STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

Publicatie

108

# Complément à un problème de M. Karamata

D. van Dantzig.

1956

Nieuw Archief voor Wiskunde (4), IV, 109—111 (1956)

# COMPLÉMENT À UN PROBLÈME DE M. KARAMATA

D. VAN DANTZIG

Soient $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$, $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$, $\varrho = \{\varrho_1, \varrho_2, \ldots\}$ des suites de nombres positifs. Supposons la suite $\varrho$ non-décroissante et $\varrho_1 > 1$.

Disons qu'une suite $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ de nombres réels appartient à la classe $D(\alpha)$ si (et seulement si) pour chaque entier $n \geq 1$

$$(1) \qquad |x_{n+1} - x_n| \leq \alpha_n,$$

et à la classe $S(\lambda)$ si (et seulement si) pour chaque entier $n \geq 1$

$$(2) \qquad |\sum_{1}^{n}{}^{k} \; \lambda_k x_k| \leq 1.$$

Soit d'ailleurs $L(\varrho)$ la classe de toutes les suites $x$, telles qu'il existe une suite croissante $\{n_1, n_2, \ldots\}$ d'entiers positifs ayant les deux propriétés

$$(3) \qquad \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = 0,$$

$$(4) \qquad n_{k+1} \leq \varrho_k n_k \text{ pour chaque entier } k \geq 1.$$

Posons

$$(5) \qquad b \stackrel{\text{def}}{=} \limsup \alpha_n, \quad l \stackrel{\text{def}}{=} \liminf n\lambda_n, \quad r \stackrel{\text{def}}{=} \lim \varrho_n.$$

On démontre facilement le

T h é o r è m e. *Pour chaque suite $x$, satisfaisant à* (1) *et* (2) *avec $b = 0$ et $l > 0$ et chaque suite non-décroissante $\varrho$ avec $r = \infty$ il existe une suite $\{n_k\}$ telle que* (3) *et* (4) *sont satisfaites.*

Donc, si $D$ est la réunion de toutes les $D(\alpha)$ avec $b = 0$, $S$ la réunion de toutes les $S(\lambda)$ avec $l > 0$ et $L'$ l'intersection de toutes les $L(\varrho)$ avec $r = \infty$, le théorème exprime la relation

$$(6) \qquad D \cap S \subset L'.$$

D'autre part nous avons démontré dans une note récente [1]), en

[1]) D. VAN DANTZIG, Sur un problème de M. Karamata, Nieuw Archief voor Wiskunde (3) *3*, 1955, 89—92.

nous restreignant au cas où $\alpha_n = \lambda_n = n^{-1}$ pour chaque $n$, et où tous les $\varrho_n$ sont égaux, donc $= r$ $(< \infty)$, qu'il existe des suites $x$ appartenant à $D(\mathrm{I})$ et à $S(\mathrm{I})$ (en dénotant pour simplicité la suite de nombres $= n^{-1}$ par I) mais à aucune $L(\varrho)$ avec $\varrho_n = r < \infty$. Il s'ensuit qu'elle n'appartient à aucune $L(\varrho)$ avec $r < \infty$, tandis qu'il est trivial que pour $\alpha_n = \lambda_n = n^{-1}$ on a $b = 0$ et $l > 0$.

Donc, si $L$ est la réunion de toutes les $L(\varrho)$ avec $r < \infty$, il existe des $x \varepsilon D(\mathrm{I}) \cap S(\mathrm{I}) \subset D \cap S$, n'appartenant pas à $L$, de même que

$$D \cap S \cap (L' - L) \neq 0.$$

*Démonstration du théorème.* Soit $M < N$ et supposons d'abord que $x_M, x_{M+1}, \ldots, x_{N-1}$ ont tous la même signe. Alors

$$2 \geq |\Sigma_M^{N-1} \lambda_n x_n| = \Sigma_M^{N-1} \lambda_n |x_n| \geq \min_{M \leq n < N} |x_n| \, . \, \min_{M \leq n} n\lambda_n \, . \ln \frac{N}{M}.$$

Donc pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire $(\varepsilon < l)$: si $x_M, \ldots, x_{N-1}$ ont tous la même signe, on a

$$\min_{M \leqq n < N} |x_n| \leq \frac{2}{(l - \varepsilon) \ln \dfrac{N}{M}}, \tag{6}$$

dès que $M$ est suffisamment grand.

D'autre part, si pour un $h$ $(M \leq h < N)$ $x_h x_{h+1} \leq 0$, (1) entraîne

$$\min_{M \leqq n < N} |x_n| \leq |x_h| \leq \alpha_h. \tag{7}$$

Puisque (1) reste valide lorsqu'on remplace les $\alpha_n$ par une suite majorisante, p.e. par $\alpha_n' \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{\nu \geqq n} \alpha_\nu$, ce qui n'infirme en rien la validité de $b = 0$, on peut supposer sans restriction que la suite $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ est monotone, donc $\alpha_h \leq \alpha_M$. On a alors en tout cas pour $M \geq M(\varepsilon)$:

$$\min_{M \leq n < N} |x_n| \leq \max \left\{\alpha_M, \frac{2}{(l - \varepsilon)\,(\ln M^{-1} N)}\right\}. \tag{8}$$

Soit maintenant $N_1 \overset{\text{def}}{=} 1$, $N_{k+1} \overset{\text{def}}{=} [N_k \sqrt{\varrho_{k-1}}]$. On aura, à cause de $r = \infty$ pour chaque $k$ suffisamment grand, $N_{k+1} > N_k$ et $\dfrac{N_{k+1}}{N_k} \geq \sqrt{\varrho_{k-1}} - \dfrac{1}{N_k}$. Donc $\lim N_k = \infty$ et $\lim \dfrac{N_{k+1}}{N_k} = \infty$, donc aussi $\lim \ln \dfrac{N_{k+1}}{N_k} = \infty$. Appliquons (8) avec $M = N_k$, $N = N_{k+1}$, et soit $n_k$ un $n$ réalisant le minimum dans le membre gauche de (8).

Alors

$$|x_{n_k}| \leq \max\left\{\alpha_{N_k}, \frac{2}{(l-\varepsilon)\ln(N_{k+1}/N_k)}\right\},$$

de même que (3) est valide. (Remarquons qu'au lieu de lim inf $k\lambda_k > 0$ il aurait suffi de supposer $\Sigma_{N_k+1}^{N_{k+1}} \lambda_n \to \infty$ dés que $\dfrac{N_{k+1}}{N_k} \to \infty$, ou aussi $\lim\limits_{m\to\infty} \liminf\limits_{N\to\infty} \Sigma_N^{mN} \lambda_k = \infty$).

D'autre part

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \leq \frac{N_{k+2}}{N_k} \leq \sqrt{\varrho_{k-1}\,\varrho_k} \leq \varrho_k,$$

de sorte que (4) vaut aussi, ce qui complète la démonstration.

(Received 7 March 1956).