MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 1955-23(5)

Toelichting bij les 20 (Hoofdstuk XIX) van de "Cursus Statistisch Analyst voor de Industrie".

door

R. Doornbos
en
J. Hemelrijk

1955

1. Inleiding

De auteur van dit hoofdstuk bespreekt op pag. 464 het volgende voorbeeld. Van drie fietskogeltjes werd de diameter gemeten met 7 micrometers, met ieder micrometer werd elk kogeltje 2x gemeten. De metingen in microns vinden wij in de volgende tabel (tabel 62 van de cursus)

micrometer / kogel	1	2	3	4	5	6	7
1	9523 9522	9526 9524	9522 9521	9520 9519	9520 9520	9520 9520	9523 9525
2	7139 7136	7148 7151	7138 7140	7131 7139	7141 7139	7138 7135	7139 7144
3	5550 5551	5551 5553	5551 5553	5550 5548	5550 5550	5550 5551	5549 5554

Deze waarnemingen kunnen op verschillende manieren worden geanalyseerd met de methode der variantieanalyse. Het is direct duidelijk, dat de diameters van de drie kogels verschillen, een verschil tussen de micrometers minder evident.

2, Modellen

Wij gaan in de eerste plaats uit van het volgende model:

$$(2;1) \qquad x_{ijk} = \xi_{ij} + u_{ijk} \quad , \quad i = 1,\dots,3 \ \text{(3 kogels)}, \quad j = 1,\dots,7 \ \text{(7 micrometers)}, \quad k = 1,2 \ \text{(duplo's)}.$$

Hierbij zijn de u_{ijk} onderling onafhankelijke waarnemingen uit een normale verdeling met gemiddelde 0 en spreiding σ_i . Wij onderstellen dus voorlopig, dat de spreidingen voor de drie kogels verschillend mogen zijn. Bij één kogel en verschillende micrometers moeten de spreidingen gelijk zijn, anders is geen analyse mogelijk.[1] Wij zien verder, dat volgens (2;1) de verwachting van x_{ijk} niet van k afhangt en dus gelijk is voor ieder tweetal duplowaarnemingen.

---

1) Of: de verhoudingen der spreidingen voor de verschillende micrometers moeten bekend zijn; dit geval behandelen wij echter niet.

Wij schrijven nu:

$$\mu = \xi_{..} = \frac{1}{21}\sum_{i,j} \xi_{ij} ,$$

$$\xi'_{ij} = \xi_{ij} - \xi_{..} ,$$

$$\mu_{ix} = \xi'_{i.} = \frac{1}{7}\sum_j \xi'_{ij} = \xi_{i.} - \xi_{..} ,$$

$$\mu_{xj} = \xi'_{.j} = \frac{1}{3}\sum_i \xi'_{ij} = \xi_{.j} - \xi_{..} ,$$

$$\mu_{ij} = \xi'_{ij} - (\xi'_{i.} + \xi'_{.j}) = \xi_{ij} - (\xi_{i.} + \xi_{.j}) + \xi_{..} .$$

Optellen van de rechter- en linkerleden van de 1e, 3e, 4e en 5e gelijkheden geeft:

(2;2) $$\xi_{ij} = \mu + \mu_{ix} + \mu_{xj} + \mu_{ij} ,$$

terwijl de bijvoorwaarden

(2;3) $$\sum_i \mu_{ix} = \sum_j \mu_{xj} = \sum_i \mu_{ij} = \sum_j \mu_{ij} = 0$$

gelden. Het model is dus nu

(2;4) $$\underline{x}_{ijk} = \mu + \mu_{ix} + \mu_{xj} + \mu_{ij} + \underline{u}_{ijk}$$, met bijrelaties (2;3)

Dit is dus niets anders dan een andere schrijfwijze voor het algemene model (2;1)

Hiernaast kan nog een geheel ander model worden aangenomen, het zogenaamde stochastische model (in de Engelse literatuur ook wel "components of variance model" genoemd). In ons geval wordt dit;

(2;5) $$\underline{x}_{ijk} = \mu + \underline{a}_i + \underline{b}_j + \underline{c}_{ij} + \underline{u}_{ijk}$$

Hierbij zijn alle stochastische grootheden o.o. trekkingen uit normale verdelingen met gemiddelde nul. De spreidingen van de verdelingen van $\underline{a}_i$, $\underline{b}_j$, $\underline{c}_{ij}$ en $\underline{u}_{ijk}$ zijn respectievelijk $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ en σ. De interpretatie is voor het onderhavige geval niet zonder meer duidelijk. In het bijzonder is de onafhankelijkheid der $\underline{c}_{ij}$ uit de lucht gegrepen, daar b.v. vóór vaste i deze $\underline{c}_{ij}$ op dezelfde kogel betrekking hebben. Wij geven dit model niettemin, omdat het ten grondslag ligt aan een van de toetsen die in de cursus worden vermeld.

3. Toetsen

Wij passen eerst uitgaande van model (2;1) een enkelvoudige variantieanalyse toe op kogel Nr i $(i=1,2,3)$. Wij willen dan de hypothese toetsen dat de meting niet afhangt van de gebruikte micrometer, dus in formule

$$(3;1) \qquad \xi_{ij} = \zeta_i \qquad\qquad (\ i \text{ constant})$$

of ook, uitgedrukt in notatie (2;4)

$$\mu + \mu_{ix} + \mu_{xj} + \mu_{ij} \quad \text{onafhankelijk van } j,$$

dus

$$(3;2) \qquad \mu_{xj} + \mu_{ij} = \nu_i$$

Door sommatie over j wordt het linkerlid van (3;2) nul, dus $\nu_i = 0$
De hypothese is dus

$$(3;3) \qquad \mu_{xj} + \mu_{ij} = 0 \ , \quad (j=1,\ldots,7).$$

Volgens de methode van de variantieanalyse wordt nu de totale "som van kwadraten"

$$\sum_{j,k} (x_{ijk} - x_{i..})^2$$

gesplitst in een som "tussen micrometers" en de "restvariantie":

$$(3;4) \qquad \sum_{j,k} (x_{ijk} - x_{i..})^2 = 2\sum_j (x_{ij.} - x_{i..})^2 + \sum_{j,k} (x_{ijk} - x_{ij.})^2.$$

Uit de theorie volgt nu, dat de tweede som van het rechterlid, gedeeld door σ^2 een χ^2 verdeling bezit met 7 vrijheidsgraden als het model (2;1) geldt. Verder heeft de som "tussen micrometers" gedeeld door σ^2 een χ^2 verdeling met 6 vrijheidsgraden, indien $\mu_{xj} + \mu_{ij} = 0$ of $\xi_{ij} - \xi_{i.} = 0$ $(j=1,\ldots,7)$, m.a.w., indien de micrometers gelijkwaardig zijn. Is dit niet het geval, dan geldt:

$$\mathcal{E}\, 2\sum_j (x_{ij.} - x_{i..})^2 = 2\sum_j (\xi_{ij} - \xi_{i.})^2 + 6\sigma^2.$$

De grootheid

$$(3;5) \qquad F = \frac{7}{6}\,\frac{2\sum_j (x_{ij.} - x_{i..})^2}{\sum_{j,k} (x_{ijk} - x_{ij.})^2},$$

(het quotiënt van de gemiddelde kwadraatsommen), die onder de hypothese $\mu_{xj} + \mu_{ij} = 0$ een F verdeling bezit, zal onder model (1) waarschijnlijk grotere waarden aannemen, zodat de kans om in het kritieke gebied (de rechterstaart) van de F-verdeling te komen groot is. En deze kans neemt toe naarmate de term $\theta_i = 2\sum_j (\xi_{ij} - \xi_{i.})^2$ groter is.

Voor de waarnemingen van de eerste kogel komen wij nu tot de volgende variantieanalyse-tabel 3;1:

Tabel 3;1

Bron v. variatie	Som v. kwadraten	Vrijh. gr.	quotiënt	F
tussenmicrometers (M)	54,86	6	9,13	11,64
rest (R)	5,50	7	0,79	
totaal(T)	60,36	13		

De bij deze F-waarde behorende overschrijdingskans ligt tussen 0,01 en 0,001. Wij moeten dus de hypothese verwerpen, dat de metingen aan de eerste kogel niet systematisch verschillen. Voor de 2e en 3e kogel kunnen wij hetzelfde doen. Het resultaat vinden wij in de tabellen 3;2 en 3;3

2e kogel

Tabel 3;2

Bron v. variatie	Som v. kwadraten	Vrijh. gr.	Gem.s.v.kw.	F
M	273,71	6	45,62	5,15
R	62,00	7	8,86	
T	335,71	13		

0,025 > k > 0,01

3e kogel

Tabel 3;3

M	14,86	6	2,48	0,89
R	19,50	7	2,79	
T	34,36	13		

k > 0,50

Wij zien, dat de rest varianties aanzienlijk verschillen (0,79; 8,86 en 2,79). Het quotiënt $\frac{8,86}{0,79} = 11,27$ blijkt dan ook onwaarschijnlijk groot te zijn. De kritieke waarden van dit quotiënt (grootste variantie gedeeld door de kleinste) zijn getabelleerd in Biometrika Tables for Statisticians, Vol I, table 31. Bij een overschrijdingskans 0,05 hoort het quotiënt 6,94, bij 0,01 de waarde 12,1, wij zijn dus vrij dicht bij een overschrijdingskans 0,01.

Verwerpen wij op grond van dit resultaat de hypothese, dat de σ_i gelijk zijn, dan kunnen wij de drie waarden van F die wij gevonden hebben niet combineren. Wel kunnen wij van alle drie de overschrijdingskans k_i $(i=1,2,3)$ berekenen en vervolgens de grootheid

(3;6) $$-2 \log k_1 k_2 k_3 .$$

Deze grootheid heeft, onder de getoetste hypothese, dat de micrometers niet verschillen, een χ^2-verdeling met 6 vrijheidsgraden.

Indien wij echter aannemen, dat de varianties toch gelijk zijn, kunnen wij de uitkomsten van de drie kogels als volgt combineren. Wij tellen de drie sommen van kwadraten tussen micrometers op en eveneens de drie restsommen. Onder de hypothese, dat de $\mu_{xj}+\mu_{ij}$ voor alle drie de kogels gelijk aan nul zijn, heeft het quotiënt $\frac{21}{18}\,\frac{\text{som tussen micrometers}}{\text{som restsommen}}$ weer een F-verdeling met 18 en 21 vrijheidsgraden, vanwege het opteltheorema voor verdelingen.

De betekenis van de getoetste hypothese komt duidelijker tot uiting, indien wij ons realiseren, dat nu

$$\mu_{xj}+\mu_{ij}=0 \qquad \text{voor alle } i \text{ en } j .$$

Sommeren over i geeft nu, daar $\sum_i \mu_{ij}=0$ is:

$$\mu_{xj}=0 \qquad (j=1,\dots,7)$$

dus ook

$$\mu_{ij}=0 \qquad \text{voor alle } i \text{ en } j$$

Dus de getoetste hypothese is nu:

(3.7) $$H_0 : \mu_{xj}=\mu_{ij}=0 \quad (i=1,\dots,3\ ;\ j=1,\dots,7).$$

Wij vinden dan

(3;8) $$F=\frac{21}{18}\cdot\frac{343,43}{87,00}=3,38 \quad ; \quad 0,01>k>0,001 .$$

Deze methode leidt tot verwerping van H_0, indien de micrometers verschillende resultaten geven per kogel, maar de verschillen behoeven bij de verschillende kogels niet parallel te lopen voor de verschillende micrometers. Immers als b.v. de eerste micrometer bij de eerste kogel sterk van de overige afwijkt, de laatste bij de tweede kogel en weer een andere bij de derde kogel, dan wordt de teller van F even groot als wanneer dezelfde afwijkingen voor alle drie de kogels bij één bepaalde micrometer optraden. Dit komt in het model tot uiting in het feit, dat een hoofdeffect tezamen met een interactie getoetst is. Ook als het hoofdeffect 0 is, maar de interactie niet, zal men langs deze weg tot verwerping van de getoetste hypothese komen.

Indien wij aannemen, dat de σ_i gelijk zijn, kunnen wij, ook uitgaande van model (2;1) of het daarmee aequivalente model (2;4), een tweevoudige variantieanalyse uitvoeren. De totale som van kwadraten $\sum_{i,j,k} (x_{ijk} - x_{...})^2$ wordt nu gesplitst als in de volgende tabel 3;4 is aangegeven.

Tabel 3;4

Bron van variatie	Som van kwadraten	Vr.gr.	Verwachting quotiënt
tussen kogels (K)	$14 \sum_i (x_{i..} - x_{...})^2$	2	$7 \sum_i \mu_{ix}^2 + \sigma^2$
M	$6 \sum_j (x_{.j.} - x_{...})^2$	6	$\sum_j \mu_{xj}^2 + \sigma^2$
Interactie (M x K)	$2 \sum_{i,j} (x_{ij.} - x_{i..} - x_{.j.} + x_{...})^2$	12	$\frac{1}{6} \sum_j \mu_{ij}^2 + \sigma^2$
rest	$\sum_{i,j,k} (x_{ijk} - x_{ij.})^2$	21	σ^2
Totaal	$\sum_{i,j,k} (x_{ijk} - x_{...})^2$	41	

Wij kunnen nu toetsen of de μ_{ix}, μ_{xj} resp. de μ_{ij} nul zijn, door de sommen van kwadraten K, M en M x K, gedeeld door hun aantallen vrijheidsgraden, te delen door de restsom, eveneens gedeeld door zijn aantal vrijheidsgraden. Voor ons voorbeeld levert dit op:

Tabel 3;5

Bron van variatie	Som v.kwadraten	vrijh.gr.	quotiënt	F	ov.kans
M	221,15	6	36,86	8,90	k < 0,001
K	111848672,71	2	—		
M x K	122,28	12	10,19	2,46	0,05 > k > 0,01
rest	87,00	21	4,14		
Totaal	111849103,14	41			

Het F-quotiënt voor de kogels is niet uitgerekend, daar dit niet interessant is.

De schatting uit de cursus (13):

$S_0 = 2,0$ is uit het restquotiënt bepaald: $\sqrt{4,14} \approx 2,0$.

De restsom in tabel 3;5 is de som van de 3 restsommen in de tabellen 3;1, 3;2 en 3;3. De som M + som MxK in tabel 3;5 is de som van de sommen M uit de tabellen 3;1, 3;2 en 3;3. Het F-quotiënt (3;8) toetst dan ook, zoals wij boven reeds gezien hebben, de hoofdinvloed M en de interactie MxK te samen, nl. de hypothese (3;7).

De analyse uitgaande van model (2;5) geeft wat betreft de splitsing in kwadraatsommen geen nieuws, wel echter wat de verdeling van deze sommen onder de verschillende hypothesen betreft, zoals wij zien, als wij tabel 3;4 vergelijken met de volgende tabel 3;6.

<u>Tabel 3;6</u>

Bron van variatie	Som v. kwadraten	Vr.gr.	Verwachting quotiënt
K	$14 \sum_i (\underline{x}_{i..} - \underline{x}_{...})^2$	2	$14\sigma_a^2 + 2\sigma_c^2 + \sigma^2$
M	$6 \sum_j (\underline{x}_{.j.} - \underline{x}_{...})^2$	6	$6\sigma_b^2 + 2\sigma_c^2 + \sigma^2$
M x K	$2 \sum_{i,j} (\underline{x}_{ij} - \underline{x}_{i.} - \underline{x}_{.j} + \underline{x}_{..})^2$	12	$2\sigma_c^2 + \sigma^2$
rest	$\sum_{i,j,k} (\underline{x}_{ijk} - \underline{x}_{ij.})^2$	21	σ^2
Totaal	$\sum_{i,j,k} (\underline{x}_{ijk} - \underline{x}_{...})^2$	41	

Willen wij nu de hypothese toetsen, dat $\sigma_c^2 = 0$, hetgeen overeenkomt met μ_{ij} in model (2;4) (geen interactie) dan moeten wij dezelfde toets gebruiken als in dat geval.

Nu hebben evenwel de gemiddelde sommen van kwadraten voor M en MxK, gedeeld door $2\sigma_c^2 + \sigma^2$ een χ^2-verdeling met 6 en 12 vrijheidsgraden onder de hypothese $\mu_{xj} = 0$ $(j = 1, \ldots, 7)$, hier $\sigma_b^2 = 0$. Wij moeten dus het hoofdeffect micrometers nu toetsen "tegen de interactie".

Dit geeft het F-quotiënt

$$(3;8) \qquad F = \frac{12}{6} \, \frac{221,15}{122,28} = 3,62 \qquad (0,05 > k > 0,01)$$

Dit is wat in de cursus is gedaan. Wij kunnen nu ook de σ_c schatten ($s^*\sqrt{2}$ in het rapport), immers de verwachting van het quotiënt MxK is $2\sigma_c^2 + \sigma^2$ en van het restquotiënt σ^2, dus het verschil $10,19 - 4,14 = 6,05$ is een schatting voor $2\sigma_c^2$ Dus de schatting voor σ_c is

$$s_1 = \sqrt{3,02} = 1,7$$
$$s^* = \sqrt{6,05} = 2,5,$$

als in de cursus.

De factor $\sqrt{2}$ komt van het feit, dat wij kijken naar één waarneming, terwijl de s^* in de cursus betrekking heeft op de som van de duplowaarnemingen, waarvan de variantie dus 2x zo groot is.

Tenslotte kunnen wij nog opmerken, dat wij in plaats van met model (2;5) ook nog hadeen kunnen werken met een model, waarbij één of beide van de $\underline{a}_i$ en $\underline{b}_j$ niet stochastisch waren, maar de interacties wel. Voor de toetsing maakt dit echter geen verschil.
