STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

Publicatie
79

Une nouvelle généralisation de de l'inégalité de Bienaymé

D. van Dantzig

1951

UNE NOUVELLE GÉNÉRALISATION DE L'INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ

PAR

D. VAN DANTZIG

(Extrait des *Annales de l'Institut Henri Poincaré*,
tome XII, fascicule I, 1951, pages 31-43.)

PARIS

INSTITUT HENRI POINCARÉ
11, Rue Pierre-Curie, 11

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
55, Quai des Grands-Augustins, 55

Une nouvelle généralisation de l'inégalité de Bienaymé

(*Extrait d'une lettre à M. M. Fréchet*)

par

D. VAN DANTZIG.

Sommaire. — L'auteur généralise des inégalités de Meidell et Camp en considérant le cas où la densité de probabilité est dérivable h fois.

Nous avons trouvé à la fin de 1948 une généralisation de l'inégalité de Bienaymé que nous n'avons pas encore pu publier faute de temps.

L'inégalité que nous démontrerons dépend de deux paramètres numériques k et h, et de deux paramètres positifs a et $b > a$, d'ailleurs arbitraires. Le cas $h = 0$ est celui de Bienaymé. Le cas $h = 1$ comprend les inégalités de Camp (¹) et de Meydell (²). L'inégalité de Meydell est obtenue en posant $a = 0$. Pour un a arbitraire et $b = +\infty$ (ou b suffisamment grand) on obtient une inégalité un peu plus précise que celle de Camp. D'ailleurs les démonstrations sont plus simples que celles de Meydell et de Camp. Les inégalités pour $h \geqq 2$ pourraient être nouvelles.

L'idée générale sur laquelle reposent les démonstrations est due à M. B. H. de Jongh; elle admet bien d'autres applications que celles données ici. C'est aussi M. de Jongh qui a trouvé la démonstration simplifiée de l'inégalité de Camp-Meydell pour le cas $a = 0$, $b = \infty$, de même que l'inégalité nouvelle pour le cas $h = 2$, $a = 0$, $b = \infty$. Nous aurons besoin d'un lemme qui a été démontré par un jeune

---

(¹) B. H. Camp, *A new generalisation of Tchebycheffs statistical inequality* (*Bull. Am. Math. Soc.*, 28, 1922, p. 427).

(²) B. Meydell, *Sur un problème du calcul des probabilités et les statistiques mathématiques* (*C. R. Acad. Sc.*, 175, 1922, p. 806).

mathématicien, appartenant au Centre Mathématique d'Amsterdam, M. J. H. B. Kemperman.

Considérons une variable aléatoire, que nous pouvons, en nous restreignant aux moments absolus, supposer remplacée par sa valeur absolue, de sorte que sa fonction de répartition $F(x) = 1 - P(x)$ est zéro pour $x < 0$. Elle est d'ailleurs non décroissante, $P(0) = 1$ et $\lim_{x \to \infty} P(x) = 0$. Soient

$$(1) \qquad \alpha_k = -\int_0^\infty x \, d\, P(x)$$

le moment (absolu) d'ordre k ($k > 0$) et $P_0 = P(x_0)$ la probabilité que la valeur absolue de la variable aléatoire donnée surpasse un nombre positif arbitraire x_0. Soit donné d'ailleurs un intervalle

$$I = \{ a \leqq x \leqq b \}, \qquad \text{où} \quad 0 \leqq a < b \leqq \infty,$$

et supposons que $P(x)$ possède dans cet intervalle des dérivées jusqu'à l'ordre h inclus.

Supposons enfin que dans l'intervalle I $(-1)^j P^{(j)}(x)$ soit positif pour $0 \leqq j \leqq h$ et non croissant pour $j = h$ (donc aussi pour $0 \leqq j \leqq h$). Il s'agit de trouver sous ces circonstances une borne supérieure, dépendante de α_k, pour P_0, lorsque $x_0 \in I$.

L'idée simple mais fondamentale de M. de Jongh est la suivante ([3]). Supposons qu'on peut trouver une fonction de répartition $1 - Q(x)$ (qu'on peut supposer $= 0$ pour $x < 0$), telle que :

1° $Q(x) \leqq P(x)$ pour chaque $x \geqq 0$;
2° $Q(x_0) = P(x_0) = P_0$;
3° Le moment (absolu) $\beta_k = -\int x^k \, d\, Q(x)$ surpasse ou est égal à un nombre positif $\hat{\beta}_k$ (qui se laisse calculer d'une manière assez simple).

La condition 1° entraîne la relation $x_2 \geqq x_1$, si $Q(x_1) = P(x_2)$, donc $\alpha_k \geqq \beta_k \geqq \hat{\beta}_k$. En posant

$$(2) \qquad \lambda_{h,k} = \frac{P_0 x_0^k}{\hat{\beta}_k},$$

([3]) *Cf.* aussi : R. von Mises, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, p. 69-73; M. Fréchet, *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités*. I, *Généralités sur les probabilités, variables aléatoires*, 1re éd., 1936, 2e éd., 1950.

on obtient l'inégalité cherchée

$$P_0 \leqq \lambda_{h,k} \frac{\alpha_k}{x_0^k}. \tag{3}$$

En prenant pour $h = 0$, où les conditions sont satisfaites pour $a = 0$, $b = \infty$,

$$Q(x) = \begin{cases} P(x_0) & \text{pour} \quad 0 \leqq x < x_0, \\ 0 & \text{pour} \quad x \geqq x_0; \end{cases}$$

on a $\beta_k = x_0^k P(x_0)$, donc $\lambda_{h,k} = 1$. C'est l'inégalité de Bienaymé. En effet, la démonstration est identique avec celle qu'on connaît.

Considérons maintenant le cas $h \geqq 1$ et prenons $x_0 \in I$. Alors

$$P_0 = P(b) + (b - x_0) f(x_0) + \frac{1}{2}(b - x_0)^2 f'(\xi),$$

où

$$f_0 = f(x_0) = -P'(x_0) \geqq 0 \quad \text{et} \quad x_0 < \xi < b,$$

donc

$$f'(\xi) \leqq 0.$$

Il existe donc un entier $h' \leqq h$ $(h' \geqq 1)$ tel que

$$(b - x_0) f_0 \geqq h'\big(P_0 - P(b)\big).$$

Nous ne devons considérer que les x_0 pour lesquels $h' = h$. Puisque les conditions auxquelles $P(x)$ doit satisfaire dans I restent valables lorsqu'on remplace h par un nombre plus petit, on obtiendra les inégalités correspondantes pour un $x_0 \in I$ quelconque en remplaçant h par la partie entière de $\frac{(b - x_0) f_0}{P_0 - P(b)}$.

Soit donc

$$(b - x_0) f_0 \geqq h\big(P_0 - P(b)\big).$$

Posons

$$(r - x_0) f_0 = h\big(P_0 - P(b)\big).$$

On aura donc

$$x_0 \leqq r \leqq b.$$

Soit d'ailleurs

$$Q(x) = P(b) + \big(P_0 - P(b)\big)\left(\frac{r - x}{r - x_0}\right)^h.$$

Nous démontrerons que

$$Q(x) \leqq P(x) \quad \text{pour} \quad a \leqq x \leqq r.$$

Posons

$$\frac{r-x}{r-x_0}=y, \qquad \mathrm{P}(x)=\mathrm{P}(b)+\varphi(y)\big(\mathrm{P}_0-\mathrm{P}(b)\big).$$

La démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme. — *Si $\psi(y)$ possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre $h-1$ inclus pour $0 \leqq y \leqq c$, $c>1$; si $\psi^{(j)}(0) \geqq 0$ pour $0 \leqq j \leqq h-1$; si $\psi^{(h-1)}(y)$ est convexe vers le haut dans cet intervalle et si $\psi(1)=\psi'(1)=0$, alors $\psi(y) \geqq 0$ pour $0 \leqq y \leqq c$.*

Démonstration du lemme d'après J. H. B. Kemperman. — Si $\chi(y)$ est continue pour $0 \leqq y \leqq c$ et n'y possède que deux zéros au plus, si $\chi(0) \geqq 0$ et si $\mathrm{A} \geqq 0$, alors

$$\zeta(y)=\mathrm{A}+\int_0^y \chi(y)\,dy$$

ne possède que deux zéros au plus dans l'intervalle $0 \leqq y \leqq c$. En effet $\zeta(y)$ ne peut avoir qu'un zéro au plus entre les deux zéros de $\chi(y)$ et un zéro au plus entre le zéro de $\chi(y)$ ayant la plus grande abscisse, et c. Or, $\psi^{(h-1)}(y)$, étant continue et convexe ne peut avoir que deux zéros au plus. D'ailleurs $\psi^{(h-1)}(0) \geqq 0$ et $\psi^{(h-2)}(0) \geqq 0$. Donc $\psi^{(h-2)}$ non plus ne peut avoir plus de deux zéros au plus. Par induction on trouve que $\psi'(y)$ ne peut avoir que deux zéros au plus entre 0 et c. Or, 1 est un tel zéro, tandis qu'aussi

$$\psi(1)=\psi(0)+\int_0^1 \psi'(y)\,dy=0.$$

Donc, à cause de $\psi(0) \geqq 0$, $\psi'(0) \geqq 0$, $\psi'(y)$ doit avoir un seul zéro entre 0 et 1, et aucun >1. Il s'ensuit immédiatement que $\psi(y) \geqq 0$ dans tout l'intervalle $(0, c)$.

A cause des conditions imposées à $\mathrm{P}(x)$, la fonction

$$\psi(y)=\varphi(y)-y^h \qquad \text{avec} \quad y=\frac{(r-x)}{(r-x_0)}$$

satisfait aux conditions

$$\psi^{(j)}(0) \geqq 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq j \leqq h-i,$$

tandis que

$$\psi^{(h)}(y)=\varphi^{(h)}(y)-h\,!, \qquad \left(0 \leqq y \leqq c=\frac{r-a}{r-x_0}, c \geqq 1\right)$$

est non-décroissante, c'est-à-dire $\psi^{(h-1)}(y)$ est convexe vers le haut et continue. D'ailleurs

$$Q(x_0) = P_0 \quad \text{et} \quad Q'(x_0) = -\frac{h\big(P_0 - P(b)\big)}{(r - x_0)} = f_0,$$

donc

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi'(1) = h \quad \text{et} \quad \psi(1) = \psi'(1) = 0.$$

Le lemme s'applique donc et prouve que

$$\varphi(y) \geqq y^h \quad \text{pour} \quad 0 \leqq y \leqq \frac{r-a}{r-x_0},$$

c'est-à-dire que

$$Q(x) \leqq P(x) \quad \text{pour} \quad a \leqq x \leqq r.$$

Remarquons que dans le cas de Camp-Meydell $h = 1$, $P(x)$ es

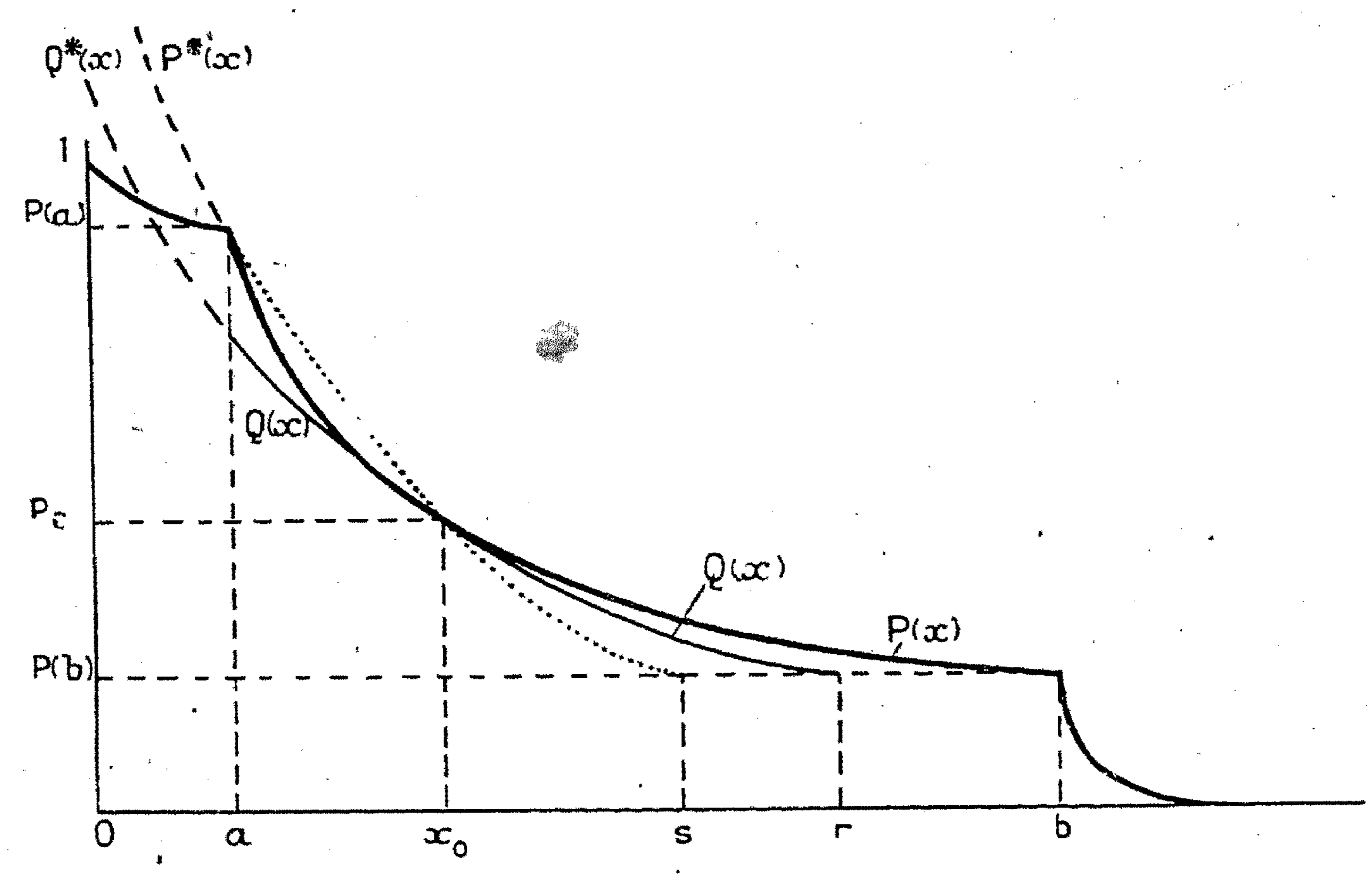

Fig. 1.

convexe, et $Q(x)$ est sa tangente en x_0. Dans ce cas, la relation $Q(x) \leqq P(x)$ est donc triviale.

Posons maintenant (*cf. fig.* 1)

$$(4) \qquad Q(x) = \begin{cases} P(x) & \text{pour } 0 \leqq x < a \quad \text{si } a > 0, \\ P(b)\big(P_0 - P(b)\big)\left(\dfrac{r-x}{r-x_0}\right)^h & \text{pour } a \leqq x \leqq r, \\ P(b) & \text{pour } r \leqq x < b, \\ P(x) & \text{pour } x \geqq b. \end{cases}$$

Cette fonction $Q(x)$ satisfait à l'inégalité $Q(x) \leqq P(x)$ pour chaque $x \geqq 0$. On peut donc appliquer la méthode esquissée au commencement.

Or, il va sans dire que les conditions imposées à $P(x)$ ne sont pas *nécessaires* pour qu'on ait $Q(x) \leqq P(x)$ pour chaque $x \geqq 0$. Comme vous l'avez fait dans votre livre, on peut, lorsqu'on veut seulement estimer $P(x_0)$ pour un x_0 déterminé, chercher une courbe du type de $Q(x)$ qui est toujours $\leqq P(x)$. Tout ce qui va suivre reste valable lorsqu'il existe une parabole $Q(x) = B + C(r - x)^h$ du degré h, telle que $r > x_0$, $B \geqq 0$, $C \geqq 0$, $Q(x_0) = P(x_0)$ et que $P(x) \geqq Q(x)$ pour $x_0 \leqq x \leqq r$. On prendra alors pour b la plus grande abscisse avec $P(b) = B$ et pour a l'abscisse minimum telle que $P(x) \geqq Q(x)$ pour $a \leqq x \leqq x_0$, et telles que $P(x)$ satisfasse aux conditions mentionnées pour $a \leqq x \leqq b$.

On aura

$$
\begin{aligned}
(5)\quad \beta_k = -\int_0^\infty x^k\, dQ(x) = &-\int_0^a x^k\, dP(x) + \{P(a) - Q(a)\}\, a^k \\
&+ \int_a^r x^k\, dQ(x) - \int_b^\infty x^k\, dP(x) = m_k(a) \\
&+ \left\{ P(a) - P(b) - \big(P_0 - P(b)\big)\left(\frac{r-a}{r-x_0}\right)^h \right\} a^k \\
&+ \int_a^r x^k \frac{\big(P_0 - P(b)\big)}{r - x_0}\, h \left(\frac{r-x}{r-x_0}\right)^{h-1} dx + M_k(b),
\end{aligned}
$$

où

$$
m_k(a) = -\int_0^a x^k\, dP(x),
$$

$$
M_k(b) = -\int_b^\infty x^k\, dP(x) = \alpha_k - m_k(b).
$$

Posons

$$
x_0 = \rho r, \qquad a = \alpha x_0, \qquad b = \beta x_0, \qquad x = \xi r.
$$

On obtient

$$
\rho^{-1} - 1 = \frac{h\big(P_0 - P(b)\big)}{x_0 f_0},
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_k x_0^{-k} = &\frac{h\big(P_0 - P(b)\big)}{\rho^k (1-\rho)^h} \int_{\alpha\rho}^1 \xi^k (1-\xi)^{h-1}\, d\xi \\
&+ \left\{ P(a) - P(b) - \big(P_0 - P(b)\big)\left(\frac{1-\alpha\rho}{1-\rho}\right)^h \right\} \alpha^k + m_k(a) x_0^{-k} + M_k(b) x_0^{-k} \\
= &\big(P(a) - P(b)\big)\alpha^k + \{m_k(a) + M_k(b)\}\, x_0^{-k} + \frac{\big(P_0 - P(b)\big) I(\alpha\rho)}{\rho^k (1-\rho)^h},
\end{aligned}
$$

où

$$I(\alpha\rho) = h\int_{\alpha\rho}^{1} \xi^k(1-\xi)^{h-1}\,d\xi - (1-\alpha\rho)^h \rho^k \alpha^k = \int_{\alpha\rho}^{1} (1-\xi)^h\,d\xi^k$$
$$= \frac{h!\,k!}{(h+k)!} - \sum_{0}^{h} (-1)^j \frac{h!}{j!(h-j)!}\,\frac{k}{k+j}(\alpha\rho)^{k+j}$$

est un polynome en ρ du degré $h+k$ lorsque $\alpha \neq 0$, et du degré zéro lorsque $\alpha = 0$.

Le polynome $I(\alpha\rho)$ reste borné et positif sur l'intervalle $0 \leqq \rho \leqq 1$, tandis que le dénominateur $\rho^k(1-\rho)^h$ est nul aux extrémités de cet intervalle (supposé que $h \neq 0$, $k \neq 0$). Donc le quotient $\frac{\rho^k(1-\rho)^h}{I(\alpha\rho)}$ possède un maximum absolu fini, que nous dénotons par $\Gamma_{h,k}(\alpha)$. Ce maximum est atteint par le quotient pour une valeur déterminée $\hat{\rho}$ de ρ. Pour obtenir cette valeur et celle du minimum, on doit résoudre une équation algébrique du degré $k+h$, à savoir

$$\frac{\alpha I'(\alpha\hat{\rho})}{I(\alpha\hat{\rho})} - \frac{k}{\hat{\rho}} + \frac{h}{1-\hat{\rho}} = 0,$$

ou

$$\big((k+h)\hat{\rho} - k\big) I(\alpha\rho) + \hat{\rho}(1-\hat{\rho})\alpha I'(\alpha\rho) = 0.$$

On vérifie aisément que le terme du degré $k+h+1$ s'évanouit. On obtient ainsi :

$$\alpha_k \geqq \beta_k \geqq \hat{\beta}_k = \big(P(a) - P(b)\big)a^k + m_k(a) + M_k(b) + \big(P_0 - P(b)\big)x_0^k \frac{I(\alpha\hat{\rho})}{\hat{\rho}^k(1-\hat{\rho})b},$$

ou, en posant

$$\alpha'_k = \alpha_k - \big(P(a) - P(b)\big)a^k - m_k(a) - M_k(b) = -\int_a^b (x^k - a^k)\,dP(x),$$
$$\alpha'_k \geqq \big(P_0 - P(b)\big)\frac{x_0^k}{\Gamma_{h,k}(\alpha)}.$$

Cela donne l'inégalité nouvelle

$$P_0 \leqq P(b) + \Gamma_{h,k}(\alpha)\,\alpha'_k x_0^{-k}, \tag{6}$$

où

$$\Gamma_{h,k}(\alpha) = \frac{\hat{\rho}^k(1-\hat{\rho})^h}{I(\alpha\hat{\rho})},$$
$$\alpha'_k = -\int_a^b (x^k - a^k)\,dP(x).$$

Nous pouvons résumer nos résultats dans le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Supposons que la fonction de répartition* $1-P(x)$ *de la valeur absolue d'une variable aléatoire possède pour* $a \leqq x \leqq b$ *(où* $0 \leqq a < b \leqq \infty$*) des dérivées jusqu'à l'ordre* h *inclus, que* $(-1)^j P^{(j)}(x)$ *soit positif dans cet intervalle pour* $0 \leqq j \leqq h$ *et non-croissant pour* $j = h$*; soit pour un* x_0 *quelconque avec* $a \leqq x_0 \leqq b$. h^* *la partie entière de*

$$\frac{(b-x_0)f(x_0)}{P(x_0)-P(b)}, \qquad \text{où} \quad f(x) = -\frac{dP(x)}{dx};$$

soit d'ailleurs $h' = \mathrm{Min}(h, h^*)$,

$$r = x_0 + h'\frac{P(x_0)-P(b)}{f(x_0)},$$

$$\alpha'_k = -\int_a^b (x^k - a^k)\,dP(x)$$

et

$$\Gamma_{h',k}(\alpha) = \max_{0 \leq \rho \leq 1} \frac{\rho^k(1-\rho)^{h'}}{k\int_{\alpha\rho}^{1} \xi^{k-1}(1-\xi)^{h'}\,d\xi} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1,$$

alors $h' \geqq 1$, $\Gamma_{h,k}(\alpha)$ *peut être déterminée au moyen de la solution d'une équation algébrique d'un degré* $\leqq h'+k$, *et* $P(x_0)$ *satisfait à l'inégalité*

$$P(x_0) \leqq P(b) + \Gamma_{h',k}\left(\frac{a}{r}\right)\frac{\alpha'_k}{x_0^k}.$$

Cas particuliers. — Dans le cas spécial $a = 0$ (cas de Meydell généralisé) le maximum $\Gamma_{h,k}(0)$, *que nous dénoterons par* $\gamma_{h,k}$, peut être calculé explicitement. En effet, dans ce cas, $I(\alpha\rho) = \frac{h!\,k!}{(h+k)!}$ est constante. Donc $I'(\alpha\rho) = 0$ pour chaque ρ; l'équation qui détermine $\hat\rho$ devient $\frac{k}{\hat\rho} = \frac{h}{(1-\hat\rho)}$, ce qui donne $\hat\rho = \frac{k}{k+h}$ et

$$\boxed{\gamma_{h,k} = \frac{(h+k)!}{h!\,k!}\,\frac{h^h k^k}{(h+k)^{h+k}}}$$

D'ailleurs $a = 0$ donne $m_k(0) = 0$ et

$$\alpha'_k = -\int_0^b x^k\,dP(x).$$

L'inégalité (6) *elle-même devient pour* $a = 0$

$$P_0 \leqq P(b) + \gamma_{h,k}\alpha'_k x_0^{-k}. \tag{7}$$

Pour $h = 0$ (cas de Bienaymé-Tchebycheff) $\gamma_{0,k} = 1$. D'ailleurs on peut prendre $P(b) = 0$ et $\alpha'_k = \alpha_k$, puisque les conditions auxquelles doit satisfaire $P(x)$ sont vérifiées pour $a = 0$, $b = \infty$. C'est donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff qu'on obtient.

Pour $h = 1$ (cas de Meydell) $\gamma_{1,k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$. Le cas plus spécial $k = 2$ donne le coefficient bien connu $\gamma_{1,2} = \frac{4}{9}$. L'inégalité que nous avons obtenue est toutefois plus précise que celle de Meydell. En effet, si $h = 1$ et $x_0 \leqq \frac{k}{k+1} b$ (condition admise par Meydell), ou, pour un h quelconque $x_0 \leqq b(\gamma_{h,k})^{\frac{1}{k}}$, on a

$$x_0^k P(b) \leqq -\gamma_{h,k} b^k \int_b^\infty dP(x) \leqq -\gamma_{h,k} \int_b^\infty x^k \, dP(x) = \gamma_{h,k}(\alpha_k - \alpha'_k),$$

donc

$$P_0 \leqq \gamma_{h,k}\alpha_k x_0^{-k} - \{\gamma_{h,k}(\alpha_k - \alpha'_k)x_0^{-k} - B\} \leqq \gamma_{h,k}\alpha_k x_0^{-k}.$$

L'inégalité, correspondant pour un h quelconque à celle de Meydell elle-même, aurait été obtenue au moyen du même procédé que nous avons appliqué si (toujours dans le cas $a = 0$) on avait remplacé $Q(x)$ par une parabole du degré h, tangente à la courbe de répartition au point x_0, et ayant comme ordonnée du sommet la valeur 1 au lieu de $P(b)$, donc

$$Q(x) = \begin{cases} P_0 \left(\frac{r-x}{r-x_0}\right)^h & \text{pour } 0 \leqq x \leqq r, \\ 0 & \text{pour } x \geqq r; \end{cases}$$

$$r = x_0 + \frac{hP_0}{f_0}.$$

Cela donne

$$P_0 \leqq \gamma_{h,k}\alpha_k x_0^{-k}.$$

Pour $h = 2$ nous trouvons

$$\gamma_{2,k} = \frac{2k^k(k+1)}{(k+2)^{k+1}},$$

coefficient trouvé par M. de Jongh.

Le cas spécial $k = 2$ donne

$$\gamma_{2,2} = \frac{3}{8}.$$

Pour $h \to \infty$ et k constant les coefficients $\gamma_{h,k}$ ne tendent que lentement vers leur limite, qui d'ailleurs n'est pas zéro :

$$\lim_{h \to \infty} \gamma_{h,k} = \frac{e^{-k} k^k}{k!}.$$

Notamment $k = 2$ donne $2e^{-2} = 0{,}271$ tandis que

$$\gamma_{2,2} = \frac{3}{8} = 0{,}375, \qquad \gamma_{3,2} = \frac{6^3}{5^4} = 0{,}3456, \qquad \gamma_{4,2} = \frac{2^4.5}{3^5} = 0{,}3292, \; \ldots .$$

Pour h et k tous les deux très grands, *on trouve en première approximation*

$$\gamma_{h,k} \approx \left(2\pi \frac{hk}{h+k}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Revenons au cas général $a \neq 0$ et démontrons qu'on peut pour un h quelconque obtenir une inégalité du type de celle de M. Camp. Il s'ensuivra que l'inégalité de Camp est bien moins précise que la nôtre.

Cette inégalité s'obtient lorsqu'on tâche d'éviter l'introduction de la fonction $\Gamma_{h,k}(\alpha)$ au lieu du nombre $\gamma_{h,k}$. Il faut pour cela remplacer la partie de la fonction $Q(x)$ pour $x \leqq a$ par le prolongement $Q^*(x)$ de la parabole qu'on a pour $a \leqq x \leqq r$. Afin de pouvoir utiliser $Q(x)$, il faudra remplacer la partie $0 \leqq x \leqq a$ de la courbe $P(x)$ par une autre $P^*(x)$, qui est toujours $\geqq Q^*(x)$. Une telle courbe $P^*(x)$ peut s'obtenir comme la partie $0 \leqq x \leqq a$ d'une autre parabole du degré h, ayant aussi son sommet sur la hauteur $P(b)$, et passant par $\big(a, P(a)\big)$ de même que (x_0, P_0). Donc

$$P^*(x) = P(b) + c(s-x)^h \qquad (0 \leqq x \leqq a),$$

avec

$$\frac{s - x_0}{x_0 - a} = \frac{\big(P_0 - P(b)\big)^{\frac{1}{h}}}{\big(P(a) - P(b)\big)^{\frac{1}{h}} - \big(P_0 - P(b)\big)^{\frac{1}{h}}},$$

$$c = \frac{P_0 - P(b)}{(s - x_0)^h}.$$

En comparaison nous avons

$$Q^*(x) = P(b) + \frac{P_0 - P(b)}{(r - x_0)^h}(r - x)^h \qquad (0 \leqq x \leqq a).$$

Puisque $P^*(a) = P(a) \geqq Q^*(a) = Q(a)$, nous trouvons

$$\frac{s-a}{s-x_0} \geqq \frac{r-a}{r-x_0}, \qquad \text{donc} \quad s \leqq r,$$

puisque $a \leqq x_0 \leqq r$ et $x_0 \leqq s$. Il s'ensuit que pour $1 \leqq j \leqq h$, $0 \leqq x \leqq a$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{d}{dx}\right)^j P^*(x) &= \big(P_0 - P(b)\big)\frac{h!}{(h-j)!}\,\frac{(s-x)^{h-j}}{(s-x_0)^h} \\ &\geqq \big(P_0 - P(b)\big)\frac{h!}{(h-j)!}\,\frac{(r-x)^{h-j}}{(r-x_0)^h} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^j Q^*(x),\end{aligned}$$

$\frac{(s-x)^{h-j}}{(s-x_0)^h}$, considérée comme fonction de s, étant décroissante pour $x \leqq x_0 \leqq s \leqq r$. Donc, nous avons, en effet,

$$P^*(x) - Q^*(x) \geqq 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq a,$$

le développement du membre gauche par rapport à $a - x$ n'ayant que des coefficients non-négatifs. Alors

$$-\int_0^a x^k\, dQ^*(x) \leqq -\int_0^a x^k\, dP^*(x) = \big(P_0 - P(b)\big)C,$$

où C dépend de a, de b et de x_0, et des valeurs de $P(x)$ en ces points, mais non de f_0, donc de r. En combinant cette inégalité avec (4) et (5) nous trouvons, en remplaçant la notation $Q^*(x)$ par $Q(x)$, pour $0 \leqq x \leqq a$:

$$\begin{aligned}\alpha_k - m_k(a) - M_k(b) &\geqq -\int_a^r x^k\, dQ(x) + a^k\big(P(a) - Q(a)\big) \\ &\geqq -\int_a^r x^k\, dQ(x) \geqq -\int_0^r x^k\, dQ(x) + \int^a x^k\, dP^*(x) \\ &= \frac{\big(P_0 - P(b)\big)h}{(r-x_0)^h}\int_0^r x^k(r-x)^{h-1}\,dx \\ &\quad - \frac{\big(P_0 - P(b)\big)h}{(s-x_0)^h}\int_0^a x^k(s-x)^{h-1}\,dx.\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\frac{(s-x)^{h-1}}{(s-x_0)^h} &= \sum_0^{h-1}\binom{h-1}{i}\left(\frac{s-a}{s-x_0}\right)^i\left(\frac{x_0-a}{s-x_0}\right)^{h-i}\frac{(a-x)^{h-i-1}}{(x_0-a)^{h-i}} \\ &\leqq \sum_1^{h-1}\binom{h-1}{i}\left(\frac{s-a}{s-x_0}\right)^h\frac{(a-x)^{h-i-1}}{(x_0-a)^{h-i}} + \frac{(a-x)^{h-1}}{(s-x_0)^h} \\ &= \frac{(x_0-x)^{h-1}}{(x_0-a)^h}\left(\frac{s-a}{s-x_0}\right)^h - \frac{(a-x)^{h-1}}{(x_0-a)^h}\left(\frac{s-a}{s-x_0}\right)^h + \frac{(a-x)^{h-1}}{(s-x_0)^h}.\end{aligned}$$

Puisque pour $h \geqq 1$ $(s-x_0)^h + (x_0-a)^h \leqq (s-a)^h$ donc

$$\frac{1}{(s-x_0)^h} - \frac{1}{(x_0-a)^h}\left(\frac{s-a}{s-x_0}\right)^h \leqq -\frac{1}{(x_0-a)^h}$$

et que

$$\left(\frac{s-a}{s-x_0}\right)^h = \frac{P(a)-P(b)}{P_0-P(b)},$$

cela devient

$$\leqq \frac{(x_0-x)^{h-1}}{(x_0-a)^h}\,\frac{P(a)-P(b)}{P_0-P(b)} - \frac{(a-x)^{h-1}}{(x_0-a)^h}.$$

Par substitution nous trouvons enfin

$$\begin{aligned}\alpha_k - m_k(a) - M_k(b) &\\ \geqq \left(P_0 - P(b)\right) &\left\{\frac{h\displaystyle\int_0^r x^k(r-x)^{h-1}\,dx}{(r-x_0)^h} + \frac{h\displaystyle\int_0^a x^k(a-x)^{h-1}\,dx}{(x_0-a)^h}\right\}\\ &- \left(P(a)-P(b)\right)\frac{h\displaystyle\int_0^a x^k(x_0-x)^{h-1}\,dx}{(x_0-a)^h}.\end{aligned}$$

Donc, en prenant le minimum du membre droit par rapport à r, et en posant

$$\varphi = \gamma_{h,k}\,\frac{h\displaystyle\int_0^a x^k(a-x)^{h-1}\,dx}{(x_0-a)^h x_0^k} = \frac{k^k h^h \alpha^{k+h}}{(k+h)^{k+h}(1-\alpha)^h} \qquad \left(\alpha = \frac{a}{x_0}\right),$$

$$\psi = \frac{\displaystyle\int_0^a x^k(x_0-x)^{h-1}\,dx}{\displaystyle\int_0^a x^k(a-x)^{h-1}\,dx} = \frac{I_{k+1,h}(\alpha)}{\alpha^{k+h}},$$

où

$$I_{l,h}(\alpha) = \frac{1}{B(l,h)}\int_0^\alpha \xi^{l-1}(1-\xi)^{h-1}\,d\xi = \sum_0^{h-1}\binom{l+h-1}{l+j}\alpha^{l+j}(1-\alpha)^{h+1-j},$$

nous obtenons enfin

$$\boxed{P_0 \leqq P(b) + \gamma_{h,k}\,\frac{\alpha_k - m_k(a) - M_k(b)}{x_0^k}\,\frac{1}{1+\varphi} + \frac{\left(P(a)-P(b)\right)\psi}{1+\varphi^{-1}}}$$

C'est cette inégalité qui se change en celle de Camp pour $h=1$, en prenant $b=\infty$, donc $P(b) = M_k(b) = 0$, et en remplaçant le terme $m_k(a)$ par zéro. Dans ce cas $\psi = 1$ et le dernier terme devient le Θ de Camp.

A cause de l'emploi des inégalités $(x_0-a)^{h-i} \leqq (s-a)^{h-i}$, et notamment $(s - x_0)^h + (x_0 - a)^h \leqq (s - a)^h$ (laquelle pour $h \geqq 2$ ne devient une égalité que si l'un au moins des termes du membre gauche est égal à zéro), l'inégalité généralisée de Camp est bien moins précise que la nôtre. On pourrait obtenir une inégalité plus précise, en substituant plus tôt l'égalité

$$\frac{s - x_0}{s - a} = \left(\frac{P_0 - P(b)}{P(a) - P(b)}\right)^{\frac{1}{h}},$$

et en résolvant une équation algébrique du degré h pour trouver $P_0 - P(b)$. En omettant les détails, nous ne donnons que le résultat. Si $\lambda = \varphi_{h,k}(\alpha, C)$ est $\geqq 0$ et $\leqq 1$ et satisfait à l'équation

$$\frac{\lambda^h}{\gamma_{h,k}} - \sum_{j=1}^{h} (-1)^{j-1} \frac{h!\,k!}{(h-j)!\,(k+j)!} \lambda^{h-j} \left(\frac{1-\lambda}{1-\alpha}\right)^j I_{k+1,j}(\alpha) = C,$$

on a

$$(8) \qquad P_0 \leqq P(b) + \left\{\varphi_{h,k}\left(\frac{a}{x_0}, \frac{\alpha_k - m_k(a) - M_k(b)}{x_0^k\big(P(a) - P(b)\big)}\right)\right\}^h \big(P(a) - P(b)\big).$$

Pour $h = 1$,

$$\varphi_{1,k}(\alpha, C) = \frac{\gamma_{1,k} C + \varphi}{1 + \varphi}$$

donne l'inégalité de Camp.

Amsterdam, février 1950,
Publication du Centre Mathématique.