STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

SD 29

Exacte en asymptotische formules voor de Kolmogrov-Smirnov toets.

J.H.B.Kemperman.

1958

Exacte en asymptotische formules voor de Kolmogorov-Smirnov toets

Voordracht door

Prof.Dr J.H.B.Kemperman

op dinsdag 11 november 1958

1. Inleiding. Beschouw een reële stochastische variabele X met een (onbekende) continue verdelingsfunctie $F(s)=P(X \leq s)$. Teneinde $F(s)$ te bepalen nemen we een steekproef $x_1, \ldots, x_n$ van n onafhankelijke waarnemingen van X en beschouwen de corresponderende empirische verdelingsfunctie

$$F_n(s) = \frac{1}{n} \text{ (aantal } x_i\text{'s met } x_i \leq s).$$

Voor n voldoende groot, is deze een goede benadering van $F(s)$ wegens

$$(1) \qquad \lim_{n \to \infty} P(\sup_s |F_n(s) - F(s)| > \varepsilon) = 0,$$

voor elke vaste $\varepsilon > 0$, (Glivenko-Cantelli). De vraag komt nu naar voren hoe groot n moet zijn opdat, met tenminste een 95% waarschijnlijkheid, $F_n(s) - \varepsilon < F(s) < F_n(s) + \varepsilon$ geldt voor alle s; hier $\varepsilon > 0$ is gegeven. Stel, voor $x,y > 0$,

$$(2) \qquad Q_n(x,y) = P(-x < F_n(s) - F(s) < y \text{ voor alle } s).$$

Dan is de vraag dus hoe groot n moet zijn opdat $Q_n(\varepsilon,\varepsilon) \geq 0{,}95$. Om deze vraag te kunnen beantwoorden moeten we de functie $Q_n(x,y)$ enigszins kennen; het zal blijken dat $Q_n(x,y)$ continu is in x,y en niet afhangt van F.

Beschouw verder een tweede reële stochastische variabele Y, X en Y onafhankelijk met een continue verdelingsfunctie G(s), en neem aan dat we willen toetsen of X en Y dezelfde verdelingsfuncties hebben, m.a.w. de hypothese

$$H_0 : F(s) = G(s) \quad \text{voor alle } s.$$

Als $G(s)$ bekend is dan kan men als volgt te werk gaan: kies ε_n zodanig dat $Q_n(\varepsilon_n, \varepsilon_n)=0{,}95$ en verwerp H_o dan en alleen dan wanneer

$$\sup_s | F_n(s) - G(s) | \geq \varepsilon_n .$$

Indien H_o juist is dan is de waarschijnlijkheid, dat H_o verworpen zal worden, gelijk aan 0,05. Dit is de zogenaamde Kolmogorov **toets** van H_o.

Evenwel is $G(s)$ doorgaans niet bekend. Het ligt dan voor de hand $G(s)$ te benaderen met een empirische verdelingsfunctie: Hiertoe neemt men een steekproef $y_1, \ldots, y_m$ van m onafhankelijke waarnemingen van Y met een corresponderende empirische verdelingsfunctie

$$G_m(s) = \frac{1}{m} \text{ (aantal } y_j\text{'s met } y_j \leq s).$$

Stel nu

$$P_{nm}(x,y) = P(-x < F_n(s) - G_m(s) < y \text{ voor alle } s | H_o); \tag{3}$$

het zal blijken dat $P_{nm}(x,y)$ niet van F afhangt. Hier is $F_n(x)$ een veelvoud van $1/n$, $G_m(s)$ een veelvoud van $1/m$, hun verschil dus een veelvoud van $1/d$ met d als het kleinste gemene veelvoud van m en n. Dus

$$P_{nm}(x,y) = P_{nm}(\{dx\} d^{-1}, \{dy\} d^{-1}\} , \tag{4}$$

waar $\{u\}$ = kleinste gehele getal $\geq u$. Zij $a=a_{nm}$ het kleinste natuurlijke getal met $P_{nm}(a/d, a/d) \geq 0{,}95$ en verwerp H_o dan en alleen dan wanneer

$$\sup_s | F_n(s) - G_m(s) | \geq a_{nm}/d;$$

dit is de zgn. Smirnov toets. Indien H_o juist is dan is de waarschijnlijkheid om H_o te verwerpen hoogstens gelijk aan 5%.

Om de genoemde testen te kunnen toepassen, is het gewenst exacte formules voor $P_{nm}(x,y)$ en $Q_n(x,y)$ af te leiden. In § 2 zullen we aangeven hoe men een exacte formule voor $P_{nm}(x,y)$ kan vinden. Alleen voor het geval dat $m/n=k$ een natuurlijk getal is, is deze formule expliciet weergegeven, zie formule (29). Dit levert onmiddellijk een exacte formule voor $Q_n(x,y)$, (zie formule (33)). Want het zal blijken, dat $\lim_{k\to\infty} P_{1,kl}(x,y)$ bestaat als een continue functie van x en y. Maar dan

(5) $$\lim_{k\to\infty} P_{1,kl}(x,y) = Q_1(x,y).$$

Immers, voor vaste $\varepsilon > 0$, uit de definities (2) en (3), $P_{nm}(x-\varepsilon, y-\varepsilon) - \eta_m \leq Q_n(x,y) \leq P_{nm}(x+\varepsilon, y+\varepsilon) + \eta_m$, waar

$$\eta_m = P(\sup_s |G_m(s) - F(s)| > \varepsilon \,|\, H_0),$$

$\eta_m \to 0$ als $m \to \infty$ wegens (1).

Opgemerkt zij dat de resultaten van § 2 essentieel bevat zijn in mijn artikel: "Some exact formulae for the Kolmogorov-Smirnov distributions", Indag. Math., vol.19 (1957).

2. Exacte formules. Zij nu $F=G$, dus $x_1,\ldots,x_n;\ y_1,\ldots,y_m$ zijn $n+m$ onafhankelijke stochastische variabelen, ieder met de continue verdelingsfunctie $F(s)$. Met een waarschijnlijkheid 1 zijn al deze $n+m$ grootheden verschillend. Zij $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_{n+m}$ de corresponderende geordende reeks, (u_1=kleinste onder $x_1,\ldots,y_m$, etc.).

Gegeven $u_1,\ldots,u_{n+m}$, de functie $D(s)=F_n(s)-G_m(s)$ is constant voor $u_\nu \leq s < u_{\nu+1}$, ($\nu=0,1,\ldots,n+m$); hier, $u_0=-\infty$, $u_{n+m+1}=+\infty$, $D(u_0)=D(u_{n+m})=0$. Dus opdat $-x < D(s) < y$ voor alle s is het nodig en voldoende dat $-x < D(z_\nu) < y$ ($\nu=0,1,\ldots,m+n$). Bovendien is $D(u_\nu)-D(u_{\nu-1})=+1/n$ of $-1/m$ al naar gelang u_ν samenvalt met een x_i of y_j, ($\nu=1,\ldots,n+m$). Ook al wegens $D(u_0)=D(u_{n+m})=0$, zijn er n sprongen $+1/n$ en m sprongen $-1/m$ en alle $\binom{m+n}{n}$ mogelijke manieren om deze sprongen te ordenen zijn even waarschijnlijk, (aangezien de simultane verdeling $F(x_1)\ldots F(x_n)F(y_1)\ldots F(y_m)$ van $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m$ een symmetrische functie is).

Conclusie: als we $D(u_\nu)=z_\nu$ ($\nu=0,\ldots,m+n$) stellen dan is $\binom{m+n}{n} P_{nm}(x,y)$ gelijk aan het aantal mogelijke reeksen $(z_0,\ldots,z_{m+n})$ met $z_0=z_{m+n}=0$, $z_{\nu+1}-z_\nu=1/n$ of $-1/m$, ($\nu=1,\ldots,m+n$), $-x < z_\nu < y$, ($\nu=0,1,\ldots,m+n$). Merk op dat z_ν altijd een veelvoud is van d^{-1} met d als het kleinste gemene veelvoud van m en n; dus mogen we aannemen (zie (4)), dat $dx=a$ en $dy=b$ positieve gehele getallen zijn.

Laten van nu af a,b,m_1,n_1 vaste positieve gehele getallen voorstellen, waarbij $(m_1,n_1)=1$, en beschouw alleen de paren m,n met

$$m/n = m_1/n_1 \;.$$

Dus $m=lm_1$, $n=ln_1$, $d=lm_1n_1$, $(l=1,2,\ldots)$. Door z_ν, $x=a/d$, $y=b/d$, $1/n$, $1/m$ met d te vermenigvuldigen, vinden we

$$(6) \qquad \binom{l(m_1+n_1)}{ln_1} P_{ln_1,lm_1}(a/lm_1n_1,\ b/lm_1n_1) = A_{l(n_1+m_1)}(0),$$

waarbij $A_N(z)$ het aantal mogelijke reeksen $(z_o,\ldots,z_N)$ aangeeft met $z_o=0$, $z_N=z$, $z_{\nu+1}-z_\nu=m_1$ of $-n_1$, $(\nu=0,1,\ldots,N-1)$, $-a<z_\nu<b$, $(\nu=0,\ldots,N)$; $A_o(z)=\delta_o^{\,z}$. Merk op dat $A_N(0)\neq 0$ alleen mogelijk is als N een veelvoud is van n_1+m_1.

Uit de definitie van $A_N(z)$ volgt

$$(7) \qquad A_{N+1}(z) = A_N(z-m_1) + A_N(z+n_1) \quad \text{als } -a<z<b,$$

$$(8) \qquad A_N(z) = 0 \qquad \text{als } z\leq -a \text{ of } z\geq b,$$

$$(9) \qquad A_o(z) = \delta_o^{\,z}.$$

Zij t een vast positief getal, $0<t<\frac{1}{2}$. Wegens $A_N(z)\leq 2^N$ is de reeks

$$(10) \qquad f(j) = \sum_{N=0}^{\infty} A_N(j)\, t^n \qquad (j=\ldots-1,0,1,\ldots)$$

convergent. Uit (7), (8), (9) volgt

$$(11) \qquad f(j) = \delta_o^{\,j} + t\, f(j-m_1) + t\, f(j+n_1), \qquad (-a<j<b),$$

$$(12) \qquad f(j) = 0 \quad \text{als } j\leq -a \text{ of } j=b,b+1,\ldots,b+n_1-1.$$

THEOREMA 1. *Zij, voor* $|u|$ *voldoende klein,*

$$(13) \qquad \frac{1}{1-tu^{-n_1}-tu^{m_1}} = \frac{-t^{-1}u^{n_1}}{1-t^{-1}u^{n_1}+u^{m_1+n_1}} = \sum_{-\infty}^{\infty} d_h u^h$$

met

$$(14) \qquad d_h = 0 \text{ voor } h<n_1, \quad d_{n_1} = -t^{-1}\neq 0.$$

Dan is

$$(15) \qquad f(j) = d_j - \sum_{r=0}^{n_1-1} \xi_r\, d_{a+r+j} \quad \text{als } j\leq b+n_1-1,$$

waarin $(\xi_o,\ldots,\xi_{n_1-1})$ *de eenduidige oplossing is van het systeem*

(16) $$\sum_{r=0}^{n_1-1} d_{a+b+r+s}\,\xi_r = d_{b+s}\,, \qquad (s=0,1,\ldots,n_1-1).$$

LEMMA 1. Beschouw een functie $g(j)$, $(j=\ldots,-1,0,1,\ldots)$, zodanig dat

(17) $$g(j) = tg(j-m_1) + tg(j+n_1) \quad \text{als} \quad -a < j < b,$$

en

(18) $$g(j) = 0 \quad \text{als } j \leqslant -a \text{ of } j=b,b+1,\ldots,b+n_1-1.$$

Dan is $g(j)=0$ voor $j \leqslant b+n_1-1$.

Bewijs. Pas (17) toe voor een j met $-a < j < b$, $g(j) = \mathrm{Max}(g(-a+1),\ldots,g(b-1))$. Dan volgt $g(j)=0$ wegens $|t| < \frac{1}{2}$.

Bewijs van Theorema 1. Wegens (13)

$$1 = (1-tu^{-n_1}-tu^{m_1}) \sum_{-\infty}^{\infty} d_h u^h,$$

dus

(19) $$d_h = \delta_0^h + td_{h-m_1} + td_{h+n_1}\,.$$

Uit (19), (14) volgt dat de functie gedefinieerd door (15) voldoet aan (11), (12) mits $(\xi_0,\ldots,\xi_{n_1-1})$ een oplossing is van (16). Maar wegens Lemma 1 heeft (11), (12) hoogstens één oplossing. We behoeven dus alleen nog het geval na te gaan dat (16) ofwel geen ofwel tenminste twee (en dus oneindig vele) oplossingen heeft. In dit geval bestaat er een oplossing $(\eta_0,\ldots,\eta_{n_1-1})$ van het systeem

(20) $$\sum_{r=0}^{n_1-1} d_{a+b+r+s}\,\xi_r=0, \qquad (s=0,1,\ldots,n_1-1),$$

die niet triviaal is, m.a.w.

(21) $$\eta_r = 0 \text{ voor } n_1-p < r \leqslant n_1-1, \qquad \eta_{n_1-p} \neq 0,$$

voor precies één der getallen $p=1,2,\ldots,n_1$. Wegens (14), (19), (20), voldoet de functie

$$g(j) = \sum_{r=0}^{n_1-1} \eta_r\, d_{a+r+j}$$

aan (17), (18). Uit Lemma 1 volgt nu $g(j)=0$ voor $j \leqslant b+n_1-1$.
Maar wegens (21) en (14),

$$g(-a+p) = \sum_{r=0}^{n_1-p} \eta_r\, d_{k+r} = \eta_{n_1-p}\, d_{n_1} \neq 0,$$

een contradictie.

Met behulp van Theorema 1 kan men $f(0)$ bepalen als een expliciete rationale functie van t. Met behulp van (10) en (6) kan men dan een exacte formule van $P_{nm}(x,y)$ afleiden. In de nadere uitwerking van dit programma zullen we ons beperken tot het geval

$$n_1 = 1, \quad m_1 = k .$$

Uit (15), (16) volgt

$$f(j) = d_j - d_{a+j}\, d_b/d_{a+b} . \tag{22}$$

Wegens (13),

$$\sum_{-\infty}^{\infty} d_h u^h = -t^{-1} u \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} t^{r-i}\, u^{i+kr} .$$

Dus

$$d_h = -t^{-h} \Delta_h(t^{k+1}), \tag{23}$$

waar

$$\Delta_h(T) = \sum_{r=0}^{[(h-1)/(k+1)]} (-1)^r \binom{h-1-kr}{r} T^r, \tag{24}$$

$$\Delta_h(T) = 0 \quad \text{als } h \leqslant 0. \tag{25}$$

In het bijzonder volgt uit (22), (25), (10) en (6),

$$\sum_{l=0}^{\infty} \binom{l(k+1)}{l} P_{l,kl}\,(a/kl,\ b/kl) T^l = \frac{\Delta_a(T)\,\Delta_b(T)}{\Delta_{a+b}(T)} , \tag{26}$$

met $|T| < 2^{-k-1}$; (in feite is het linkerlid zelfs convergent voor $|kT| < e^{-1}$).

Wegens (24), voor $h > 0$,

$$\Delta_h(T)^{-1} = \left(1 - \sum_{r=1}^{N} (-1)^{r-1} \binom{h-1-kr}{r} T^r\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(h) T^h \tag{27}$$

met $N = [(h-n/k+1)]$ en

$$\alpha_j(h) = (-1)^j \sum{}^1 \frac{(i_1+\ldots+i_N)!}{i_1!\ldots i_N!} \prod_{r=1}^{N} (-1)^{i_r} \binom{h-1-kr}{r}^{i_r}, \tag{28}$$

waar de som wordt uitgestrekt over alle verzamelingen $(i_1,\ldots,i_N)$

van niet negatieve gehele getallen met

$$i_1 + 2i_2 + \ldots + Ni_N = j.$$

Uit (24), (26), (27), vinden we nu de exacte formule

$$(29) \qquad \binom{l(k+1)}{l} P_{l,kl}\,(a/kl,\ b/kl)$$
$$= \sum_{r=0}^{[(a-1)/(k+1)]} \ \sum_{s=0}^{[(b-1)/(k+1)]} (-1)^{r+s} \binom{a-1-kr}{r}\binom{b-1-ks}{s} \alpha_{l-r-s}(a+b),$$

waarin $\alpha_j(a+b)$ wordt gegeven door (28), $\alpha_j(a+b)=0$ voor $j<b$.

Teneinde $Q_l(x/l, y/l)$ te bepalen, laat in (29) $k \to \infty$, $a \to \infty$, $b \to \infty$, zodanig dat $a/k \to x$ en $b/k \to y$. Hier x, y zijn gegeven positieve getallen.

Voor gegeven j bevat de som in (28) slechts eindig vele termen. Verder volgt uit $h/k \to u$, $0 \leq r \leq u$, dat

$$(30) \qquad \lim_{k\to\infty} k^{-r} \binom{h}{r} = u^r/r!$$

dus uit (28)

$$(31) \qquad \lim_{k\to\infty} k^{-j}\, \alpha_j(a+b) = \beta_j$$

met

$$(32) \qquad \beta_j = (-1)^j \sum{}^1 \frac{(i_1+\ldots+i_N)!}{i_1!\ldots i_N!} \prod_{r=1}^{N} (-1)^{i_r} \left[(x+y-r)^r/r!\right]^{i_r},$$

hier $N=[x+y]$, terwijl de sommatie dezelfde is als in (28).

In verband met de opmerkingen bij (5), volgt nu gemakkelijk uit (29), (30), (31), dat

$$(33) \qquad Q_l(x/l,\ y/l) = \frac{l!}{l^l} \sum_{r=0}^{[x]} \sum_{s=0}^{[y]} (-1)^{r+s} \beta_{l-r-s} \frac{(x-r)^r (y-s)^s}{r!\,s!}\ ;$$

hier β_j is gedefinieerd door (32), $\beta_j=0$ als $j<0$.

3. <u>Asymptotische formules</u>. Zij weer $F=G$; Smirnov reeds bewees dat

(34) $$\lim_{m,n\to\infty} P(\sup_s |F_n(s)-G_m(s)| < z\sqrt{\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{m}}) = K(z),$$

voor z vast, $z>0$. Hierin is

(35) $$K(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2(k-\frac{1}{2})^2/2z}.$$

Door m sneller naar oneindig te laten gaan dan m, volgt uit (34)

(36) $$\lim_{n\to\infty} P(\sup_s |F_n(s)-F(s)| < z\sqrt{\tfrac{1}{n}}) = K(z),$$

hetgeen reeds eerder bewezen werd door Kolmogorov. Dus voor voldoend grote steekproeven is het zeer eenvoudig de toetsen van Kolmogorov en Smirnov toe te passen.

Als $m=n$ dan is, wegens (3), (34) equivalent met

(37) $$\lim_{n\to\infty} P_{m,n}\,(z\sqrt{\tfrac{2}{n}}\,,\ z\sqrt{\tfrac{2}{n}}) = K(z).$$

We zullen nu een verscherping van (37) bewijzen. Laten a,b voorlopig vaste positieve gehele getallen voorstellen. Dan volgt uit (6), (door z_ν te vervangen door $a+z_\nu = z_\nu'$), dat

(38) $$P_{n,n}(a/n,b/n) = \binom{2n}{n}^{-1} A_{2n}(a,a);$$

Hierin zij $A_N(i,j)$ het aantal mogelijke reeksen $(z_0,\dots,z_N)$ met $z_0=i$, $z_N=j$, $z_{\nu+1}-z_\nu=+1$ of -1, $(\nu=0,1,\dots,N-1)$, $0<z_\nu<a+b$, $(\nu=0,1,\dots,N)$. Merk op dat $A_N(i,j)\neq 0$ alleen mogelijk is als $N+j-i$ even is. Verder, analoog met (7), (8), (9)

(39) $$A_{N+1}(i,j) = A_N(i,j-1) + A_N(i,j+1), \quad (j=1,\dots,c-1),$$

(40) $$A_N(i,0) = A_N(i,c) = 0; \qquad A_0(i,j) = \delta_i^j,$$

waarin $c=a+b$. Hieruit volgt

(41) $$A_N(i,j) = \frac{2^{N+1}}{c} \sum_{k=1}^{c-1} \sin\frac{k\pi i}{c} \sin\frac{k\pi j}{c} \left(\cos\frac{k\pi}{c}\right)^N,$$

$(i,j=0,1,\dots,c)$. Immers, (39) en (40) bepalen $A_N(i,j)$ eenduidig en het is niet moeilijk te verifiëren, dat de door (41) gedefinieerde functie voldoet aan (39), (40).

Door (41) toe te passen voor $i=j=a$, $c=2a$ volgt uit (38), voor $a=1,2,\dots,$

(42) $$P_{nn}(a/n,a/n) = \binom{2n}{r}^{-1} 2^{2n} S_n(a),$$

met

(43) $$S_n(a) = \frac{2}{a}\sum_{k=1}^{[a/2]}\left(\cos(k-\tfrac{1}{2})\tfrac{\pi}{a}\right)^{2n}.$$

We zullen nu het asymptotisch gedrag van $S_n(a)$ onderzoeken. Door de bekende ontwikkeling

$$\tan x = x + \sum_{\nu=1}^{\infty}(2\nu+2)A_{\nu-1}x^{2\nu+1}, \qquad (|x| < \tfrac{\pi}{2}),$$

($A_\nu > 0$, $A_0=1/12$, $A_1=1/45$, $A_2=17/2520,\ldots$), te integreren, vindt men

(44) $$\varphi(w) = w^{-2}\left[\log\frac{1}{\cos\sqrt{w}} - \frac{w}{2}\right] = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu w^\nu, \qquad (|w| < \pi^2/4).$$

Nu kan (43) geschreven worden als

(45) $$S_n(a) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{n}}\sum_{k=1}^{[a/2]} e^{-\alpha(k-\frac{1}{2})^2}\exp\left(-\frac{2}{n}\alpha^2(k-\tfrac{1}{2})^4\varphi\left(\tfrac{\alpha}{n}(k-\tfrac{1}{2})^2\right)\right)$$

met

(46) $$\alpha = \pi^2 n/a^2.$$

Beschouw verder de ontwikkeling

(47) $$e^{u\,\varphi(w)} = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\mu} A_{\mu h}u^h w^{\mu-h},$$

geldig voor $|w|<\pi^2/4$; hierin zijn de constanten $A_{\mu h}$ in principe bekend, $A_{\mu h} \geq 0$. Laten μ_1, w_1 positieve constanten voorstellen, $w_1 < \pi^2/4$, en beschouw de restterm

(48) $$R_m = e^{u\,\varphi(w)} - \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{h=0}^{\mu} A_{\mu h}u^h w^{\mu-h}.$$

Dan hebben we

(49) $$|u| \leq u_1,\ |w| \leq w_1 \Longrightarrow |R_m| \leq M(|u|^m+|w|^m),$$

waarin de constante M niet afhangt van u,w. Immers $\theta=\mathrm{Max}(|u|/u_1, |w|/w_1) \leq 1$ en

$$|R_m| = \left|\sum_{\mu=m}^{\infty}\sum_{h=0}^{\mu} A_{\mu h}u^j w^{\mu-h}\right| \leq \theta^m \sum_{\mu=m}^{\infty}\sum_{h=0}^{\mu} A_{\mu h}u_1^h w_1^{\mu-h}.$$

Om (49) op (45) te kunnen toepassen, moeten we aldaar eerst enige termen afsplitsen. Stel

(50) $$\lambda = \frac{1}{\pi} a n^{-1/4}, \qquad (\lambda < \tfrac{a}{2}).$$

In (44) is $A_\nu > 0$ dus $\varphi(w) > 0$ voor $0 < w < \pi^2/4$. Dus de totale bijdrage van de termen in (45) met $k-\frac{1}{2} > \lambda$ is hoogstens gelijk aan

$$\frac{2}{a} \cdot \frac{a}{2} \cdot e^{-\alpha\lambda^2} = e^{-\sqrt{n}} .$$

Voor de overige termen geldt

$$\left| -\frac{2}{n}\alpha^2(k-\tfrac{1}{2})^4 \right| \leq \frac{2}{n}(\alpha\lambda^2)^2 = 2,$$

$$\left| \frac{\alpha}{n}(k-\tfrac{1}{2})^2 \right| \leq \frac{1}{n}\alpha\lambda^2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 < \pi^2/4.$$

Dus volgt uit (45), (48), (49),

$$S_n(a) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{n}} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{h=0}^{\mu} A_{\mu h}(-2)^h n^{-\mu} \sum_{k=1}^{[\lambda+\frac{1}{2}]} e^{-\alpha(k-\frac{1}{2})^2}\left[\alpha(k-\tfrac{1}{2})^2\right]^{\mu+h} + T,$$

waarin T voldoet aan

$$T \leq e^{-\sqrt{n}} + M\alpha^{\frac{1}{2}} n^{-m-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha(k-\frac{1}{2})^2}\left\{\left[\alpha(k-\tfrac{1}{2})^2\right]^m + \left[\alpha(k-\tfrac{1}{2})^2\right]^{2m}\right\}.$$

Hier stelt M een constante voor die niet afhangt van a of n.

Het is niet moeilijk te bewijzen, dat voor ieder reëel getal $r > -\frac{1}{2}$ er een constante C bestaat zodanig dat

$$\alpha^{\frac{1}{2}} \sum_{k-\frac{1}{2} \geq \mu} e^{-\alpha(k-\frac{1}{2})^2}\left[\alpha(k-\tfrac{1}{2})^2\right]^r \leq C e^{-\alpha\mu^2}\left(1+(\alpha\mu^2)^{r+\frac{1}{2}}\right)$$

voor elke keuze der positieve getallen α, μ. Door $\mu = \frac{1}{2}$ te kiezen volgt $T = O(n^{-m-\frac{1}{2}})$, uniform in a. Door $\mu = \lambda$ te kiezen, $(\alpha\lambda^2 = \sqrt{n})$, vinden we tenslotte

(51) $$S_n(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{h=0}^{\mu} A_{\mu h}(-2)^h n^{-\mu} g_{\mu+h}\left(\frac{\pi^2 n}{a^2}\right) + O(n^{-m-\frac{1}{2}}),$$

waarin $O(n^{-m-\frac{1}{2}})$ uniform in a geldt, terwijl

(52) $$g_r(\alpha) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha(k-\frac{1}{2})^2}\left[\alpha(k-\tfrac{1}{2})^2\right]^r,$$

een <u>begrensde</u> functie van α is. Wegens

(53) $$2^{2n}\binom{2n}{n}^{-1} \sim \sqrt{\pi n}\left(1 + \frac{1}{8n} + \frac{1}{128n^2} - \frac{5}{1024n^3} + \dots\right)$$

vinden we uit (42) en (51) een complete asymptotische ontwikkeling van $P_{n,n}(a/n, a/n)$ met een restterm $O(n^{-m})$, <u>uniform in</u> a, $(m=1,2,\dots)$.

Het bijzondere geval m=1 geeft

$$(54) \qquad \left| P_{nn}(a/n,a/n) - g_o\left(\frac{\pi^2 n}{a^2}\right) \right| < \frac{C}{\sqrt{n}} ,$$

waarin C een constante is onafhankelijk van de positieve gehele getallen a en n. Wegens (35) en (52) is (54) een verscherping van (37). Verder is het bijzondere geval m=2 een generalisatie van een resultaat gevonden door Gnedenko, (DAN, vol.82 (1952), 661-663).

Overschrijdingsproblemen in Markovreeksen

Voordracht door

Prof.Dr J.H.B. Kemperman

op dinsdag 9 december 1958

Inleiding. In deze voordracht wil ik een schets geven van een aantal nieuwe methodes ter bestudering van overschrijdingsproblemen in een stationnair Markov proces. In vele gevallen leiden deze methodes tot expliciete formules voor de overeenkomstige overschrijdingswaarschijnlijkheden. Wegens tijdgebrek zal alleen het geval beschouwd worden van een stationnair Markov proces met een discrete tijd ($t=0,1,2,\dots$) en een discrete ruimte ($\dots,-1,0,1,2,\dots$), een zg. stationnaire Markovreeks. Voor slechts één speciale toepassing zijn alle details weergegeven.

1. De hoofdstelling. Zij $\{\underline{z}_n,\ n=0,1,\dots\}$ een stationnaire Markovreeks met z_n geheel. Met andere woorden, de $\underline{z}_n$ zijn geheelwaardige stochastische variabolen, zodanig dat de voorwaardelijke waarschijnlijkheid

$$P(\underline{z}_{n+1}=j\,|\,\underline{z}_n=i,\ \underline{z}_{n-1}=i_{n-1},\dots,\underline{z}_o=i_o)=P_{ij}^{(1)}$$

onafhankelijk is van n en onafhankelijk van de i_ν met $\nu<n$, (voor $n=0,1,\dots$ en voor iedere keuze der gehele getallen $i_o,\dots,i_{n-1},\ i_n=i,\ i_{n+1}=j$). Hierbij zijn de $P_{ij}^{(1)}=P^{(1)}(i,j)$ gegeven getallen met

$$P_{ij}^{(1)}\geqslant 0\ ;\qquad \sum_j P_{ij}^{(1)}=1.$$

Een meer aanschouwelijk beeld verkrijgt men door een "stochastisch" deeltje P in te voeren dat op het tijdstip n de positie $\underline{z}_n$ heeft, ($n=0,1,\dots$). Gegeven $\underline{z}_m=i_o$ is dan de voorwaardelijke waarschijnlijkheid, dat P gedurende het tijdsinterval $[m,m+n]$ een specifieke weg $\underline{z}_{m+h}=i_h$ ($h=1,\dots,n$) beschrijft, gelijk aan

$$P^{(1)}(i_o,i_1)\ P^{(1)}(i_1,i_2)\dots\ P^{(1)}(i_{n-1},i_n).$$

We voeren verder een stochastische gebeurtenis $\mathcal{A}$ in (ook absorbtie genoemd), welke alleen kan optreden op de tijdstippen 0,1,2,... . Zij $\mathcal{A}_n$ de gebeurtenis dat $\mathcal{A}$ optreedt op het tijdstip n; we nemen aan dat $\mathcal{A}_n$ volledig onafhankelijk is van de $\mathcal{A}_m$ en z_m met $m < n$. Tenslotte veronderstellen we, dat

$$P(\mathcal{A}_n \mid \underline{z}_n = i) = 1 - \rho_i,$$

waarin de $\rho_i = \rho(i)$ gegeven getallen zijn met $0 \leq \rho_i \leq 1$, $(i=\dots,-1,0,1,\dots)$; (opmerking: als $\mathcal{A}$ optreedt op het tijdstip n dan wordt P niet ter plaatse "geabsorbeerd" doch gaat "rustig door" in de zin van de Markovreeks $\{\underline{z}_n\}$).

Gegeven $\underline{z}_m = i$, zij $Q_{ij}^{(n)}$ de voorwaardelijke waarschijnlijkheid dat $\underline{z}_{m+n}=j$ en dat $\mathcal{A}$ op geen der tijdstippen $m,m+1,\dots,m+n-1$ optreedt; men ziet gemakkelijk in dat deze grootheid niet van m afhangt. Uit de definitie van $Q_{ij}^{(n)}$ volgt

$$(1) \qquad Q_{ij}^{(0)} = \delta_i^j \; ; \quad Q_{ij}^{(1)} = \rho_i P_{ij}^{(1)}; \qquad 0 \leq Q_{ij}^{(n)} \leq 1,$$

en

$$(2) \qquad Q_{ik}^{(m+n)} = \sum_j Q_{ij}^{(m)} \, Q_{jk}^{(n)} \; .$$

Bijna alle in de practijk voorkomende overschrijdingsproblemen kunnen, door een geschikte keuze van de ρ_i, gereduceerd worden tot een probleem betreffende de $Q_{ij}^{(n)}$.

Hoofdstelling. Zij t een vaste complexe constante, f_i een complexe functie gedefinieerd voor alle $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, zodanig dat

$$(3) \qquad \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} \left| f_j \, t^n \right| < \infty \qquad \text{voor alle } i.$$

Stel

$$(4) \qquad f_i - t \sum_j P_{ij}^{(1)} f_j = g_i \qquad \text{als } \rho_i \neq 0,$$

(anders is g_i willekeurig). Dan geldt, voor elk geheel getal i,

$$(5) \qquad f_i = \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} \, t^n \, \rho_j \, g_j + \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} \, t^n (1-\rho_j) f_j \, ,$$

waarin beide dubbelsommen absoluut convergent zijn.

Dus, als we ter verkorting

$$(6) \qquad Q_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} t^n$$

invoeren, dan is de laatste reeks absoluut convergent wanneer $f_j \neq 0$ of $\rho_j g_j \neq 0$, terwijl, voor elke i,

$$(7) \qquad f_i = \sum_j Q_{ij} \rho_j g_j + \sum_j Q_{ij}(1-\rho_j) f_j .$$

Bewijs. Beschouw de transformatie

$$(8) \qquad T_n a = \sum_j Q_{ij}^{(n)} a_j ,$$

waarin $a=a_i$ een complexe functie aangeeft gedefinieerd voor alle gehele getallen i. Met $a \geq b$ zullen we aangeven dat $a_i \geq b_i$ voor alle i. Als $a \geq 0$ dan zullen we met $T_n a < \infty$ aangeven dat (8) (absoluut) convergeert voor alle i. Dus $T_n|a| < \infty$ is een voldoende voorwaarde opdat $T_n a$ bestaat. Merk op dat $T_o a=a$, wegens (1).

Als $T_{m+n} |a| < \infty$, dan volgt uit (2), dat

$$(9) \qquad \sum_j Q_{ij}^{(m+n)} a_j = \sum_j a_j \sum_h Q_{ih}^{(m)} Q_{hj}^{(n)} = \sum_h Q_{ih}^{(m)} \sum_j Q_{hj}^{(n)} a_j ,$$

met andere woorden,

$$(10) \qquad T_{m+n} a = T_m T_n a \quad \text{als} \quad T_{m+n}|a| < \infty .$$

Wegens (8) kan (3) geschreven worden als

$$(11) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} T_n |t^n f| < \infty ,$$

dus geldt (10) voor $a=t^{m+n} f$.

Door (4) met ρ_i te vermenigvuldigen, volgt

$$(12) \qquad \rho f - T_1 t f = \rho g,$$

vgl.(1). Dus, wegens (10),

$$T_n|t^n \rho g| \leq T_n|t^n f| + T_{n+1} |t^{n+1} f|$$

en (11) impliceert

$$(13) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} T_n |t^n \rho g| < \infty .$$

De beweringen over absolute convergentie zijn een onmiddellijk gevolg van (11) en (13). Het rechterlid van (5) heeft dus zin en is gelijk aan

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n\, t^n \left\{ \rho g + (1-\rho) f \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \left\{ t^n f - T_1 t^{n+1} f \right\} = f,$$

wegens (12), $T_n T_1 t^{n+1} f = T_{n+1} t^{n+1} f$, $T_n t^n f \to 0$ voor $n \to \infty$, (uit (11)), en $T_0 f = f$.

2. Enige toepassingen. In deze paragraaf geeft t een vast complex getal aan, voorlopig met $|t| < 1$, dus is de reeks in (6) altijd absoluut convergent. Kiest men $f_i = \delta_i^{\,k}$ dan geeft (4) dat $g_i = \delta_i^{\,k} - t\, P_{ik}^{(1)}$ en uit (1.7) volgt

(1) $$Q_{ik} = \delta_i^{\,k} + t \sum_j Q_{ij}\, \rho_j\, P_{jk}^{(1)}.$$

Overigens volgt (1) ook direct uit (1.2), evenals

(2) $$Q_{ik} = \delta_i^{\,k} + t \sum_j \rho_i P_{ij}^{(1)}\, Q_{jk}.$$

Zij verder

(3) $$P_{ij}^{(n)} = P(\underline{z}_{m+n} = j \mid \underline{z}_m = i)$$

en

(4) $$P_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)}\, t^n.$$

Wanneer men, voor alle j, $\rho_j = 1$ zou kiezen dan gaan $Q_{ij}^{(n)}$ en Q_{ij} over in $P_{ij}^{(n)}$ en P_{ij}, dus (2) geeft

(5) $$P_{ik} = \delta_i^{\,k} + t \sum_j P_{ij}^{(1)}\, P_{jk}.$$

Kies nu $f_i = P_{ik}$; wegens (5) is dan $g_i = \delta_i^{\,k}$. Verder geldt (1.3) wegens $|t| < 1$, $|f_i| \leq (1-|t|)^{-1}$ en $\sum_j Q_{ij}^{(n)} \leq 1$. Uit (1.7) volgt nu

(6) $$P_{ik} = \rho_k\, Q_{ik} + \sum_j Q_{ij} (1-\rho_j)\, P_{jk}.$$

Formule (6) heeft vele toepassingen. Wegens tijdgebrek zal ik me bepalen tot een korte schets van één dezer toepassingen.

Zij bijvoorbeeld $\rho_j=1$ als $j \notin S$, waarin $S=\{y_1,\dots,y_p\}$ een eindige verzameling van gehele getallen is, (m.a.w. absorbtie kan alleen optreden wanneer P een positie $z_n \in S$ heeft). Door (6) toe te passen voor $k \in S$ vindt men (voor elke i) een systeem van p vergelijkingen, waaruit de Q_{ij} $(j \in S)$ kunnen worden opgelost. Achteraf kan Q_{ij} $(j \notin S)$ uit (6) berekend worden.

Aldus vindt men Q_{ij} als een expliciete rationale functie van zekere P_{hk} en ρ_k. Daarna kan $Q_{ij}^{(n)}$ uit (1.6) berekend worden. Tenslotte kan men uit

$$Q_{ij}^{(n)} = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\lambda_p=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\,\rho(y_1)^{\lambda_1}\dots\rho(y_p)^{\lambda_p}$$

de coefficient $Q_{ij}^{(n)}$ $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ bepalen, die de voorwaardelijke waarschijnlijkheid aangeeft, gegeven $\underline{z}_0=i$, dat $\underline{z}_n=j$ en dat, voor $\nu=1,\dots,p$, $\underline{z}_m=y_\nu$ gebeurt op precies λ_ν van de tijdstippen $m=0,1,\dots,n-1$.

Deze methode heeft vaak succes doordat het in vele gevallen (b.v. in het discrete Ehrenfest model) niet moeilijk is de P_{hk} expliciet te bepalen.

We laten nu de eis $|t| < 1$ vervallen. Een verdere toepassing van de hoofdstelling verkrijgt men door f_i te kiezen als een eigenvector van de matrix $(P_{ij}^{(1)})$, m.a.w. zodanig dat $g_i=0$; dit principe werd het eerst toegepast door D. van Dantzig. Neem nu aan dat $P_{ij}^{(1)}=p_{j-i}$. Dan is $f_i=\xi^i$ (ξ vast) een dusdanige eigenvector met eigenwaarde $t=\psi(\xi)^{-1}$,

$$\psi(\xi) = \sum_j p_j\,\xi^j,$$

mits de laatste reeks convergeert en $\psi(\xi)\neq 0$. Uit de hoofdstelling volgt dat

$$\sum_j \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} \left|\xi^j \psi(\xi)^{-n}\right| < \infty \quad \text{voor alle i impliceert} \tag{7}$$

$$\sum_j \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho_j)\, Q_{ij}^{(n)}\, \xi^j \psi(\xi)^{-n} = \xi^i, \tag{8}$$

een generalisatie van Wald's fundamentele identiteit.
Men kan gemakkelijk practisch toepasbare voorwaarden afleiden, die (7) en dus (8) impliceren.

3. Peter en Paul. Beschouw het volgende spel tussen Peter en Paul. Aan het begin krijgt Peter een bedrag i (i=0,1,...) van Paul. Verder, na iedere worp met een zuivere munt, krijgt Peter -1 of +1 van Paul al naar gelang kruis of munt bovenkomt. Zij $\underline{z}_n$ Peter's winst na n worpen, $\underline{z}_o=i$, en zij $\underline{U}_i^{(n)}$ het aantal van de momenten m=0,1,...,n dat $z_m \leq 0$, $(0 \leq \underline{U}_i^{(n)} \leq n+1)$. We zijn geïnteresseerd in de waarschijnlijkheidsverdeling $U_i^{(n)}(\lambda)= =P(\underline{U}_i^{(n)}=\lambda)$. Chung en Feller slaagden erin de verdeling te bepalen van een grootheid nauw verwant aan $\underline{U}_o^{(n)}$.

We kunnen dit probleem als volgt generaliseren. Beschouw een reeks onafhankelijke geheelwaardige stochastische variabelen $\underline{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \ldots$ elk met dezelfde verdeling

$$P(\underline{\zeta}_n = j) = p_j \ , \qquad (j=0, \pm 1, \ldots).$$

Zij verder $\underline{z}_n=i+\underline{\zeta}_1+\ldots+\underline{\zeta}_n$, $(\underline{z}_o=i)$, waarin i een vast niet-negatief geheel getal aangeeft. Dan vormen de $\underline{z}_n$ een stationnaire Markovreeks met

$$p_{ij}^{(1)} = p_{j-i} \ .$$

Hierin is $p_j \geq 0$, $\sum p_j=1$. Later zullen we $\{p_j\}$ nog aan nadere beperkingen onderwerpen.

Zij verder de absorbtie $\mathcal{A}$ zodanig gekozen dat

(1) $$\rho_j = 1 \text{ als } j > 0, \qquad \rho_j = \rho \text{ als } j \leq 0,$$

waarin ρ een vast getal voorstelt, $0 \leq \rho < 1$. Dan geeft $\rho_j Q_{ij}^{(n)}$ de voorwaardelijke waarschijnlijkheid aan, gegeven $z_o=i$, dat $z_n=j$ en dat $\mathcal{A}$ op geen der momenten m=0,1,...,n optreedt. Dus, in verband met de definitie van $\mathcal{A}$,

(2) $$\rho_j \ Q_{ij}^{(n)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \ Q_{ij}^{(n)}[\lambda]\rho^{\lambda},$$

waarin $Q_{ij}^{(n)}[\lambda]$ de voorwaardelijke waarschijnlijkheid aangeeft, gegeven $\underline{z}_o=i$, dat $\underline{z}_n=j$ en dat $\underline{z}_m \leq 0$ gebeurt op precies λ van de ogenblikken 0,1,...,m. Tenslotte geeft

(3) $$U_i^{(n)}(\lambda) = \sum_j \ Q_{ij}^{(n)}[\lambda]$$

de gezochte voorwaardelijke waarschijnlijkheid aan, gegeven $\underline{z}_o=i$, dat $\underline{z}_m \leq 0$ gebeurt op precies λ van de ogenblikken 0,1,...,m.

Teneinde deze grootheden te bepalen, passen we de hoofdstelling toe met $0<|t|<1$, $f_i=u^i$, waarbij $|u|=1$, (t vast, u variabel). Dan is (1.3) voldaan wegens $\sum_j Q_{ij}^{(n)} \leq 1$. Verder is $g_i=(1-t\,\psi(n))u^i$ met

(4) $$\psi(u) = E(u^{\xi_m}) = \sum_j p_j u^j .$$

Aldus volgt

(5) $$u^i=(1-t\,\psi(u)) \sum_j Q_{ij}\ \rho_j u^i + \sum_j Q_{ij}(1-\rho_j)u^j ,$$

waarin beide reeksen absoluut convergent zijn, terwijl

(6) $$Q_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)}\ t^n .$$

Stel verder

(7) $$F_i(u) = \sum_{j=-\infty} Q_{ij}u^j , \quad H_i(u)= \sum_{j=1}^{\infty} Q_{ij}\ u^j ,$$

waarin beide sommen absoluut convergent zijn als $|u|=1$. Wegens (1) en (7) volgt nu uit (5)

(8) $$u^i = (1-t\,\psi(u))\left[\rho\, F_i(u)+H_i(u)\right] +(1-\rho)F_i(u),$$

dus

(9) $$F_i(u) = (1-\rho\, t\,\psi(u))^{-1}\left[u^i-(1-t\,\psi(u))H_i(u)\right] ,$$

mits $|u|=1$. Neem nu aan, dat

(10) $$p_j \leq C\ a^{-j} , \qquad (j \leq 0),$$

waarin C en a positieve constanten zijn, $a<1$.
In dit geval kan men het geldigheidsgebied van (9) uitbreiden door $F_i(u)$ analytisch voort te zetten.

Vooreerst is $F_i(u)$ analytisch voor $|u|>1$ met inbegrip van het punt $u=\infty$. Vervolgens is $H_i(u)$ analytisch voor $|u|<1$, continu voor $|u|\leq 1$, terwijl $H_i(0)=0$. Tenslotte volgt uit (4) en (10) dat $\psi(u)$ analytisch is voor $a<|u|<1$, continu voor $a<|u|\leq 1$.

Als $|u|=1$ dan is $|\psi(u)|\leq 1$ dus bestaat er een constante R met $a<R<1$ en $\psi(R)<|t|^{-1}$, (t was vast, $0<|t|<1$). Verder is

$$Q_{ij}^{(n)} \leq p_{j-i}^{(n)} = P(z_n = j \mid z_o = i),$$

terwijl
$$\sum p_j^{(n)} R^j = E(R^{\zeta_1+\ldots+\zeta_n}) = \psi(R)^n.$$

Wegens (6) volgt hieruit dat de reeksen in (7) absoluut convergent zijn voor $u=R$, dus is $F_i(u)$ zelfs analytisch voor $|u|>R$.

Nu geldt (9) voor $|u|=1$, terwijl beide leden van (9) continu zijn voor $R<|u|\leqslant 1$, analytisch voor $R<|u|<1$, dus (9) geldt voor alle u met $R<|u|\leqslant 1$. Tenslotte levert (9) een analytische voortzetting van $F_i(u)$ tot het gehele gebied $|u|>a$, (zodanig dat (9) geldt), met uitsluiting van de nulpunten van $1-\rho t\psi(u)$, waar $F_i(u)$ een pool kan hebben.

Het bovenstaande principe laat vele toepassingen toe. Teneinde het verhaal niet al te lang te maken zullen we ons nu beperken tot het geval dat

$$(10) \qquad p_j = 0 \text{ als } j<-1, \quad p_{-1}>0, \quad 0<\rho<1.$$

Dan is

$$(11) \qquad \psi(u) = \sum_{j=-1}^{\infty} p_j u^j$$

analytisch in $0<|u|<1$ met een enkelvoudige pool in $u=0$. Verder geldt (10) voor elke $a>0$, dus levert (9) een analytische voortzetting van $F_i(u)$ tot het gehele u-vlak met inbegrip van het punt $u=\infty$ doch met uitsluiting van het éénduidige nulpunt η van $1-\rho t\psi(u)$ met $|\eta|<1$; in het bijzonder is $F_i(u)$ rationaal. Verder, wegens (9), $i\geqslant 0$ en $H_i(0)=0$, hebben we $F_i(0)=0$. Zij tenslotte ξ het eenduidige nulpunt van $1-t\psi(u)$ met $|\xi|<1$, $(\xi\neq\eta)$. Dan volgt uit (9) dat $F_i(\xi)=(1-\rho)^{-1}\xi^i$. Bovengenoemde eigenschappen bepalen de rationale functie $F_i(u)$ eenduidig, dus

$$(12) \qquad (1-\rho)F_i(u) = (\xi-\eta)\xi^{i-1}u(u-\eta)^{-1}.$$

Verder, wegens (3), (2), (6), (1), (7), (8) en $\psi(1)=1$,
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} U_i^{(n)}(\lambda)t^n\rho^\lambda = \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} \rho_j\, Q_{ij}^{(n)} t^n$$

$$= \sum_j \rho_j\, Q_{ij} = \rho F_i(1)+H_i(1) = \left[1-(1-\rho)F_i(1)\right](1-t)^{-1},$$

dus uit (12)

(13) $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} U_i^{(n)}(\lambda)t^n\rho^\lambda = \left[1-\xi^{i-1}+\xi^{i-1}(1-\xi)/(1-\eta)\right](1-t)^{-1}.$$

Hierin is ξ eenduidig bepaald door $|\xi|<1$,

$$t=\psi(\xi)^{-1} = \xi(p_{-1}+p_o\xi + p_1\xi^2+\ldots)^{-1},$$

dus $\xi=\xi(t)$ is analytisch in t ($|t|<1$) en $\xi(0)=0$. Verder is $\eta=\xi(\rho t)$. Laten nu de constanten $\alpha^{(\lambda)}$ en $\beta_i^{(n)}$ gedefinieerd zijn door

(14) $$(1-\eta)^{-1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\alpha^{(\lambda)}\ (\rho t)^\lambda ,$$

en

(15) $$\xi^{i-1}(1-\xi)(1-t)^{-1} = \sum_{-\infty}^{\infty}\beta_i^{(n)}t^n$$

met $\beta_i^{(n)}=0$ als $n<i-1$. Dan volgt uit (13)

(16) $$\boxed{U_i^{(n)}(\lambda) = \alpha^{(\lambda)}\beta_i^{(n-\lambda)} \quad \text{mits} \quad \lambda\geqslant 1\ .}$$

Hierin is

$$\alpha^{(\lambda)}=\frac{1}{2\pi i}\int(1-\xi)^{-1}\frac{dt}{t^{\lambda+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int(1-\xi)^{-1}\psi(\xi)^{\lambda+1}\,d\psi(\xi)^{-1},$$

(met een kleine cirkel om nul als integratieweg), dus is $\alpha^{(\lambda)}$ gelijk aan het residu in $u=0$ van de analytische functie $-(1-u)^{-1}\psi'(u)\,\psi(u)^{\lambda-1}$. Evenzo is $\beta_i^{(n)}$ gelijk aan het residu in $u=0$ van de functie $(1-\psi(u))^{-1}\psi'(u)(1-u)u^{i-1}\psi(u)^n$.

In het oorspronkelijke spel tussen Peter en Paul is

$$\psi(u)=\tfrac{1}{2}(u^{-1}+u) \qquad \text{dus} \quad \psi'(u) = -(1-u^2)/(2u^2).$$

Dan is $\alpha^{(\lambda)}$ gelijk aan de coefficient van u^λ in de ontwikkeling van $2^{-\lambda}(1+u)(1+u^2)^{\lambda-1}$ in machten van u. Verder is $\beta_i^{(n)}$ gelijk aan de coefficient van u^{n-i+1} in de ontwikkeling van $2^{-n}(1+u)(1+u^2)^n$ in machten van u. Dus volgt uit (16):

(17) $$U_i^{(n)}(\lambda) = 2^{-n}\binom{\lambda-1}{[\lambda/2]}\binom{n-\lambda}{[(n-\lambda-i+1)/2]}, \qquad (\lambda\geqslant 1).$$

Uit (17) kan men op de gebruikelijke wijze een "boog-sinus-wet" afleiden, vgl. W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, New York (1950), p.252.

De asymptotische verdeling van rijen in een compacte groep

Voordracht door

Prof.Dr J.H.B. Kemperman

Woensdag 22 april 1959

1. Afrondingsfouten.

Voor $r=1,2,\ldots,p$, zij $g_r(n)$ een gegeven reële functie, tenminste gedefinieerd voor $n=1,2,\ldots$, en zij c_r een gegeven gehele constante. Neem aan, dat we de lineaire combinatie

$$h(n) = c_1 g_1(n) + \ldots + c_p g_p(n)$$

willen berekenen voor $n=1,2,\ldots$ met behulp van een rekenmachine, die alleen gehele getallen kan voorstellen. De gebruikelijke methode leidt dan tot een fout

(1) $$y_n = c_1 x_{1n} + \ldots + c_p x_{pn} ,$$

waarin

(2) $$x_{rn} = g_r(n) - [\, g_r(n) + \tfrac{1}{2}\,]$$

de afrondingsfout voorstelt in de representatie van $g_r(n)$ als $[g_r(n)+\frac{1}{2}]$.

Probleem: wat kan men zeggen over de y_n? Natuurlijk is $|y_n| \leq (|c_1|+\ldots+|c_p|)/2$, doch in het algemeen is deze schatting veel te ruw.

Teneinde iets meer te kunnen zeggen, neemt men vaak aan dat de x_{rn} $(r=1,\ldots,p;\ n=1,2,\ldots)$ beschouwd kunnen worden als onafhankelijke stochastische variabelen, elk met een gelijkmatige waarschijnlijkheidsverdeling in $[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}]$. Als dit inderdaad het geval is, dan kan men gemakkelijk de (al of niet simultane)waarschijnlijkheidsverdeling van de y_n berekenen. Bijvoorbeeld, als p groot is en $c_r << \sqrt{c_1^2+\ldots+c_p^2}$ dan zou y_n ongeveer normaal verdeeld zijn met een spreiding gelijk aan $\sigma = \sqrt{(c_1^2+\ldots+c_p^2)/12}$, dus $|y_n| < 4\sigma$ geldt met een zeer hoge waarschijnlijkheid (n vast).

Dit alles klinkt erg mooi. Helaas, als b.v. $g_1(n)=\sqrt{n}$, is het reeds volkomen zinloos te zeggen dat het getal $x_{13}=\sqrt{3}-2$ een stochastische variabele is met een gelijkmatige verdeling in $[-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}]$.

De situatie kan evenwel gered worden door over te gaan op de asymptotische eigenschappen van de reeksen $\{x_{rn}\}$, $(r=1,\ldots,p)$. Zij μ_r een niet negatieve reguliere Borel maat op

$$I = [-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}],$$

waarin $-\frac{1}{2}$ en $+\frac{1}{2}$ zijn geïdentificeerd, $\mu(I)=1$. Dan heet μ_r de (asymptotische) <u>verdeling</u> van de reeks $\{x_{rn}\}$ als

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\text{aantal } m=1,\ldots,n \text{ met } x_{rm}\in A\right] = \mu_r(A),$$

voor elk deelinterval $A=(a,b)$ van I, zodanig dat de verzameling der eindpunten a,b een μ_r-maat nul heeft; (natuurlijk heeft niet iedere reeks een dergelijke verdeling). Een met (3) aequivalente definitie is:

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(f(x_{r1})+\ldots+f(x_{rn})\right) = \int f(x)\,d\mu_r(x),$$

voor elke op I continue functie, $f(-\frac{1}{2})=f(+\frac{1}{2})$. Als $\{x_{rn}\}$ de Lebesgue maat op I als (asymptotische) verdeling heeft dan zeggen we dat $\{x_{rn}\}$ een in I <u>gelijkmatige</u> (of uniforme) verdeling heeft.

Neem aan dat, voor $r=1,\ldots,p$, de reeks $\{x_{rn}\}$ een verdeling μ_r heeft. We zullen deze p reeksen (asymptotisch) <u>onafhankelijk</u> noemen, indien

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} f_1(x_{1m})\ldots f_p(x_{pm}) = \int f_1\,d\mu_1\ldots\int f_p\,d\mu_p,$$

voor elk stel continue functies $f_1(x),\ldots,f_p(x)$ op I. Als dit het geval is, dan heeft de door (1) gedefinieerde reeks $\{y_n\}$ een asymptotische verdeling ν in de zin dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(g(y_1)+\ldots+g(y_n)\right) = \int g(y)\,d\nu$$

voor elke continue functie $g(y)$, $(-\infty < y < +\infty)$. Hierbij is $\nu(A)$ precies gelijk aan de waarschijnlijkheid dat $S=c_1X_1+\ldots+c_pX_p\in A$, waarin de X_r onafhankelijk stochastische variabelen zijn met $|X_r|\leq\frac{1}{2}$, $Pr(X_r\in B)=\mu_r(B)$ als $B\subset I$, $(r=1,\ldots,p)$.

2. <u>Compacte groepen; inleiding</u>.

Men kan I opvatten als de groep der reële getallen (mod 1). Zij nu G een vaste compacte groep, additief geschreven, d.w.z., G is zowel een compacte Hausdorff ruimte als een additieve groep zodanig dat x-y een continue functie is van x,y. We zullen voor het gemak aannemen dat G aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet.

Zij $\mathcal{B}$ de σ-ring gegenereerd door de open deelverzamelingen van G; een $B \in \mathcal{B}$ heet ook wel een Borel verzameling. Onder een Borel maat μ op G verstaan we een eindige niet negatieve maat op $\mathcal{B}$. We zijn alleen geinteresseerd in de <u>reguliere</u> Borel maten, dus een Borel maat μ met de eigenschap dat, voor elke $A \in \mathcal{B}$ en elke $\varepsilon > 0$, men een afgesloten verzameling $C \subset A$ en een open verzameling $U \supset A$ kan vinden met $\mu(U) - \varepsilon < \mu(A) < \mu|C| + \varepsilon$.

Een zeer speciale (reguliere) Borel maat is de z.g. <u>Haar maat</u>, die eenduidig bepaald is door de eigenschappen

$$\mu(A+x) = \mu(A) = \mu(x+A), \qquad (A \in \mathcal{B}),$$

$\mu(G)=1$. Een integraal t.o.v. deze maat wordt gewoonlijk geschreven als $\int f(x)dx$.

Zij C(G) de Banach ruimte van alle continue functies f op G met de uniforme norm

$$\|f\| = \sup_x |f(x)| .$$

Voor elke Borel maat μ definieert

$$\mu \cdot f = \int f \, d\mu \, , \qquad (f \in C(G), \tag{6}$$

een (continue en) lineaire functie $\mu \cdot f$ op C(G) met $\mu \cdot f \geq 0$ als $f \geq 0$. Omgekeerd, met elke zodanige functie $\mu \cdot f$ correspondeert een eenduidige reguliere Borel maat $\mu(A)$ op $\mathcal{B}$, zodanig dat (6) geldt.

Met een maat op G zullen we voortaan altijd bedoelen een element in de collectie $\mathfrak{M}(G)$ van alle reguliere Borel maten μ op G (= niet negatieve lineaire functies op C(G)) met $\mu(G)=1$. In $\mathfrak{M}(G)$ definieren we nu een begrip convergentie als volgt

$$\mu_n \to \mu \quad \text{als} \quad \mu_n \cdot f \to \mu \cdot f \text{ voor elke } f \in C(G).$$

Men kan bewijzen: <u>als $\mu_n \to \mu$ dan geldt</u>

$$\int f \, d\mu_n \to \int f \, d\mu$$

<u>voor elke begrensde functie f(x) op G waarvoor de verzameling der discontinuiteiten een μ-maat nul heeft</u>. Omdat C(G) separabel is,

volgt gemakkelijk met de diagonaalmethode dat elke rij in $\mathfrak{M}(G)$ een convergente deelrij heeft.

Onder een <u>representatie</u> van de graad r van G verstaan we een continue homomorphe afbeelding $D(x)$ van G in de groep van alle $r \times r$ unitaire matrices:

$$D(x+y) = D(x)\,D(y),$$

dus $D(-x)=D(x)^{-1}=\overline{D(x)^{T}}$. De zeer speciale representatie, die aan elk element x het complexe getal 1 toevoegt, aangeduid met $D_0(x)$, heet de triviale representatie van G.

Kies nu uit elke collectie van aequivalente representaties een irreducibele, (dit kan).

Dan vindt men hoogstens aftelbaar vele irreducibele, niet aequivalente representaties $D_m=((g_{ij}^{(m)}))$, $(m=0,1,2,\dots)$, zodanig dat (Peter-Weyl) de collectie van alle lineaire combinaties van de $g_{ij}^{(m)}$ dicht ligt in $C(G)$. Dus geldt $\mu_n \to \mu_\mu$ zodra $\mu_i g_{ij}^{(m)} \to \mu \cdot g_{ij}^{(m)}$ voor alle i,j,m. Of korter: $\mu_n \to \mu$ dan en alleen dan als

$$(7) \qquad \int D_m(x)d\mu_n \to \int D_m(x)d\mu , \qquad (m=1,2,\dots).$$

Zij opgemerkt, dat voor de Haar maat $\int D_m(x)dx=0$, $(m \geqslant 1)$. Dus noodzakelijk en voldoende opdat μ_n convergeert naar de Haar maat is:

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} \int D_m(x)d\mu_n = 0, \qquad (m=1,2,\dots).$$

Wanneer G commutatief is dan zijn de irreducibele representaties D_m van de graad 1 en heten ook wel karakters: continue homomorphismen van G in de multiplicatieve groep $\{|z|=1\}$ van complexe getallen. In het geval dat G de k-dimensionale torus $I \times \dots \times I$ is, zijn alle karakters van de vorm

$$D(x) = e^{2\pi ilx} = e^{2\pi i(l_1x_1+\dots+l_kx_k)},$$

met $l_1,\dots,l_k$ geheel.

3. Reeksen in een compacte groep.

Zij $x_n \in G$, $(n=1,2,\dots)$. Aan de reeks $\omega=\{x_n\}$ voegen we als volgt een reeks $\{\mu_n\}$ in $\mathfrak{M}(G)$ toe:

$$\mu_n(A) = \frac{1}{n}\left[\text{aantal } m=1,\ldots,n \text{ met } x_m \in A\right],$$

$(A \in \mathcal{B})$, hetgeen aequivalent is met

$$\mu_n \cdot f = \frac{1}{n}\,(f(x_1) + \ldots + f(x_n)), \qquad (f \in C(G)).$$

Zij $W(\omega)$ de (niet-lege) verzameling van alle accumulatiepunten van de verzameling $\{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$ in $\mathfrak{M}(G)$. Indien $W(\omega)$ slechts één element μ bevat dan heet μ de (asymptotische) verdeling van de reeks $\{x_n\}$. Indien $\{x_n\}$ de Haar maat als verdeling heeft dan zeggen we dat $\{x_n\}$ gelijkmatig verdeeld is in G. Noodzakelijke en voldoende voorwaarden hiervoor zijn

(9) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} D_m(x_{ij}) = \int D_m d\mu, \qquad (m \geqslant 1),$$

respectievelijk,

(10) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} D_m(x_j) = 0, \qquad (m \geqslant 1).$$

Voorbeeld. Een element $a \in G$ heet ergodisch als de reeks $\{na\}$ gelijkmatig verdeeld is in G. Zulke elementen bestaan natuurlijk alleen als G commutatief is; neem aan dat dit het geval is. Wegens (10) is $a \in G$ ergodisch dan en alleen dan wanneer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} D_m(ja) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} D_m(a)^j = 0,$$

ma.w. $D_m(a) \neq 1$, voor elk niet-triviaal karakter $D_m(x)$; (hieruit volgt gemakkelijk, dat in een samenhangende abelse compacte groep de verzameling der niet ergodische elementen de Haar maat nul heeft). Bewering: $a \in G$ is ergodisch dan en alleen dan als de verzameling $\{a, 2a, \ldots\}$ dicht ligt in G; (in G spelen dus de ergodische elementen een analoge rol als in I de irrationale getallen). Immers, zij H de afsluiting van $\{a, 2a, \ldots\}$, een afgesloten ondergroep van G. Als $H \neq G$ dan bestaat er een niet-triviaal karakter dat op H de waarde 1 aanneemt.

4. Onafhankelijkheid.

Laten G_1, G_2 compacte groepen voorstellen en zij $x_n \in G_1$, $y_n \in G_2$, $(n=1,2,\ldots)$. Neem aan dat $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ een verdeling bezitten: $\lambda \in \mathfrak{M}(G_1)$, $\mu \in \mathfrak{M}(G_2)$. We noemen de reeksen $\{x_n\}$ en $\{y_n\}$ onafhankelijk als de reeks $\{(x_n, y_n)\}$ in $G_1 \times G_2$ een verdeling heeft die het product is van de maten λ en μ. Dus moet gelden, voor $f \in C(G_1)$, $g \in C(G_2)$, dat

$$(11) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n f(x_j) g(y_j) = (\lambda \cdot f)(\mu \cdot g).$$

In feite geldt (11) nog steeds wanneer $f(x)g(y)$ begrensd is en t.o.v. $\lambda \times \mu$ bijna overal continu. Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor de onafhankelijkheid van $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ is

$$(12) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n D_p(x_j) D_q(y_j) = \int D_p \, d\lambda \int D_q \, d\mu,$$

voor elke representatie $D_{pq}(x,y) = D_p(x) D_q(y)$ van $G_1 \times G_2$, (D_p en D_q van dezelfde graad).

Theorema 1. Zij $\{x_n\}$ in G_1, $\{y_n\}$ in G_2 onafhankelijk met respectievelijke verdelingen λ en μ. Zij h een afbeelding $G_2 \to G_1$ die continu is in elk punt buiten een deelverzameling van G_2 met μ-maat nul. Dan zijn de reeksen $\{x_n\}$ en $\{h(y_n)\}$ in G_1 onafhankelijk.

Als bovendien $\{x_n\}$ gelijkmatig verdeeld is in G_1 dan ook $\{x_n + h(y_n)\}$.

Gevolg. Gegeven een in G_1 gelijkmatig verdeelde reeks $\{x_n\}$ en een van $\{x_n\}$ onafhankelijke reeks $\{y_n\}$ kan men een groot aantal nieuwe in G_1 gelijkmatig verdeelde reeksen construeren.

Bewijs. Zij $z_n = h(y_n)$. Als $g \in C(G_1)$ dan is $g(h(y))$ bijna overal$[\mu]$ continu in G_2, dus

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n g(z_j) = \int g(h(y_1)) d\mu = \nu \cdot g,$$

m.a.w. $\{z_n\}$ in G_1 heeft de verdeling ν. Analoog volgt uit (11), dat $\{x_n\}$ en $\{z_n\}$ onafhankelijk zijn. Neem nu aan dat λ de Haar maat op G_1 is. Dan is, voor D_m niet triviaal,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} D_m(x_j + z_j) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_1^m D_m(x_j) D_m(z_j)$$

$$= \int D_m \, d\lambda \int D_m \, d\nu = 0 \cdot \int D_m \, d\nu = 0,$$

m.a.w. $\{x_j + z_j\}$ is gelijkmatig verdeeld in G_1.

<u>Toepassing</u>. Zij $G_1=I^p$, $G_2=I^q$. Laten $\{(x_{1n},\ldots,x_{pn})\}$ in I^p en $\{(y_{1n},\ldots,y_{qn})\}$ in I^q onafhankelijk zijn, de eerste met een gelijkmatige verdeling in I^p.

Kies nu een begrensde functie $h_r\ (y_1,\ldots,y_q)$, periodiek van de periode 1 in elke component, Riemann integrabel over elk eindig interval, en stel

$$u_{rn} = x_{rn} + h_r\ (y_{1n},\ldots,y_{qn}) \qquad (\mathrm{mod}\ 1),$$

$(r=1,\ldots,p;\ n \geqslant 1)$. Dan is $\{(u_{1n},\ldots,u_{pn})\}$ gelijkmatig verdeeld in I^p, m.a.w. de reeksen $\{u_{rn}\}$ $(r=1,\ldots,p)$ zijn onafhankelijk, elk met een gelijkmatige verdeling in I.

Aangenomen dat $\{(y_{1n},\ldots,y_{qn})\}$ een verdeling in I^q heeft, (hetgeen het geval is als elke y_{sn} van de vorm (13) is), is aan de gestelde voorwaarden voldaan dan en alleen dan als $\{l_1x_{1n}+\ldots+l_{p+q}y_{qn}\}$ gelijkmatig verdeeld is in I voor elke keuze der gehele getallen $l_1,\ldots,l_{p+q}$ met $l_1,\ldots,l_p$ niet alle nul.

Verder is het bekend, dat $\{z_n\}$ gedefinieerd door

$$z_n = \sum_{j=0}^{M} c_j n^{\nu_j}, \qquad (\mathrm{mod}\ 1), \tag{13}$$

(c_j reëel, $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_M > 0$) dan en alleen dan gelijkmatig in I verdeeld is wanneer het polynoom (13) niet rationaal is; (rationaal = alle α_j geheel, alle c_j rationaal).

Dus is aan alle gestelde voorwaarden voldaan wanneer

(i) $x_{rn} (r=1,\ldots,n)$, y_{sn} $(s=1,\ldots,q)$ is (mod 1) een polynoom in n;

(ii) Voor geen keuze der gehele getallen $l_1,\ldots,l_{p+q}$, met $l_1,\ldots,l_p$ niet alle nul, is $l_1x_{1n}+\ldots+l_{p+q}y_{qn}$ een rationaal polynoom (mod 1).

Voorbeeld: de reeksen

$$\{A_n^{\alpha} + P \sin 2\pi Cn^{\gamma}\}, \quad \{Bn^{\beta} + Q \cos 2\pi (Dn^{\delta} + R \sin 2\pi En^{\varepsilon})\},$$

(gereduceerd (mod 1), zijn onafhankelijk en gelijkmatig verdeeld in I als b.v. $\alpha,\ldots,\varepsilon$ positief zijn, α,β verschillend van γ, δ, ε, $A\neq 0$, A irrationaal als α geheel, $B\neq 0$, B irrationaal als β geheel, A en B rationaal onafhankelijk als $\alpha=\beta$.

Kuiper [3] bewees reeds dat $\{n^{\frac{1}{2}} + \sin n\ (\mathrm{mod}\ 1)\}$ gelijkmatig verdeeld is in I. We merken op dat $\{n^{\alpha} + \sin 2\pi n^{\alpha}\ (\mathrm{mod}\ 1)\}$ nooit gelijkmatig verdeeld is in I.

Beschouw weer een tweetal compacte groepen G_1, G_2 en punten $x_n \in G_1$, $y_n \in G_2$, $(n=1,2,\ldots)$. We zeggen, dat $\{x_n\}$ in G_1 een <u>sterk</u> gelijkmatige verdeling heeft als

$$\frac{1}{n}\sum_{j=a}^{a+n} D_m(x_j) \longrightarrow 0$$

uniform geldt in a, voor elke niet triviale representatie D_m van G_1; (dit is b.v. het geval als $x_n = na$ met $a \in G_1$ ergodisch).

<u>Theorema 2</u>. Zij k een vast geheel getal $\geqslant 0$ en zij $x'_n = \Delta_{s_1} \ldots \Delta_{s_k} x_n$, $y'_n = \Delta_{s_1} \ldots \Delta_{s_k} y_n$, (waarin $\Delta_s u_n = u_{n+s} - u_n$). Neem aan dat aan één van de volgende voorwaarden is voldaan.

(I) Voor elke keuze van de positieve gehele getallen $s_1, \ldots, s_k$ is $\{x'_n\}$ <u>sterk</u> gelijkmatig verdeeld in G_1, terwijl $\Delta_1 y'_n \to 0$.

(II) Voor elke keuze van de positieve gehele getallen $s_1, \ldots, s_k$ is $\{x'_n\}$ gelijkmatig verdeeld in G_1 en zijn $\{x'_n\}$, $\{y'_n\}$ onafhankelijk.

Bewering: voor elke keuze van de <u>continue</u> afbeelding $h: G_2 \to G_1$ is de reeks $\{x_n + h(y_n)\}$ gelijkmatig verdeeld in G_1.

<u>Opmerking</u>: Onder de gestelde voorwaarden heeft $\{x_n\}$ altijd een gelijkmatige verdeling in G_1, (Hlawka [1]), doch $\omega = \{y_n\}$ behoeft niet eens een verdeling te hebben. Geëindigd wordt met enige toepassingen.

<u>Literatuur</u>

[1] E. Hlawka, Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen, Rend.Circ.Mat.Palermo, 4(1955), 1-15.

[2] E. Hlawka, Folgen auf kompakten Räumen, Abh.Math.Seminar Hamburg, 20 (1956), 223-241.

[3] L. Kuipers, Continuous and discrete distributions modulo 1, Indag.Math., 15 (1953), 340-348.