STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

Publicatie

99

Sur un problème de M. Karamata

D. van Dantzig

1955

Nieuw Archief voor Wiskunde (3) III, 89—92 (1955)

SUR UN PROBLÈME DE M. KARAMATA

PAR

D. VAN DANTZIG
(Amsterdam)

1. Récemment M. J. KARAMATA à Genève me posait le problème suivant:

Soit a_1, a_2, ... une suite de nombres réels, telle que

1° pour chaque entier $n \geqslant 1$

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant n^{-1} \tag{1}$$

2° pour chaque entier $N \geqslant 1$

$$|\, \Sigma_1^N \, n^{-1} \, a_n| \leqslant 1 \tag{2}$$

Est-ce qu'il existe alors un nombre réel $\varrho > 1$, et une suite d'entiers n_k avec

1° pour chaque entier $k \geqslant 1$

$$1 < n_k < n_{k+1} \leqslant \varrho n_k \tag{3}$$

2°
$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = 0 \tag{4}$$

Nous démontrerons que la réponse à ce problème doit être négative, en donnant un contre-exemple.

2. Soit $f(x)$ une fonction réelle et continue pour $x \geqslant 0$, telle que

1° pour tous les $x > 0$, $y > 0$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y| \tag{5}$$

2° pour tous les $\xi > 0$

$$|\textstyle\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x| \leqslant 1 \tag{6}$$

Est-ce qu'il existe un nombre réel $\gamma > 0$ et une suite croissante de nombres réels et positifs $0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots$, telle que $\xi_n \to \infty$ pour $n \to \infty$, et

1°
$$\lim_{n \to \infty} f(\xi_n) = 0 \tag{7}$$

2° pour chaque n

$$\xi_{n+1} - \xi_n \leqslant \gamma \tag{8}$$

Nous démontrerons que la réponse à cette question aussi doit être négative, en donnant un contre-exemple, duquel nous déduirons celui qui conterdit l'assertion du problème de M. KARAMATA.

3. Pour un $c > 0$ ($c \leqslant 1$) arbitraire nous définissons la fonction (fig. 1)

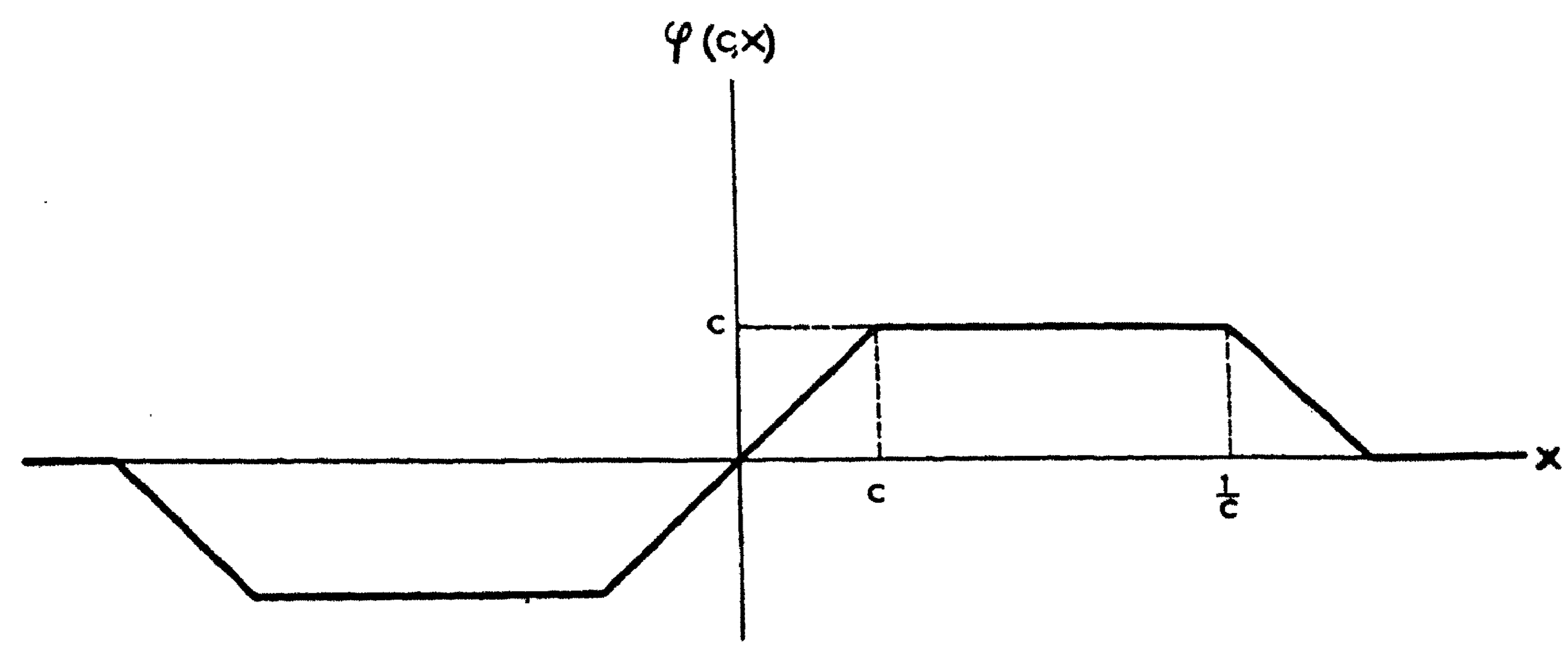

Fig. 1

$$\varphi(c, x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x & \text{si } |x| \leqslant c \\ c \operatorname{sgn} x & \text{si } c \leqslant |x| \leqslant c^{-1} \\ (c + c^{-1} - x) \operatorname{sgn} x & \text{si } c^{-1} \leqslant |x| \leqslant c + c^{-1} \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant c + c^{-1} \end{cases} \tag{9}$$

où

$$\operatorname{sgn} x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases} \tag{10}$$

et nous posons pour un $k \geqslant 0$ entier

$$\varphi_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(2^{-k}, x) \tag{11}$$

Evidemment on a pour tous les x et y réels et tous les $c > 0$

$$|\varphi(c, y) - \varphi(c, x)| \leqslant |y - x| \tag{12}$$

et

$$|\textstyle\int_x^y \varphi(c, z) dz| \leqslant 1 \tag{13}$$

tandis que $\varphi_k(x)$ n'est différente de zéro que sur un intervalle de longueur

$$l_k \stackrel{\text{def}}{=} 2(2^{-k} + 2^k) \tag{14}$$

Soit maintenant $r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots$ une suite de nombres naturels (entiers $\geqslant 0$), qui contient chaque nombre naturel une infinité de fois. Par exemple: $r_0 = 0$; $r_1 = 0, r_2 = 1$; $r_3 = 0, r_4 = 1, r_5 = 2$;...

généralement $r_h = m$ si $h = \frac{1}{2}n(n-1) + m$ pour un entier $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant m \leqslant n-1$. Posons maintenant pour chaque h naturel

$$L_h \overset{\text{def}}{=} \Sigma_0^{h-1}\, l_{r_j} \tag{15}$$

$$\Psi_h(x) \overset{\text{def}}{=} -\varphi_{r_h}(x - L_h - \tfrac{1}{2}l_{r_h}) \tag{16}$$

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \Sigma_0^\infty\, \Psi_h(x) \tag{17}$$

Autrement dit, la fonction $f(x)$ est obtenue par superposition des fonctions $\varphi_{r_0}(x)$, $\varphi_{r_1}(x)$, $\varphi_{r_2}(x)$, ..., translatées tellement que leurs parties non-nulles soient juxtaposées (fig. 2, où l'échelle sur l'axe des x est raccourcie).

Evidemment cette fonction $f(x)$, définie par (17), satisfait aux conditions (5), (6).

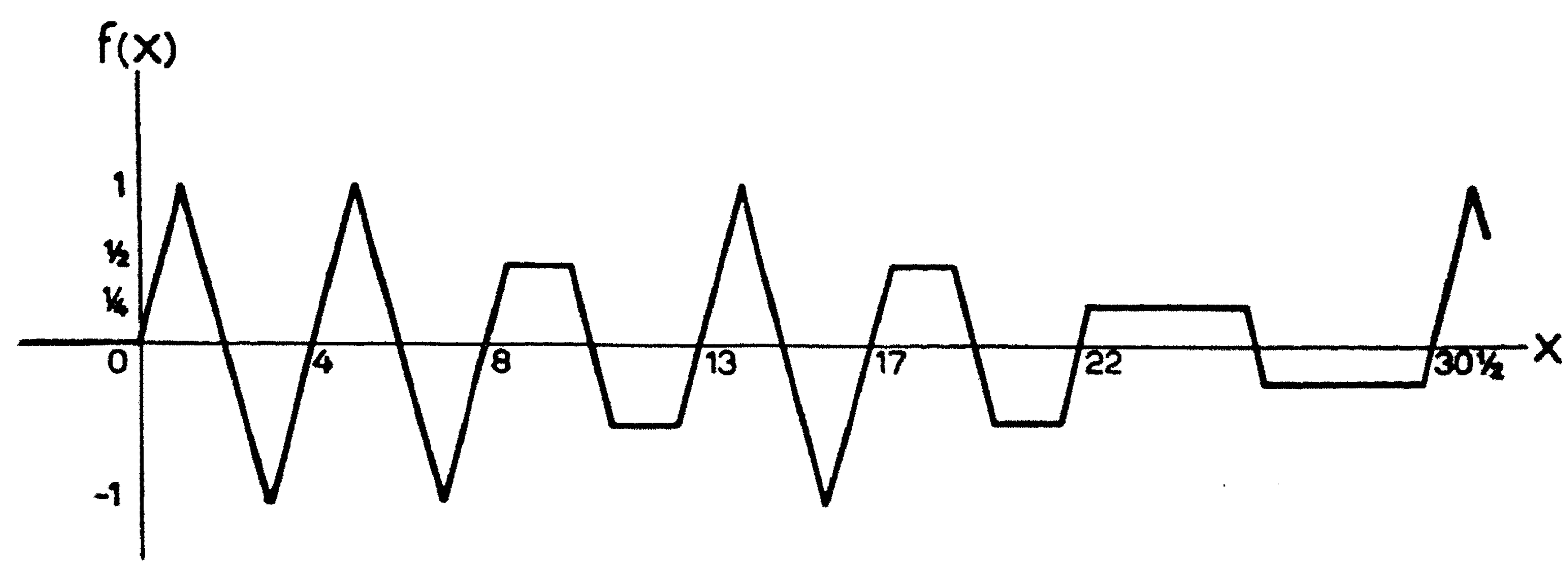

Fig. 2

Supposons maintenant qu'il existe des nombres γ, ξ_1, ξ_2, ..., satisfaisant à (8). Choisissons un entier $k \geqslant 1$ tel que $2^k \geqslant 2\gamma$, et mettons $\alpha = 2^{-k}$. Etant donné un entier $n_0 > 0$ arbitraire, il existe un h avec $L_h \geqslant \xi_{n_0}$, et un $r_j = k$ avec $j \geqslant h$. Alors Ψ_j prend la valeur $2^{-r_j} = 2^{-k} = \alpha$ sur un intervalle de longueur $2^k - 2^{-k} \geqslant 2^{k-1} \geqslant \gamma$. Mais à cause de (8) et $\xi_n \to \infty$ pour $n \to \infty$ cet intervalle doit contenir au moins un ξ_n avec $n \geqslant n_0$. Donc pour chaque n_0 il existe un $n \geqslant n_0$ avec

$$f(\xi_n) = \alpha > 0,$$

c.à.d. il y a une infinité de tels n, de même que (7) ne peut pas être vrai, ce qui contredit l'assertion du problème posé.

4. Revenons maintenant au problème de M. KARAMATA.

Soit $f(x)$ la fonction définie ci-dessus (fig. 2), et posons pour chaque entier $n \geqslant 1$ avec un c positif et < 1

$$a_n \overset{\text{def}}{=} cf(\ln n) \tag{18}$$

Alors, à cause de (5) pour chaque $n \geqslant 1$

$$|a_{n+1} - a_n| = c|f(\ln(n+1)) - f(\ln n)| \leqslant$$
$$\leqslant c(\ln(n+1) - \ln n) \leqslant cn^{-1} < n^{-1},$$

c.à.d. (1).

D'ailleurs pour un entier $n \geqslant 1$ quelconque

$$|\int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x)\mathrm{d}x - n^{-1} f(\ln n)| \leqslant$$
$$\leqslant \ln(1+n^{-1}). \max_{\ln n \leqslant x \leqslant \ln(n+1)} |f(x) - f(\ln n)| + \tag{19}$$
$$+ |f(\ln n)|\,|n^{-1} - \ln(1+n^{-1})| \leqslant 3.(2n^2)^{-1}$$

puisque pour $n \leqslant e^x \leqslant n+1$

$$|f(x) - f(\ln n)| \leqslant |x - \ln n| \leqslant \ln(1+n^{-1}) < n^{-1},$$

tandis que $|f(x)| \leqslant 1$ pour chaque x et $n^{-1} - \ln(1+n^{-1}) \leqslant \frac{1}{2}n^{-2}$ pour $n \geqslant 1$.

Il s'ensuit que pour un entier $N > 1$ quelconque

$$|c\int_0^{\ln N} f(x)\mathrm{d}x - \Sigma_1^{N-1} n^{-1}a_n| \leqslant \tfrac{3}{2}c\, \Sigma_1^{N-1} n^{-2} < \tfrac{1}{4}\pi^2 c \tag{20}$$

donc, à cause de (6)

$$|\,\Sigma_1^N n^{-1} a_n| \leqslant (\tfrac{1}{4}\pi^2 + 1)c \leqslant 1 \tag{21}$$

si nous choisissons $c \leqslant (\frac{1}{4}\pi^2 + 1)^{-1}$ (Même des valeurs de c plus grands suffiraient).

D'autre part, si

$$\lim_{\nu\to\infty} a_{n_\nu} = 0 \tag{22}$$

donc $f(\ln n_\nu) \to 0$, nous avons vu qu'il existe une infinité de valeurs de ν pour lesquelles $\ln n_{\nu+1} - \ln n_\nu$, donc aussi $n_\nu^{-1} n_{\nu+1}$ surpassent un nombre arbitrairement donné. Ceci démontre que le problème de M. Karamata doit être répondu au sens négatif.

(Reçu le 13 Octobre, 1954)