SD - 30

D-
DUPLICAAT

# Overschrijdingsproblemen in Markovreeksen

Voordracht door

Prof.Dr J.H.B. Kemperman

op dinsdag 9 december 1958

Inleiding. In deze voordracht wil ik een schets geven van een aantal nieuwe methodes ter bestudering van overschrijdingsproblemen in een stationnair Markov proces. In vele gevallen leiden deze methodes tot expliciete formules voor de overeenkomstige overschrijdingswaarschijnlijkheden. Wegens tijdgebrek zal alleen het geval beschouwd worden van een stationnair Markov proces met een discrete tijd ($t=0,1,2,\ldots$) en een discrete ruimte ($\ldots,-1,0,1,2,\ldots$), een zg. stationnaire Markovreeks. Voor slechts één speciale toepassing zijn alle details weergegeven.

1. De hoofdstelling. Zij $\{\underline{z}_n,\ n=0,1,\ldots\}$ een stationnaire Markovreeks met $z_n$ geheel. Met andere woorden, de $\underline{z}_n$ zijn geheelwaardige stochastische variabolen, zodanig dat de voorwaardelijke waarschijnlijkheid

$$P(\underline{z}_{n+1}=j\,|\,\underline{z}_n=i,\ \underline{z}_{n-1}=i_{n-1},\ldots,\underline{z}_o=i_o)=P_{ij}^{(1)}$$

onafhankelijk is van n en onafhankelijk van de $i_\nu$ met $\nu<n$, (voor $n=0,1,\ldots$ en voor iedere keuze der gehele getallen $i_o,\ldots,i_{n-1},\ i_n=i,\ i_{n+1}=j$). Hierbij zijn de $P_{ij}^{(1)}=P^{(1)}(i,j)$ gegeven getallen met

$$P_{ij}^{(1)}\geqslant 0\ ;\qquad \sum_j P_{ij}^{(1)}=1.$$

Een meer aanschouwelijk beeld verkrijgt men door een "stochastisch" deeltje P in te voeren dat op het tijdstip n de positie $\underline{z}_n$ heeft, ($n=0,1,\ldots$). Gegeven $\underline{z}_m=i_o$ is dan de voorwaardelijke waarschijnlijkheid, dat P gedurende het tijdsinterval $[m,m+n]$ een specifieke weg $\underline{z}_{m+h}=i_h$ ($h=1,\ldots,n$) beschrijft, gelijk aan

$$P^{(1)}(i_o,i_1)\ P^{(1)}(i_1,i_2)\ldots\ P^{(1)}(i_{n-1},i_n).$$

We voeren verder een stochastische gebeurtenis $\mathcal{A}$ in (ook absorbtie genoemd), welke alleen kan optreden op de tijdstippen 0,1,2,... . Zij $\mathcal{A}_n$ de gebeurtenis dat $\mathcal{A}$ optreedt op het tijdstip n; we nemen aan dat $\mathcal{A}_n$ volledig onafhankelijk is van de $\mathcal{A}_m$ en $z_m$ met $m < n$. Tenslotte veronderstellen we, dat

$$P(\mathcal{A}_n \mid \underline{z}_n = i) = 1 - \rho_i,$$

waarin de $\rho_i = \rho(i)$ gegeven getallen zijn met $0 \leq \rho_i \leq 1$, $(i=\ldots,-1,0,1,\ldots)$; (opmerking: als $\mathcal{A}$ optreedt op het tijdstip n dan wordt P niet ter plaatse "geabsorbeerd" doch gaat "rustig door" in de zin van de Markovreeks $\{\underline{z}_n\}$ ).

Gegeven $\underline{z}_m=i$, zij $Q_{ij}^{(n)}$ de voorwaardelijke waarschijnlijkheid dat $\underline{z}_{m+n}=j$ en dat $\mathcal{A}$ op geen der tijdstippen $m, m+1, \ldots, m+n-1$ optreedt; men ziet gemakkelijk in dat deze grootheid niet van m afhangt. Uit de definitie van $Q_{ij}^{(n)}$ volgt

$$(1) \qquad Q_{ij}^{(0)} = \delta_i^{\,j} \ ; \quad Q_{ij}^{(1)} = \rho_i P_{ij}^{(1)}; \qquad 0 \leq Q_{ij}^{(n)} \leq 1,$$

en

$$(2) \qquad Q_{ik}^{(m+n)} = \sum_j Q_{ij}^{(m)} \, Q_{jk}^{(n)} \ .$$

Bijna alle in de practijk voorkomende overschrijdingsproblemen kunnen, door een geschikte keuze van de $\rho_i$, gereduceerd worden tot een probleem betreffende de $Q_{ij}^{(n)}$.

Hoofdstelling. Zij t een vaste complexe constante, $f_i$ een complexe functie gedefinieerd voor alle $i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, zodanig dat

$$(3) \qquad \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} \left| f_j \, t^n \right| < \infty \qquad \text{voor alle } i.$$

Stel

$$(4) \qquad f_i - t \sum_j P_{ij}^{(1)} f_j = g_i \qquad \text{als} \quad \rho_i \neq 0,$$

(anders is $g_i$ willekeurig). Dan geldt, voor elk geheel getal i,

$$(5) \qquad f_i = \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} \, t^n \rho_j \, g_j + \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} \, t^n (1-\rho_j) f_j,$$

waarin beide dubbelsommen absoluut convergent zijn.

Dus, als we ter verkorting

(6)
$$Q_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} t^n$$

invoeren, dan is de laatste reeks absoluut convergent wanneer $f_j \neq 0$ of $\rho_j g_j \neq 0$, terwijl, voor elke i,

(7)
$$f_i = \sum_j Q_{ij} \rho_j g_j + \sum_j Q_{ij}(1-\rho_j) f_j .$$

Bewijs. Beschouw de transformatie

(8)
$$T_n a = \sum_j Q_{ij}^{(n)} a_j ,$$

waarin $a=a_i$ een complexe functie aangeeft gedefinieerd voor alle gehele getallen i. Met $a \geqslant b$ zullen we aangeven dat $a_i \geqslant b_i$ voor alle i. Als $a \geqslant 0$ dan zullen we met $T_n\, a < \infty$ aangeven dat (8) (absoluut) convergeert voor alle i. Dus $T_n |a| < \infty$ is een voldoende voorwaarde opdat $T_n\, a$ bestaat. Merk op dat $T_0 a = a$, wegens (1).

Als $T_{m+n} |a| < \infty$ , dan volgt uit (2), dat

(9)
$$\sum_j Q_{ij}^{(m+n)} a_j = \sum_j a_j \sum_h Q_{ih}^{(m)} Q_{hj}^{(n)} = \sum_h Q_{ih}^{(m)} \sum_j Q_{hj}^{(n)} a_j ,$$

met andere woorden,

(10)
$$T_{m+n}\, a = T_m\, T_n\, a \quad \text{als} \quad T_{m+n} |a| < \infty .$$

Wegens (8) kan (3) geschreven worden als

(11)
$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n \left| t^n f \right| < \infty ,$$

dus geldt (10) voor $a = t^{m+n} f$.

Door (4) met $\rho_i$ te vermenigvuldigen, volgt

(12)
$$\rho f - T_1\, t\, f = \rho g,$$

vgl.(1). Dus, wegens (10),

$$T_n \left| t^n \rho g \right| \leqslant T_n \left| t^n f \right| + T_{n+1} \left| t^{n+1} f \right|$$

en (11) impliceert

(13)
$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n \left| t^n \rho g \right| < \infty .$$

De beweringen over absolute convergentie zijn een onmiddellijk gevolg van (11) en (13). Het rechterlid van (5) heeft dus zin en is gelijk aan

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n\, t^n \left\{ \rho g + (1-\rho) f \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \left\{ t^n f - T_1 t^{n+1} f \right\} = f,$$

wegens (12), $T_n T_1 t^{n+1} f = T_{n+1} t^{n+1} f$, $T_n t^n f \to 0$ voor $n \to \infty$, (uit (11)), en $T_o f = f$.

2. Enige toepassingen. In deze paragraaf geeft t een vast complex getal aan, voorlopig met $|t| < 1$, dus is de reeks in (6) altijd absoluut convergent. Kiest men $f_i = \delta_i^{\,k}$ dan geeft (4) dat $g_i = \delta_i^{\,k} - t\, P_{ik}^{(1)}$ en uit (1.7) volgt

(1) $$Q_{ik} = \delta_i^{\,k} + t \sum_j Q_{ij}\, \rho_j\, P_{jk}^{(1)}.$$

Overigens volgt (1) ook direct uit (1.2), evenals

(2) $$Q_{ik} = \delta_i^{\,k} + t \sum_j \rho_i P_{ij}^{(1)}\, Q_{jk}.$$

Zij verder

(3) $$P_{ij}^{(n)} = P(\underline{z}_{m+n} = j \mid \underline{z}_m = i)$$

en

(4) $$P_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)}\, t^n.$$

Wanneer men, voor alle j, $\rho_j = 1$ zou kiezen dan gaan $Q_{ij}^{(n)}$ en $Q_{ij}$ over in $P_{ij}^{(n)}$ en $P_{ij}$, dus (2) geeft

(5) $$P_{ik} = \delta_i^{\,k} + t \sum_j P_{ij}^{(1)}\, P_{jk}.$$

Kies nu $f_i = P_{ik}$; wegens (5) is dan $g_i = \delta_i^{\,k}$. Verder geldt (1.3) wegens $|t| < 1$, $|f_i| \leq (1-|t|)^{-1}$ en $\sum_j Q_{ij}^{(n)} \leq 1$. Uit (1.7) volgt nu

(6) $$P_{ik} = \rho_k\, Q_{ik} + \sum_j Q_{ij} (1-\rho_j)\, P_{jk}.$$

Formule (6) heeft vele toepassingen. Wegens tijdgebrek zal ik me bepalen tot een korte schets van één dezer toepassingen.

Zij bijvoorbeeld $\rho_j=1$ als $j \notin S$, waarin $S=\{y_1,\dots,y_p\}$ een eindige verzameling van gehele getallen is, (m.a.w. absorbtie kan alleen optreden wanneer P een positie $z_n \in S$ heeft). Door (6) toe te passen voor $k \in S$ vindt men (voor elke i) een systeem van p vergelijkingen, waaruit de $Q_{ij}$ $(j \in S)$ kunnen worden opgelost. Achteraf kan $Q_{ij}$ $(j \notin S)$ uit (6) berekend worden.

Aldus vindt men $Q_{ij}$ als een expliciete rationale functie van zekere $P_{hk}$ en $\rho_k$. Daarna kan $Q_{ij}^{(n)}$ uit (1.6) berekend worden. Tenslotte kan men uit

$$Q_{ij}^{(n)} = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_p=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)}(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\,\rho(y_1)^{\lambda_1}\cdots\rho(y_p)^{\lambda_p}$$

de coefficient $Q_{ij}^{(n)}\ (\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ bepalen, die de voorwaardelijke waarschijnlijkheid aangeeft, gegeven $\underline{z}_0=i$, dat $\underline{z}_n=j$ en dat, voor $\nu=1,\dots,p$, $\underline{z}_m=y_\nu$ gebeurt op precies $\lambda_\nu$ van de tijdstippen $m=0,1,\dots,n-1$.

Deze methode heeft vaak succes doordat het in vele gevallen (b.v. in het discrete Ehrenfest model) niet moeilijk is de $P_{hk}$ expliciet te bepalen.

We laten nu de eis $|t| < 1$ vervallen. Een verdere toepassing van de hoofdstelling verkrijgt men door $f_i$ te kiezen als een eigenvector van de matrix $(P_{ij}^{(1)})$, m.a.w. zodanig dat $g_i=0$; dit principe werd het eerst toegepast door D. van Dantzig. Neem nu aan dat $P_{ij}^{(1)}=p_{j-i}$. Dan is $f_i=\xi^i$ ($\xi$ vast) een dusdanige eigenvector met eigenwaarde $t=\psi(\xi)^{-1}$,

$$\psi(\xi) = \sum_j p_j\,\xi^j,$$

mits de laatste reeks convergeert en $\psi(\xi)\neq 0$. Uit de hoofdstelling volgt dat

$$(7) \qquad \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} \left|\xi^j \psi(\xi)^{-n}\right| < \infty \quad \text{voor alle i impliceert}$$

$$(8) \qquad \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho_j)\, Q_{ij}^{(n)}\, \xi^j \psi(\xi)^{-n} = \xi^i,$$

een generalisatie van Wald's fundamentele identiteit.
Men kan gemakkelijk practisch toepasbare voorwaarden afleiden, die (7) en dus (8) impliceren.

3. Peter en Paul. Beschouw het volgende spel tussen Peter en Paul. Aan het begin krijgt Peter een bedrag i (i=0,1,...) van Paul. Verder, na iedere worp met een zuivere munt, krijgt Peter -1 of +1 van Paul al naar gelang kruis of munt bovenkomt. Zij $\underline{z}_n$ Peter's winst na n worpen, $\underline{z}_o=i$, en zij $\underline{U}_i^{(n)}$ het aantal van de momenten $m=0,1,\dots,n$ dat $z_m \leqslant 0$, $(0 \leqslant \underline{U}_i^{(n)} \leqslant n+1)$. We zijn geïnteresseerd in de waarschijnlijkheidsverdeling $U_i^{(n)}(\lambda)=$ $=P(\underline{U}_i^{(n)}=\lambda)$. Chung en Feller slaagden erin de verdeling te bepalen van een grootheid nauw verwant aan $\underline{U}_o^{(n)}$.

We kunnen dit probleem als volgt generaliseren. Beschouw een reeks onafhankelijke geheelwaardige stochastische variabelen $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ elk met dezelfde verdeling

$$P(\underline{\zeta}_n = j) = p_j \, , \qquad (j=0, \pm 1, \dots).$$

Zij verder $\underline{z}_n=i+\underline{\zeta}_1+\dots+\underline{\zeta}_n$, $(\underline{z}_o=i)$, waarin i een vast niet-negatief geheel getal aangeeft. Dan vormen de $\underline{z}_n$ een stationnaire Markovreeks met

$$p_{ij}^{(1)} = p_{j-i} \, .$$

Hierin is $p_j \geqslant 0$, $\sum p_j=1$. Later zullen we $\{p_j\}$ nog aan nadere beperkingen onderwerpen.

Zij verder de absorbtie $\mathcal{A}$ zodanig gekozen dat

(1) $$\rho_j = 1 \text{ als } j>0, \qquad \rho_j = \rho \text{ als } j \leqslant 0,$$

waarin $\rho$ een vast getal voorstelt, $0 \leqslant \rho < 1$. Dan geeft $\rho_j Q_{ij}^{(n)}$ de voorwaardelijke waarschijnlijkheid aan, gegeven $z_o=i$, dat $z_n=j$ en dat $\mathcal{A}$ op geen der momenten $m=0,1,\dots,n$ optreedt. Dus, in verband met de definitie van $\mathcal{A}$,

(2) $$\rho_j \, Q_{ij}^{(n)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)}[\lambda]\rho^{\lambda},$$

waarin $Q_{ij}^{(n)}[\lambda]$ de voorwaardelijke waarschijnlijkheid aangeeft, gegeven $\underline{z}_o=i$, dat $\underline{z}_n=j$ en dat $\underline{z}_m \leqslant 0$ gebeurt op precies $\lambda$ van de ogenblikken $0,1,\dots,m$. Tenslotte geeft

(3) $$U_i^{(n)}(\lambda) = \sum_j Q_{ij}^{(n)}[\lambda]$$

de gezochte voorwaardelijke waarschijnlijkheid aan, gegeven $\underline{z}_o=i$, dat $\underline{z}_m \leqslant 0$ gebeurt op precies $\lambda$ van de ogenblikken $0,1,\dots,m$.

Teneinde deze grootheden te bepalen, passen we de hoofdstelling toe met $0<|t|<1$, $f_i=u^i$, waarbij $|u|=1$, (t vast, u variabel). Dan is (1.3) voldaan wegens $\sum_j Q_{ij}^{(n)} \leq 1$. Verder is $g_i=(1-t\,\psi(n))u^i$ met

$$(4) \qquad \psi(u) = E(u^{\xi_m}) = \sum_j p_j u^j .$$

Aldus volgt

$$(5) \qquad u^i=(1-t\,\psi(u)) \sum_j Q_{ij}\ \rho_j u^i + \sum_j Q_{ij}(1-\rho_j)u^j ,$$

waarin beide reeksen absoluut convergent zijn, terwijl

$$(6) \qquad Q_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)}\ t^n .$$

Stel verder

$$(7) \qquad F_i(u) = \sum_{j=-\infty} Q_{ij}u^j , \quad H_i(u)= \sum_{j=1}^{\infty} Q_{ij}\ u^j ,$$

waarin beide sommen absoluut convergent zijn als $|u|=1$. Wegens (1) en (7) volgt nu uit (5)

$$(8) \qquad u^i = (1-t\,\psi(u))\left[\rho\,F_i(u)+H_i(u)\right] +(1-\rho)F_i(u),$$

dus

$$(9) \qquad F_i(u) = (1-\rho\,t\,\psi(u))^{-1}\left[u^i-(1-t\,\psi(u))H_i(u)\right] ,$$

mits $|u|=1$. Neem nu aan, dat

$$(10) \qquad p_j \leq C\ a^{-j} , \qquad\qquad (j \leq 0),$$

waarin C en a positieve constanten zijn, $a<1$.
In dit geval kan men het geldigheidsgebied van (9) uitbreiden door $F_i(u)$ analytisch voort te zetten.

Vooreerst is $F_i(u)$ analytisch voor $|u|>1$ met inbegrip van het punt $u=\infty$. Vervolgens is $H_i(u)$ analytisch voor $|u|<1$, continu voor $|u|\leq 1$, terwijl $H_i(0)=0$. Tenslotte volgt uit (4) en (10) dat $\psi(u)$ analytisch is voor $a<|u|<1$, continu voor $a<|u|\leq 1$.

Als $|u|=1$ dan is $|\psi(u)|\leq 1$ dus bestaat er een constante R met $a<R<1$ en $\psi(R)<|t|^{-1}$, (t was vast, $0<|t|<1$). Verder is

$$Q_{ij}^{(n)} \leq p_{j-i}^{(n)} = P(z_n = j \mid z_o = i),$$

terwijl

$$\sum p_j^{(n)} R^j = E(R^{\zeta_1+\ldots+\zeta_n}) = \psi(R)^n.$$

Wegens (6) volgt hieruit dat de reeksen in (7) absoluut convergent zijn voor $u=R$, dus is $F_i(u)$ zelfs analytisch voor $|u|>R$.

Nu geldt (9) voor $|u|=1$, terwijl beide leden van (9) continu zijn voor $R<|u|\leq 1$, analytisch voor $R<|u|<1$, dus (9) geldt voor alle $u$ met $R<|u|\leq 1$. Tenslotte levert (9) een analytische voortzetting van $F_i(u)$ tot het gehele gebied $|u|>a$, (zodanig dat (9) geldt), met uitsluiting van de nulpunten van $1-\rho t\psi(u)$, waar $F_i(u)$ een pool kan hebben.

Het bovenstaande principe laat vele toepassingen toe. Teneinde het verhaal niet al te lang te maken zullen we ons nu beperken tot het geval dat

$$(10) \qquad p_j = 0 \text{ als } j<-1, \quad p_{-1}>0, \quad 0<\rho<1.$$

Dan is

$$(11) \qquad \psi(u) = \sum_{j=-1}^{\infty} p_j u^j$$

analytisch in $0<|u|<1$ met een enkelvoudige pool in $u=0$. Verder geldt (10) voor elke $a>0$, dus levert (9) een analytische voortzetting van $F_i(u)$ tot het gehele $u$-vlak met inbegrip van het punt $u=\infty$ doch met uitsluiting van het éénduidige nulpunt $\eta$ van $1-\rho t\psi(u)$ met $|\eta|<1$; in het bijzonder is $F_i(u)$ rationaal. Verder, wegens (9), $i\geq 0$ en $H_i(0)=0$, hebben we $F_i(0)=0$. Zij tenslotte $\xi$ het eenduidige nulpunt van $1-t\psi(u)$ met $|\xi|<1$, $(\xi\neq\eta)$. Dan volgt uit (9) dat $F_i(\xi)=(1-\rho)^{-1}\xi^i$. Bovengenoemde eigenschappen bepalen de rationale functie $F_i(u)$ eenduidig, dus

$$(12) \qquad (1-\rho)F_i(u) = (\xi-\eta)\xi^{i-1}u(u-\eta)^{-1}.$$

Verder, wegens (3), (2), (6), (1), (7), (8) en $\psi(1)=1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} U_i^{(n)}(\lambda)t^n\rho^\lambda = \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} \rho_j\, Q_{ij}^{(n)} t^n$$

$$= \sum_j \rho_j\, Q_{ij} = \rho F_i(1)+H_i(1) = [1-(1-\rho)F_i(1)]\,(1-t)^{-1},$$

dus uit (12)

$$(13)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty} U_i^{(n)}(\lambda)t^n\rho^\lambda = \left[1-\xi^{i-1}+\xi^{i-1}(1-\xi)/(1-\eta)\right](1-t)^{-1}.$$

Hierin is $\xi$ eenduidig bepaald door $|\xi|<1$,

$$t = \psi(\xi)^{-1} = \xi(p_{-1}+p_0\xi + p_1\xi^2+\dots)^{-1},$$

dus $\xi=\xi(t)$ is analytisch in $t$ ($|t|<1$) en $\xi(0)=0$. Verder is $\eta = \xi(\rho t)$. Laten nu de constanten $\alpha^{(\lambda)}$ en $\beta_i^{(n)}$ gedefinieerd zijn door

$$(14)\qquad (1-\eta)^{-1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\alpha^{(\lambda)}\ (\rho t)^\lambda ,$$

en

$$(15)\qquad \xi^{i-1}(1-\xi)(1-t)^{-1} = \sum_{-\infty}^{\infty}\beta_i{}^{(n)}t^n$$

met $\beta_i{}^{(n)}=0$ als $n<i-1$. Dan volgt uit (13)

$$(16)\qquad \boxed{U_i^{(n)}(\lambda) = \alpha^{(\lambda)}\beta_i{}^{(n-\lambda)} \quad \text{mits} \quad \lambda \geqslant 1 .}$$

Hierin is

$$\alpha^{(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i}\int(1-\xi)^{-1}\frac{dt}{t^{\lambda+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int(1-\xi)^{-1}\psi(\xi)^{\lambda+1}\,d\psi(\xi)^{-1},$$

(met een kleine cirkel om nul als integratieweg), dus is $\alpha^{(\lambda)}$ gelijk aan het residu in $u=0$ van de analytische functie $-(1-u)^{-1}\psi'(u)\,\psi(u)^{\lambda-1}$. Evenzo is $\beta_i{}^{(n)}$ gelijk aan het residu in $u=0$ van de functie $(1-\psi(u))^{-1}\psi'(u)(1-u)u^{i-1}\psi(u)^n$.

In het oorspronkelijke spel tussen Peter en Paul is

$$\psi(u)=\tfrac{1}{2}(u^{-1}+u) \qquad \text{dus} \quad \psi'(u) = -(1-u^2)/(2u^2).$$

Dan is $\alpha^{(\lambda)}$ gelijk aan de coefficient van $u^\lambda$ in de ontwikkeling van $2^{-\lambda}(1+u)(1+u^2)^{\lambda-1}$ in machten van $u$. Verder is $\beta_i{}^{(n)}$ gelijk aan de coefficient van $u^{n-i+1}$ in de ontwikkeling van $2^{-n}(1+u)(1+u^2)^n$ in machten van $u$. Dus volgt uit (16):

$$(17)\qquad U_i{}^{(n)}(\lambda) = 2^{-n}\binom{\lambda-1}{[\lambda/2]}\binom{n-\lambda}{[(n-\lambda-i+1)/2]}, \qquad (\lambda\geqslant 1).$$

Uit (17) kan men op de gebruikelijke wijze een "boog-sinus-wet" afleiden, vgl. W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, New York (1950), p.252.