MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

1953-32(2)

Statistische analyse van waterstanden, methoden en resultaten.

II. Onderzoek naar een verband tussen hoogwaterstanden of wateropzetten en activiteit van de zon

1953

1. Inleiding.[1]

In dit rapport wordt onderzocht of er een merkbare invloed is van de zonne-activiteit (zonnevlekken) op de hoogwaterstanden en wateropzetten langs de Nederlandse kust. De mogelijkheid van het bestaan van een dergelijke invloed moest, in verband met verdere statistische analyses van de H.W.'s en de opzetten, onder ogen worden gezien. Het onderzoek werd verricht voor de plaatsen Hoek van Holland, Vlissingen, Willemstad en IJmuiden. De gegevens over de zonnevlekken zijn ontleend aan W.BRUNNER, Tabellen und Kurven zur Darstellung der Häufigkeit der Sonnenflecken in den Jahren 1749-1944, Astron. Mitt. nr. 145 (1945) 135-149, aangevuld tot 1950 met gegevens van het Astronomisch Instituut van de Gemeentelijke Universiteit van Amsterdam. De gegevens over de H.W.'s zijn ontleend aan de desbetreffende jaarboeken en aan turfstaten, samengesteld en ons welwillend ter beschikking gesteld door het Departement van Waterstaat, dat ons ook de turfstaten van de wateropzetten verschafte, die wij bij dit onderzoek gebruikten. Deze zeer gewaardeerde medewerking heeft ons veel werk bespaard.

Het resultaat van het onderzoek was negatief: wij vonden geen enkele aanwijzing voor een (positieve of negatieve) invloed van de zonne-activiteit op H.W.'s of opzetten, ook niet, indien wij rekening hielden met een eventuele vertraging in het optreden van dit effect.

2. Methode van onderzoek.

De zonne-activiteit vertoont, als functie van de tijd, een schommelend verloop van ingewikkeld karakter met een niet constante periode van ongeveer 11 jaar.

Uit de beschouwde tijdsperiode (zie tabel 1) werden nu viertallen op elkaar volgende jaren genomen, waarin de zonne-activiteit laag was en viertallen, waarin deze juist hoog was. Wij geven deze verder aan met L-perioden en H-perioden. Eén L-periode met de direct daarop volgende H-periode noemen wij een onderzoek-eenheid. Wij onderzoeken nu of de in tabel 1 vermelde grootheden in de L-periodensystematisch lager of hoger lagen dan in de daarop volgende H-perioden.

----

1) Dit rapport is het resultaat van gemeenschappelijk onderzoek van een aantal leden van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum.

Tabel 1

In het onderzoek betrokken grootheden; notatie en onderzoekingsperiode

notatie	grootheid	periode
a	De hoogste H.W. in een kalenderjaar	1865-1940
b	Het gemiddelde der H.W.'s van drie opeenvolgende maanden November, December en Januari	1865-1940
c	De som van de hoogste H.W.'s van ieder van 3 opeenvolgende maanden November, December en Januari	1865-1940
d	De som van de 5 hoogste waarnemingen uit perioden van October tot en met Februari	1889-1940
e	De hoogste opzet van een kalenderjaar	1890-1950
f	De som der 5 hoogste opzetten uit een kalenderjaar	1890-1950

Opmerkingen.

De keuze der onderzochte grootheden en die der onderzoekingsperioden werd hoofdzakelijk bepaald door de gemakkelijke verkrijgbaarheid van de desbetreffende gegevens. Vandaar dat bij de grootheden a, e en f met kalenderjaren gewerkt is, hoewel in de regel jaren van Augustus tot en met Juli in het volgende kalenderjaar voor het probleem der H.W.'s relevanter zijn dan kalenderjaren. Hieraan is bij winterperioden tegemoet gekomen (b, c en d). Bij het onderhavige onderzoek, waarbij een L- en H-periode ieder over 4 jaar lopen, doet dit er trouwens niet zo veel toe.

Beschouwen wij nu één van de grootheden a,...,f , die wij met x aangeven, dan werd de volgende methode gebruikt. Voor de 4 waarnemingen van x in een L-periode en de 4 waarnemingen in de direct daarop volgende H-periode werd de grootheid U van WILCOXON [2] uitgerekend. Iedere onderzoekingseenheid geeft ons dus één waarneming van U. Deze werden vervolgens opgeteld en zodoende tot één toetsingsgrootheid verenigd [3]. De bij de voor deze toetsings-

---

2) Zie het aan dit rapport toegevoegde memorandum S 47 (M 7).

3) Zie het aan dit rapport toegevoegde memorandum S 102 (M 17b), Methode 1.

grootheid gevonden waarde behorende tweezijdige overschrijdingskans [4] werd bepaald en uit de waarden daarvan voor de verschillende plaatsen en grootheden wordt de uiteindelijke conclusie getrokken. Dezelfde bewerkingen zijn toegepast na verschuiving van de L- en H-perioden over 1, 2, 3 resp. 4 jaar om een eventuele vertraging van de invloed der zonne-activiteit in de onderzoekingen op te nemen.

3. Resultaten van dit onderzoek.

De resultaten zijn in de vorm van tweezijdige overschrijdingskansen in tabel 2 samengevat. Zoals uit de tabel blijkt, zijn niet voor alle 4 plaatsen alle grootheden a,...,f onderzocht, daar het, gezien de reeds gevonden waarden der overschrijdingskansen, overbodig geacht kan worden nog meer berekeningen uit te voeren.

Tabel 2

Resultaten van het onderzoek (tweezijdige overschrijdingskansen)

Hoek van Holland

aantal jaren verschuiving	a	b	c	d	e	f
0	0,60	0,58	-	0,27	0,44	0,40
1	0,56	0,04	-	0,18	0,52	0,69
2	0,25	0,44	-	0,47	0,37	0,60
3	0,12	0,73	-	0,67	0,60	0,79
4	0,66	0,73	-	0,89	0,78	0,69

Vlissingen

0	0,30	0,06	0,38	-	0,79	0,25
1	0,41	0,08	0,52	-	0,27	0,30
2	0,65	0,78	0,65	-	0,27	0,40
3	1	0,73	0,73	-	0,32	0,84
4	0,32	0,73	1	-	0,78	0,27

Willemstad

0	0,35	0,28	0,33	-	-	-
1	0,45	0,16	0,16	-	-	-
2	0,22	0,58	0,83	-	-	-
3	0,11	0,25	0,69	-	-	-
4	0,38	0,73	0,95	-	-	-

---

4) Zie het aan dit rapport toegevoegde memorandum S 47 (M 6).

IJmuiden

aantal jaren verschuiving	a	b	c	d	e	f
0	0,09	0,35	0,81	-	-	-
1	0,52	0,14	0,48	-	-	-
2	0,76	0,90	0,72	-	-	-
3	0,35	0,38	0,80	-	-	-
4	0,21	0,42	0,80	-	-	-

Voor de betekenis van de letters a, b,...,f vergelijke men tabel 1.

4. Conclusie.

In tabel 2 komen slechts weinig kleine overschrijdingskansen voor; zelfs iets minder dan men er zou verwachten als er geen verband tussen de zonnevlekken en de H.W.'s en opzetten bestaat. Er is derhalve geen enkele reden om uit dit onderzoek tot een dergelijk verband te besluiten. Hierbij moeten wij een restrictie maken, wat het soort van verband betreft. De toets, die wij hebben gebruikt, stelt ons in staat een eventuele invloed van de zonne-activiteit op de H.W.'s en opzetten te ontdekken, indien deze invloed bestaat uit een verhoging of verlaging bij toenemende zonne-activiteit, in hetzelfde jaar of in één der 4 volgende jaren. Hoewel men op grond van een toets nooit kan besluiten tot de volledige afwezigheid van een dergelijke invloed, blijkt uit het onderhavige onderzoek wel, dat deze, indien niet volledig afwezig, toch te verwaarlozen klein is voor de onderzochte grootheden a, b,...,f. Het is echter niet ondenkbaar, dat er een invloed zou zijn, die bij dit onderzoek aan de aandacht ontsnapt is, b.v. een zeer kortstondige, die ook op kan treden in jaren met weinig activiteit of een invloed, die al tot uiting komt, voordat de zonnevlekken zich vertonen en die dus ontdekt zou kunnen worden door verschuiving der onderzoekingseenheden in negatieve in plaats van in positieve richting langs de tijd-as. Ook invloeden van veel complexere aard worden door het onderhavige onderzoek niet uitgesloten.

Daar wij deze mogelijkheden niet erg aannemelijk achten en het te ver zou voeren ze nu te onderzoeken — en daar er dan bovendien zoveel mogelijkheden zijn, dat men wel aan de gang kan blijven — volstaan wij voor het moment met dit onderzoek. Bij verdere onderzoekingen zal zich vermoedelijk de mogelijkheid voordoen dit onderzoek langs andere weg voort te zetten. Voorlopig echter komen wij tot de conclusie, dat een splitsing van het materiaal naar aanleiding van de zonne-activiteit niet nodig is.

MATHEMATISCH CENTRUM
Amsterdam
Statistische Afdeling.
S47(M6)

Algemene gang van zaken bij het toetsen van een hypothese.[1]

De toetsing van een hypothese $\mathcal{H}_0$ berust steeds op een aantal waarnemingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ van één of meer stochastische grootheden[2], of op enige groepen van waarnemingen (bv. twee steekproeven).

Bij een toets behoort een toetsingsgrootheid $\underline{u}$ (soms meer dan één), die een functie is van bovengenoemde stochastische grootheden en die, voor de waargenomen waarden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ een waarde aanneemt, die berekend kan worden (bv.: het gemiddelde der waarnemingen, of de spreiding, of het verschil van de gemiddelden van twee waarnemingen).

De toetsingsgrootheid wordt steeds zo gekozen, dat men, op grond van de onderstelling, dat $\mathcal{H}_0$ juist is, de waarschijnlijkheidsverdeling van deze grootheid kan berekenen.

Vervolgens kiest men een verzameling Z van mogelijke uitkomsten van $\underline{u}$, en wel op zodanige wijze, dat de kans, dat $\underline{u}$ een in Z gelegen waarde aanneemt, onder de hypothese $\mathcal{H}_0$, gelijk is aan een gegeven getal α, zodat Z dus van α afhankelijk is[3]. Z heet de kritieke zône van de toets, α de onbetrouwbaarheidsdrempel (Engels: level of significance). Voor α neemt men veelal de waarde 0,05 of 0,01.

Men verwerpt nu $\mathcal{H}_0$ op grond van de waarnemingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, indien de bij deze waarnemingen behorende waarde van $\underline{u}$ in Z ligt. Dit wordt vaak uitgedrukt door te zeggen, dat het resultaat van het experiment "significant" is. De waarde van α moet dan echter worden vermeld. De kans, dat dit zal gebeuren, is, indien $\mathcal{H}_0$ juist is, gelijk aan α. Derhalve is α de kans op ten onrechte verwerping van de juiste hypothese, ook de kans op een fout van de eerste soort genoemd. Indien men deze methode toepast, met α = 0,05 resp. 0,01, zal men in gemiddeld ongeveer één op 20 resp. op 100 van de gevallen, waarin de hypothese die men toetst juist is, deze toch verwerpen.

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

2) Een stochastische grootheid is een grootheid, die een waarschijnlijkheidsverdeling bezit, of, anders gezegd, een grootheid, die voor de elementen van een collectie(universum,populatie) gedefinieerd is en daarop allerlei waarden aanneemt. Stochastische grootheden worden aangegeven door onderstreepte letters.

3) Soms kan men slechts bereiken, dat deze kans $\leq \alpha$ is.

De toetsingstheorie biedt in het algemeen geen mogelijkheid om tot aanvaarding van een hypothese te komen. Indien een bepaalde hypothese H_0 niet verworpen kan worden, is dit gewoonlijk met een hele verzameling van hypothesen tegelijk het geval. Niet-verwerpen staat dus niet gelijk met aanvaarden.

Wel zal men vaak in de loop van een statistische analyse bepaalde onderstellingen, die plausibel schijnen en voor de verdere analyse van nut zijn, toetsen, alvorens ze bij de verdere bewerking van het materiaal te gebruiken. Worden zij dan op grond van de toets niet verworpen, dan houdt dit in zo verre een rechtvaardiging van die onderstellingen in, dat een grote afwijking door de toets veelal wel zou zijn ontdekt. Indien men dan verder de onderstellingen gebruikt, verwaarloost men eventueel aanwezige afwijkingen van onbekende grootte, die echter niet zo groot zijn, dat zij door de toets zijn ontdekt.

Vele toetsen gelden zelf alleen onder bepaalde onderstellingen omtrent de waarschijnlijkheidsverdelingen der stochastische grootheden, waarvan waarnemingen zijn verricht. Deze nevenvoorwaarden dienen steeds uitdrukkelijk te worden vermeld en, zo mogelijk, zelf te worden getoetst.

In plaats van de onbetrouwbaarheidsdrempel α wordt vaak bij de uitslag van een toetsing de overschrijdingskans k opgegeven; dit is de kleinste waarde van α, waarbij in het betrokken geval, nog tot verwerping van H_0 zou zijn overgegaan; anders gezegd: de kleinste α, waarvoor de gevonden waarde der toetsingsgrootheid nog juist in de (bij α behorende) kritieke zône Z ligt. Wordt dus de waarde k opgegeven en werkt men met onbetrouwbaarheidsdrempel α, dan wordt verworpen, indien $k \leq \alpha$ is.

Voor het onderscheid tussen één- en tweezijdige toetsing en de keuze tussen deze twee mogelijkheden vergelijke men bv. de tweede hieronder gegeven litteratuurplaats. Wij moeten hier volstaan met de opmerking, dat éénzijdige toetsing veelal eerder tot verwerping van H_0 leidt, maar dat deze slechts onder bijzondere omstandigheden kan worden toegepast.

Litteratuur:

J.Neyman, First course in probability and statistics, New York, 1950, Chapter 5.

J.Hemelrijk en H.R. van der Vaart, Het gebruik van één- en tweezijdige overschrijdingskansen voor het toetsen van hypothesen, Statistica 4 (1950) p.54-66.

Mathematisch Centrum,
2de Boerhaavestraat 49,
Amsterdam O.
Statistische Afdeling,
S47 (M7). Maart, 1952.

De toets van Wilcoxon.[1])

Deze methode dient tot het toetsen van de hypothese H_o, inhoudende, dat twee steekproeven $x_1,\ldots,x_n$ en $y_1,\ldots,y_m$ afkomstig zijn uit één collectie (ook wel populatie of universum genaamd).

Voor het toetsen van de hypothese H_o wordt gebruik gemaakt van een toetsingsgrootheid $\underline{U}$ [2]), die als volgt uit de waarnemingen berekend wordt. Onderstellen we, dat de waarnemingen $x_1,\ldots,x_n$ en $y_1,\ldots,y_m$ naar opklimmende grootte gerangschikt zijn, dan bepalen we eerst het aantal waarnemingen uit de tweede steekproef, dat kleiner is dan de kleinste waarneming x_1 uit de eerste steekproef (bij gelijkheid tellen wij $\frac{1}{2}$ in plaats van 1). Noem dit aantal V_1. Vervolgens wordt het aantal waarnemingen uit de tweede steekproef bepaald, dat kleiner is dan de op één na kleinste waarneming x_2 uit de eerste steekproef (bij gelijkheid wordt weer een $\frac{1}{2}$ in plaats van 1 geteld). Dit aantal noemen we V_2. Evenzo worden met betrekking tot $x_3,x_4,\ldots,x_n$ de aantallen $V_3,V_4,\ldots,V_n$ bepaald. De waarde U van de toetsingsgrootheid $\underline{U}$ wordt voor de twee steekproeven dan gegeven door

$$U=V_1+V_2+\ldots+V_n.$$

Wanneer onder de waarnemingen niet te veel gelijken voorkomen, kan bewezen worden, dat de toetsingsgrootheid $\underline{U}$ onder de hypothese H_o voor grote waarden van n en m (beide $\geq$ 10) bij benadering een normale verdeling bezit. De waarnemingen $x_1,\ldots,x_n$ en $y_1,\ldots,y_m$ tezamen genomen vallen uiteen in een aantal groepen van gelijke waarnemingen. Noem het aantal van deze groepen k, dan is k minstens 1 (als alle waarnemingen gelijk zijn) en hoogstens m+n (als alle waarnemingen verschillend zijn).

---

[1]) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

[2]) Stochastische grootheden worden door onderstreping aangeduid.

Zijn $t_1, \ldots, t_k$ de aantallen waarnemingen in deze groepen van gelijken, dan worden het gemiddelde μ en de variantie σ^2 van de toetsingsgrootheid $\underline{U}$ gegeven door

$$\mu(\underline{U}) = \tfrac{1}{2}nm,$$

en

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\ (\underline{U}) = \frac{1}{12}\,\frac{nm}{(n+m)(n+m-1)}\left\{(n+m)^3 + - (t_1^3 + t_2^3 + \ldots + t_k^3)\right\} \qquad ^{1)}$$

De grootheid $\mu(\underline{U})$ is dus onafhankelijk van de waarden vast. Indien de hypothese H_0 niet vervuld is, zal de grootheid $\underline{U}$ grote of kleine waarden bezitten, al naar gelang $\underline{y}$ systematisch kleiner of groter is dan $\underline{x}$.
De (tweezijdige) toets bestaat nu daarin, dat men H_0 verwerpt indien de gevonden waarde U van $\underline{U}$ te sterk van μ afwijkt, d.w.z. als

$$\frac{|U-\mu|}{\sigma} > \xi_\alpha\ , \qquad ^{2)}$$

waarin α de onbetrouwbaarheidsdrempel is en ξ_α volgt uit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\alpha\ ,$$

en in een tabel van de normale verdeling kan worden opgezocht.
De (tweezijdige) overschrijdingskans k , behorende bij T, is gedefiniëerd als

$$k = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\left|\frac{U-\mu}{\sigma}\right|}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \qquad ^{2)}$$

en kan ook in eenttabel van de normale verdeling worden gevonden.
Bij eenzijdige toetsing wordt α door 2α vervangen, resp. k gehalveerd.
Een bijzonder geval van het bovenstaande is, dat onder de waarnemingen voor $\underline{x}$ en $\underline{y}$ in 't geheel geen gelijken voorkomen. In dat geval kan de uitdrukking voor de variantie herleid worden tot

$$\sigma^2 = \frac{1}{12}\,nm(n+m+1).$$

---

1) Deze formule is een door T.J.Terpstra gegeven vereenvoudiging van de door J.Hemelrijk([5] en [7]) afgeleide formule. De afleiding van deze vereenvoudigde formule zal nog gepubliceerd worden.

2) Deze formules berusten op de normale benadering van de verdeling van $\underline{U}$.

Indien n en m kleiner zijn dan 10, zijn tabellen beschikbaar voor het berekenen van de overschrijdingskans k voor de uit de steekproef bepaalde waarde U van U (zie [2] en [4]). Dergelijke tabellen bestaan echter niet voor het geval, dat gelijke waarnemingen optreden.

Opmerking. Men kan gemakkelijk bewijzen, dat de variantie van U door het optreden van gelijke waarnemingen vermindert. Het verschil, dat door deze gelijken optreedt, is echter in het algemeen gering. Men kan daarom in eerste instantie deze correctie op σ^2 verwaarlozen. De overschrijdingskansen, die men dan vindt, zijn iets te groot.

Litteratuur:

1. F.Wilcoxon, — Individual comparisons by ranking methods, Biometrics 1 (1945), p.80-83.
2. H.B.Mann and D.R.Whitney — On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other, Amer.Math.Stat. 18 (1947),p. 50-60.
3. H.R.van der Vaart — Some remarks on the power function of Wilcoxon's test for the problem of two samples, Proceedings van de Kon. Ned.Ak.v.Wet., 53 (1950),p. 494-520.
4. H.R.van der Vaart — Gebruiksaanwijzing voor de toets van Wilcoxon, met tabellen voor n en $m \leq 10$, Rapport S32 (M4) (1950).
5. H.R.van der Vaart — De toets van Wilcoxon voor het probleem van twee steekproeven. (Cursus "Parametervrije Methoden", 1951-'52).
6. D.van Dantzig — Kadercursus Mathematische Statistiek, Math. Centrum, Amsterdam (1947-'50), hoofdst. 6, § 3.
7. J.Hemelrijk — Note on Wilcoxon's two sample test, when ties are present, Ann.Math.Stat. 23 (1952) no. 2.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
Amsterdam-O.

Statistische Afdeling
Rapport S 102 (M 17b)

Het combineren van onafhankelijke toetsen (aanvulling) [1].

In memorandum S 73 (M 17a) wordt een methode voor combinatie van onafhankelijke toetsen behandeld, waarbij het nodig is de overschrijdingskans van iedere toets te bepalen. In vele gevallen kan men de combinatie ook direct op de afzonderlijke toetsingsgrootheden baseren en dit verdient zelfs de voorkeur.

Wij beschouwen hier het geval, dat een bepaalde toets moet worden toegepast op een heterogeen materiaal. Dit materiaal wordt dan eerst verdeeld in h homogeen geachte groepen. Het aantal waarnemingen van de i^e groep zij n_i en de toetsingsgrootheid $\underline{t}_i$ [2]. Laat verder gegeven zijn, dat de verdeling van $\underline{t}_i$ onder de getoetste hypothese (voor de i^e groep aangeduid door H_i) voor grote n_i asymptotisch normaal [3] is, met bekende verwachting μ_i en bekende spreiding σ_i. Aan deze voorwaarden is o.a. voldaan, indien wij te doen hebben met toetsen van WILCOXON, rangcorrelatietoetsen van KENDALL of SPEARMAN, tekentoetsen enz.

Wij toetsen met al de hier te behandelen gecombineerde methoden de hypothese H, dat voor iedere groep de desbetreffende hypothese H_i geldt, terwijl de groepen onderling onafhankelijk zijn. De toetsen verschillen echter ten aanzien van de alternatieve (van H afwijkende) hypothesen waarvoor zij gevoelig [4] zijn.

De meest gebruikelijke toetsingsgrootheden van gecombineerde toetsen zijn van de gedaante:

$$\underline{T} = \sum_{i=1}^{h} c_i(\underline{t}_i - \mu_i)$$

waarin de letters c_i ($i = 1,2,\ldots\ldots,h$) constanten voorstellen, die voor ieder van de combinatiemethoden op een bepaalde wijze

---

1) Dit memorandum dient slechts ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid. Het is bedoeld als een aanvulling op Rapport S 73 (M 17a).

2) De onderstreping geeft aan dat een toetsingsgrootheid stochastisch is, d.w.z. een waarschijnlijkheidsverdeling bezit.

3) Dit houdt in dat $\underline{t}_i$ een waarschijnlijkheidsverdeling heeft, die als n_i toeneemt, steeds minder van een normale verdeling (verdeling van Gauss) afwijkt.

4) Een toets van hypothese H is gevoelig ten opzichte van een alternatieve hypothese H', als de kans dat H verworpen wordt, indien H' juist is, groot is.

gekozen worden. Onder de hypothese H zal $\underline{T}$ asymptotisch (voor grote h en/of grote n_i) normaal verdeeld zijn met verwachting 0 en spreiding $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{h} c_i^2 \sigma_i^2}$. De dubbele overschrijdingskans van een gevonden waarde T van $\underline{T}$ is dus bij benadering gelijk aan:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\left|\frac{T}{\sigma}\right|}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$$

en kan bepaald worden met behulp van een tabel van de normale verdeling. Indien de dubbele overschrijdingskans kleiner is dan de onbetrouwbaarheidsdrempel α , zal men H verwerpen.

Wij geven hier 3 combinatiemethoden van dit type:

Methode 1: $c_1 = c_2 = \cdots\cdots = c_h = 1$

dus: $\underline{T} = \sum_{i=1}^{h} \underline{t}_i - \sum_{i=1}^{h} \mu_i$; $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{h} \sigma_i^2}$

Methode 2: $c_1 = \frac{1}{\sigma_1}$, $c_2 = \frac{1}{\sigma_2}$, ..., $c_h = \frac{1}{\sigma_h}$

dus: $\underline{T} = \sum_{i=1}^{h} \frac{\underline{t}_i - \mu_i}{\sigma_i}$; $\sigma = \sqrt{h}$

Methode 3: $c_1 = \frac{1}{n_1}$, $c_2 = \frac{1}{n_2}$,....., $c_h = \frac{1}{n_h}$

dus: $\underline{T} = \sum_{i=1}^{h} \frac{\underline{t}_i - \mu_i}{n_i}$; $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{h} \left(\frac{\sigma_i}{n_i}\right)^2}$

Deze methoden zijn alleen gevoelig ten aanzien van alternatieve hypothesen volgens welke de grootheden $\underline{t}_i$ verdelingen hebben die, voor zover zij afwijken van de verdelingen onder de corresponderende hypothesen H_i, dit over het algemeen in dezelfde richting doen. Men zal dan methode 1 bij voorkeur toepassen als men aan de $\underline{t}_i$ met een kleine spreiding (in de regel zullen dat de $\underline{t}_i$ van kleine groepen zijn) een geringer gewicht wil toekennen dan aan de $\underline{t}_i$ met een grote spreiding. De methoden 2 en 3 zijn te gebruiken als men aan de verschillende groepen waarnemingen, ongeacht hun grootte, een ongeveer gelijke invloed op het resultaat wil toekennen. De keuze tussen deze twee methoden hangt verder van hier niet te behandelen theoretische overwegingen af (zie literatuur [1]).

Indien men verwacht dat mogelijke verschuivingen van de verdelingen der $\underline{t}_i$ in beide richtingen kunnen liggen, verdient het de voorkeur om gebruik te maken van de volgende toetsingsgrootheid:

$$\sum_{i=1}^{h} \left(\frac{\underline{t}_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \qquad \text{(methode 4)}$$

Deze grootheid is onder de hypothese H asymptotisch verdeeld volgens een χ^2-verdeling met h vrijheidsgraden. De overschrijdingskans van een gevonden waarde van deze grootheid kan dus met behulp van een tabel van de χ^2-verdeling bepaald worden.

De toets, behandeld in memorandum S 73 (M 17a) par. 1, waarbij men het product van linkszijdige en product van alle rechtszijdige overschrijdingskansen bepaalt en het kleinste van deze twee producten gebruikt, heeft betrekking op dezelfde gevallen als de hier behandelde methoden 2 of 3, terwijl de methode, behandeld in S 73 (M 17a) par. 2, berustend op het product van de tweezijdige overschrijdingskansen, meer overeenkomt met <u>methode 4</u>. Men mag echter verwachten, dat, zo aan de asymptotische normaliteit der $\underline{t}_i$ voldaan is, de in dit memorandum behandelde methodenscherper zijn dan de toetsen behandeld in S 73 (M 17a).

<u>Literatuur</u>:

1 C.van Eeden, Methoden voor het vergelijken, toetsen en schatten van onbekende kansen, Rapport S 115 (M 45) van het Mathematisch Centrum (1953).

2 -----------, Trendtoets met behulp van rangcorrelatie, Memorandum S 73 (M 13a). (Voorbeeld van toepassing van <u>methode 1</u>.)

3 Dr J.Hemelrijk, Het combineren van onafhankelijke toetsen, Memorandum S 73 (M 17a).