingen wordt voldaan.

Laten wij thans veronderstelling no. 2 eens aan een nader onderzoek onderwerpen. Als aan deze veronderstelling niet is voldaan, dan geldt $\rho = 0$. Hieruit volgt dat ook het hypervlak (2.76) door het uitgangshoekpunt gaat. Indien wij de hierboven geschetste procedure toch uitvoeren, dan zal x_h een basisvariabele worden en x_{n+r} niet meer. De toename van de kriterium functie is na deze verwisseling nihil. Nu is het theoretisch niet uitgesloten dat in de volgende stap de variabelen x_{n+r} en x_h wederom van plaats ruilen. Het is ook mogelijk dat in het hoekpunt meer "stappen op de plaats" worden gemaakt alvorens een voorgaande combinatie van basisvariabelen wordt herkregen.

Als aan veronderstelling no. 3 niet wordt voldaan, dan ontstaat dezelfde moeilijkheid maar nu één stap later. Wij zullen dit nader toelichten. Stel dat het minimum van (2.73) bereikt wordt voor meer dan één index i. Dit betekent dat door het nieuwe hoekpunt meer dan het benodigde aantal hypervlakken gaan. Als t een tweede index is met deze minimaliserende eigenschap en als wij de hierboven beschreven procedure toch uitvoeren, dan zal voor $i = t$ het rechterlid

$$b_t - \frac{a_{th}}{a_{rh}} b_r \tag{2.87}$$

van (2.78) gelijk zijn aan nul. Dit betekent dat b_t' (zie (2.79)) gelijk is aan nul.

Mogelijkerwijs is in de volgende stap niet meer voldaan aan veronderstelling no. 2 met alle gevolgen van dien.

Deze moeilijkheden kunnen dus ontstaan als door een hoekpunt meer hypervlakken gaan dan het benodigde aantal n. Wij spreken dan van een <u>ontaarding</u>.

Dit waren ook de moeilijkheden waarop wij doelden na de invoering van het oplossingsprincipe. Een ontaarding kan men zo nodig opheffen door die b_i waarden waarvoor geldt $b_i = 0$ te vervangen door zeer kleine positieve getallen. Wij zullen op dit technische probleem niet nader ingaan. Te meer daar bij ontaardingen slechts zelden moeilijkheden optreden.

Rest ons nog <u>veronderstelling no. 1</u>.

In het algemene geval wordt het gebied $X(s_0)$ gegeven door de relaties

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i && (i=1,\ldots,r)\ , \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i && (i=r+1,\ldots,r+s)\ , \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i && (i=r+s+1,\ldots,r+s+t)\ , \\
&x_j \geq 0 && (j=1,\ldots,n)\ .
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Het is niet beperkend om te veronderstellen, dat voor alle constanten b_i geldt:

$$b_i \geq 0\ . \tag{2.89}$$

Immers doordat het rechter en het linkerlid van een relatie zonder bezwaar met -1 vermenigvuldigd mag worden, kan men er altijd voor zorgen, dat de constante rechts van het gelijk- of ongelijk teken niet negatief is. Bedenk echter wel dat bij vermenigvuldiging met -1 het ongelijk teken moet worden omgekeerd; $\geq$ wordt $\leq$ en $\leq$ wordt $\geq$.

In het algemene geval luidt het lineaire programmeringsprobleem: "Bepaal het maximum van

$$y(s_0;x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.90}$$

onder de bijvoorwaarden (2.88)".

Zonder enig bezwaar mogen wij (2.88) vervangen door

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i && (i=1,\ldots,r)\,,\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i && (i=r+1,\ldots,r+s)\,,\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i && (i=r+s+1,\ldots,r+s+t)\,,
\end{aligned} \tag{2.91}$$

waarbij $\quad x_j \geq 0 \qquad (j=1,\ldots,n)\,,$

en $\quad x_{n+i} \geq 0 \qquad (i=r+1,\ldots,r+s+t)\,.$

De constanten b_i in (2.91) zijn niet-negatief.
Ook nu geldt dat de hypervlakken

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i=r+1,\ldots,r+s+t) \tag{2.92}$$

eveneens gekarakteriseerd worden door

$$x_{n+i} = 0 \qquad (i=r+1,\ldots,r+s+t)\,. \tag{2.93}$$

Indien wij c_{n+i} $(i=r+1,\ldots,r+s+t)$ definiëren door

$$c_{n+i} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \qquad (i=r+1,\ldots,r+s+t)\,, \tag{2.94}$$

dan kan het algemene lineaire programmeringsprobleem ook als volgt worden geformuleerd: "Bepaal het maximum van

$$y(s_0;x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=r+1}^{r+s+t} c_{j+n} x_{j+n} \tag{2.95}$$

onder de bijvoorwaarden (2.91).

Indien wij het stelsel (2.91) vergelijken met (2.62) dan valt ons het volgende verschil op. In (2.91) komt niet in elke regel een variabele x_{n+i} voor met als coëfficiënt + 1.

Beschouwen wij thans het volgende probleem: "Bepaal het maximum van

$$y(s_0;x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=r+1}^{r+s+t} c_{j+n} x_{j+n} - M \sum_{j=1}^{r} u_j - M \sum_{j=r+s+1}^{r+s+t} u_j \tag{2.96}$$

onder de bijvoorwaarden

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + u_i = b_i && (i=1,\ldots,r)\ , \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i && (i=r+1,\ldots,r+s)\ , \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} + u_i = b_i && (i=r+s+1,\ldots,r+s+t)\ , \\
\text{waarbij} \quad & x_j \geq 0 && (j=1,\ldots,n)\ , \\
& x_{n+i} \geq 0 && (i=r+1,\ldots,r+s+t)\ , \\
\text{en} \quad & u_i \geq 0 && (i=1,\ldots,r;\ i=r+s+1,\ldots,r+s+t).
\end{aligned} \tag{2.97}$$

De gelijk- en ongelijkheden (2.97) zijn nu <u>wel</u> van het zelfde type als het stelsel (2.62).

Het zojuist geformuleerde optimumprobleem is derhalve oplosbaar volgens het - voor het "standaard probleem - gegeven recept.

Voor de beginoplossing geldt:

$$u_i = b_i \qquad (i=1,\ldots,r),$$
$$x_{n+i} = b_i \qquad (i=r+1,\ldots,r+s), \qquad (2.98)$$
$$u_i = b_i \qquad (i=r+s+1,\ldots,r+s+t).$$

Indien M zeer groot is, dan zal voor de eindoplossing van dit nieuwe lineaire programmeringsprobleem gelden:

$$u_i = 0 \qquad (i=1,\ldots,r;\ i=r+s+1,\ldots,r+s+t). \qquad (2.99)$$

Met andere woorden een oplossing van het zojuist geformuleerde optimum probleem voldoet ook aan (2.91). Aangezien voor (2.99) de kriterium functies (2.95) en (2.96) identiek zijn, zal bij voldoend grote M een eindoplossing van het nieuwe probleem ook een eindoplossing van het algemene lineaire programmeringsprobleem opleveren. Bijgevolg hebben wij aangetoond dat het algemene lineaire programmeringsprobleem herleid kan worden tot het standaard probleem. Door het aanbrengen van wijzigingen in de bijvoorwaarden en kriterium functies die in wezen van ondergeschikt belang zijn, kan men er steeds voor zorgen dat aan de drie veronderstellingen voldaan is.

Voor het oplossen van een lineair programmeringsprobleem zullen wij nu een recept geven, dat gebaseerd is op de voor het standaard probleem beschreven werkwijze. Terwille van de uniformiteit zullen wij een paar kleine wijzigingen aanbrengen in onze notatie.

In de eerste plaats schrijven wij voortaan a_{i0} in plaats van b_i. Vervolgens voeren wij in een "variabele" x_0 waarvoor steeds geldt:

$$x_0 = 1$$

en $$c_0 = 0.$$

Tenslotte zullen wij gebruik maken van een grootheid z_j, gegeven door

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c^{*}_{n+i}, \qquad (2.100)$$

waarbij c^{*}_{n+i} de c-waarde voorstelt van die basisvariabele x_k, welke slechts in de i^{de} vergelijking voorkomt. In de eerste stap wordt z_j dus gegeven door

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_{n+i} \quad . \tag{2.101}$$

Men merke op dat, als x_j een basisvariabele is en slechts voorkomt in de r^{de} vergelijking (in de eerste stap $j = n+r$), dan geldt:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 0 \qquad i \neq r \\ a_{rj} &= 1 \end{aligned} \tag{2.102}$$

en dus

$$z_j = c^{*}_{n+r} = c_j \quad . \tag{2.103}$$

In een hoekpunt van $X(s_0)$ geldt dat de bijbehorende niet-basisvariabelen de waarde nul aannemen. Voor een basisvariabele x_k, die slechts in de i^{de} vergelijking voorkomt, geldt daarentegen

$$x_k = a_{i0} \quad . \tag{2.104}$$

De waarde van de kriterium functie in het betreffende hoekpunt wordt dus gegeven door

$$y(s_0;x) = \sum_{i=1}^{m} a_{i0} c^{*}_{n+i} \quad . \tag{2.105}$$

Uit (2.100) en (2.105) volgt:

$$y(s_0;x) = z_0 \quad . \tag{2.106}$$

In de oplossing van het standaard probleem bepaalden wij in elk voorkomend hoekpunt eerst die ribben, welke correspondeerden met een toename van de kriterium functie. Op deze ribben waren de niet-basisvariabelen x_j uitgezet.

Als de kriterium functie langs de ribbe x_j toeneemt, dan geldt (vgl. (2.69), (2.101) en (2.103)):

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}c^{*}_{n+i} > 0 \qquad (2.107)$$

en dus

$$z_j - c_j < 0 . \qquad (2.108)$$

Wij verkozen uit de ribben met de eigenschap (2.107), die ribbe waarvoor

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}c^{*}_{n+i} \qquad (2.109)$$

maximaal is. Dit is dus de ribbe waarvoor geldt:

$$z_j - c_j < 0 \qquad (2.110)$$

en

$$z_j - c_j \qquad (2.111)$$

minimaal.

Voor de basisvariabelen geldt volgens (2.103)

$$z_j - c_j = 0 . \qquad (2.112)$$

Voor de "variabele" x_0 vinden wij volgens (2.105)

$$z_0 - c_0 = z_0 = y(s_0;x) . \qquad (2.113)$$

Indien wij de variabelen na elke stap opnieuw nummeren, dan kunnen we er altijd voor zorgen dat het stelsel bijvoorwaarden er als volgt komt uit te zien:

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & = a_{20} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & & + x_{n+m} & = a_{m0} . \end{array} \qquad (2.114)$$

Immers wij hebben de aanwezigheid van minstens m basisvariabelen verondersteld en deze kunnen we in het vergelijkingenstelsel altijd achteraan plaatsen. De in (2.114) voorkomende coëfficiënten zijn opgenomen in tabel 2.IV; boven de kolommen schreven wij de variabelen, die bij deze coëfficiënten behoren. In vergelijking met (2.114) is de volgorde van de kolommen iets gewijzigd; boven de kolom, waarin de elementen uit de rechterleden van (2.114) zich bevinden, hebben wij het symbool x_0 geplaatst. Deze tabel bevat dus behalve de c-waarden de gegevens van het probleem.

x_0	x_{n+1}		x_{n+i}		x_{n+m}	x_1		x_j		x_n
a_{10}	1		0		0	a_{11}		a_{1j}		a_{1n}
⋮										
⋮										
⋮										
a_{i0}	0		1		0	a_{i1}		a_{ij}		a_{in}
⋮										
⋮										
a_{m0}	0		0		1	a_{m1}		a_{mj}		a_{mn}

Tabel 2.IV

Oorspronkelijke coëfficiënten

Deze tabel breiden wij nu uit met twee kolommen. Links van de kolom met het hoofd x_0 schrijven wij een kolom met het hoofd B, waarin van boven naar beneden de basisvariabelen $x_{n+1},\ldots,x_{n+m}$ opgenomen worden (vgl. tabel 2.V). Links daarvan komt nog een kolom met het hoofd C, waarin de c-waarden van de basisvariabelen worden ingevuld (zie tabel 2.V).

Aan de onderkant van tabel 2.V wordt een rij toegevoegd, waarin de getallen z_j-c_j komen te staan; z_j is de som van de producten der elementen uit de C-kolom en de x_j-kolom. Aangezien

$c_0 = 0$ vinden wij in de x_0-kolom het getal z_0, de waarde van de kriterium functie behorende bij het desbetreffende hoekpunt.
Op grond van (2.112) moet in de kolommen van de basisvariabelen de waarde nul voorkomen.

C	B	x_0	x_{n+1}	...	x_{n+i}	...	x_{n+m}	x_1	...	x_j	...	x_n
c_{n+1}	x_{n+1}	a_{10}	1	...	0	...	0	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
c_{n+i}	x_{n+i}	a_{i0}	0	...	1	...	0	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
c_{n+m}	x_{n+m}	a_{m0}	0	...	0	...	1	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}
$z_j - c_j$		z_0	0	...	0	...	0	$z_1 - c_1$	...	$z_j - c_j$	...	$z_n - c_n$

Tabel 2.V

Eerste stap: de triviale oplossing

Uit tabel 2.V kunnen wij direct de triviale oplossing aflezen; de basisvariabelen in de B-kolom bezitten de waarden die in de x_0-kolom staan, de niet basisvariabelen zijn gelijk aan nul.

Uitgaande van deze tabel kunnen wij de tabel construeren behorende bij de tweede stap. Dit gaat als volgt:

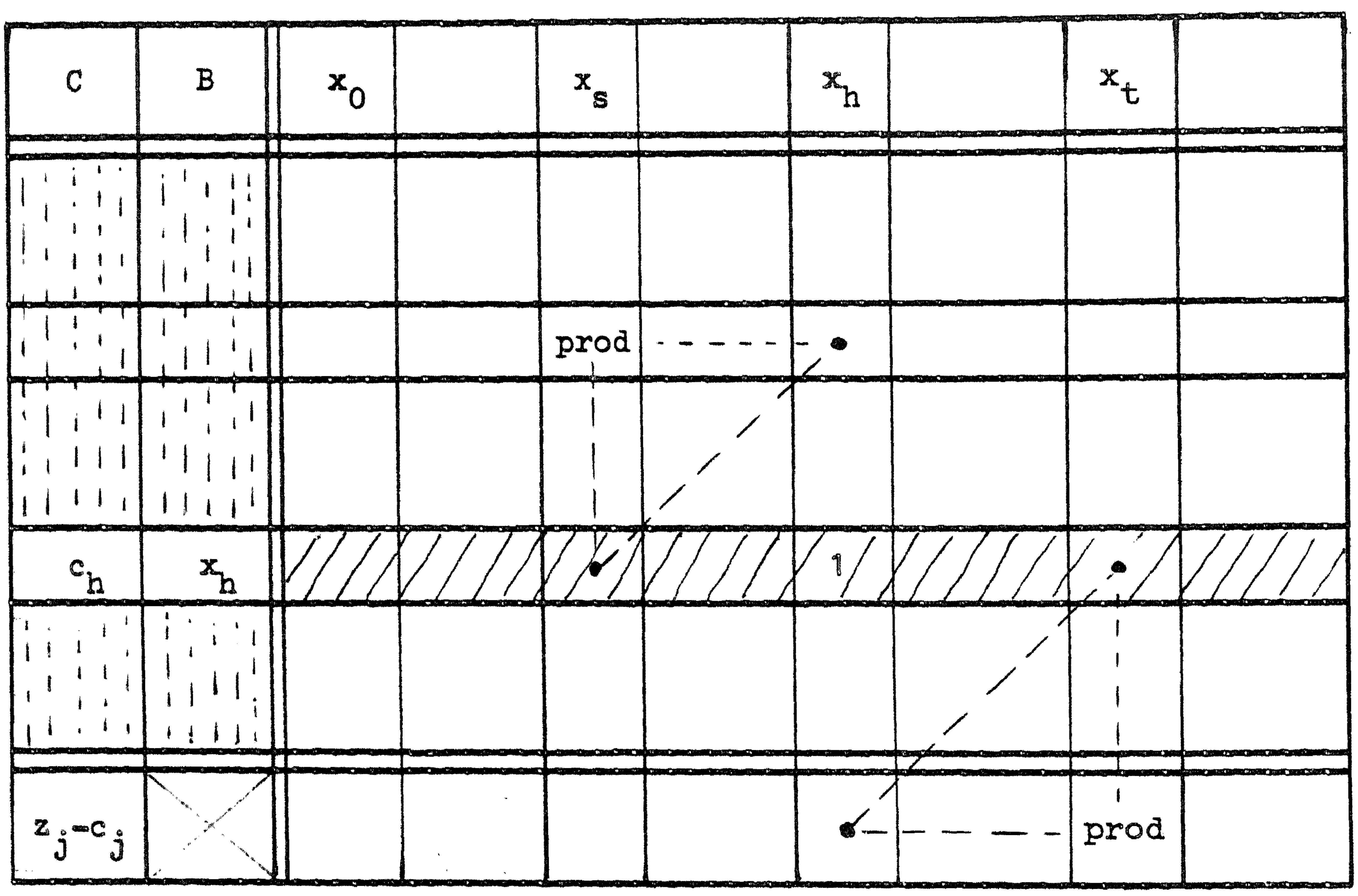
1) Bepaal h de waarde van j waarvoor $z_j - c_j$ minimaal is (vgl. p.70); zoek vervolgens het kleinste van de quotiënten $\frac{a_{i0}}{a_{ik}}$ $(a_{ik} > 0)$. Stel dat dit quotiënt minimaal is voor $i = r$ (vgl. p.71);

2) Vervang in de C- en B-kolom c_{n+r} en x_{n+r} door c_h resp. x_h;

3) Deel alle overige elementen uit deze r^{de} regel door a_{rh} (vgl. p.72);

4) Verminder alle andere elementen uit de kolommen x_j $(j=0,1,\ldots,n)$ met de producten die staan aangegeven in de tabel, m.a.w. verminder a_{ij} met $a_{ih}\dfrac{a_{rj}}{a_{rh}}$ $(i \neq r)$ en $z_j - c_j$ met $(z_h - c_h)\dfrac{a_{rj}}{a_{rh}}$ $(j=0,1,\ldots,n)$ (vgl. p.73);

5) Laat alle overige hokjes in de B- en C-kolom (aangegeven met) ongewijzigd).



Tabel 2.VI

Tweede stap: eerste verbeterde oplossing

Op de zelfde wijze, waarop wij uit tabel 2.V de triviale oplossing konden aflezen, kunnen wij de nieuwe oplossing (hoekpunt) bepalen uit tabel 2.VI. De variabelen in de B-kolom bezitten in de

x_0-kolom staande waarden, de andere x-en zijn gelijk aan nul. De nieuwe waarde van z_0 (= y(s;x)) is te vinden in het laatste vakje van de x_0-kolom. Wij zullen dit nader toelichten.

Indien wij de variabelen en constanten behorende bij de tweede stap aangeven met een accent, dan geldt:

$$
\begin{aligned}
z'_j - c_j &= \sum_{i \neq r} a'_{ij} c_{n+i} + a'_{rj} c_h - c_j = \\
&= \sum_{i \neq r} \left(a_{ij} - a_{ih} \frac{a_{rj}}{a_{rh}} \right) c_{n+i} + \frac{a_{rj}}{a_{rh}} c_h - c_j = \\
&= z_j - c_j - \frac{a_{rj}}{a_{rh}} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ih} c_{n+i} - c_h \right) = \\
&= z_j - c_j - \frac{a_{rj}}{a_{rh}} (z_h - c_h) \; . \qquad (2.115)
\end{aligned}
$$

De relatie (2.115) geeft nu de rechtvaardiging voor de wijze van bepalen van de getallen $z'_j - c_j$ (en dus ook van z'_0) in tabel 2.VI.

Aangezien wij op deze wijze steeds een tabel krijgen van de zelfde structuur als 2.V kunnen wij de beschreven procedure steeds herhalen totdat alle getallen $z_j - c_j$ ($j=1,\ldots,n+m$) niet-negatief zijn. Op dat moment kan de optimale oplossing met behulp van de B- en x_0-kolom worden afgelezen.

De hierboven geschetste werkwijze wordt in de literatuur aangegeven met de naam "Simplex methode".

Tenslotte zullen wij een voorbeeld van een lineair programmeringsprobleem uitwerken, waarbij bijna alle voorwaarden zijn gegeven in een vorm, die niet geschikt is voor het direct toepassen van de simplex methode.

Bij de behandeling van dit voorbeeld zullen we steeds gebruik maken van algemeen toepasbare methoden, d.w.z. methoden, met behulp waarvan we elk lineair programmeringsprobleem in de voor de simplex methode vereiste vorm kunnen brengen. Tevens zullen we hierbij kennis maken met een geval van ontaarding.

Maximaliseer

$$y(s;x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \tag{2.116}$$

onder de bijvoorwaarden:

$$\left.\begin{array}{llr} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -10 & & (2.117) \\ \phantom{x_1 -{}} 3x_2 - 5x_3 \leq -4 & & (2.118) \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -6 & & (2.119) \\ x_1 + x_2 \geq +2 & & (2.120) \\ \phantom{x_1 -{}} x_2 + x_3 + x_4 \leq 4 & & (2.121) \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,\ldots,4) \ . & & \end{array}\right\} \tag{2.122}$$

In vergelijking met (2.117) is het <u>rechterlid negatief</u>; door het linker- en het rechterlid met -1 te vermenigvuldigen gaat (2.117) over in:

$$- x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = + 10 \ . \tag{2.123}$$

Vermenigvuldigen we het linker- en het rechterlid van (2.118) eveneens met -1 dan gaat (2.118) over in:

$$- 3x_2 + 5x_3 \geq 4 \tag{2.124}$$

en deze ongelijkheid gaat na het invoeren van een nieuwe, niet negatieve variabele x_5 over in:

$$- 3x_2 + 5x_3 - x_5 = 4 \ . \tag{2.125}$$

Voorwaarde (2.119) is gelijkwaardig met:

$$- 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \tag{2.126}$$

en na het invoeren van een nieuwe, niet negatieve variabele x_6 gaat deze ongelijkheid over in:

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 6\ . \tag{2.127}$$

Voorwaarde (2.120) kunnen we omvormen tot de vergelijking:

$$x_1 + x_2 - x_7 = 2 \quad \text{met} \quad x_7 \geq 0\ . \tag{2.128}$$

Voorwaarde (2.121) verandert na het invoeren van een niet negatieve variabele x_8 in:

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_8 = 4\ . \tag{2.129}$$

De oorspronkelijke opgave kunnen we nu als volgt formuleren:

Maximaliseer $y(s;x) = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ onder de bijvoorwaarden:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrrrl}
-x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & & & & & = +10 \\
 & -3x_2 & +5x_3 & & -x_5 & & & & = +4 \\
-4x_1 & +x_2 & +2x_3 & & & +x_6 & & & = +6 \\
x_1 & +x_2 & & & & & -x_7 & & = +2 \\
 & x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & +x_8 & = +4 \\
 & x_j \geq 0 & (j=1,2,\ldots,8) & & & & & & .
\end{array}\right\} \tag{2.130}$$

In (2.130) zijn alleen de variabelen x_6 en x_8 echte verschilvariabelen. Op soortgelijke wijze als eerder in deze paragraaf voeren wij in de vergelijkingen (2.123), (2.125) en (2.128) nu de zogenaamde u-variabelen in.

De variabelen x_4, x_5, x_6, x_7 en x_8 nemen wij op in $y(s;x)$ met de coëfficiënt nul en de u-variabelen u_1, u_2 en u_3 met de coëfficiënt $-M$, waarbij M een zeer groot positief getal is.

Het probleem luidt derhalve: maximaliseer

$$y^{**}(s;x) = 2x_1+3x_2-x_3+0.x_4+0.x_5+0.x_6+0.x_7+0.x_8-M.u_1-M.u_2-M.u_3 \tag{2.131}$$

onder de voorwaarden:

$$\left.\begin{array}{lllllllllllll}
-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 & & & & & +u_1 & & & = 10 \\
 - 3x_2 + 5x_3 & -x_5 & & & & & +u_2 & & = 4 \\
-4x_1 + x_2 + 2x_3 & & +x_6 & & & & & & = 6 \\
x_1 + x_2 & & & -x_7 & & & & +u_3 & = 2 \\
\phantom{-x_1 +{}} x_2 + x_3 + x_4 & & & & +x_8 & & & & = 4 \\
\multicolumn{9}{c}{x_j \geqq 0 \qquad (j=1,2,\ldots,8)} \\
\multicolumn{9}{c}{u_i \geqq 0 \qquad (i=1,2,3) \quad .}
\end{array}\right\} (2.132)$$

Hieronder volgen de tabellen, die behoren bij de achtereenvolgende stappen om de optimale oplossing te bereiken.

C	B	x_0	u_1	u_2	x_6	u_3	x_8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	
-M	u_1	10	1	0	0	0	0	-1	2	3	-1	0	0	
-M	u_2	4	0	1	0	0	0	0	-3	5	0	-1	0	←
0	x_6	6	0	0	1	0	0	-4	1	2	0	0	0	
-M	u_3	2	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	-1	
0	x_8	4	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	
z_j-c_j		-16M	0	0	0	0	0	-2	-3	-8M+1	M	M	M	
										↑				

Tabel 2.VII

De triviale oplossing

C	B	x_0	u_1	u_2	x_6	u_3	x_8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7
$-M$	u_1	7,6	1	−0,6	0	0	0	−1	3,8	0	−1	0,6	0
−1	x_3	0,8	0	0,2	0	0	0	0	−0,6	1	0	−0,2	0
0	x_6	4,4	0	−0,4	1	0	0	−4	2,2	0	0	0,4	0
$-M$	u_3	2	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	−1
0	x_8	3,2	0	−0,2	0	0	1	0	1,6	0	1	0,2	0
$z_j - c_j$		−9,6M −0,8	0	1,6M −0,2	0	0	0	−2	−4,8M −2,4	0	M	−0,6M +0,2	M

Tabel 2.VIII

Eerste verbeterde oplossing

Bij tabel 2.VIII stuiten we op een ontaarding omdat:
$\frac{7,6}{3,8} = \frac{4,4}{2,2} = \frac{2}{1} = \frac{3,2}{1,6} = 2.$ We kunnen dus niet ondubbelzinnig een rij aanwijzen waarvoor $\frac{a_{i0}}{a_{ik}}$ (met $a_{ik} > 0$) minimaal is. In de praktijk kiest men dan meestal die rij waarvoor a_{ik} maximaal is; de invloed van afrondingsfouten op de berekeningen wordt hierdoor verkleind.
In tabel 2.VIII kiezen we dus de rij met $a_{ik} = 3,8$.

C	B	x_0	u_1	u_2	x_6	u_3	x_8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7
3	x_2	2	0,263	−0,158	0	0	0	−0,263	1	0	−0,263	0,158	0
−1	x_3	2	0,158	0,105	0	0	0	−0,158	0	1	−0,158	−0,105	0
0	x_6	0	0,579	−0,052	1	0	0	−3,421	0	0	0,579	0,052	0
$-M$	u_3	0	−0,263	0,158	0	1	0	1,263	0	0	0,263	−0,158	−1
0	x_8	0	−0,421	0,053	0	0	1	0,421	0	0	1,421	−0,053	0
$z_j - c_j$		4	1,262M +0,631	+0,842M −0,579	0	0	0	−1,262M −2,631	0	0	−0,262M −0,631	0,158M +0,579	M

Tabel 2.IX

Tweede verbeterde oplossing

Ook in tabel 2.IX hebben we te maken met een geval van ontaarding.

C	B	x_0	u_1	u_2	x_6	u_3	x_8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7
3	x_2	2			0		0	0	1	0	-0,208	0,125	-0,208
-1	x_3	2			0		0	0	0	1	-0,125	-0,125	-0,125
0	x_6	0			1		0	0	0	0	1,291	-0,376	-2,709
2	x_1	0	-0,208	0,125	0	0,792	0	1	0	0	0,208	-0,125	-0,792
0	x_8	0			0		1	0	0	0	1,333	0	0,333
$z_j - c_j$		4	M-0,084	M-0,25	0	M+2,08	0	0	0	0	-0,083	0,25	-2,084

Tabel 2.X

Derde verbeterde oplossing

Het is gemakkelijk in te zien dat in de laatste vakjes van de kolommen u_1, u_2, u_3 steeds een positief getal zal blijven staan. Het heeft daarom geen zin deze kolommen in de tabellen te handhaven. Het een en ander houdt o.a. in dat we in tabel 2.X een toegelaten oplossing bij het oorspronkelijke probleem hebben gevonden: $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=2$, $x_4=0$.

C	B	x_0	x_6	x_8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7
3	x_2	2	0	0	0	1	0	-0,208	0,125	-0,208
-1	x_3	2	0	0	0	0	1	-0,125	-0,125	-0,125
0	x_6	0	1	0	0	0	0	1,291	-0,375	-2,709
2	x_1	0	0	0	1	0	0	0,208	-0,125	-0,792
0	x_8	0	0	1	0	0	0	1,333	0	0,333
$z_j - c_j$		4	0	0	0	0	0	-0,083	0,25	-2,084

Tabel 2.XI

Vierde verbeterde oplossing

C	B	x_0	x_6	x_8	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7
3	x_2	2	0	0,625	0	1	0	0,625	0,125	0
-1	x_3	2	0	0,375	0	0	1	0,375	-0,125	0
0	x_6	0	1	8,127	0	0	0	12,127	-0,375	0
2	x_1	0	0	2,375	1	0	0	3,376	-0,125	0
0	x_7	0	0	3	0	0	0	4	0	1
z_j-c_j		4	0	6,250	0	0	0	8,25	0,25	0

Tabel 2.XII

Vijfde verbeterde oplossing

Omdat alle getallen z_j-c_j niet negatief zijn, hebben wij hiermee de optimale oplossing gevonden:

$$x_1=0, \quad x_2=2, \quad x_3=2 \; . \tag{2.133}$$

De optimale waarde van z_0 is gelijk aan 4.

3. Een eenvoudige oplossingsmethode

Het is niet steeds nodig om de simplex methode toe te passen wanneer men een lineair programmeringsprobleem moet oplossen. Een eenvoudige methode, die men in bepaalde gevallen gebruiken kan, zullen wij in deze paragraaf behandelen.

Men kan deze methode o.a. toepassen op het volgende probleem. Laat een homogeen product aanwezig zijn in m havens en verscheept moeten worden naar n bestemmingen. In de havens zijn resp. aanwezig de hoeveelheden $a_1,\ldots,a_m$, terwijl op de plaatsen van bestemming de hoeveelheden $b_1, \ldots, b_n$ gebracht moeten worden. Wij onderstellen voorlopig dat er evenveel goederen gevraagd worden als er opgeslagen zijn. De transportkosten zijn evenredig aan de verscheepte hoeveelheden. Geeft men nu de vervoerskosten per eenheid van haven i naar bestemming j aan met c_{ij} en de langs deze route vervoerde hoeveelheid met x_{ij}, dan kan men de transportkosten zo klein mogelijk maken door het minimum te bepalen van de functie

$$y(s;x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \tag{3.1}$$

onder de voorwaarden

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{3.3}$$

en

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)\ ,$$

waarin de a's en b's getallen > 0 zijn en bovendien voldoen aan de betrekking

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\ . \tag{3.4}$$

Dit is een lineair programmeringsprobleem, dat met de gegeven simplexmethode kan worden opgelost. Het is echter mogelijk de oplossing op een eenvoudiger manier te bepalen.

Uit uitspraak 6 volgt dat in een te construeren optimale oplossing het aantal variabelen $\neq 0$ hoogstens gelijk is aan het aantal voorwaarden (afgezien van de voorwaarden, welke impliceren dat de variabelen ≥ 0 moeten zijn). In het onderhavige geval bestaan er m+n voorwaarden, die echter lineair afhankelijk zijn. ($\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$). Dit heeft ten gevolge, dat de optimale oplossing die wij construeren, hoogstens m+n-1 variabelen $x_{ij} \neq 0$ zal bevatten. Evenals bij de gewone simplex methode beginnen wij nu met de constructie van een beginoplossing, die hier overigens niet de triviale is en gaan dan na of wij een verbeterde oplossing kunnen vinden. De optimale oplossing wordt dus ook hier stapsgewijze bereikt. Wij zorgen ervoor dat de beginoplossing $m+n-1$ variabelen $x_{ij} \neq 0$ bevat. Tijdens het proces wordt dit aantal nooit groter; indien het aantal kleiner mocht worden, spreken wij van ontaarding, een geval dat apart zal worden behandeld.

Wij beschrijven nu de methode aan de hand van een numeriek voorbeeld.

In de havens I, II en III liggen respectievelijk 7, 6 en 6 ton van een goed opgeslagen, welke verscheept moeten worden naar de havens A, B, C en D en wel moet A 5, B 9, C 2 en D 3 ton ontvangen. De kosten van vervoer per ton zijn opgegeven in tabel I; hoewel deze in het algemeen positief zullen zijn, hebben wij ook nul en een negatieve waarde opgenomen, om te demonstreren dat het voor de methode niet noodzakelijk is dat deze coëfficiënten alle positief zijn (overigens kan men bij een nul denken aan het geval dat I en D dezelfde haven voorstellen en bij een negatief getal aan een premie). Men vraagt zich nu af hoe men het verzendpatroon moet maken, opdat de totale vervoerskosten minimaal zijn.

van \ naar	A	B	C	D
I	5	3	1	0
II	4	3	-1	2
III	8	4	2	1

Tabel 3.I
Vervoerskosten per ton

Geven wij de havens I, II en III aan met de indices 1, 2, 3 en A, B, C, D met 1, 2, 3, 4, dan hebben de vergelijkingen (3.2) en (3.3) hier de volgende vorm:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{1j} = 7, \quad \sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 6, \quad \sum_{j=1}^{4} x_{3j} = 6 \tag{3.5}$$

en

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 5, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 9, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 2, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 3 \ . \tag{3.6}$$

Wij gaan nu eerst over tot het bepalen van een beginoplossing. Hiervoor bestaan verschillende methoden, die nauw verwant zijn en waarvan wij er één in de vorm van een recept zullen geven.

Constructie van een beginoplossing

1) Bepaal welke route per eenheid van vervoer het goedkoopste is en verzend hierlangs zoveel mogelijk (in het voorbeeld: 2 ton van II naar C);
2) bepaal welke haven hiermee niet geheel wordt uitgeschakeld;
3a) is dit een opslaghaven, ga dan na langs welke route het restant van de opgeslagen goederen of een deel daarvan zo goedkoop mogelijk vervoerd kan worden;
3b) is dit een bestemmingshaven, ga dan na langs welke route het restant van de gevraagde hoeveelheid, of een deel hiervan, zo goedkoop mogelijk aangevoerd kan worden (hier: 3 ton van II naar D);
4) ga op deze wijze verder tot alle opslagplaatsen uitgeput en alle bestemmingsplaatsen voorzien zijn.

In ons voorbeeld vinden wij zo de in tabel 3.II opgegeven beginoplossing; blanco hokjes geven nullen aan.

naar / van	A	B	C	D	totaal
I		7			7
II		1	2	3	6
III	5	1			6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 3.II
De beginoplossing

In dit voorbeeld is $m = 3$ en $n = 4$, dus $m+n-1 = 6$, zodat tabel 3.II een oplossing bevat waarin het vereiste aantal variabelen een waarde > 0 bezit. Dit is verkregen door steeds met die haven of die bestemming verder te gaan, waarvan de voorraad nog niet uitgeput, respectievelijk de behoefte nog niet volledig gedekt was. Zolang het probleem niet is ontaard, stuit men nooit op de situatie, waarin een aantal opslagplaatsen $< m$ een aantal bestemmingen $< n$ kan voorzien; men kan dus steeds op de aangegeven wijze verder gaan tot een volledig patroon is verkregen.

De kosten van dit verschepingsprogramma bedragen, zoals met (3.1) kan worden nagegaan, 72.

Wij vragen ons nu af of er een programma bestaat, waarvan de totale kosten lager zijn dan dit bedrag. In figuur 3.1 is schematisch aangegeven welke routes in gebruik zijn en hoeveel er langs wordt vervoerd. Zolang men zich beperkt tot deze routes, is het niet mogelijk het programma te wijzigen.

Wij nemen daarom in het programma een nieuwe route op, bijv. door 1 ton te verzenden van I naar D. Daardoor moet ook de verscheping op andere routes worden gewijzigd om aan de gestelde eisen te blijven voldoen.

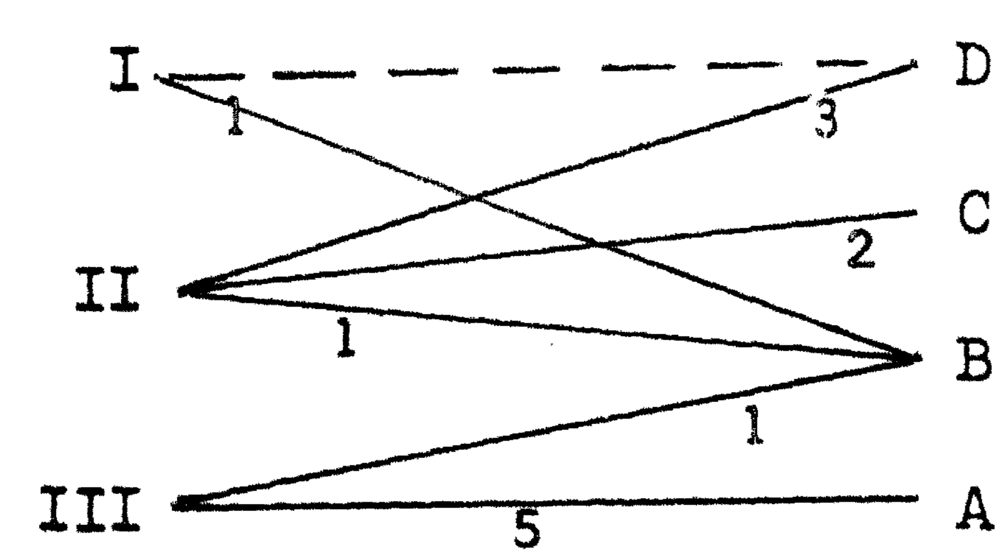


fig. 3.1
Gebruikte routes bij de beginoplossing

Dit kan in ons geval door 1 ton minder te sturen van I naar B, 1 ton meer van II naar B en 1 ton minder van II naar D. De verandering in de kosten bedraagt hierbij

$$- c_{12} + c_{22} - c_{24} + c_{14} = -2 ,$$

en het is dus voordelig deze verandering aan te brengen. Wij noemen c_{14} de directe kosten van vervoer van I naar D en de gezamenlijke kosten van de routes, die I - D kunnen vervangen, aangegeven door z_{14}, de indirecte. Deze indirecte kosten bezitten dezelfde betekenis als de eerder gebruikte getallen z_j. Het inlassen van een andere nog niet gebruikte route kan dus de totale kosten lager doen worden. Wij berekenen daarom voor alle niet gebruikte routes het verschil tussen de directe kosten c_{ij} en de kosten z_{ij}. Zolang men niet meer dan één nieuwe route in het programma wil opnemen, kan iedere route slechts op één manier vervangen worden door een combinatie van in gebruik zijnde routes, waardoor de verschillen $c_{ij} - z_{ij}$ dus ondubbelzinnig zijn bepaald.

De volgende stap bestaat nu uit het systematische berekenen van de verschillen $c_{ij} - z_{ij}$. De berekeningen kunnen geschieden in een tabel zoals tabel 3.III. In de rechter bovenhoek van ieder vakje zijn de transportkosten c_{ij} per eenheid opgenomen.

r_i \ k_j					totaal
	$\boxed{5}$	7 $\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	7
	$\boxed{4}$	1 $\boxed{3}$	2 $\boxed{-1}$	3 $\boxed{2}$	6
	5 $\boxed{8}$	1 $\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 3.III

Bestaat er een goedkopere oplossing?

De gevonden beginoplossing is ingevuld en de waarden hiervan zijn omcirkeld. Aan iedere rij worden nu rijkosten r_i en aan iedere kolom kolomkosten k_j toegevoegd. Deze bepalen wij zodanig dat voor de bij de beginoplossing in gebruik zijnde routes geldt

$$r_i + k_j = c_{ij} \; . \tag{3.7}$$

In ons geval moet dus gelden

$$\begin{aligned} r_1 + k_2 &= 3 \\ r_2 + k_2 &= 3 \\ r_2 + k_3 &= -1 \\ r_2 + k_4 &= 2 \\ r_3 + k_1 &= 8 \\ r_3 + k_2 &= 4 \; . \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dit zijn 6 vergelijkingen met 7 onbekenden en dus is er altijd een oplossing te vinden. In het algemeen is het een stelsel van m+n-1 vergelijkingen met m+n onbekenden. Wij stellen nu in één van de vergelijkingen, bijv. de eerste, één van de variabelen r_i of k_j gelijk aan nul en lossen dan vervolgens alle andere onbekenden op. Kiezen wij hier $r_1 = 0$, dan vinden wij respectievelijk $k_2 = 3$, $r_2 = 0$, $k_3 = -1$, $k_4 = 2$, $r_3 = 1$ en $k_1 = 7$. Voor een niet gebruikte route vinden wij het verschil $c_{ij} - z_{ij}$ nu door de betreffende c_{ij} te verminderen met de rijwaarde r_i èn met de kolomwaarde k_j, welke toegevoegd zijn aan de rij, respectievelijk de kolom waarin de route zich bevindt. Bijvoorbeeld is

$$c_{11} - z_{11} = 5 - 0 - 7 = -2$$

en

$$c_{33} - z_{33} = 2 - 1 - (-1) = 2 .$$

In tabel 3.IV zijn alle waarden r_i en k_j en de verschillen $c_{ij} - z_{ij}$ ingevuld.

r_i \ k_j	7	3	-1	2	totaal
0	5 / -2	3 / 7	1 / 2	0 / -2	7
0	4 / $\boxed{-3}$	3 / 1	-1 / 2	2 / 3	6
1	8 / 5	4 / 1	2 / 2	1 / -2	6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 3.IV

Is een betere oplossing mogelijk?

Boven hebben wij reeds gezien dat verlaging van de kosten mogelijk is, indien er een route bestaat waarvoor het verschil tussen directe kosten c_{ij} en indirecte kosten z_{ij} negatief is. Als er negatieve verschillen zijn, gaan wij na langs welke nog niet gebruikte route de verlaging van de kosten per ton maximaal is en vervolgens hoeveel er langs deze route verzonden kan worden. Op de eerste vraag luidt in dit geval het antwoord: langs II → A (aangegeven met $\square$ in tabel 3.IV). Om de tweede vraag te beantwoorden gaan wij na hoe het programma gewijzigd moet worden. Daartoe bepalen wij in de rij van het aangewezen vakje een omcirkeld vakje met de eigenschap dat er nog een ander omcirkeld vakje in dezelfde kolom staat. In de kolom van het zo verkregen vakje bepalen wij een omcirkeld vakje met de eigenschap dat er nog een ander omcirkeld vakje in dezelfde rij staat. Deze twee stappen herhalen wij om en om net zo lang tot wij in het uitgangspunt zijn teruggekeerd. Hiermee is een gesloten weg bereikt, die aangeeft langs welke routen de te verschepen hoeveelheden veranderen. Past men dit toe op II - A, dan vindt men dat 1 ton meer langs II - A tengevolge heeft 1 ton minder langs II - B, 1 ton meer langs III - B en 1 ton minder langs III - A. De hoeveelheid langs II - B kan slechts 1 ton verlaagd worden, zodat in het verbeterde verzendpatroon langs II - A wordt verzonden één ton, langs II - B niets, langs III - B twee ton en langs III - A vier ton. De gesloten weg en het nieuwe programma zijn opgenomen in tabel 3.V. De kosten bedragen nu 72 - 3 = 69.

r_i \ k_j					totaal
	$\boxed{5}$	7 $\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	7
	1 $\boxed{4}$	$\boxed{3}$	2 $\boxed{-1}$	3 $\boxed{2}$	6
	4 $\boxed{8}$	2 $\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 3.V

Eerste verbeterde oplossing

Men kan nu opnieuw de waarden r_i en k_j bepalen, vervolgens de getallen $c_{ij} - z_{ij}$ berekenen, nagaan of één van deze verschillen negatief is en zo ja het nieuwe schema van verzending construeren. Zodra alle verschillen $c_{ij} - z_{ij}$ positief zijn, of gelijk aan nul, is het optimale programma gevonden. De tabellen 3.VI, 3.VII en 3.VIII, bevatten de berekeningen van de opeenvolgende stappen. Het met $\boxed{}$ aangegeven hokje correspondeert steeds met de nieuw op te nemen route.

r_i \ k_j	7	3	2	5	totaal
0	[5] -2	[3] 7	[1] -1	[0] -5	7
-3	[4] 1	[3] -3	[-1] 2	[2] 3	6
1	[8] 4	[4] 2	[2] -1	[1] $\boxed{-5}$	6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 3.VI

Eerste verbeterde oplossing

r_i \ k_j	7	3	2	0	totaal
0	[5] $\boxed{-2}$	[3] 7	[1] -1	[0] 0	7
-3	[4] 4	[3] -3	[-1] 2	[2] -5	6
1	[8] 1	[4] 2	[2] -1	[1] 3	6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 3.VII

Tweede verbeterde oplossing

r_i \ k_j	7	3	0	0	totaal
0	1 $\boxed{5}$	6 $\boxed{3}$	1 $\boxed{1}$	0 $\boxed{0}$	7
-1	4 $\boxed{4}$	1 $\boxed{3}$	2 $\boxed{-1}$	3 $\boxed{2}$	6
1	2 $\boxed{8}$	3 $\boxed{4}$	1 $\boxed{2}$	3 $\boxed{1}$	6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 3.VIII
Derde verbeterde oplossing

De kosten bedragen voor de eerste verbeterde oplossing 69, voor de tweede $69 - 3.5 = 54$ en voor de laatste oplossing $54 - 1.2 = 52$. Tabel 3.VIII bevat de optimale oplossing omdat alle $c_{ij} - z_{ij}$ niet-negatief zijn.

Alternatieve optima

Tabel 3.VIII leert ons niet alleen dat er geen betere oplossing bestaat, doch ook dat er nog een andere, eveneens optimale oplossing is. Immers de nul in het vakje I - D geeft aan, dat voor deze route directe en indirecte kosten gelijk zijn, zodat het inschakelen van deze route geen wijziging in de totale kosten zal brengen. Dit alternatieve optimale programma is vermeld in tabel 3.IX; de verschillen $c_{ij} - z_{ij}$ blijven dezelfde.

r_i \ k_j	5	3	0	0	totaal
0	1 $\boxed{5}$	3 $\boxed{3}$	← -1 $\boxed{1}$	3 $\boxed{0}$	7
-1	4 $\boxed{4}$	1 $\boxed{3}$	2 $\boxed{-1}$	3 $\boxed{2}$	6
1	2 $\boxed{8}$	6 $\boxed{4}$	1 → $\boxed{2}$	0 $\boxed{1}$	6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 3.IX

Een andere optimale oplossing

Daar tabel 3.VIII alleen een nul bevat in het vakje I - D bestaan er verder geen optimale oplossingen, die niet verkregen kunnen worden als lineaire combinatie van de in de tabellen 3.VIII en 3.IX vermelde oplossingen. Geven wij deze aan met x'_{ij}, resp. x''_{ij}, dan kan men alle optimale oplossingen van dit probleem voorstellen door

$$x_{ij} = x'_{ij} + (1-\lambda)x''_{ij} \ , \tag{3.9}$$

waarin

$$0 \leq \lambda \leq 1 \ . \tag{3.10}$$

Voor $\lambda = \frac{1}{3}$ is de bijbehorende optimale oplossing opgenomen in tabel 3.X.

	A	B	C	D	totaal
I	1	4		2	7
II	4		2		6
III		5		1	6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 3.X

Nog een optimale oplossing

Had men door het nul worden van niet-omcirkelde getallen uit de tabellen drie verschillende optimale oplossingen (x'_{ij}, x''_{ij} en x'''_{ij}) kunnen aflezen, dan zouden alle optimale oplossingen voorgesteld kunnen worden door

$$x_{ij} = \lambda x'_{ij} + \mu x''_{ij} + \nu x'''_{ij} \qquad (3.11)$$

met λ, μ en ν alle ≥ 0 en $\lambda+\mu+\nu = 1$.

Opmerking

Uit de berekening van de optimale oplossing is gebleken, dat hierin alleen gehele eenheden worden vervoerd. Het is niet zo, dat men door het toelaten van oplossingen, waarin gedeelten van tonnen vervoerd worden, een goedkoper verschepingsprogramma kan bereiken. Dat er steeds een optimale oplossing bestaat, die alleen gehele eenheden bevat, wordt veroorzaakt door het feit dat de variabelen in de vergelijkingen (3.2) en (3.3) slechts met coëfficiënt 1 voorkomen.

Een controlemiddel

Door het programma te vergelijken met de randtotalen, is het niet moeilijk bij iedere stap te controleren of men een oplossing heeft die aan de eisen voldoet. De berekeningen van de verschillen tussen directe en indirecte kosten worden op deze wijze niet gecontroleerd. Eventuele hierin gemaakte fouten beïnvloeden de uiteindelijke oplossing echter niet, omdat deze verschillen bij een volgende stap niet meer worden gebruikt. Bij de algemene simplex methode was dit wel het geval.

Ontaardingen

Ontaardingen kunnen ontstaan wanneer een aantal ($< m$) havens precies kan voorzien in de gezamenlijke behoeften van een aantal ($< n$) bestemmingen.

Bij de constructie van de beginoplossing kan dit tengevolge hebben dat in een bepaalde fase de betreffende haven is uitgeput terwijl bovendien de betreffende bestemming volledig is voorzien. Men kan dan voor de nog niet behandelde havens en bestemmingen op de op blz. 94 aangegeven wijze een beginoplossing construeren.

Verder is het mogelijk, dat het aantal variabelen met waarden groter dan nul, bij een bepaalde stap kleiner is dan m+n-1 en in een dergelijk geval slaagt men er niet in, de getallen $c_{ij} - z_{ij}$ op de boven aangegeven wijze te berekenen.

Er bestaan twee nauw verwante methoden om de moeilijkheden op te lossen. De eerste methode illustreren wij door een voorbeeld. Stel dat men van het reeds doorgerekende probleem de in tabel 3.XI gegeven oplossing heeft gevonden en dat men nu bij de volgende stap de route I - A in de oplossing op wil nemen (dit dus in afwijking van de in het voorgaande gegeven regel).

r_i \ k_j	7	3	1	2	totaal
0	-2 $\boxed{5}$	5 $\boxed{3}$	2 $\boxed{1}$	-2 $\boxed{0}$	7
0	-3 $\boxed{4}$	3 $\boxed{3}$	-2 $\boxed{-1}$	3 $\boxed{2}$	6
1	5 $\boxed{8}$	1 $\boxed{4}$	0 $\boxed{2}$	-2 $\boxed{1}$	6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 3.XI

Een oplossing die tot een ontaarde oplossing kan leiden

r_i \ k_j					totaal
	5 $\boxed{5}$	$\boxed{3}$	2 $\boxed{1}$	$\boxed{0}$	7
	$\boxed{4}$	3 $\boxed{3}$	$\boxed{-1}$	3 $\boxed{2}$	6
	$\boxed{8}$	6 $\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 3.XII

Een ontaarde oplossing

Het nieuwe, in tabel 3.XII vermelde programma is ontaard omdat er slechts vijf routes gebruikt worden. Het is nu niet mogelijk op de aangegeven wijze de waarden r_i en k_j te berekenen. Om dit nu toch mogelijk te maken laten wij in één van de twee vakjes, waarvan de waarde nul is geworden, een omcirkelde nul staan, bijv. in vakje I - B. Wij kunnen nu weer op de gebruikelijke wijze verder gaan. Tabel 3.XIII bevat de nieuwe waarden $c_{ij} - z_{ij}$.

r_i \ k_j	5	3	1	2	totaal
0	5 $\boxed{5}$	0 $\boxed{3}$	2 $\boxed{1}$	-2 $\boxed{0}$	7
0	-1 $\boxed{4}$	3 $\boxed{3}$	-2 $\boxed{-1}$	3 $\boxed{2}$	6
1	2 $\boxed{8}$	6 $\boxed{4}$	0 $\boxed{2}$	-2 $\boxed{1}$	6
totaal	5	9	2	3	19

Tabel 3.XIII

Berekening van de waarden $c_{ij} - z_{ij}$ bij een ontaarde oplossing

Neemt men bij de volgende stap II - C in het programma op, dan verdwijnt de ontaarding; kiest men echter I - D of III - D, dan blijft de ontaarding nog langer bestaan. Het eindresultaat is uiteraard hetzelfde als het in tabel 3.VIII gevondene.

Een elegantere methode is aangegeven door G.B. DANTZIG **). Wanneer men grote problemen heeft, die op machines berekend moeten worden, is men hier zelfs op aangewezen. Zij komt hierop neer, dat door een kleine transformatie van het probleem een nieuw probleem ontstaat, waarin nooit ontaarding op kan treden.

Hiertoe bepaalt men het minimum van m en n, vermenigvuldigt dit met twee en deelt de eenheid, waarin de getallen in de verschepingstabel zijn uitgedrukt door dit getal (wanneer in de tabel 3,25 voorkomt, moet men 0,01 als eenheid nemen). Vervolgens kiest men een geschikt positief getal δ dat kleiner is dan het gevonden quotiënt en verhoogt de getallen in de totaalkolom, die correspondeert met het minimum van m en n hiermee; één van de andere randtotalen wordt verhoogd met δ keer het minimum. In ons geval is het minimum $m = 3$, het quotiënt dus $\frac{1}{2\times 3} = 0,16$; voor δ kiezen wij 0,1 en de gewijzigde eisen worden dan de in tabel 3.XIV vermelde.

	A	B	C	D	totaal
I					7,1
II					6,1
III					6,1
totaal	5	9	2	3,3	19,3

Tabel 3.XIV

Gewijzigde verschepingseisen

**) G.B. DANTZIG, Application of the simplex method to a transportation problem, hfdst. XXIII in Activity Analysis of Production and Allocation. Wiley (1951).

Wij passen op het nieuwe probleem de in deze paragraaf beschreven oplossingsmethode toe en ronden de uitkomsten af tot gehele eenheden (0,0 t/m 0,4 tot 0 en 0,5 t/m 0,9 tot 1). De zo verkregen oplossing is de exacte oplossing van het oorspronkelijke probleem.

Andere toepassingen

De beschreven methode kan worden toegepast, indien men de bijvoorwaarden in de vorm (3.2), (3.3) en (3.4) kan gieten. Zoals in het voorbeeld is aangegeven kan dit het geval zijn bij transportproblemen. Behalve bij het verschepen van een homogeen product treft men deze o.a. aan bij het voorzien van grossiers door een aantal fabrieken, die dezelfde producten vervaardigen. Wij kunnen daardoor ook inzicht krijgen in het probleem, waar een nieuwe fabriek of een nieuw distributiedepot te plaatsen. Komen hiervoor een aantal plaatsen in aanmerking, dan kan men voor elk daarvan het transportprobleem oplossen en dan nagaan voor welke plaats de minimale transportkosten het kleinste zijn.

Een geheel ander toepassingsgebied is dat van het personeelsbeleid. Een bedrijf heeft voor N functies N sollicitanten opgeroepen. De laatsten kan men verdelen in m elkaar uitsluitende groepen, waarvan de i^e groep a_i leden telt. Er zijn n verschillende functies en b_j vacatures van de j^e functie. Heeft men door middel van testen gevonden dat de verwachte geschiktheid van iemand uit de i^e groep voor de j^e functie door het getal (score) c_{ij} wordt weergegeven en geeft men het aantal personen uit de i^e groep, die worden geplaatst in de j^e functie aan met x_{ij}, dan komt de opdracht, de N personen zó over de vacatures te verdelen, dat de totale productieviteit maximaal is, hierop neer, dat men (3.1) moet maximaliseren onder de voorwaarden (3.2), (3.3) en (3.4). Voor de toepassingsmogelijkheden is behalve de moeilijkheid de c_{ij} goed vast te stellen, een ernstig bezwaar, dat men aanneemt, dat zowel de personen als de functies in een bepaalde groep identiek zijn. Indien alle groepen slechts één element bevatten, behoeft men deze onderstelling natuurlijk niet te maken.

Men kan ook problemen, die in eerste instantie niet de vereiste vorm bezitten, vaak door eenvoudige kunstgrepen transformeren in problemen, waarin de bijvoorwaarden wel zijn van de vorm (3.2), (3.3) en (3.4). Zo kan men de gegeven methode ook toepassen wanneer de hoeveelheid beschikbare goederen groter is dan de vraag, wanneer dus $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ is. Hiertoe moet men een gefingeerde $(n+1)^{ste}$ bestemming invoeren, welke $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ ton goederen dient te ontvangen en waarvoor de transportkosten vanaf elke opslagplaats nul bedragen. Bevat de optimale oplossing bijv. de uitkomst $x_{i,n+1} = 6$, dan betekent dit, dat van de goederen in de i^{de} opslagplaats 6 ton niet vervoerd wordt. Een overeenkomstige weg kan men volgen wanneer geldt $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$. In het geval, waarin een bepaalde verbinding niet gebruikt kan worden, kan men het model redden door voor de transportkosten langs deze route een zeer hoog bedrag M per vervoerde eenheid in rekening te brengen.

Verder bestaan er ook generalisaties van de hier beschreven methode, waarmee meer algemene transportproblemen opgelost kunnen worden. Zo heeft E.D. SCHELL een methode uitgewerkt, waarmee de volgende vraag beantwoord kan worden *): waar moet een fabrikant die verschillende artikelen fabriceert in een aantal fabrieken, bepaalde artikelen produceren en naar welke afnemers moet hij ze zenden, opdat de totale som van fabricage- en transportkosten zo laag mogelijk zij. Het is dan ook nog mogelijk rekening te houden met de capaciteiten van de fabrieken en de transportroutes en met de uiteenlopende fabricagekosten van de artikelen in de verschillende fabrieken. Wij zullen hier echter niet op ingaan.

---

*) E.D. SCHELL, Distribution of a product by several properties, Proceedings of the second Symposium in Linear Programming, (1956), 615-642.

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

S 342

INLEIDING TOT DE BESLISKUNDE

Hoofdstuk III

Het meer-stapsbeslissingsprobleem

door

Prof.Dr. G. de Leve

mei 1965

1. Meer-stapsbeslissingsproblemen

Ter vereenvoudiging van de komende discussie zullen wij eerst een aantal begrippen omschrijven waarover wij reeds spraken in Hoofdstuk I.

Het eerste begrip dat wij invoerden heette systeem. Het systeem is veelal het object van de beschouwingen.

Aangenomen werd dat het systeem zich in verschillende toestanden kan bevinden en dat deze toestanden beschreven kunnen worden m.b.v. een aantal kwantitatieve grootheden. Een toestand kan dus worden weergegeven door een rij van getallen. Een dergelijke rij van getallen noemt men een toestandsvector s.

Verder hebben wij vastgesteld, dat als de toestanden van een systeem beschreven kunnen worden m.b.v. m kwantitatieve grootheden, iedere toestand weergegeven kan worden door een punt in een m-dimensionaal Cartesiaans assenstelsel. Deze ruimte werd toestandsruimte genoemd.

Bij de problemen welke wij in deze paragraaf zullen beschouwen moet op een aantal discrete tijdstippen een beslissing worden genomen.

Indien bij een probleem op n discrete tijdstippen een beslissing dient te worden genomen, dan spreekt men van een n-stapsbeslissingsprobleem. Zodra de eerste beslissing is genomen gaat het n-stapsbeslissingsprobleem over in een (n-1)-stapsbeslissingsprobleem.

Indien bij een probleem op oneindig veel discrete tijdstippen een beslissing genomen dient te worden, dan spreekt men van een ∞-stapsbeslissingsprobleem. Zodra de eerste beslissing is genomen, gaat het ∞-stapsbeslissingsprobleem over in een nieuw ∞-stapsbeslissingsprobleem.

In Hoofdstuk I stelden wij vast dat ook een beslissing kan worden vastgelegd m.b.v. een aantal kwantitatieve grootheden. Een dergelijke rij van getallen noemt men een beslissingsvector x.

Voor het geval men de beslissingen kan aanduiden met behulp van r kwantitatieve grootheden correspondeert met iedere beslissing een punt in de zgn. r-dimensionale beslissingsruimte X.

Bij een zorgvuldige beschouwing van meer-stapsbeslissingsproblemen valt het ons op, dat de toestand van het systeem op het volgende beslissingstijdstip sterk wordt beïnvloed door de toestand op het huidige beslissingstijdstip en door de te nemen beslissing.

Ook blijkt dikwijls, dat voor de bepaling van de toestand van het systeem op latere beslissingstijdstippen, bij gegeven toestand en beslissing op het huidige beslissingstijdstip, de toestanden en beslissingen op tijdstippen voorafgaande aan het huidige beslissingstijdstip van geen belang zijn. Dit laatste zal zonder meer duidelijk zijn, als men weet dat bij de beschouwde problemen in het begrip toestand alle relevante informatie over toekomstige ontwikkelingen is verwerkt. Bijgevolg zal bij die problemen de informatie over het verleden van het systeem geen verder nut afwerpen.

Bij een volledig deterministisch beslissingsprobleem kan men dan met zekerheid vaststellen hoe de toestand van het systeem zal zijn op het volgende beslissingstijdstip als men de toestand en de beslissing op het huidige beslissingstijdstip kent.

Bij een beslissingsprobleem met stochastisch verloop kan men _niet_ met zekerheid voorspellen wat de gevolgen zullen zijn van een beslissing in één of andere toestand. De toestand op het eerstvolgende beslissingstijdstip is dus onbekend, maar _wel_ zal er veelal een kansverdeling gedefinieerd zijn voor de betreffende toestand. De gedaante van deze kansverdeling zal in die beslissingsproblemen mede worden bepaald door de toestand en de beslissing op het huidige beslissingstijdstip. Het een en ander zal in §3 met een voorbeeld worden toegelicht.

Verder kunnen wij constateren, dat er tengevolge van een beslissing steeds sprake is van een _opbrengst_. Er zijn problemen, waarbij de opbrengst stochastisch is; in die gevallen beschouwt men de verwachting van de opbrengst.

De omvang van deze opbrengst (of de verwachting er van) hangt af van de genomen beslissing en de toestand waarin deze beslissing werd genomen.

Een reeks van beslissingen zullen wij <u>optimaal</u> noemen, als de totale opbrengst maximaal is *).

Verder blijkt, dat wij voor de bepaling van de optimale beslissing op één tijdstip niet kunnen volstaan met alleen maar de opbrengst te beschouwen welke een direct gevolg is van de beslissing. Immers de beslissing bepaalt mede de toestand op het volgende beslissingstijdstip en dientengevolge de toekomstige opbrengsten.

Om het effect van een beslissing op toekomstige opbrengsten te kunnen nagaan, dient men, omdat de opbrengsten hierdoor mede worden bepaald, de toekomstige beslissingen te kennen.

2.1 Het deterministische N-stapsbeslissingsprobleem

Bij een N-stapsbeslissingsprobleem begint men niet met de bepaling van de eerste optimale beslissing, maar met die van de laatste. Dat betekent, dat men een één-stapsbeslissingsprobleem moet oplossen.

Indien wij de <u>directe</u> opbrengst als gevolg van de j^{de} beslissing aangeven met $h_j^{(N)}(s_j,x_j)$ **), dan zal men in de laatste stap trachten de functie $h_N^{(N)}(s_N,x_N)$ te maximaliseren. Hiervoor dient men de toestand s_N van het systeem te kennen. Aangezien men deze toestand niet kent lost men het één-stapsbeslissingsprobleem op voor <u>alle</u> mogelijke toestanden. De maximaal te verkrijgen opbrengst

$$h_N^{(N)}(s_N) = \max_{x_N \in X(s_N)} h_N^{(N)}(s_N,x_N) \tag{2.1}$$

is dus een functie van de toestand s_N op het laatste beslissingstijdstip. De verzameling van toegelaten beslissingen op het N^{de} beslissingstijdstip wordt aangegeven door $X(s_N)$.

---

*) Er zijn problemen, waarbij niet de totale opbrengst maximaal gemaakt moet worden, maar een gewogen som van de opbrengsten. Indien de opbrengst een verlies is dan wordt uiteraard geminimaliseerd.

**) De bovenindex (N) geeft aan dat we te maken hebben met een N-stapsbeslissingsprobleem. Met x_j geven wij de j^{de} beslissing aan en <u>niet</u> zoals in de voorafgaande hoofdstukken de j^{de} component van de beslissing x.

In §1 hebben wij vastgesteld, dat bij een volledig deterministisch beslissingsprobleem de toestand s_j op het beslissingstijdstip volledig wordt bepaald door de toestand s_{j-1} op het voorafgaande beslissingstijdstip en de daarop genomen beslissing x_{j-1}.

Bijgevolg kan de maximaal te verkrijgen opbrengst $h_N^{(N)}(s_N)$ in de laatste stap niet alleen geschreven worden als een functie van de toestand s_N op het laatste beslissingstijdstip maar ook als een functie ${}'h_{N-1}^{(N)}(s_{N-1},x_{N-1})$ van de beslissing x_{N-1} en de toestand s_{N-1} op het daaraan voorafgaande beslissingstijdstip.

Op het $(N-1)^{ste}$ beslissingstijdstip hebben wij dus twee opbrengsten en wel ${}'h_{N-1}^{(N)}(s_{N-1},x_{N-1})$, de opbrengst te verkrijgen in de laatste stap, en de directe opbrengst $h_{N-1}^{(N)}(s_{N-1},x_{N-1})$. Beide opbrengsten kunnen samengevoegd worden tot één opbrengst ${}^{*}h_{N-1}^{(N)}(s_{N-1},x_{N-1})$ waarvoor geldt:

$$ {}^{*}h_{N-1}^{(N)}(s_{N-1},x_{N-1}) = h_{N-1}^{(N)}(s_{N-1},x_{N-1}) + {}'h_{N-1}^{(N)}(s_{N-1},x_{N-1}) \ . \qquad (2.2)$$

Na deze bewerkingen houden wij een (N-1)-stapsbeslissingsprobleem over met opbrengsten:

$$\left.\begin{aligned} h_j^{(N-1)}(s_j,x_j) &= h_j^{(N)}(s_j,x_j) && \text{voor } j = 1,\ldots,N-2 \quad \text{en} \\ h_j^{(N-1)}(s_j,x_j) &= {}^{*}h_{N-1}^{(N)}(s_{N-1},x_{N-1}) && \text{voor } j = N-1 \ . \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

Wij gaan dit (N-1)-stapsbeslissingsprobleem op dezelfde wijze benaderen als het oorspronkelijke N-stapsbeslissingsprobleem, met als gevolg dat het (N-1)-stapsbeslissingsprobleem wordt teruggebracht tot een (N-2)-stapsbeslissingsprobleem. Indien wij op deze wijze voortgaan wordt uiteindelijk het N-stapsbeslissingsprobleem gereduceerd tot een één-stapsbeslissingsprobleem.

Een produktieprobleem

Een chemische industrie heeft een contract afgesloten met één van zijn cliënten.

In het contract staat, dat

a. de fabriek zich verplicht tot levering van

D_1 kg abaraat op 1 februari 1966

D_2 kg abaraat op 1 maart 1966

D_3 kg abaraat op 1 april 1966.

b. de fabriek op de hierboven genoemde tijdstippen ook het duurdere benesol mag leveren, maar dan tegen de voor abaraat vastgestelde prijs.

Benesol is altijd in voorraad, maar abaraat zal speciaal voor de cliënt moeten worden gefabriceerd. Het produktieniveau van abaraat kan alleen aan het begin van iedere maand worden veranderd. Elke verandering van het produktieniveau brengt kosten met zich mee. Wordt het produktieniveau omgeschakeld van P' naar P", dan worden de bijbehorende kosten gegeven door

$$\alpha_1 . (P' - P'')^2 \tag{2.4}$$

Op de afleveringstijdstippen kunnen zich nu de volgende situaties voordoen:

a) de vraag naar abaraat is groter dan de aanwezige hoeveelheid. Dit betekent, dat het verschil V tussen de aanwezige en de gevraagde hoeveelheid abaraat negatief is. Als gevolg hiervan moet er dus benesol bijgeleverd worden.

b) de vraag naar abaraat is kleiner dan de aanwezige hoeveelheid. Het verschil V tussen de aanwezige en de gevraagde hoeveelheid abaraat zal positief zijn. Er blijft dus abaraat over.

Als de vraag en de produktie niet aan elkaar gelijk zijn, dan zullen er extra kosten gemaakt worden. In situatie a) worden deze extra kosten veroorzaakt door de aflevering van het duurdere benesol, terwijl in situatie b) door de beperkte houdbaarheid van abaraat het restant moet worden vernietigd.

Aangenomen wordt nu dat de kosten in beide situaties kunnen worden weergegeven door één kostenfunctie:

$$\alpha_2 V^2 \quad . \qquad (2.5)$$

Als V negatief is dan geeft $\alpha_2 V^2$ de extra kosten aan in situatie a) en als V positief is dan geeft $\alpha_2 V^2$ de kostprijs aan van het te vernietigen overschot.

Gevraagd een produktieprogramma op te stellen, waarvoor de extra kosten minimaal zijn.

<u>Oplossing</u>

Het systeem in dit beslissingsprobleem is de produktie van abaraat.

De toestand s_i van het syteem wordt gegeven door:

a) het beslissingstijdstip i (voor i=1 is dit 1 januari 1966),

b) het produktieniveau P_{i-1} van de vorige maand,

c) de vraag D_i naar abaraat op het tijdstip (i+1).

Zoals wij reeds hebben vastgesteld, beginnen wij onze berekeningen met het beschouwen van het laatste beslissingstijdstip. Op het laatste beslissingstijdstip (i=3) wordt de toestand van het systeem gegeven door:

a) i = 3,

b) het productieniveau P_2 in februari 1966,

c) de vraag D_3 op 1 april 1966.

Gevraagd wordt het produktieniveau P_3 te bepalen voor maart.

De kosten van een produktie omschakeling van $P_2 \rightarrow P_3$ wordt gegeven door:

$$\alpha_1(P_3-P_2)^2 \ . \qquad (2.6)$$

De restantvoorraad op 1 april wordt gegeven door P_3-D_3 als $P_3 \geq D_3$, als $P_3 \leq D_3$ dan is er een tekort van D_3-P_3. Dit tekort is dan gelijk aan de hoeveelheid te leveren benesol.
In de laatste stap worden dus de volgende kosten gemaakt:

$$h_3^{(3)}(s_3,x_3) = \alpha_1(P_3-P_2)^2 + \alpha_2(P_3-D_3)^2 \ . \qquad (2.7)$$

De produktie P_3 moet nu zodanig worden gekozen dat (2.7) minimaal is. In plaats van (2.7) mogen wij ook schrijven:

$$\alpha_1\{P_3^2+P_2^2-2P_2P_3\} + \alpha_2\{P_3^2+D_3^2-2P_3D_3\} =$$

$$= (\alpha_1+\alpha_2)P_3^2 - P_3\{2\alpha_1P_2+2\alpha_2D_3\} + \alpha_1P_2^2 + \alpha_2D_3^2 =$$

$$= (\alpha_1+\alpha_2)\left\{P_3 - \frac{\alpha_1P_2+\alpha_2D_3}{\alpha_1+\alpha_2}\right\}^2 + \alpha_1P_2^2 + \alpha_2D_3^2 - (\alpha_1+\alpha_2).\frac{(\alpha_1P_2+\alpha_2D_3)^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} =$$

$$= (\alpha_1+\alpha_2)\left\{P_3 - \frac{\alpha_1P_2+\alpha_2D_3}{\alpha_1+\alpha_2}\right\}^2 + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}(P_2-D_3)^2 \ . \qquad (2.8)$$

Uit (2.8) volgt dat het optimale produktieniveau P_3 gegeven wordt door:

$$P_3 = \frac{\alpha_1P_2+\alpha_2D_3}{\alpha_1+\alpha_2} \ . \qquad (2.9)$$

De extra kosten in de laatste stap bedragen dan:

$$\frac{\alpha_1.\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}(P_2-D_3)^2 = \min_{x_3} \ h_3^{(3)}(s_3,x_3) = h_3^{(3)}(s_3) \qquad (2.10)$$

Vestigen wij nu onze aandacht op het beslissingstijdstip i=2.
De kosten te maken in de maand februari worden gegeven door:

$$h_2^{(3)}(s_2,x_2) = \alpha_1(P_2-P_1)^2 + \alpha_2(P_2-D_2)^2 \qquad (2.11)$$

De kosten te maken in de maand maart worden gegeven door (2.10).
In andere woorden, de totale kosten te maken in februari en maart worden gegeven door:

$$^{*}h_2^{(3)}(s_2,x_2) = h_2^{(2)}(s_2,x_2) = \alpha_1(P_2-P_1)^2 + \alpha_2(P_2-D_2)^2 + \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}(P_2-D_3)^2.$$

(2.12)

Stellen we $\alpha_1=2$ en $\alpha_2=3$, dan gaat (2.12) over in:

$$2(P_2-P_1)^2 + 3(P_2-D_2)^2 + 1,2(P_2-D_3)^2 =$$

$$= 6,2P_2^2 - 2(2P_1+3D_2+1,2D_3)P_2 + (2P_1^2+3D_2^2+1,2D_3^2) =$$

$$= 6,2\left\{P_2 - \frac{2P_1+3D_2+1,2D_3}{6,2}\right\}^2 + (2P_1^2+3D_2^2+1,2D_3^2) - \frac{(2P_1+3D_2+1,2D_3)^2}{6,2} =$$

$$= 6,2\left\{P_2 - \frac{2P_1+3D_2+1,2D_3}{6,2}\right\}^2 + \frac{4,2P_1^2+4,8D_2^2+3D_3^2-6P_1D_2-2,4P_1D_3-3,6D_2D_3}{3,1}.$$

(2.13)

De vorm (2.13) is minimaal voor

$$P_2 = \frac{2P_1+3D_2+1,2D_3}{6,2} \qquad (2.14)$$

en de minimale waarde bedraagt:

$$h_2^{(2)}(s_2) = \frac{4,2P_1^2+4,8D_2^2+3D_3^2-6P_1D_2-2,4P_1D_3-3,6D_2D_3}{3,1}. \qquad (2.15)$$

Tenslotte berekenen wij het optimale produktieniveau P_1 voor de maand januari.

De kosten voor januari bedragen:

$$h_1^{(2)}(s_1,x_1) = \alpha_1(P_1-P_0)^2 + \alpha_2(P_1-D_1)^2 = \alpha_1 P_1^2 + \alpha_2(P_1-D_1)^2 \qquad (2.16)$$

want $P_0 = 0$.

De totale kosten voor de maanden januari, februari en maart bedragen:

$$h_1^{(1)}(s_1,x_1) = {}^{*}h_1^{(2)}(s_1,x_1) = h_1^{(2)}(s_1,x_1) + h_2^{(2)}(s_2) =$$

$$= 2P_1^2 + 3(P_1-D_1)^2 + \frac{4{,}2P_1^2+4{,}8D_2^2+3D_3^3-6P_1D_2-2{,}4P_1D_3-3{,}6D_2D_3}{3{,}1} =$$

$$= 6{,}355P_1^2 - (6D_1+1{,}935D_2+0{,}774D_3)P_1 + 3D_1^2 + 1{,}548D_2^2 + 0{,}968D_3^2 + - 1{,}61D_2D_3 =$$

$$= 6{,}355\left\{P_1 - \frac{6D_1+1{,}935D_2+0{,}774D_3}{2 \cdot 6{,}355}\right\}^2 + 1{,}584D_1^2 + 1{,}401D_2^2 + 0{,}944D_3^2 + - 0{,}913D_1D_2 - 0{,}365D_1D_3 - 1{,}279D_2D_3 \, .$$

$$(2.17)$$

De vorm (2.17) is minimaal voor:

$$P_1 = \frac{6D_1+1{,}935D_2+0{,}774D_3}{2 \cdot 6{,}355} = 0{,}472D_1 + 0{,}152D_2 + 0{,}061D_3 \, . \qquad (2.18)$$

Met behulp van (2.14) vinden we voor de optimale waarde van P_2:

$$P_2 = 0{,}152D_1 + 0{,}533D_2 + 0{,}213D_3 \, . \qquad (2.19)$$

De optimale waarde van P_3 vinden we nu met behulp van (2.9):

$$P_3 = 0{,}061D_1 + 0{,}213D_2 + 0{,}685D_3 \; . \qquad (2.20)$$

De optimaal te verkrijgen winst is volgens (2.17) gelijk aan:

$$1{,}584D_1^2 + 1{,}401D_2^2 + 0{,}944D_3^2 - 0{,}914D_1D_2 - 0{,}365D_1D_3 - 1{,}279D_2D_3 \; .$$

Wij hebben zojuist het bovenstaande produktieprobleem opgelost als zijnde een meer-stapsbeslissingsprobleem; maar omdat het probleem deterministisch van aard is, kunnen we het ook opvatten als een één-stapsbeslissingsprobleem en als zodanig oplossen.

2^e oplossing

Wij stellen de produktieniveaus in de maanden januari, februari en maart resp. x_1, x_2 en x_3 en bepalen de optimale beslissingsvector (x_1^*, x_2^*, x_3^*).
De totale kosten bedragen

$$\alpha_1(x_1-0)^2 + \alpha_2(x_1-D_1)^2 + \alpha_1(x_1-x_2)^2 + \alpha_2(x_2-D_2)^2 + \alpha_1(x_2-x_3)^2 + \alpha_2(x_3-D_3)^2 \qquad (2.21)$$

als we de beslissing $x = (x_1, x_2, x_3)$ nemen.
In (2.21) staat een kwadratische functie $f(x_1, x_2, x_3)$ van de drie variabelen x_1, x_2 en x_3; met behulp van de differentiaalrekening kan worden aangetoond dat deze functie slechts één uiterste waarde heeft en wel een minimum.
We vinden dit minimum door de partiële afgeleiden

$$f'_{x_1}(x_1, x_2, x_3), \quad f'_{x_2}(x_1, x_2, x_3) \quad \text{en} \quad f'_{x_3}(x_1, x_2, x_3)$$

alle gelijk aan nul te stellen.
Dit leidt tot de volgende betrekkingen

$$\begin{aligned} f'_{x_1} &= 2\alpha_1 x_1 + 2\alpha_2(x_1-D_1) + 2\alpha_1(x_1-x_2) = 0 \\ f'_{x_2} &= -2\alpha_1(x_1-x_2) + 2\alpha_2(x_2-D_2) + 2\alpha_1(x_1-x_2) = 0 \\ f'_{x_3} &= -2\alpha_1(x_2-x_3) + 2\alpha_2(x_3-D_3) = 0 \; . \end{aligned} \qquad (2.22)$$

Dit stelsel vergelijkingen laat zich op zeer eenvoudige wijze omvormen tot

$$\begin{aligned} (2\alpha_1+\alpha_2)x_1 \quad - \alpha_1 x_2 \qquad\qquad &= \alpha_2 D_1 \\ - \alpha_1 x_1 + (2\alpha_1+\alpha_2)x_2 - \alpha_1 x_3 &= \alpha_2 D_2 \\ - \alpha_1 x_2 + (\alpha_1+\alpha_2)x_3 &= \alpha_2 D_3 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Nemen we, evenals in het voorgaande, aan dat α_1 en α_2 resp. de waarden 2 en 3 hebben, dan gaat (2.23) over in

$$\begin{aligned} 7x_1 - 2x_2 \qquad &= 3D_1 \\ - 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= 3D_2 \\ - 2x_2 + 5x_3 &= 3D_3 \end{aligned} \tag{2.24}$$

en de oplossing hiervan luidt

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{93D_1 + 30D_2 + 12D_3}{197} \\ x_2^* &= \frac{30D_1 + 105D_2 + 42D_3}{197} \\ x_3^* &= \frac{12D_1 + 42D_2 + 135D_3}{197} \end{aligned} \tag{2.25}$$

waarmee we de optimale waarden van P_1, P_2 en P_3 gevonden hebben. Substitueren we deze waarden in (2.21), dan vinden we voor de minimale kosten

$$\frac{61464}{38809} D_1^2 + \frac{54372}{38809} D_2^2 + \frac{36645}{38809} D_3^2 - \frac{35460}{38809} D_1D_2 - \frac{14184}{38809} D_1D_3 - \frac{49644}{38809} D_2D_3.$$

Deze oplossing is dezelfde als de vorige, zoals de lezer desgewenst zelf kan nagaan.

De totale produktie bedraagt dus

$$x_1^{**} + x_2^{**} + x_3^{**} = \frac{135D_1 + 177D_2 + 189D_3}{197} < D_1+D_2+D_3 ,$$

waaruit volgt dat de totale produktie kleiner is dan de totale vraag.

Tellen we de vergelijkingen in (2.23) op dan vinden we

$$(\alpha_1+\alpha_2)x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2 x_3 = \alpha_2(D_1+D_2+D_3) . \tag{2.26}$$

De oplossing $(x_1^{**},x_2^{**},x_3^{**})$ van het stelsel (2.23) moet ook voldoen aan (2.26); substitutie van deze oplossing in (2.26) levert

$$x_1^{**} + x_2^{**} + x_3^{**} = D_1 + D_2 + D_3 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1^{**} \tag{2.27}$$

waaruit volgt dat ook in het algemene geval de totale produktie nooit groter is dan de totale vraag.

2.2 Het stochastische N-stapsbeslissingsprobleem

Ook in het stochastische N-stapsbeslissingsprobleem begint men niet met de bepaling van de eerste optimale beslissing, maar met de laatste. Dit houdt in dat eerst een stochastisch één-stapsbeslissingsprobleem wordt opgelost.

Indien wij de verwachting van de directe opbrengst van de j^{de} beslissing aangeven met $h_j^{(N)}(s_j,x_j)$ dan zal men in de laatste stap trachten de functie $h_N^{(N)}(s_N,x_N)$ te maximaliseren naar x_N. Hiervoor dient men de toestand s_N van het systeem te kennen. Aangezien men deze toestand niet kent, lost men het één-stapsbeslissingsprobleem op voor alle mogelijke toestanden.

De maximaal te verkrijgen opbrengst

$$h_N^{(N)}(s_N) = \max_{x_N \in X(s_n)} h_N^{(N)}(s_N,x_N) \tag{2.28}$$

is dus een functie van de toestand s_N op het laatste beslissingstijdstip.

In §1 hebben wij vastgesteld, dat in een stochastisch beslissingsprobleem de kansverdeling van de toestand s_j op het j^{de} beslissingstijdstip volledig wordt bepaald door de toestand s_{j-1} en de beslissing x_{j-1}.

De opbrengst $h_N^{(N)}(s_N)$ is dus, gezien vanuit het $(N-1)^{ste}$ beslissingstijdstip, stochastisch. Indien wij dus op het $(N-1)^{ste}$ beslissingstijdstip rekening willen houden met de laatste beslissing, dan zullen wij de verwachting van de optimale opbrengst in de laatste stap in onze beschouwingen moeten betrekken.

Deze verwachting, $\mathcal{E} h_N^{(N)}(s_N)$ *) kan nu wél worden opgevat als een functie van de toestand s_{N-1} en de beslissing x_{N-1}; deze functie zullen wij aangeven met ${}'h_N^{(N)}(s_{N-1}, x_{N-1})$.

Als we de opbrengsten van de beide laatste stappen samenvoegen en aangeven met ${}^{*}h_{N-1}^{(N)}(s_{N-1}, x_{N-1})$, dan geldt:

$$ {}^{*}h_{N-1}^{(N)}(s_{N-1}, x_{N-1}) = h_{N-1}^{(N)}(s_{N-1}, x_{N-1}) + {}'h_{N-1}^{(N)}(s_{N-1}, x_{N-1}) \qquad (2.29) $$

Na deze bewerkingen houden wij een $(N-1)$-stapsbeslissingsprobleem over met de opbrengstfuncties

$$ h_j^{(N-1)}(s_j, x_j) = h_j^{(N)}(s_j, x_j) \quad \text{voor } j = 1, 2, \ldots, N-2 \quad \text{en} $$

$$ h_j^{(N-1)}(s_j, x_j) = {}^{*}h_{N-1}^{(N)}(s_j, x_j) \quad \text{voor } j = N-1. $$

Zo doorgaande wordt het oorspronkelijke N-stapsbeslissingsprobleem herleid tot een één-stapsbeslissingsprobleem (vergelijk §2).

---

*) Deze verwachting dient berekend te worden onder de voorwaarde dat op het $(N-1)^{ste}$ beslissingstijdstip het systeem in de toestand s_{N-1} verkeerde en x_{N-1} de $(N-1)^{ste}$ beslissing was.

Een verkoopprobleem

Een reisbureau heeft voor een periode van 6 jaar een hotel gepacht in een wintersportcentrum. Met een kolenhandelaar daar ter plaatse is een contract afgesloten, waarin wordt bepaald dat de kolenhandelaar elk jaar een vaste hoeveelheid brandstof zal leveren tegen betaling van een vast bedrag B per jaar.

Verder is overeengekomen dat het reisbureau, in geval van ontevredenheid over de leveranties, aan het eind van elk jaar het contract éénzijdig mag opzeggen.

De kolenhandelaar verkoopt drie soorten kolen:

(1) superkolen
(2) kwaliteitskolen
(3) huishoudkolen.

Levert de kolenhandelaar gedurende een jaar de kolensoort (i), dan bedraagt zijn winst a_i $(i=1,2,3)$.

De kans op opzegging van het contract na levering van de kolensoort (i) duiden we aan met p_i en deze kans zal onafhankelijk zijn van het jaar van levering.

De kolenhandelaar, een harde zakenman, vraagt zich nu af welke kolensoorten hij in de opeenvolgende jaren bij het hotel zal afleveren.

Omschrijving van het mathematisch model

In dit geval zullen wij onder het systeem verstaan de kolenleverantie (of het contract).

De toestand van het systeem heeft twee componenten. De eerste component geeft het beslissingstijdstip aan. De tweede component vertelt ons of het contract nog van toepassing is. Als het contract op het j^{de} beslissingstijdstip is opgezegd, dan zullen we dit uitdrukken door te zeggen dat het systeem zich op dat moment in de toestand $(j,0)$ bevindt; als het contract niet is opgezegd, dan zullen we zeggen dat het systeem zich in de toestand $(j,1)$ bevindt.

De toestandsruimte bestaat hier dus uit slechts $6 \times 2 = 12$ punten, in een 2-dimensionale Cartesische ruimte.

De kolenhandelaar moet achtereenvolgens 6 maal een beslissing nemen en daarmee staat hij voor een 6-stapsbeslissingsprobleem.

De beslissingsruimte D zal per definitie bestaan uit de vier punten 0, 1, 2 en 3. De beslissing $x = 0$ komt overeen met het leveren van geen enkele kolensoort; deze beslissing wordt om vanzelfsprekende redenen dan en slechts dan genomen als het contract is opgezegd (d.w.z. als $s_j = (j,0)$). De beslissing $x = i$ ($i = 1,2,3$) houdt in dat gedurende het betreffende jaar de kolensoort (i) geleverd zal worden. De laatst genoemde beslissingen kunnen dus alleen genomen worden als $s = (j,1)$.

Het bovenstaande kan worden weergegeven in het volgende schema:

Toestand s	Toegelaten beslissingen $x \in X(s)$
(j,0)	0
(j,1)	1,2,3

Oplossing

Als de kolenhandelaar in het zesde jaar mag leveren (dus als $s_6 = (6,1)$) dan zal de zesde beslissing x_6^* zodanig gekozen moeten worden dat

$$h_6^{(6)}((6,1),x_6) \tag{2.30}$$

maximaal is voor $x_6 = x_6^*$.

Onderstaande tabel geeft een overzicht van de waarden die $h_6^{(6)}((6,1),x_6)$ kan aannemen voor alle mogelijke waarden van x_6.

x_6	$h_6^{(6)}((6,1),x_6)$
1	a_1
2	a_2
3	a_3

(2.31)

Voor de optimale beslissing x_6^{*} geldt dus:

$$h_6^{(6)}((6,1)) = h_6^{(6)}((6,1),x_6^{*}) = \max_i \left[a_i\right] , \qquad (2.32)$$

wat wil zeggen dat de kolenhandelaar in het laatste jaar (als hij mag leveren) die kolensoort zal leveren waarop hij de grootste winst maakt.

Als de kolenhandelaar in het zesde jaar niet mag leveren (dus als $s_6 = (6,0)$) dan zal hij zonder enige twijfel de beslissing $x_6 = 0$ nemen. De zelfde redenering geldt voor alle beslissingstijdstippen waarop geldt $s_j = (j,0)$. Voor zo'n tijdstip geldt dan dat de verwachting van de nog te maken winst gelijk is aan nul, want als het contract eenmaal is opgezegd worden er geen kolen meer geleverd voor het resterende deel van de 6 jaar.

Als de kolenhandelaar in het vijfde jaar mag leveren dan zal hij de vijfde beslissing x_5^{*} zodanig moeten kiezen dat

$$h_5^{(5)}((5,1),x_5) = {}^{*}h_5^{(6)}((5,1),x_5) = h_5^{(6)}((5,1),x_5) + {}'h_5^{(6)}((5,1),x_5) \qquad (2.33)$$

maximaal is voor $x_5 = x_5^{*}$.

In onderstaande tabel geven we de waarden aan van de in (2.33) voorkomende functies, voor alle mogelijke waarden van x_5.

x_5	$h_5^{(6)}((5,1),x_5)$	${}'h_5^{(6)}((5,1),x_5)$
1	a_1	$(1-p_1).h_6^{(6)}((6,1))$
2	a_2	$(1-p_2).h_6^{(6)}((6,1))$
3	a_3	$(1-p_3).h_6^{(6)}((6,1))$

Voor x_5^{*} moet dus gelden:

$$h_5^{(5)}((5,1),x_5^{*}) = \max_i \left[a_i + (1-p_i).h_6^{(6)}((6,1))\right] \qquad (2.34)$$

en uit deze betrekking kan x_5^* worden opgelost zodra de numerieke waarden van a_i en p_i $(i=1,2,3)$ bekend zijn.

Als de kolenhandelaar in het vierde jaar mag leveren dan moet de vierde beslissing x_4^* zodanig gekozen worden dat

$$h_4^{(4)}((4,1),x_4) = {}^*h_4^{(5)}((4,1),x_4) = h_4^{(5)}((4,1),x_4) + {}'h_4^{(5)}((4,1),x_4) \tag{2.35}$$

maximaal is voor $x_4 = x_4^*$.

Onderstaande tabel geeft een overzicht van de waarden die de functies in (2.35) kunnen aannemen.

x_4	$h_4^{(5)}((4,1),x_4)$	${}'h_5^{(6)}((5,1),x_5)$
1	a_1	$(1-p_1).h_5^{(5)}((5,1))$
2	a_2	$(1-p_2).h_5^{(5)}((5,1))$
3	a_3	$(1-p_3).h_5^{(5)}((5,1))$

De beslissing x_4^* moet dus voldoen aan:

$$h_4^{(4)}((4,1),x_4^*) = \max_i \left[a_i + (1-p_i).h_5^{(5)}((5,1))\right] \tag{2.36}$$

en uit deze betrekking kunnen we x_4^* oplossen.

Zo doorgaande vinden we dat de optimale beslissingen x_j^* $(j=1,2,3,4,5)$ moeten voldoen aan

$$h_j^{(j)}((j,1),x_j^*) = \max_i \left[a_i + (1-p_i).h_{j+1}^{(j+1)}((j+1),1)\right] \tag{2.37}$$

Van bovenstaand resultaat zullen wij nu een toepassing beschouwen.

Stel dat

$$\begin{array}{llll} a_1 = 435 & & p_1 = 0{,}2 & \\ a_2 = 790 & & p_2 = 0{,}4 & \quad (2.38) \\ a_3 = 1050 & & p_3 = 0{,}6 & \end{array}$$

Uit (2.38) en (2.32) volgt $x_6^* = 3$ en $h_6^{(6)}((6,1)) = 1050$. Toepassing van (2.34) levert $x_5^* = 3$ en $h_5^{(5)}((5,1)) = 1470$, want

$$\begin{aligned} a_1 + (1-p_1).h_6^{(6)}((6,1)) &= 435 + 0{,}8.1050 = 1275 \\ a_2 + (1-p_2).h_6^{(6)}((6,1)) &= 790 + 0{,}6.1050 = 1420 \\ a_3 + (1-p_3).h_6^{(6)}((6,1)) &= 1050 + 0{,}4.1050 = 1470 \;. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Toepassing van (2.36) levert $x_4^* = 2$ en $h_4^{(4)}((4,1)) = 1672$, want

$$\begin{aligned} a_1 + (1-p_1).h_5^{(5)}((5,1)) &= 435 + 0{,}8.1470 = 1611 \\ a_2 + (1-p_2).h_5^{(5)}((5,1)) &= 790 + 0{,}6.1470 = 1672 \\ a_3 + (1-p_3).h_5^{(5)}((5,1)) &= 1050 + 0{,}4.1470 = 1638 \;. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Verder vinden we: $x_3^* = 2$ en $h_3^{(3)}((3,1)) = 1793{,}20$, want

$$\begin{aligned} a_1 + (1-p_1).h_4^{(4)}((4,1)) &= 435 + 0{,}8.1672 = 1772{,}60 \\ a_2 + (1-p_2).h_4^{(4)}((4,1)) &= 790 + 0{,}6.1672 = 1793{,}20 \\ a_3 + (1-p_3).h_4^{(4)}((4,1)) &= 1050 + 0{,}4.1672 = 1718{,}80 \end{aligned} \tag{2.41}$$

en $x_2^* = 1$ en $h_2^{(2)}((2,1)) = 1869{,}56$, want

$$\begin{aligned} a_1 + (1-p_1).h_3^{(3)}((3,1)) &= 435 + 0{,}8.1793{,}20 = 1869{,}56 \\ a_2 + (1-p_2).h_3^{(3)}((3,1)) &= 790 + 0{,}6.1793{,}20 = 1865{,}92 \\ a_3 + (1-p_3).h_3^{(3)}((3,1)) &= 1050 + 0{,}4.1793{,}20 = 1767{,}38 \;. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Tenslotte vinden we $x_1^* = 1$ en $h_1^{(1)}((1,1)) = 1930{,}65$, want

$$\begin{aligned} a_1 + (1-p_1).h_2^{(2)}((2,1)) &= 435 + 0{,}8.1869{,}56 = 1930{,}65 \\ a_2 + (1-p_2).h_2^{(2)}((2,1)) &= 790 + 0{,}6.1869{,}56 = 1911{,}74 \qquad (2.43) \\ a_3 + (1-p_3).h_2^{(2)}((2,1)) &= 1050 + 0{,}4.1869{,}56 = 1797{,}82 \ . \end{aligned}$$

Samenvattende hebben we de oplossing weergegeven in onderstaande tabel.

Beslissingstijdstip j	Optimale beslissing x_j	Kolensoort die wordt afgeleverd in het j-de jaar
1	1	superkolen
2	1	superkolen
3	2	kwaliteitskolen
4	2	kwaliteitskolen
5	3	huishoudkolen
6	3	huishoudkolen

De optimale winstverwachting bedraagt 1930,65.

3. Het ∞-stapsbeslissingsprobleem

In de vorige paragrafen hebben wij ons beperkt tot beslissingsproblemen, waarbij slechts een eindig aantal beslissingen genomen behoefden te worden.

In deze paragraaf zullen wij ons bezighouden met situaties waarin het aantal te nemen beslissingen onbegrensd is; het zal zonder meer duidelijk zijn, dat de oplossing van deze problemen niet verkregen kan worden door (zoals we in de vorige paragraaf hebben gedaan) eerst de "laatste" beslissing optimaal te kiezen.

3.1 Het deterministische ∞-stapsbeslissingsprobleem

In dit geval blijkt uit de probleemstelling, dat de toestand op het eerstvolgende beslissingstijdstip volledig bepaald wordt door de toestand op het huidige moment van beslissen en de op dit tijdstip genomen beslissing.

Verkeert het systeem op het j^{de} beslissingstijdstip in de toestand s_j en is de bijbehorende beslissing x_j, dan kan de toestand van het systeem op het $(j+1)^{ste}$ beslissingstijdstip dus worden opgevat als een eenduidige functie

$$s_{j+1} = s_{j+1}(s_j, x_j)$$

van s_j en x_j.

Veronderstelling

In deze paragraaf zullen wij aannemen dat de relatie tussen s_{j+1} enerzijds en s_j en x_j anderzijds voor iedere waarde van j dezelfde is, m.a.w.

$$s_{j+1} = s(s_j, x_j) \ . \tag{3.1}$$

Verder gaan wij uit van de veronderstelling dat wij voor ieder tijdstip dezelfde opbrengstfunctie $h_j(s_j, x_j)$ hebben. M.a.w.

$$h_j(s_j, x_j) = h(s_j, x_j) \ . \tag{3.2}$$

Onafhankelijk hiervan kunnen zich verder o.a. de volgende situaties voordoen:

1. Uit de probleemstelling volgt, dat bij de i^{de} beslissing de volledige opbrengst, te verkrijgen uit de toekomstige beslissingen, in rekening moet worden gebracht.
2. Uit de probleemstelling volgt, dat op het i^{de} beslissingstijdstip slechts rekening wordt gehouden met een fractie van de opbrengsten behorende bij de toekomstige beslissingen, en wel zó dat de directe bijdrage van de j^{de} beslissing ($j \geq i$) tot de totale opbrengst gelijk is aan
$$\alpha^{j-i}.h(s_j,x_j) \; .$$
Hierbij is $0 \leq \alpha < 1$.

Nemen wij nu eerst de eerste n beslissingstijdstippen in ogenschouw zonder ons te bekommeren om de vraag wat er op de volgende tijdstippen nog allemaal kan gebeuren. Op deze wijze hebben we een n-stapsbeslissingsprobleem geschapen, waarvan we met de methoden van de vorige paragraaf de oplossing kunnen bepalen. De maximaal te verkrijgen opbrengst zal een functie $y_n(s_1)$ van de begintoestand s_1 zijn. Verder is gemakkelijk in te zien dat in geval 1, de betrekking

$$\begin{aligned} y_n(s_1) &= \max_{x_1 \in X(s_1)} \left[h(s_1,x_1) + y_{n-1}(s_2)\right] = \\ &= \max_{x_1 \in X(s_1)} \left[h(s_1,x_1) + y_{n-1}(s(s_1,x_1))\right] \end{aligned} \qquad (3.3)$$

zal gelden, waarbij $y_{n-1}(s_2)$ gelijk is aan de maximale opbrengst vanaf het tweede beslissingstijdstip; omdat de toestand s_2 volkomen bepaald wordt door s_1 en x_1 kan $y_{n-1}(s_2)$ ook geschreven worden als een functie
$$y_{n-1}(s(s_1,x_1))$$
van een functie $s(s_1,x_1)$ van s_1 en x_1.

Voor geval 2 luiden deze formules

$$y_n(s_1) = \max_{x_1 \in X(s_1)} \left[h(s_1,x_1) + \alpha . y_{n-1}(s_2)\right] =$$

$$= \max_{x_1 \in X(s_1)} \left[h(s_1,x_1) + \alpha . y_{n-1}(s(s_1,x_1))\right] . \qquad (3.4)$$

Beschouwen wij nu de rij $y_n(s_1)$, dan kan het gebeuren dat deze rij voor elke vaste toestandsvector s_1 naar een getal $y(s_1)$ convergeert als n onbegrensd toeneemt. Bij elke toestandsvector s zullen we dan een limiet y(s) vinden. Als deze convergentie inderdaad optreedt dan mogen we verwachten dat de relaties (3.3) en (3.4) resp. zullen overgaan in

$$y(s_1) = \max_{x_1 \in X(s_1)} \left[h(s_1,x_1) + y(s_2)\right] =$$

$$= \max_{x_1 \in X(s_1)} \left[h(s_1,x_1) + y(s(s_1,x_1))\right] \qquad (3.5)$$

en

$$y(s_1) = \max_{x_1 \in X(s_1)} \left[h(s_1,x_1) + \alpha . y(s_2)\right] =$$

$$= \max_{x_1 \in X(s_1)} \left[h(s_1,x_1) + \alpha . y(s(s_1,x_1))\right] . \qquad (3.6)$$

De oplossing van het definiete ∞-stapsbeslissingsprobleem kan nu bepaald worden zodra de functie y(s) bekend is. Want als y(s) bekend is voor elke waarde van s dan kunnen we door middel van de betrekkingen (3.5) en (3.6) voor elke begintoestand s_1 de bijbehorende optimale beslissing x_1^{**} bepalen. Voor iedere toestand s_1 op het eerste beslissingstijdstip vinden wij een optimale beslissing x_1^{**}, m.a.w. er bestaat een optimaal beslissingsvoorschrift $x_1 = z_0(s_1)$. De <u>strategie</u> is <u>ook</u> optimaal voor de overige beslissingstijdstippen. Bijgevolg:

$$x_j^{**} = z_0(s_j) .$$

3.2 Het stochastische ∞-stapsbeslissingsprobleem *)

Nu blijkt uit de probleemstelling dat de kansverdeling van de toestandsvector behorende bij het eerstvolgende beslissingstijdstip volledig bepaald wordt door de toestand op het huidige moment van beslissen en de hierop genomen beslissing

Verkeert het systeem op het j^{de} beslissingstijdstip in de toestand s_j en is de j^{de} beslissing x_j, dan is de toestand op het $(j+1)^{ste}$ beslissingstijdstip dus een stochastische grootheid $\underline{s}_{j+1}$ waarvan de kansverdeling volkomen bepaald wordt door s_j en x_j.

Veronderstelling

Wij zullen aannemen dat deze kansverdeling niet afhankelijk is van het beslissingstijdstip. Als het systeem dus op bijv. het 5^e en het 9^e beslissingstijdstip dezelfde toestand s aanneemt en we nemen op beide beslissingstijdstippen dezelfde beslissing x, dan zal de kansverdeling van $\underline{s}_6$ dezelfde zijn als die van $\underline{s}_{10}$.

Ook nu zullen wij veronderstellen dat de opbrengstfunctie voor ieder beslissingstijdstip dezelfde is.

Ook bij het stochastische ∞-stapsbeslissingsprobeem onderscheiden we twee gevallen:

1. Uit de probleemstelling volgt, dat bij de i^{de} beslissing de verwachting van de volledige opbrengst, te verkrijgen uit de toekomstige beslissingen, in rekening moet worden gebracht.
2. Uit de probleemstelling volgt, dat op het i^{de} beslissingstijdstip slechts rekening wordt gehouden met een fractie van de opbrengsten**) behorende bij de toekomstige beslissingen, en wel zó dat de directe bijdrage van de j^{de} beslissing ($j \geq i$) tot de totale opbrengst gelijk is aan

---

*) Paragraaf 3.1 kan beschouwd worden als een bijzonder geval van paragraaf 3.2.

**) Als ook deze directe opbrengsten stochastisch zijn, dan nemen we hiervoor hun verwachtingen.

$$\alpha^{j-i} \circ h(s_j, x_j) \; , \tag{3.7}$$

met $0 \leq \alpha < 1$.

Evenals in paragraaf 3.1 beschouwen wij nu eerst weer de eerste n beslissingstijdstippen.

De verwachting van de maximaal te verkrijgen opbrengst in deze n stappen zal ook hier een functie

$$y_n(s_1)$$

zijn van de toestand s_1 op het eerste beslissingstijdstip.

In geval 1 zal voor deze functie de betrekking

$$y_n(s_1) = \max_{x_1 \in X(s_1)} \left[h(s_1, x_1) + \mathcal{E} y_{n-1}(\underline{s}_2) \right]^{*)} \tag{3.8}$$

gelden, en in geval 2

$$y_n(s_1) = \max_{x_1 \in X(s_1)} \left[h(s_1, x_1) + \alpha \circ \mathcal{E} y_{n-1}(\underline{s}_2) \right] \tag{3.9}$$

Ook hier kan zich het geval voordoen dat de rij $y_n(s_1)$ voor elke toestandsvector s_1 convergeert naar een limiet $y(s_1)$. De limietfunctie $y(s)$ die wij op deze wijze vinden zal dan voldoen aan

$$y(s_1) = \max_{x_1 \in X(s_1)} \left[h(s_1, x_1) + \mathcal{E} y(\underline{s}_2) \right] \tag{3.10}$$

of aan

$$y(s_1) = \max_{x_1 \in X(s_1)} \left[h(s_1, x_1) + \alpha \circ \mathcal{E} y(\underline{s}_2) \right] \; , \tag{3.11}$$

---

*) De verwachting $\mathcal{E} y_{n-1}(\underline{s}_2)$ dient te worden berekend onder de voorwaarde dat het systeem op het eerste beslissingstijdstip de toestand s_1 aannam en dat daarop de beslissing x_1 genomen werd. Deze verwachting wordt hierom dan ook vaak genoteerd als een voorwaardelijke verwachting

$$\mathcal{E}\{y_{n-1}(\underline{s}_2) \mid s_1, x_1\} \; .$$

In deze laatste notatie komt duidelijker uit dat deze verwachting een functie is van s_1 en x_1.

(vergelijk de formules (3.8) en (3.9)) voor elke begintoestand s_1.

De oplossing van het stochastische ∞-stapsbeslissingsprobleem kan nu bepaald worden zodra de functie $y(s)$ bekend is. De optimale eerste beslissing x_1^* kan dan nl. bepaald worden met behulp van (3.10) c.q. (3.11). Voor iedere toestand s_1 op het eerste beslissingstijdstip vinden wij een optimale beslissing x_1^*, m.a.w. er bestaat een optimaal beslissingsvoorschrift $x_1 = z_0(s_1)$. Deze strategie is <u>ook</u> optimaal voor de overige beslissingstijdstippen. Bijgevolg:

$$x_j^* = z_0(s_j) \ .$$

3.3 <u>Oplossingsmethoden</u>

<u>Eerste iteratie-methode</u>

Indien de rij van opbrengstfuncties $y_n(s)$ van de bijbehorende n-stapsbeslissingsproblemen voor iedere s naar de opbrengstfunctie $y(s)$ convergeert, dan kan deze functie uiteraard iteratief worden bepaald.

Heeft men deze functie $y(s)$ eenmaal gevonden dan kan men met behulp van één der relaties (3.5), (3.6), (3.10) en (3.11) voor iedere begintoestand s_1 de optimale beslissing x_1^* bepalen, m.a.w. de optimale strategie z_0.

<u>Tweede iteratie-methode</u>

Indien voor iedere strategie z, d.w.z. $x_j = z(s_j)$, op eenvoudige wijze de bijbehorende opbrengstfunctie $y(s;z)$,

$$y(s;z) = h(s;z(s)) + \alpha . y\big(s(s;z(s));z\big) \qquad \text{(det.geval)} \tag{3.12}$$

of

$$y(s;z) = h(s;z(s)) + \alpha . \mathcal{E}\{y(\underline{s}_2;z) \mid s;z(s)\} \ , \qquad \text{(stoch.geval)} \tag{3.13}$$

bepaald kan worden, dan kan men dikwijls ook op een andere iteratieve wijze de functionaalvergelijkingen (3.5), (3.6), (3.10), (3.11) oplossen.

Hiertoe voeren wij in de functie $y(s;(x)z)$, gedefinieerd door hetzij

$$y(s;(x)z) \stackrel{def}{=} h(s;x) + \alpha . y(s(s;x);z) \qquad \text{(det.geval)} \tag{3.14}$$

hetzij

$$y(s;(x)z) \stackrel{def}{=} h(s;x) + \alpha . \mathcal{E}\{y(\underline{s}_2;z) \mid s;x\} . \qquad \text{(stoch.geval)} \tag{3.15}$$

Men kiest nu een willekeurige strategie $z^{(0)}$ en bepaalt daarna met behulp van hetzij (3.12) hetzij (3.13) de functie $y(s;z^{(0)})$. Door hetzij (3.14) hetzij (3.15) is de functie $y(s;(x)z^{(0)})$ te bepalen.

Wij kunnen nu voor iedere toestand s_1 die beslissing $x_1 \in X(s_1)$ trachten te bepalen waarvoor $y(s_1;(x_1)z^{(0)})$ maximaal is. Bijgevolg vinden wij voor iedere toestand s_1 een beslissing x_1, m.a.w. een strategie $z^{(1)}$. Wij herhalen nu deze procedure met $z^{(1)}$ in plaats van $z^{(0)}$, etc. Op deze wijze wordt een rij van opbrengstfuncties $\{y(s;z^{(n)});n=0,1,...\}$ verkregen, die veelal convergeert naar de "optimale" opbrengstfunctie $y(s)$.

Uit (3.14), (3.15) en (3.11) volgt dat voor de optimale strategie z_0 geldt:

$$y(s;z_0) = \max_{x \in X(s)} y(s;(x)z_0) \tag{3.16}$$

<u>Een voorbeeld van een ∞-stapsbeslissingsprobleem</u>

In dit voorbeeld willen wij nog eens het verkoopprobleem uit paragraaf 2 beschouwen, met dit verschil, dat het contract niet voor 6 jaar zal gelden maar voor onbeperkte tijd; hiermee hebben wij het 6-stapsbeslissingsprobleem omgevormd tot een ∞-stapsbeslissingsprobleem.

Het is nu niet meer zinvol om in de toestand van het systeem ook het beslissingstijdstip te verwerken. Bijgevolg kan de toestand worden beschreven door één beslissingsvariabele die slechts de waarden 0 en 1 aanneemt. Uit s = 0 volgt: contract opgezegd en uit s = 1 volgt: contract geldig.

Het proces van de kolenleverantie begint in de toestand 1; de bijbehorende optimale winstverwachting stellen we y(1). Zou het proces in de toestand 0 zijn begonnen, dan zou de (eveneens optimale) winstverwachting y(0) zijn geweest. Het gestelde probleem is nu op bijzonder eenvoudige wijze op te lossen met behulp van formule (3.10).

Het zal zonder meer duidelijk zijn dat y(0) gelijk is aan nul, zodat we alleen nog maar de waarde van y(1) behoeven te bepalen met de optimale beslissing in de toestand 1. Volgens (3.10) moet y(1) voldoen aan

$$y(1) = \max_i \{a_i + p_i y(0) + (1-p_i)y(1)\} = \\ = \max_i \{a_i + (1-p_i)y(1)\} . \qquad (3.17)$$

Uit (3.17) volgt gemakkelijk:

$$0 = \max_i \{a_i - p_i y(1)\} . \qquad (3.18)$$

Als i^* de optimale beslissing is in de toestand 1, dan moet i^* voldoen aan de betrekking

$$a_{i^*} - p_{i^*} y(1) = 0 , \qquad (3.19)$$

waaruit voor y(1) volgt:

$$y(1) = \frac{a_{i^*}}{p_{i^*}} . \qquad (3.20)$$

Uit (3.18) volgt:

$$\frac{a_i}{p_i} \leq y(1) . \qquad (3.21)$$

Het is nu gemakkelijk in te zien dat y(1) moet voldoen aan

$$y(1) = \max_i \frac{a_i}{p_i} \quad . \tag{3.22}$$

Nu is

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{p_1} &= \frac{435}{0,2} = 2175 \\ \frac{a_2}{p_2} &= \frac{790}{0,4} = 1975 \\ \frac{a_3}{p_3} &= \frac{1050}{0,6} = 1750 \end{aligned} \tag{3.23}$$

waaruit volgt dat $i^* = 1$ en $y(1) = 2175$.

De optimale strategie is dus: "Altijd superkolen leveren".

Aangezien er maar 3 strategieën zijn, te weten z_1, z_2 en z_3, gegeven door

$$\left.\begin{aligned} z_i(0) &= 0 \\ z_i(1) &= i \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2,3) \quad , \tag{3.24}$$

had men ook voor iedere strategie de opbrengstfunctie y(s;z) kunnen bepalen.

Deze functies worden gegeven door (vgl. (3.15) met $\alpha = 1$)

$$\left.\begin{aligned} y(0;z_i) &= 0 \\ y(1;z_i) &= a_i + (1-p_i)y(1;z_i) \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2,3) \quad . \tag{3.25}$$

Uit (3.25) volgt:

$$y(1;z_i) = \frac{a_i}{p_i} \qquad (i=1,2,3) \quad . \tag{3.26}$$

Bijgevolg is z_1 optimaal (vgl. (3.23)).

Beschouwen wij tenslotte de tweede iteratie-methode (zie blz. 133). Stel dat wij de iteratie-procedure beginnen met $z^{(0)} = z_3$.
Uit (3.25) en (3.26) volgt dan

$$\begin{aligned} y(0;z_3) &= 0 \\ y(1;z_3) &= \frac{a_3}{p_3} = 1750\ . \end{aligned} \qquad (3.27)$$

De functie $y(s;(x)z_3)$ wordt nu gegeven door

$$y(0;(i)z_3) = 0 \qquad (i=0,1,2,3) \qquad (3.28)$$

$$y(1;(i)z_3) = a_i + (1-p_i)\frac{a_3}{p_3} \qquad (i=1,2,3) \qquad (3.29)$$

en bijgevolg

$$\begin{aligned} y(1;(1)z_3) &= 435 + 0{,}8.1750 = 1835 \\ y(1;(2)z_3) &= 790 + 0{,}6.1750 = 1840 \\ y(1;(3)z_3) &= y(1;z_3) = 1750\ . \end{aligned} \qquad (3.30)$$

De optimale eerste beslissing in toestand 0 is $x = 0$ en in toestand 1 $x = 2$. Deze beslissingen worden voorgeschreven door z_2.
In de eerste herhaling kiezen wij dus $z^{(1)} = z_2$.
De functie $y(s;z_2)$ wordt gegeven door (zie (3.25))

$$\begin{aligned} y(0;z_2) &= 0 \\ y(1;z_2) &= \frac{a_2}{p_2} = 1975\ . \end{aligned} \qquad (3.31)$$

Voor de functie $y(s;(x)z_2)$ vinden wij

$$y(0;(i)z_2) = 0 \qquad (i=0,1,2,3) \qquad (3.32)$$

$$y(1;(i)z_2) = a_i + (1-p_i)\frac{a_2}{p_2} \qquad (i=1,2,3) \qquad (3.33)$$

en bijgevolg

$$y(1;(1)z_2) = 435 + 0{,}8 \cdot 1975 = 2015$$
$$y(1;(2)z_2) = y(1;z_2) = 1975 \qquad (3.34)$$
$$y(1;(3)z_2) = 1050 + 0{,}4 \cdot 1975 = 1840 \ .$$

De optimale eerste beslissing in toestand 0 is $x = 0$ en in toestand 1 $x = 1$. Deze beslissingen worden voorgeschreven door strategie z_1.
In de tweede herhaling kiezen wij $z^{(2)} = z_1$.
De functie $y(s;z_1)$ wordt gegeven door (vgl. (3.25))

$$y(0;z_1) = 0$$
$$y(1;z_1) = \frac{a_1}{p_1} = 2175 \ . \qquad (3.35)$$

Voor de functie $y(s;(x)z_1)$ vinden wij

$$y(0;(i)z_1) = 0 \qquad (i=0,1,2,3) \qquad (3.36)$$

$$y(1;(i)z_1) = a_i + (1-p_i)\frac{a_1}{p_1} \qquad (i=1,2,3) \qquad (3.37)$$

en bijgevolg

$$y(1;(1)z_1) = y(1;z_1) = 2175$$
$$y(1;(2)z_1) = 790 + 0{,}6 \cdot 2175 = 2095 \qquad (3.38)$$
$$y(1;(3)z_1) = 1050 + 0{,}4 \cdot 2175 = 1920$$

De optimale eerste beslissing in toestand 0 is $x = 0$ en in toestand 1 $x = 1$. Deze beslissingen worden wederom voorgeschreven door de strategie z_1.
Voor de strategie z_1 geldt dus (vgl. (3.16))

$$y(s;z_1) = \max_{x \in X(s)} y(s;(x)z_1) \ . \qquad (3.39)$$

4. Markov programmering

4.1 De kriteriumfunctie

In deze paragraaf zullen wij wederom een stochastisch ∞-staps-beslissingsprobleem beschouwen, waarbij men op van te voren vastgestelde equidistante tijdstippen een beslissing kan nemen.

Evenals in het voorgaande zullen wij hier onder een strategie z een voorschrift verstaan dat op elk beslissingstijdstip voor elke toestand van het systeem aangeeft welke beslissing er moet worden genomen. Indien het systeem slechts een eindig aantal toestanden ($s=1,2,\ldots,N$) kan aannemen en indien wordt beslist volgens een gegeven strategie, dan is het proces, dat de ontwikkelingen in de toestand van het systeem beschrijft (zie hoofdstuk I) in een groot aantal gevallen een zg. Markov keten.

Wij zullen nu het begrip "Markov keten" nader toelichten. Gegeven een systeem dat een eindig aantal toestanden ($s=1,2,\ldots,N$) kan aannemen. Gegeven een rij van tijdstippen ($t=1,2,\ldots$), waarop het systeem wordt aanschouwd. Als het systeem op een willekeurig gekozen tijdstip in de toestand i is, dan wordt de kans dat het op het daarop volgend tijdstip in de toestand j zal zijn, gegeven door het getal p_{ij}. Voor ieder paar toestanden (i,j) beschikken wij over een getal p_{ij}. De volgende tabel van kansen p_{ij} is dus gegeven:

$$
\begin{array}{cc}
\text{van} \diagdown \text{naar} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 \;\ldots\ldots & N \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & & p_{1N} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \cdot \\ \vdots & & & \\ p_{N1} & p_{N2} & & p_{NN} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Tabel 4.I

Tabel van de overgangskansen

Zoals men weet stelt een kans een niet-negatief getal voor kleiner dan of gelijk aan 1. Bijgevolg geldt:

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \qquad (i,j=1,2,\ldots,N) . \tag{4.1}$$

In de kansrekening heeft een gebeurtenis A die met zekerheid zal optreden een kans op realisering gelijk aan 1. Een gebeurtenis die met zekerheid niet zal optreden heeft een kans op realisering gelijk aan 0. Indien op een tijdstip een gebeurtenis A dan en slechts dan optreedt als op dat tijdstip één van de elkander uitsluitende gebeurtenissen A_i $(i=1,2,\ldots,m)$ zich realiseert, dan is de kans op gebeurtenis A gelijk aan de som van de kansen op de gebeurtenissen A_i $(i=1,2,\ldots,m)$.

Aangezien het bovengenoemde systeem op het volgende beschouwde tijdstip altijd één en slechts één toestand aanneemt, geldt derhalve

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1 . \tag{4.2}$$

Als het systeem op een willekeurig gekozen tijdstip in de toestand i is, dan zullen wij de kans dat het op k tijdstippen hierna in de toestand j is aangeven door p_{ij}^{k}. Merk op dat $p_{ij}^{1} = p_{ij}$. Verder stellen wij

$$p_{ij}^{0} \overset{def}{=} \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j . \end{cases} \tag{4.3}$$

Als het systeem op een willekeurig gekozen tijdstip in de toestand i is, dan is de kans dat het systeem op k-1 tijdstippen hierna in de toestand s zal zijn gelijk aan p_{is}^{k-1}.

De kans dat het systeem k tijdstippen na het willekeurig gekozen tijdstip via de toestand s op het $(k-1)^{ste}$ tijdstip in de toestand j terecht komt wordt gegeven door

$$p_{is}^{k-1} p_{sj} . \tag{4.4}$$

Aangezien de gebeurtenis "van i na k tijdstippen in j" zich kan realiseren bij verschillende "tussentoestanden" op het (k-1)^ste^ tijdstip en aangezien de gebeurtenissen "van i naar j via s op het (k-1)^ste^ tijdstip, (s=1,...,N)" elkander weliswaar uitsluiten maar toch steeds tot de eerst genoemde gebeurtenis aanleiding geven, volgt uit (4.4)

$$p_{ij}^{k} = \sum_{s=1}^{N} p_{is}^{k-1} p_{sj} \; . \tag{4.5}$$

<u>Onder zekere onderstellingen</u>, waaraan de wiskundige modellen van praktijk situaties meestal voldoen, kan men bewijzen dat de limiet

$$\lim_{k \to \infty} p_{ij}^{k}$$

bestaat en niet afhangt van de uitgangstoestand i. Wij schrijven nu

$$\lim_{k \to \infty} p_{ij}^{k} = q_j \; . \tag{4.6}$$

Het getal q kan men interpreteren als de kans dat het systeem op een "zeer" verwijderd tijdstip zich in de toestand j zal bevinden. Deze kans hangt in de beschouwde gevallen dus niet af van de uitgangstoestand i. Uit (4.5) en (4.6) volgt:

$$\begin{aligned} q_j = \lim_{k \to \infty} p_{ij}^{k} &= \lim_{k \to \infty} \sum_{s=1}^{N} p_{is}^{k-1} p_{sj} = \\ &= \sum_{s=1}^{N} \left(\lim_{k \to \infty} p_{is}^{k-1} \right) p_{sj} = \sum_{s=1}^{N} q_s p_{sj} \end{aligned} \tag{4.7}$$

en dus

$$q_j = \sum_{s=1}^{N} q_s p_{sj} \; . \tag{4.8}$$

Wij noemen de kansen q_j (j=1,...,N) op grond van (4.8) <u>invariante kansen</u>.

Verder geldt:

$$\sum_{j=1}^{N} q_j = \sum_{j=1}^{N} \lim_{k\to\infty} p_{ij}^{k} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{k} = 1 . \qquad (4.9)$$

Door de relaties (4.8) en (4.9) zijn de invariante kansen q_j $(j=1,\ldots,N)$ ondubbelzinnig vastgelegd.

Men kan vervolgens bewijzen dat eveneens geldt:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} p_{ij}^{k} = q_j \qquad (j=1,\ldots,N) . \qquad (4.10)$$

Ook als de limiet (4.6) niet bestaat, dan bestaat (4.10) wel. Men kan derhalve de kansen q_j beter definiëren door (4.10) dan door (4.6). Ook de relatie (4.8) blijft geldig.

Indien een strategie z wordt toegepast in de te beschouwen beslissingssituaties, dan zullen wij de overgangskansen aangeven met $p_{ij}(z)$.

Stel dat $h(s;z(s))$ wederom de directe opbrengst is als men in de toestand s een beslissing neemt volgens de strategie z.

Als het systeem zich op het eerste beslissingstijdstip in de toestand i bevindt, dan zal bij toepassing van de strategie z, de verwachting van de opbrengst in de eerste m stappen gelijk zijn aan

$$h(i;z(i)) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{1}(z)h(j;z(j)) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{2}(z)h(j;z(j)) + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{m-1}(z)h(j;z(j)) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{k}(z)h(j;z(j)) . \qquad (4.11)$$

Indien men een strategie zoekt waarvoor de opbrengst in de eerste m stappen maximaal is, dan zal men díe strategie moeten bepalen waarvoor (4.11) maximaal is.

Het maximaliseren van (4.11) is gelijkwaardig met het maximaliseren van

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{k}(z)h(j;z(j)) \tag{4.12}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} p_{ij}^{k}(z)\right\} h(j;z(j)) \;. \tag{4.13}$$

Als m onbeperkt toeneemt dan gaat (4.13) over in (vgl. (4.10))

$$\sum_{j=1}^{N} q_j(z)h(j;z(j)) \;. \tag{4.14}$$

Het ligt nu voor de hand dat men als kriterium voor de optimale strategie kiest

$$y(i;z) = \sum_{j=1}^{N} q_j(z)h(j;z(j)) \;. \tag{4.15}$$

Met behulp van (4.15) kunnen nu een aantal strategieën op hun merites worden onderzocht.

Een onderhoudsprobleem

Een handelaar in machines heeft van één type machine drie exemplaren verkocht. Het onderhoud van deze machines geschiedt onder toezicht van de handelaar. Hij heeft derhalve een voorraadje reserveonderdelen aangelegd, dat éénmaal per week (bijv. elke maandagmorgen) kan worden aangevuld tot drie exemplaren. De kansverdeling van de vraag $\underline{d}$ per week naar een bepaald reserveonderdeel wordt gegeven door

$$P[\underline{d}=0] = \frac{1}{6} \quad P[\underline{d}=1] = \frac{1}{4} \quad P[\underline{d}=2] = \frac{1}{3} \quad P[\underline{d}=3] = \frac{1}{4} \;. \tag{4.16}$$

Verder wordt verondersteld dat de voorraadkosten per week evenredig zijn met de omvang van de voorraad aan het eind van die week. Zodra de voorraad niet toereikend is, worden noodinkopen verricht, waarvan de extra kosten per eenheid 10 maal de voorraadkosten per eenheid bedragen. Tenslotte wordt voor iedere aanvulling van de voorraad een vast bedrag van 5 maal de voorraadkosten per eenheid in rekening gebracht.

De vraag die de handelaar zich nu stelt is:
"Moet ik de voorraad aanvullen als ik nog één of misschien zelfs twee onderdelen in voorraad heb? Of moet ik pas bijbestellen als alle onderdelen gebruikt zijn?"

Uit de formulering van het probleem volgt dat hier sprake is van een ∞-stapsbeslissingsprobleem.

Oplossing

De mogelijke toestanden van het systeem "voorraad" aan het eind van iedere week zullen we aanduiden door symbolen (i) met de volgende betekenis:

(3) = de voorraad bedraagt drie exemplaren,
(2) = " " " twee " ,
(1) = " " " één exemplaar ,
(0) = er is geen voorraad, terwijl het niet nodig was om noodinkopen te doen,
(-1) = er is éénmaal een noodinkoop verricht,
(-2) = " " tweemaal " " " .

De handelaar heeft nu drie strategieën tot zijn beschikking: bijbestellen (tot 3 stuks) wanneer de voorraad aan het eind van de week kleiner dan of gelijk is aan 0, 1 of 2. Wij zullen deze drie strategieën resp. aanduiden met z_1, z_2 en z_3.

Wij vinden nu, als strategie z_1 wordt toegepast, voor de overgangswhn van de huidige toestand naar de toestand op het volgende beslissingstijdstip:

$$\begin{aligned}
p_{3,3} &= p_{2,2} = p_{1,1} = P[\underline{d}=0] = \tfrac{1}{6} \\
p_{3,2} &= p_{2,1} = p_{1,0} = P[\underline{d}=1] = \tfrac{1}{4} \\
p_{3,1} &= p_{2,0} = p_{1,-1} = P[\underline{d}=2] = \tfrac{1}{3} \\
p_{3,0} &= p_{2,-1} = p_{1,-2} = P[\underline{d}=3] = \tfrac{1}{4} \ .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Aangezien de voorraad tot 3 wordt aangevuld als de voorraad aan het eind van de week gelijk is aan nul of minder, geldt:

$$\begin{aligned}
p_{0,-1} &= p_{0,-2} = p_{-1,-1} = p_{-1,-2} = p_{-2,-2} = 0 \\
p_{0,3} &= p_{-1,3} = p_{-2,3} = P[\underline{d}=0] = \tfrac{1}{6} \\
p_{0,2} &= p_{-1,2} = p_{-2,2} = P[\underline{d}=1] = \tfrac{1}{4} \\
p_{0,1} &= p_{-1,1} = p_{-2,1} = P[\underline{d}=2] = \tfrac{1}{3} \\
p_{0,0} &= p_{-1,0} = p_{-2,0} = P[\underline{d}=3] = \tfrac{1}{4} \,.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Verder zijn $p_{-2,-1} = p_{2,-2} = p_{3,-2} = p_{3,-1} = p_{1,2} = p_{1,3} = p_{2,3} = 0$. Deze resultaten zijn verwerkt in de volgende tabel

$$\begin{array}{c} \\ (3) \\ (2) \\ (1) \\ (0) \\ (-1) \\ (-2) \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} (3) & (2) & (1) & (0) & (-1) & (-2) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array} \tag{4.19}$$

<u>Tabel van overgangswhn bij strategie z_1</u>

Indien strategie z_2 wordt gevolgd zijn overgangen van (1) naar (-1) en (-2) uitgesloten. De toestand (-2) kan zich nu niet meer realiseren. Op analoge wijze te werk gaande als bij strategie z_1 vindt men voor de tabel der overgangswhn

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} (3) & (2) & (1) & (0) & (-1) \end{array} \\
\begin{array}{c} (3) \\ (2) \\ (1) \\ (0) \\ (-1) \end{array} &
\begin{pmatrix}
\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad (4.20)
$$

Tabel van overgangswhn bij strategie z_2

Indien tenslotte strategie z_2 wordt toegepast is zowel de toestand (-1) als de toestand (-2) uitgesloten; de tabel der overgangswhn wordt nu

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} (3) & (2) & (1) & (0) \end{array} \\
\begin{array}{c} (3) \\ (2) \\ (1) \\ (0) \end{array} &
\begin{pmatrix}
\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad (4.21)
$$

Tabel van overgangswhn bij strategie z_3

Voor ieder van de strategieёn z_1, z_2 en z_3 vormt de rij van toestanden, behorende bij de opeenvolgende beslissingstijdstippen, een "Markov-keten". De kans dat het systeem zich op een "onbegrensd verafgelegen" beslissingstijdstip in de toestand (j) bevindt als het nu in de toestand (i) is wordt gegeven door $q_j(z)$. We bepalen de invariante kansen van (4.19) uit het volgende stelsel vergelijkingen (vgl. (4.8) en (4.9))

$$\begin{aligned}
q_3 &= \tfrac{1}{6} q_3 && && &&+ \tfrac{1}{6} q_0 + \tfrac{1}{6} q_{-1} + \tfrac{1}{6} q_{-2} \\
q_2 &= \tfrac{1}{4} q_3 &&+ \tfrac{1}{6} q_2 && &&+ \tfrac{1}{4} q_0 + \tfrac{1}{4} q_{-1} + \tfrac{1}{4} q_{-2} \\
q_1 &= \tfrac{1}{3} q_3 &&+ \tfrac{1}{4} q_2 &&+ \tfrac{1}{6} q_1 &&+ \tfrac{1}{3} q_0 + \tfrac{1}{3} q_{-1} + \tfrac{1}{3} q_{-2} \\
q_0 &= \tfrac{1}{4} q_3 &&+ \tfrac{1}{3} q_2 &&+ \tfrac{1}{4} q_1 &&+ \tfrac{1}{4} q_0 + \tfrac{1}{4} q_{-1} + \tfrac{1}{4} q_{-2} \\
q_{-1} &= && \tfrac{1}{4} q_2 &&+ \tfrac{1}{3} q_1 && \\
q_{-2} &= && && \tfrac{1}{4} q_1 && \\
1 &= q_3 &&+ q_2 &&+ q_1 &&+ q_0 + q_{-1} + q_{-2} \;.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Lossen we hieruit $q_3,\ldots,q_{-2}$ op, dan vinden wij

$$q_3 = \frac{200}{2148}\,,\quad q_2 = \frac{360}{2148}\,,\quad q_1 = \frac{588}{2148}\,,\quad q_0 = \frac{567}{2148}\,,\quad q_{-1} = \frac{286}{2148}\,,$$
$$q_{-2} = \frac{147}{2148}\;. \tag{4.23}$$

Voor strategie z_2 vinden wij

$$\begin{aligned}
q_3 &= \tfrac{1}{6} q_3 && &&+ \tfrac{1}{6} q_1 + \tfrac{1}{6} q_0 + \tfrac{1}{6} q_{-1} \\
q_2 &= \tfrac{1}{4} q_3 &&+ \tfrac{1}{6} q_2 &&+ \tfrac{1}{4} q_1 + \tfrac{1}{4} q_0 + \tfrac{1}{4} q_{-1} \\
q_1 &= \tfrac{1}{3} q_3 &&+ \tfrac{1}{4} q_2 &&+ \tfrac{1}{3} q_1 + \tfrac{1}{3} q_0 + \tfrac{1}{3} q_{-1} \\
q_0 &= \tfrac{1}{4} q_3 &&+ \tfrac{1}{3} q_2 &&+ \tfrac{1}{4} q_1 + \tfrac{1}{4} q_0 + \tfrac{1}{4} q_{-1} \\
q_{-1} &= && \tfrac{1}{4} q_2 && \\
1 &= q_3 &&+ q_2 &&+ q_1 + q_0 + q_{-1} \;.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Hieruit volgt

$$q_3 = \frac{20}{156}\,,\quad q_2 = \frac{36}{156}\,,\quad q_1 = \frac{49}{156}\,,\quad q_0 = \frac{42}{156}\,,\quad q_{-1} = \frac{9}{156}\;. \tag{4.25}$$

En tenslotte geldt voor strategie z_3

$$\begin{aligned} q_3 &= \tfrac{1}{6}(q_3 + q_2 + q_1 + q_0) \\ q_2 &= \tfrac{1}{4}(q_3 + q_2 + q_1 + q_0) \\ q_1 &= \tfrac{1}{3}(q_3 + q_2 + q_1 + q_0) \\ q_0 &= \tfrac{1}{4}(q_3 + q_2 + q_1 + q_0) \\ 1 &= \quad q_3 + q_2 + q_1 + q_0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

en hieruit volgt $q_3 = \frac{1}{6}$, $q_2 = \frac{1}{4}$, $q_1 = \frac{1}{3}$ en $q_0 = \frac{1}{4}$.

In het begin van deze paragraaf hebben wij aangenomen dat de voorraadkosten per week evenredig zijn met de grootte van de voorraad aan het eind van de week. Wij kiezen de voorraadkosten per reserveonderdeel per week als geldeenheid. Verder hebben wij vastgesteld dat bij elke bestelling een bedrag van 5 geldeenheden aan onkosten wordt gemaakt, terwijl bij iedere noodinkoop 10 geldeenheden als extra onkosten worden uitgegeven.

In dit voorbeeld zal $h(s;x)$ geen opbrengst maar een verwachting van de kosten voorstellen en wel van de periode die begint met de beslissing x en eindigt op het moment dat de volgende beslissing moet worden genomen. Als de beslissing x de voorraad aangeeft na aanvulling ($x \geq s$), dan is de voorraad aan het eind van de beschouwde periode $x-\underline{d}$. De verwachting van de voorraadkosten bedraagt derhalve

$$\sum_{d=0}^{x} (x-d)p(d) .$$

De verwachting van de noodinkoopkosten wordt gegeven door

$$10 \sum_{d=x+1}^{3} (d-x)p(d) .$$

De bestelkosten bedragen 5 als $x > s$.
De verwachting van de kosten $h(s;x)$ wordt dus gegeven door

$$h(s;x) = \sum_{d=0}^{x} (x-d)p(d) + 10 \sum_{d=x+1}^{3} (d-x)p(d) + \begin{cases} 5 \text{ als } x > s \\ 0 \text{ als } x = s . \end{cases}$$

Als strategie z_1 wordt toegepast dan vinden wij voor $h(i;z_1(i))$

$$\begin{aligned} h(3;z_1(3)) &= \sum_{d=0}^{3} (3-d)p(d) = 1\tfrac{1}{3} \\ h(2;z_1(2)) &= \sum_{d=0}^{2} (2-d)p(d) + 10p(3) = 3\tfrac{1}{12} \\ h(1;z_1(1)) &= \sum_{d=0}^{1} (1-d)p(d) + 10(p(3)+p(2)) = 8\tfrac{1}{2} \\ h(0;z_1(0)) &= h(-1;z_1(-1)) = h(-2;z_1(-2)) = 6\tfrac{1}{3} \ . \end{aligned} \tag{4.27}$$

Met behulp van (4.23) vinden wij hieruit voor strategie z_1 (zie (4.15))

$$\begin{aligned} y(i;z_1) = {} & 1\tfrac{1}{3}\,\frac{200}{2148} + 3\tfrac{1}{12}\,\frac{360}{2148} + 8\tfrac{1}{2}\,\frac{588}{2148} + 6\tfrac{1}{3}\,\frac{567}{2148} + \\ & + 6\tfrac{1}{3}\,\frac{286}{2148} + 6\tfrac{1}{3}\,\frac{147}{2148} = \frac{12708}{2148} \approx 5{,}9 \end{aligned} \tag{4.28}$$

voor elke begintoestand i.

Past de handelaar strategie z_2 toe dan geldt

$$\begin{aligned} h(3;z_2(3)) &= 1\tfrac{1}{3} & \qquad h(0;z_2(0)) &= 6\tfrac{1}{3} \\ h(2;z_2(2)) &= 3\tfrac{1}{12} & \qquad h(-1;z_2(-1)) &= 6\tfrac{1}{3} \ , \\ h(1;z_2(1)) &= 6\tfrac{1}{3} \end{aligned} \tag{4.29}$$

en met behulp van (4.24) leiden we hieruit voor de strategie z_3 af

$$\begin{aligned} y(i;z_2) = {} & 1\tfrac{1}{3}\,\frac{20}{156} + 3\tfrac{1}{12}\,\frac{36}{156} + 6\tfrac{1}{3}\,\frac{49}{156} + 6\tfrac{1}{3}\,\frac{42}{156} + 6\tfrac{1}{3}\,\frac{9}{156} = \\ & = \frac{771}{156} \approx 4{,}9 \end{aligned} \tag{4.30}$$

voor elke begintoestand i.

Voor strategie z_3 geldt

$$\begin{aligned} h(3;z_3(3)) &= 1\tfrac{1}{3} \qquad & h(1;z_3(1)) &= 6\tfrac{1}{3} \\ h(2;z_3(2)) &= 6\tfrac{1}{3} \qquad & h(0;z_3(0)) &= 6\tfrac{1}{3}\,, \end{aligned} \tag{4.31}$$

zodat (voor elke begintoestand (i))

$$y(i;z_3) = 1\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{6} + 6\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4} + 6\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3} + 6\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4} = 5{,}5\ . \tag{4.32}$$

Uit (4.28), (4.30) en (4.32) volgt dat strategie z_2 de voorkeur verdient boven de strategieën z_1 en z_3. De handelaar zal zijn voorraad dus (tot 3 stuks) aanvullen zodra hij aan het eind van de week 1 of minder reserveonderdelen in voorraad heeft. Zouden we hebben toegelaten dat de handelaar ook tot 2 stuks mag bijbestellen, dan was het probleem hierdoor omvangrijker geworden. Wij komen in de volgende paragraaf hierop terug.

4.2 Een iteratieve oplossingsmethode

In deze paragraaf zullen wij uitgaan van de veronderstelling dat voor elke in aanmerking komende strategie de limiet (4.6) bestaat.

In de vorige paragraaf hebben wij een kriteriumfunctie afgeleid voor de optimale strategie. Indien echter de klasse van toegelaten strategieën zeer uitgebreid is, kan men dikwijls noch het kriterium uitdrukken in een vorm welke zich leent tot een directe bepaling van de optimale strategie, noch voor alle strategieën afzonderlijk de bijbehorende waarde van de kriteriumfunctie vaststellen.

Wij zullen nu een iteratie procedure beschouwen die steeds tot de optimale strategie leidt.

De kriteriumfunctie $y(i;z)$ hangt, zoals men gemakkelijk aan het rechterlid van (4.15) kan zien, niet af van de uitgangstoestand i. Wij zullen nu een functie $c(i;z)$ invoeren, die <u>wel</u> van de begintoestand afhangt. Deze functie wordt gegeven door

$$c(i;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{k}(z) \{h(j;z(j)) - y(j;z)\} . \tag{4.33}$$

Men kan bewijzen dat het rechterlid van (4.33) bestaat. Uit (4.33) volgt

$$\begin{aligned} c(i;z) &= h(i;z(i)) - y(i;z) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{k}(z) \{h(j;z(j)) - y(j;z)\} = \\ &= h(i;z(i)) - y(i;z) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(z) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{N} p_{js}^{k-1}(z) \{h(s;z(s)) - y(s;z)\} = \\ &= h(i;z(i)) - y(i;z) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{N} p_{js}^{k}(z) \{h(s;z(s)) - y(s;z)\} = \\ &= h(i;z(i)) - y(i;z) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(z)\, c(j;z) \end{aligned} \tag{4.34}$$

en dus

$$c(i;z) = h(i;z(i)) - y(i;z) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(z)\, c(j;z) . \tag{4.35}$$

Aan de nieuwe functie $c(i;z)$ kan men ook een physische betekenis toekennen en wel als volgt:

Stel dat de beslisser niet de "eigenaar" is van het systeem, maar het pacht voor $y(i;z)$ ($= y(j;z)$) per periode tussen twee opéénvolgende equidistante tijdstippen. Als i de begintoestand is, dan geeft $c(i;z)$ de verwachting van de winst aan voor een onbegrensd lange periode. Door de uitdrukking (4.35) is de functie $c(i;z)$ niet ondubbelzinnig bepaald. Immers als $c^{*}(i;z)$ voldoet aan (4.35), dan voldoet de functie

$$c(i;z) = c^{*}(i;z) + c_0 , \tag{4.36}$$

waarbij c_0 een willekeurige constante is, ook aan (4.35).

Aangezien in de hierna volgende iteratie slechts de verschillen tussen de waarden $c(i;z)$ $(i=1,2,\ldots,N)$ een rol spelen, kiezen wij steeds één van de waarden $c(i;z)$, bijv. $c(N;z)$, gelijk aan nul.

De vergelijkingen

$$c(i;z) = h(i;z(i)) - y(i;z) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(z)\, c(j;z) \quad (i=1,\ldots,N) \tag{4.37}$$

en

$$c(N;z) = 0 \tag{4.38}$$

geven wel een ondubbelzinnige oplossing voor $c(i;z)$ en $y(i;z)$.

Thans voeren wij in de overgangskansen $p_{ij}(x)$ $(i,j=1,2,\ldots,N)$. Als het systeem op het huidige beslissingstijdstip in de toestand i is en als in deze toestand de beslissing x wordt genomen, dan geeft het getal $p_{ij}(x)$ de kans aan dat het systeem op het volgende equidistante tijdstip in de toestand j zal zijn. Wij zullen nu aannemen dat voor iedere toestand i het aantal beslissingen $x \in X(i)$ eindig is.

Vervolgens beschouwen wij de functie $c(i;(x)z)$ gegeven door

$$c(i;(x)z) = h(i;x) - y(i;z) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(x)\, c(j;z) \, . \tag{4.39}$$

Als i de begintoestand is en als op het eerste equidistante tijdstip de beslissing x wordt genomen en daarna volgens strategie z wordt beslist, dan geeft $c(i;(x)z)$ de verwachting aan van de winst over een onbegrensd lange periode.

Wij zullen nu aan de te beschrijven iteratie procedure de volgende geschiedenis verbinden. Het verhaal wil dat de beslisser de eerste beslissing vrij mag kiezen maar daarna volgens strategie $z^{(0)}$ te werk moet gaan. Hij zal derhalve die beslissing $x \in X(i)$ kiezen waarvoor $c(i;(x)z^{(0)})$ maximaal is. Voor iedere toestand i vindt hij minstens één beslissing x waarvoor $c(i;(x)z^{(0)})$ maximaal is. Indien de beslisser nu aan iedere toestand i één van deze beslissingen toevoegt, en wel zó dat als de beslissing $z^{(0)}(i)$

voldoet deze wordt verkozen, dan geeft deze toevoeging een <u>nieuwe</u> strategie aan. Deze strategie zullen wij aanduiden met $z^{(1)}$. Vervolgens komt, voordat de eerste beslissing is genomen, de "pachtheer" achter de plannen van de beslisser en eist de toepassing van de zojuist gevonden strategie $z^{(1)}$ voor de periode vanaf het tweede equidistante tijdstip, terwijl hij bovendien de pacht overeenkomstig de nieuwe strategie wijzigt (dus $y(i;z^{(1)})$). De beslisser kan nu opnieuw beginnen met de bepaling van de beste eerste beslissing. Als de hierboven beschreven "plagerij" van de pachtheer zich onbeperkt herhaalt (en wel voordat de allereerste beslissing is genomen), dan ontstaat er op deze wijze een rij van strategieën $\{z^{(n)}, n=1,2,\ldots\}$ die, zoals men kan bewijzen, convergeert naar een optimale strategie z_0.

De hier beschreven iteratie methode zullen wij nu in een aantal punten samenvatten.

Als $z^{(0)}$ een willekeurige strategie is en als $z^{(n-1)}$ de strategie voorstelt die aan het eind van de $(n-1)^{ste}$ iteratie stap wordt verkregen, dan verloopt de n^{de} iteratie stap als volgt:

a) Los met behulp van $p_{ij}(z^{(n-1)})$ en $h(i;z^{(n-1)}(i))$ de volgende vergelijkingen in $c(i;z^{(n-1)})$ en $y(i;z^{(n-1)})$ op

$$c(i;z^{(n-1)}) =$$
$$= h(i;z^{(n-1)}(i)) - y(i;z^{(n-1)}) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(z^{(n-1)})\, c(j;z^{(n-1)})$$
$$c(N;z^{(n-1)}) = 0 \,. \tag{4.40}$$

b) Maximaliseer m.b.t. $x \in X(i)$ de x-functie

$$c(i;(x)z^{(n-1)}) = h(i;x) - y(i;z^{(n-1)}) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(x)\, c(j;z^{(n-1)}) \tag{4.41}$$

Voor iedere toestand i vinden wij ten minste één "maximaliserende" beslissing x. Voor iedere toestand i kiezen wij één van deze "maximaliserende" beslissingen en wel met díe beperking dat, als de beslissing $z^{(n-1)}(i)$ een "maximaliserende" beslissing is, deze wordt verkozen.

De gekozen beslissingen, voor elke toestand één, vormen een nieuwe strategie. Deze strategie zullen wij aangeven met $z^{(n)}$.

Einde van de n^{de} stap.

Uit bovenstaande volgt dat voor de optimale strategie z_0 moet gelden:

$$c(i;z_0) = \max_{x \in X(i)} c(i;(x)z_0) \qquad (4.42)$$

Voor een illustratie van de iteratie procedure beschouwen wij nogmaals het onderhoudsprobleem uit § 4.1. Wij voeren echter als extra veronderstelling in de beperking dat de voorraad maximaal vijf mag zijn. Zoals wij weten geeft in dit voorbeeld op een beslissingstijdstip, de beslissing x de voorraad aan na een eventuele aanvulling.

In de onderstaande tabel worden voor de mogelijke toestanden s = -3,-2,-1,0,1,2,3,4 en 5 de bijbehorende toegelaten beslissingen x opgegeven.

Toestand	Toegelaten beslissingen
-3	x = 0,1,...,5
-2	x = 0,1,...,5
-1	x = 0,1,...,5
0	x = 0,1,...,5
1	x = 1,...,5
2	x = 2,...,5
3	x = 3,...,5
4	x = 4,5
5	x = 5

Tabel 4.II

De verzamelingen X(i)

Als p(d) de kans op een vraag d aangeeft, dan geldt voor $p_{ij}(x)$

$$p_{ij}(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } j > x \\ p(x-j) & \text{voor } j \leq x \, . \end{cases} \tag{4.43}$$

De waarden van de overgangskansen $p_{ij}(x)$ kunnen uit tabel 4.III worden afgelezen (vgl. (4.16) en (4.43))

i, x \ j	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
i=-3,...,+5 x=5	0,167	0,250	0,333	0,250	0	0	0	0	0
i=-3,...,+4 x=4	0	0,167	0,250	0,333	0,250	0	0	0	0
i=-3,...,+3 x=3	0	0	0,167	0,250	0,333	0,250	0	0	0
i=-3,...,+2 x=2	0	0	0	0,167	0,250	0,333	0,250	0	0
i=-3,...,+1 x=1	0	0	0	0	0,167	0,250	0,333	0,250	0
i=-3,...,0 x=0	0	0	0	0	0	0,167	0,250	0,333	0,250

Tabel 4.III

De overgangskansen $p_{ij}(x)$

De verwachting van de kosten h(s;x) wordt gegeven door

$$h(s;x) = \sum_{d=0}^{x} (x-d)p(d) + 10 \sum_{d=x+1}^{3} (d-x)p(d) + \begin{cases} 5 & \text{als } x > s \\ 0 & \text{als } x = 0 \, . \end{cases} \tag{4.44}$$

In tabel 4.IV worden deze verwachte kosten opgegeven.

i \ x	5	4	3	2	1	0
5	3,333	-	-	-	-	-
4	8,333	2,333	-	-	-	-
3	8,333	7,333	1,333	-	-	-
2	8,333	7,333	6,333	3,083	-	-
1	8,333	7,333	6,333	8,083	8,500	-
0	8,333	7,333	6,333	8,083	13,500	16,666
-1	8,333	7,333	6,333	8,083	13,500	16,666
-2	8,333	7,333	6,333	8,083	13,500	16,666
-3	8,333	7,333	6,333	8,083	13,500	16,666

Tabel 4.IV

De verwachte kosten h(i;x)

In dit voorbeeld wordt geen verwachte winst gemaximaliseerd, maar verwachte kosten geminimaliseerd. De beslisser krijgt nu periodiek een vergoeding van de omvang y(i;z) en c(i;z) stelt nu de verwachting voor van de kosten die de beslisser uit eigen zak moet betalen in een onbegrensde periode. In de hierna volgende iteratie gaan wij derhalve de beslissing x steeds zó kiezen dat c(i;(x)z) minimaal is. Alleen de eerste stap zullen wij uitvoerig beschrijven.

De eerste stap

Als beginstrategie $z^{(0)}$ kiezen wij de strategie die in elke toestand s de beslissing x = 5 voorschrijft.
Voor de strategie $z^{(0)}$ geldt:

$$c(i;z^{(0)}) = h(i;z^{(0)}(i)) - y(i;z^{(0)}) + \sum_{j=-3}^{+5} p_{ij}(z^{(0)}(i))\, c(j;z^{(0)})$$

$$c(-3;z^{(0)}) = 0 \,. \tag{4.45}$$

Gebruik makende van de tabellen 4.III en 4.IV vinden wij uit (4.45) voor $c(i;z^{(0)})$ en $y(i;z^{(0)})$:

$$c(5;z^{(0)}) = -5 \qquad c(i;z^{(0)}) = 0 \quad (i=+4,\ldots,-3)$$
$$y(i;z^{(0)}) = 7{,}498 . \tag{4.46}$$

Wij bepalen eerst de waarden $c(i;(x)z^{(0)})$ en noteren daarna voor iedere i de minimaliserende beslissing x^{*}.
Voor $c(i;(x)z^{(0)})$ geldt volgens (4.46)

$$\begin{aligned} c(i;(x)z^{(0)}) &= h(i;x) - y(i;z^{(0)}) + \sum_{j=-3}^{5} p_{ij}(x)\ c(j;z^{(0)}) \\ &= h(i;x) - 7{,}498 - p_{i5}(x).5 . \end{aligned} \tag{4.47}$$

Bijgevolg:

$$c(5;(5)z^{(0)}) = 3{,}333 - 7{,}498 - 5.0{,}167 = -5 ,$$
voor s = 5 vinden wij dus $x^{*} = 5$.
$$c(4;(5)z^{(0)}) = 8{,}333 - 7{,}498 - 5.0{,}167 = 0$$
$$c(4;(4)z^{(0)}) = 2{,}333 - 7{,}498 = -5{,}165 ,$$
voor s = 4 vinden wij dus $x^{*} = 4$.
$$c(3;(5)z^{(0)}) = 8{,}333 - 7{,}498 - 5.0{,}167 = 0$$
$$c(3;(4)z^{(0)}) = 7{,}333 - 7{,}498 = -0{,}165 \tag{4.48}$$
$$c(3;(3)z^{(0)}) = 1{,}333 - 7{,}498 = -6{,}165 ,$$
voor s = 3 vinden wij dus $x^{*} = 3$.
$$c(2;(5)z^{(0)}) = 8{,}333 - 7{,}498 - 5.0{,}167 = 0$$
$$c(2;(4)z^{(0)}) = 7{,}333 - 7{,}498 = -0{,}165$$
$$c(2;(3)z^{(0)}) = 6{,}333 - 7{,}498 = -1{,}165$$
$$c(2;(2)z^{(0)}) = 3{,}083 - 7{,}498 = -4{,}415 ,$$
voor s = 2 vinden wij dus $x^{*} = 2$.
$$c(1;(5)z^{(0)}) = 8{,}333 - 7{,}498 - 5.0{,}167 = 0$$
$$c(1;(4)z^{(0)}) = 7{,}333 - 7{,}498 = -0{,}165$$

$$c(1;(3)z^{(0)}) = 6,333 - 7,498 = -1,165$$
$$c(1;(2)z^{(0)}) = 8,083 - 7,498 = +0,585$$
$$c(1;(1)z^{(0)}) = 8,500 - 7,498 = +1,002 ,$$

voor $s = 1$ vinden wij dus $x^{*} = 3$.

$$\begin{aligned} c(0;(5)z^{(0)}) &= 8,333 - 7,498 - 5.0,167 = 0 \\ c(0;(4)z^{(0)}) &= 7,333 - 7,498 = -0,165 \\ c(0;(3)z^{(0)}) &= 6,333 - 7,498 = -1,165 \\ c(0;(2)z^{(0)}) &= 8,083 - 7,498 = +0,585 \\ c(0;(1)z^{(0)}) &= 13,500 - 7,498 = +6,002 \\ c(0;(0)z^{(0)}) &= 16,666 - 7,498 = +9,168 , \end{aligned} \tag{4.48}$$

voor $s = 0$ vinden wij dus $x^{*} = 3$.

Aangezien

$$c(i;(x)z^{(0)}) = c(0;(x)z^{(0)}) \qquad i = -3,-2,-1 \tag{4.49}$$

en aangezien voor de toegelaten beslissingen geldt

$$X(i) = X(0) \qquad i = -3,-2,-1 , \tag{4.50}$$

vinden wij ook voor $s = -1,-2,-3$ dat de beslissing $x^{*} = 3$ optimaal is.

Aan het eind van de eerste stap vinden wij dus de strategie $z^{(1)}$, gegeven door

$$\begin{aligned} z^{(1)}(5) &= 5 \\ z^{(1)}(4) &= 4 \\ z^{(1)}(3) &= 3 \\ z^{(1)}(2) &= 2 \\ z^{(1)}(i) &= 3 \quad \text{voor } i \leq 1 . \end{aligned} \tag{4.51}$$

In de <u>tweede</u> stap vindt men voor $y(i;z^{(1)})$ de waarde 4,94052.
De strategie $z^{(2)}$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned} z^{(2)}(5) &= 5 \\ z^{(2)}(4) &= 4 \\ z^{(2)}(3) &= 3 \\ z^{(2)}(2) &= 2 \\ z^{(1)}(i) &= 5 \quad \text{voor } i \leq 1 . \end{aligned} \tag{4.52}$$

De bijbehorende kriteriumwaarde $y(i;z^{(2)})$, welke in de <u>derde</u> stap wordt berekend, bedraagt 4,49693.
Aan het eind van de derde stap blijkt dat

$$z^{(3)} = z^{(2)} \quad . \tag{4.53}$$

Bijgevolg is $z^{(2)}$ een optimale strategie.
