

**Boekbesprekingen**

**Rank correlation methods**, M. G. Kendall, Griffin and Co., London 1948, 160 pag., 18/—.

Rang-invariante methoden, dat zijn methoden, waarbij alleen de *volgorde* van grootte van de waarnemingen in de statistische beschouwingen betrokken wordt, bezitten boven de „klassieke” methoden grote voordelen en grote nadelen. In het algemeen kan men rang-invariante methoden toepassen onder zeer zwakke onderstellingen; soms is men nog wel genoodzaakt te eisen, dat de stochastische variabelen, waarop de waarnemingen betrekking hebben, een *continue* waarschijnlijkheidsverdeling bezitten, terwijl ook bepaalde eisen van onafhankelijkheid noodzakelijk zijn, maar verder behoeft men gewoonlijk niet te gaan. Tegenover dit voordeel staat het nadeel, dat de methoden meestal minder „scherp” (minder „efficiënt”) zullen zijn dan de klassieke methoden, hetgeen zijn oorzaak daarin vindt, dat bij de klassieke methoden voor de waarschijnlijkheidsverdeling van de variabelen een bepaalde vorm wordt aangenomen. De gehele klassieke correlatie-rekening berust b.v. op de aanname van een 2- of meer-dimensionale *normale* verdeling van de stochastische variabelen. Over de voor- en nadelen van de rang-invariante methoden zijn de meningen nogal verdeeld. Velen achten het verlies aan efficiency ernstig en maken liever extra onderstellingen, ook al zijn deze wellicht niet, of niet geheel (of zelfs geheel niet) vervuld. Anderen zijn in de eerste plaats gesteld op exactheid en vermijden bij voorkeur onderstellingen over de vorm der waarschijnlijkheidsverdelingen, vooral in die gevallen, waarin deze onderstellingen slechts worden gemaakt om de wiskundige beheersing van de theorie te vereenvoudigen. De situatie wordt kernachtig samengevat door J. Wolfowitz in een artikel („Non-parametric statistical inference”) in de „Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability”, Berkeley 1949, p. 93:

“... if the functional forms of the distribution functions are known or if there is good ground for assuming them, it is a loss not to make use of this information. Where this information is not at hand, statistical inference must properly proceed without it. In the latter event the criticism of some statisticians that non-parametric tests are „inefficient” is not valid, because „efficiency” (in the colloquial sense) implies thorough use of available resources, and it cannot be inefficient not to make use of unavailable information”.

De door Kendall in zijn boek „Rank correlation methods” samengevatte methoden der rangcorrelatie houden zich, evenals de normale correlatierekening, bezig met de afhankelijkheid van twee (of meer) variabele grootheden. Het begrip „lineariteit”, dat in de klassieke correlatie- en regressie-rekening een centrale plaats inneemt, wordt echter in de rang-invariante correlatierekening vervangen door het begrip „monotonie”.

De noodzaak van deze vervanging wordt duidelijk, als men overweegt, dat niet met de grootte der waarnemingen wordt gewerkt, maar met hun grootte-volgorde en wel in het bijzonder met hun rangnummer bij rangschikking naar grootte. Een lineair verband tussen een rij van getallen-paren  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  is, op die wijze, niet te onderscheiden van een monotoon verband.

Het eerste probleem der rangcorrelatie is het definiëren van een rangcorrelatiecoëfficiënt voor een dergelijke rij getallenparen  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), die een maat moet zijn voor de overeenstemming tussen de twee rijen der rangnummers van  $x_1, \dots, x_n$  en  $y_1, \dots, y_n$ , bij rangschikking naar grootte van ieder der beide rijen. Indien de overeenstemming volledig is, d.w.z. indien voor iedere  $i$  het rangnummer van  $x_i$  in de rij der  $x$ -waarden het-

zelfde is als het rangnummer van  $y_i$  in de rij der  $y$ -waarden, wens men dat de rangcorrelatie-coëfficiënt de waarde 1 aanneemt, en indien de rangnummers van  $x_i$  en  $y_i$  voor iedere  $i$  tezamen gelijk aan  $n + 1$  zijn, dus als de rangschikking naar grootte voor de  $x_i$  en de  $y_i$  tegengesteld is, dient de waarde  $-1$  aangenomen te worden, terwijl verder slechts waarden tussen  $-1$  en  $+1$  mogelijk zijn. Verschillende van deze coëfficiënten zijn ontwikkeld en twee daarvan, Spearman's coëfficiënt  $\rho$  en Kendall's coëfficiënt  $\tau$ , worden door Kendall steeds naast elkaar behandeld. Wij zullen hier niet ingaan op de vraag, welke van deze twee coëfficiënten te prefereren is. Beide bezitten hun voor- en nadelen, die in het boek besproken worden. Indien  $x_1, \dots, x_n$  en  $y_1, \dots, y_n$  onafhankelijke waarnemingen zijn van stochastische variabelen  $x$  resp.  $y$ , is de waarschijnlijkheidsverdeling van  $\rho$ , evenals die van  $\tau$ , bekend. Voor kleine  $n$  is deze exact berekend: Kendall geeft hem voor  $n \leq 10$ ; de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum heeft de verdeling berekend voor  $n \leq 40$  en zal de resultaten binnenkort publiceren in de Proceedings van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen; voor grote  $n$  zijn benaderingen bekend. Zowel  $\rho$  als  $\tau$  zijn asymptotisch normaal verdeeld. Met behulp van deze gegevens kan men dus de onafhankelijkheid van  $x$  en  $y$  toetsen, met als alternatieve hypothese een monotoon verband tussen  $x$  en het voorwaardelijk gemiddelde van  $y$  bij deze waarde van  $x$ . De onderstellingen zijn hierbij tot een minimum gereduceerd; men behoeft slechts aan te nemen, dat  $x$  en  $y$  een simultane waarschijnlijkheidsverdeling bezitten en dat de waarnemingen onafhankelijk zijn. De waarschijnlijkheidsverdeling behoeft niet continu te zijn; ook als gelijke waarnemingen voorkomen, kan de toetsingsmethode worden toegepast. Het is wellicht nuttig op dit punt een voorbeeld in te lassen.

In de kwartaalverslagen van het Bureau van Statistiek der Gemeente Amsterdam vindt men, onder het hoofd „Branden”, de volgende gegevens over het aantal „Baldadige alarmeringen, waarop de brandweer is uitgerukt”:

	Jan.	Feb.	Mrt	Apr.	Mei	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
1948	1	5	1	3	6	4	5	8	12	2	3	2
1949	1	4	1	2	1	3	4	4	5	1	3	4

De overeenkomst voor de beide jaren is opvallend. Indien men nu op grond van deze gegevens wil nagaan, of het aantal „baldadige alarmeringen” samenhangt met de maand van het jaar, zal men zich met de klassieke correlatietheorie weinig gelukkig voelen, daar er in een dergelijk geval wel bijzonder weinig reden is, een normale waarschijnlijkheidsverdeling voor dit aantal aan te nemen. Daar men echter de hypothese toetst, dat er géén verband is tussen de maand en het aantal, is er weinig bezwaar om aan te nemen, dat dit aantal een of andere, geheel ongespecificeerde, maar uiteraard discrete, waarschijnlijkheidsverdeling bezit. Bepaalt men nu de rangcorrelatiecoëfficiënt  $\tau$  van de beide rijen getallen, dan blijkt deze de waarde 0,54 te bezitten, terwijl de tweezijdige overschrijdingskans de waarde 0,02 bezit, zodat men de neiging heeft, aan de overeenstemming betekenis toe te kennen. Hierbij dient echter het voorbehoud gemaakt te worden, dat de onderstelling der onafhankelijkheid van de opeenvolgende waarnemingen zeer aanvechtbaar is, terwijl bovendien het verschijnsel onderzocht is, omdat het bij beschouwing van de gegevens in het oog sprong. Vergelijking met de gegevens van 1950 zou dus zeer gewenst zijn, maar is nog niet mogelijk.

Zouden deze gegevens van 1950 of van nog meer jaren beschikbaar zijn (voor de jaren 1946 en 1947 zijn zij wel beschikbaar, maar de aantallen zijn voor die jaren zo laag, dat ze voor dit doel praktisch onbruikbaar zijn), dan neemt het probleem een andere vorm

aan, daar wij dan niet met *paren*, maar met drietallen, of in het algemeen met  $m$ -tallen, waarnemingen te maken hebben (voor iedere maand een  $m$ -tal waarnemingen, als de gegevens van  $m$  jaar beschikbaar zijn). Ook voor dit geval is in de theorie der rangcorrelatie al veel bereikt. Wij zullen dit hier niet uitvoerig bespreken daar elders in dit nummer van „Statistica” een voorbeeld van toepassing van deze „methode der  $m$  rangschikkingen,” („problem of  $m$  rankings”) wordt gegeven.

In het bovenstaande is slechts één van de problemen aangegeven, die *Kendall* in zijn boek behandelt. Het is uiteraard ondoenlijk alle daar besproken problemen uit te stippelen. De theorie van de boven aangegeven problemen wordt behandeld in de eerste 6 hoofdstukken van het boek. Er volgt dan een hoofdstuk over partiële rangcorrelatie, een zeer interessant onderwerp, waarin men echter nog niet ver gevorderd is. Vervolgens behandelt *Kendall* het verband tussen de rangcorrelatie en de normale correlatie in het geval van een tweedimensionale normale verdeling, terwijl de laatste twee hoofdstukken gewijd zijn aan de theorie der paarsgewijze vergelijking van objecten, die speciaal voor de psychologie van groot belang is. Een aantal voor de toepassing nodige tabellen is aan het eind van het boek opgenomen, tezamen met een uitgebreide literatuuropgave. Het is jammer, dat bij deze tabellen de tabel van *G. P. Sillit* o voor de exacte verdeling van *Kendall's*  $\tau$  bij het optreden van gelijken onder de waarnemingen niet is opgenomen.

Het boekje vormt een uitstekende samenvatting van de belangrijkste op dit gebied behaalde resultaten, die tot nog toe slechts zeer verspreid in de literatuur te vinden waren. Het zal er zeker toe bijdragen het gebruik en de ontwikkeling van deze methoden te bevorderen. Om de stof ook voor minder wiskundig geschoolden toegankelijk te maken, heeft *Kendall* de bewijzen van de stellingen, die hij gebruikt om de methoden uiteen te zetten, in aparte hoofdstukken samengevat, een methode die aanbeveling verdient. Een groot aantal voorbeelden tussen de tekst heeft ten doel de berekeningsmethoden aanschouwelijk te maken. Dit alles heeft, evenals de onderhoudende stijl, waarin het boek geschreven is, ten doel de leesbaarheid te bevorderen. In zeker opzicht schiet de schrijver echter hierin zijn doel voorbij. Want, hoewel bij eerste lezing al deze middelen aan hun doel beantwoorden, is het, indien men naar het boekje grijpt, om één van de daarin beschreven methoden toe te passen, vaak moeilijk, snel te vinden, welk gedeelte men nodig heeft. Door de verhalende stijl wordt men veelal gedwongen grote stukken opnieuw te lezen, voordat men weer voldoende in de stof is ingewerkt, om aan de slag te gaan.

De wiskundige achtergrond van de theorie is, in tegenstelling tot de praktische toepassingen, geenszins eenvoudig. De hoofdstukken, waarin de gebruikte stellingen worden bewezen, zijn dan ook veruit de moeilijkste, ondanks het feit, dat de schrijver erin geslaagd is alle bewijzen met elementaire middelen te voeren. De duidelijkheid van de bewijzen laat hier en daar te wensen over; men kan ze niet lezen, maar is genoodzaakt ze geheel te reconstrueren, wil men een duidelijk begrip van de juistheid van de stelling verkrijgen. Een typisch begeleidend verschijnsel is, dat de meeste van het kleine aantal drukfouten, dat aan de correctie is ontsnapt, in deze bewijzen te vinden zijn.

Alles tezamen genomen is deze monographie van een niet te onderschatten waarde. Het ware te wensen, dat meer dergelijke monographieën werden geschreven over onderwerpen, die zich daartoe lenen (en die zijn er genoeg); en desnoods wat minder „Inleidingen tot de Mathematische Statistiek”, die tegenwoordig als paddestoelen uit de grond rijzen. De toepassingsmogelijkheden van methoden, zoals die der rangcorrelatie, worden pas goed duidelijk, indien de theorie zo vlot toegankelijk is gemaakt, dat men bij allerlei problemen gaat overwegen, of men deze theorie niet zou kunnen toepassen. Het lijdt daarom geen twijfel, dat de schrijver zal slagen in zijn bedoeling, deze methoden ook op ander

gebied dan de psychologie (die de stoot tot hun ontwikkeling heeft gegeven) ingang te doen vinden.

J. Hemelrijk

**Experimental Designs.** W. G. Cochran en G. M. Cox. *John Wiley & Sons inc., New York; Chapman & Hall, London, 1950. Blz. X, 454. \$ 5.75.*

Dit boek heeft de hooggespannen verwachtingen, waarmee het tegemoet werd gezien, geenszins beschaamd. De verschijning betekent dat de belangrijke recente uitbreidingen van de proefpatronen vrijwel in hun geheel voor een ruim publiek worden opengesteld. Gedeeltelijk was dat landgoed al bekend door de boeken van zijn stichter R. A. Fisher, vooral door „*The Design of Experiments*”, waarin volgens de voorrede van „*Experimental Designs*”, de logische principes van de proefpatronen op bewonderenswaardige wijze worden uiteengezet. Fisher's boeken waren het zaad, waaruit zo ongemerkt een uitbundige weelde van proefpatronen is opgeschoten, door de zorgen van bekwame hoveniers, waarvan de schrijvers er een honderdtal noemen. De succesrijkste onder hen is Yates, die volgens de literatuurindex op niet minder dan 67 plaatsen wordt aangehaald, terwijl Fisher als nummer twee, het met 25 aanhalingen moet doen. Een groot deel van die patronen-weelde was tot dusverre weggeborgen in onbereikbare artikels, waarin voor de zekerheid nog allerlei dingen bekend ondersteld werden, die weer alleen in andere onbereikbare artikels te vinden waren. Desondanks was er toch uitgelekt dat die proefpatronen niet te versmaden voordelen konden opleveren en de weinige experts werden in toenemende mate lastig gevallen om adviezen en, helaas niet bestaande, geschikte literatuur.

Aldus kwamen Cochran en Cox er toe om in 1944 een gestencild receptenboek uit te delen, waar de gelukkige ontvangers overigens niet tevreden mee waren. Er waren te veel ontbrekende schakels en het was te moeilijk, of te veel werk, om die zelf via de geciteerde literatuur te achterhalen. Het moest een boek worden, dat op zichzelf begrepen kon worden, met een compleet verslag van de variantie-analyse in al zijn vertakkingen. Wij mogen de schrijvers dankbaar zijn, dat zij hun aanvankelijke tegenzin om aan deze, voor de hand liggende, maar niettemin onbescheiden wensen te voldoen, overwonnen hebben. Terwijl het receptenboek in zijn soort volmaakt kon zijn, waren zij nu genoodzaakt tot een compromis, teneinde de uitgebreide stof in een dragelijk volumen samen te persen met behoud van de eenheid en overzichtelijkheid en bovendien tot het opnemen van talrijke dingen, die ook al heel goed in „*The Design of Experiments*” stonden. Met een zo groot mogelijk nut voor zoveel mogelijk gebruikers als richtsnoer, is dit compromis wonderlijk goed geslaagd.

De hoofdschotel blijft een keurcollectie van de nuttigste tot dusver ontworpen proefpatronen, met complete gebruiksaanwijzing en talrijke voorbeelden. Omdat hier de nadruk meer valt op de proefpatronen zelf dan, zoals bij Fisher, op de kunst om ze te maken, zijn de titels van de beide boeken goed gekozen. Ofschoon de proefpatronen terecht niet aan een bepaald toepassingsgebied gebonden worden, komen de voorbeelden toch overwegend uit de biometrische, in het bijzonder uit de agrarische hoek, omdat hierin de praktische ervaring van de schrijvers hoofdzakelijk gelegen is. In het voorwoord wordt zelfs vermeld dat aantrekkelijke voorbeelden uit andere sectoren niet werden opgenomen, omdat de schrijvers de achtergrond daarvan niet voldoende meenden te beheersen. Inderdaad is de verbinding tussen theorie en praktijk, evenals trouwens bij Fisher, een zeer sterk punt van dit boek. In de hoofdstukken 9—13, die over verschillende soorten incomplete blokken handelen, zijn de voorbeelden zeer sporadisch en daardoor is het nogal vermoeiend om deze achter elkaar uit te lezen. Gelukkig zorgt het boeiende veertiende hoofdstuk daarna