STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

SD 33r

Enige voorbeelden van stochastische processen.

(Statistica Neerlandica, 15 (1961), p 107-122).

J.Th.Runnenburg.

1961

Enige voorbeelden van stochastische processen *)

door Dr. J. Th. Runnenburg

UDC 311

Dames en Heren Bestuurderen van Stad en Universiteit, Dames en Heren Professoren, Lectoren, Privaatdocenten en Leden van de Wetenschappelijke Staf, Assistenten en Studenten en voorts Gij allen, die door Uw tegenwoordigheid van Uw belangstelling blijk geeft.

Zeer gewaardeerde toehoorders,

Het is gebruikelijk, dat de wiskundige tijdens zijn studie aan de universiteit wiskunde bijgebracht wordt. Hoewel vaak gewezen wordt op de invloed van de natuurwetenschappen op het ontstaan van nieuwe ideeën en theorieën en op het formuleren van nieuwe problemen, is het ongebruikelijk, dat de student bij de wiskundecolleges veel van deze invloed merkt. Pas bij de studie voor de bijvakken wordt hem op dit punt iets getoond.

De meeste wiskundigen zullen zich, voorzover zij niet het leraarsambt kiezen, na hun studie met praktische problemen bezighouden. Het lijkt daarom nuttig, nu eens niet alleen op de eerder genoemde invloed te wijzen, maar door enige voorbeelden de natuurwetenschappelijke achtergrond te laten zien van bepaalde wiskundige problemen. Uiteraard kunnen wij ons hier niet te veel in details verdiepen. Maar dat is juist een voordeel: er is zo weinig bos, dat we de bomen wel moeten zien.

De voorbeelden, die ik U zal noemen, zijn gekozen ter toelichting van een onderwerp uit de waarschijnlijkheidsrekening en wel de stochastische processen. De wiskundige aspecten kunnen wellicht bij een andere gelegenheid besproken worden. Vandaag zal ik U het een en ander over de praktische problemen vertellen, die door de theorie worden opgelost en U laten zien, hoe een nieuwe theorie allerlei verschijnselen bundelt, die weinig of niets met elkaar te maken lijken te hebben.

De natuurwetenschappen bestuderen tal van verschijnselen, die niet spontaan plaatsvinden, maar een zekere tijd nodig hebben om te gebeuren. Deze verschijnselen zullen we aanduiden met processen. Zij hebben voor de natuurwetenschappen alleen dan betekenis, wanneer zij onder gelijksoortige omstandigheden zich herhalen of herhaald kunnen worden. Voorbeelden zijn het roteren van de aarde om de zon en het oplossen van een schepje suiker in een

*) Openbare les, gehouden bij de aanvaarding van het ambt van lector in de waarschijnlijkheidsrekening en de analyse aan de Universiteit van Amsterdam op 7 maart 1961.

kopje thee. Ik hoef U niet te vertellen, welk verschijnsel zich hier herhaalt en welk herhaald kan worden.

Een proces wordt geanalyseerd op de volgende manier, karakteristiek voor alle natuurwetenschappen. Eerst verzamelen we gegevens, die het proces beschrijven, we doen waarnemingen. Dan stellen we een (wiskundige) theorie op, we „maken een model", ter verklaring van de samenhang der waarnemingen en ter vervanging van de kwalitatieve, verbale beschouwingen door kwantitatieve, mathematische. Tenslotte toetsen we de theorie aan de praktijk: met behulp van de theorie doen we voorspellingen betreffende de uitkomsten van nieuwe experimenten en we vergelijken de nieuwe experimentele resultaten met de voorspelde. Blijken de voorspellingen voldoende nauwkeurig te zijn, dan zijn we tevreden met de theorie. Blijken ze onvoldoende nauwkeurig, dan zoeken we naar onvolkomenheden in de theorie (vooral op die plaatsen, waar de afwijking tussen voorspelling en waarneming het grootst is), trachten de oorzaak op te sporen en proberen een beter wiskundig model te bedenken.

We kunnen een model zo op het eerste gezicht kiezen uit twee typen: het kan zijn definiet (deterministisch), dan wel stochastisch (indeterministisch). De definiete processen worden gekenmerkt door tot op meetfouten na exacte voorspelbaarheid: als we voldoende tijd en geld aan het onderzoek besteden, is het mogelijk een theorie op te stellen met behulp waarvan bij iedere herhaling van het proces uit de beginomstandigheden met grote nauwkeurigheid het verloop van het proces voorspeld kan worden. Zo kunnen we nauwkeurig het gedrag van de maan voorspellen, zijn plaats aan de hemel aangeven voor een willekeurig tijdstip van een willekeurige dag van het jaar.

De indefiniete of stochastische processen bevatten een toevalselement. Zij zijn onvoorspelbaar in die zin, dat het onmogelijk blijkt bij elke individuele herhaling nauwkeurig het verloop van het proces in dat speciale geval te voorspellen. Dit wil niet zeggen, dat bij deze processen geen wetmatigheden te vinden zijn, maar alleen dat die wetmatigheden op andere wijze geformuleerd moeten worden, dan bij de definiete processen gebruikelijk is.

Laten we aannemen, dat U 's morgens van huis naar Uw werk fietst en daarbij ongeveer een half uur in druk stadsverkeer onderweg bent. Laten we verder aannemen, dat U vrijwel aan het einde van de route een stoplicht passeert. Zelfs als U iedere dag stipt op dezelfde tijd van huis vertrekt en steeds dezelfde route fietst, zult U toch niet elke dag precies op dezelfde tijd, op de seconde nauwkeurig, bij dat verkeerslicht arriveren. Laten we ook nog veronderstellen, dat het licht op vaste tijdstippen van de dag van groen op oranje, van oranje op rood en van rood op groen springt. De ervaring leert, dat U soms mag doorrijden, soms moet stoppen. Als U 's morgens van huis vertrekt, weet U niet wat er die dag bij het stoplicht zal gebeuren. Herhaling onder gelijksoortige omstandigheden is hier wel mogelijk, gebeurt in feite dagelijks, maar exacte voorspelbaarheid is uitgesloten. We hebben hier dus een stochastisch proces.

Wel kunt U constateren, dat een fractie van het aantal keren het licht bij aankomst op groen staat en dat die fractie, naarmate hij op een groter aantal waarnemingen berust, de neiging heeft dichter en dichter bij één vaste waarde te liggen. De wetmatigheid van het hier beschreven proces kunnen we dan ook zó (zij het weinig nauwkeurig) formuleren: de fractie der keren, dat U mag doorrijden, wijkt bij een toenemende reeks waarnemingen steeds minder van het getal p af.

We dienen hierbij p experimenteel te bepalen. Dat is ook kenmerkend voor de theorie bij een definiet verschijnsel: de regelmaat wordt opgespoord tot formules verkregen zijn, die nog van parameters afhangen. Die parameters worden experimenteel bepaald.

Wat we zojuist gezien hebben, geldt algemeen: Bij een stochastisch proces kunnen we geen exacte voorspellingen doen, doch slechts voorspellingen betreffende frekwenties van optreden. Het is echter van weinig belang of een natuurwetenschappelijk verschijnsel als definiet, dan wel als stochastisch proces beschreven wordt. De keuze van de beschrijving zegt niets over het verschijnsel zelf, maar wel iets over de manier, waarop wij het ervaren. Hierbij voert de ene formulering tot heel andere vragen (en antwoorden) dan de andere, zoals wij aanstonds zullen zien.

De theorie der stochastische processen omvat het analyseren, beschrijven en rubriceren van modellen van processen, die een toevalselement bevatten, niet volledig voorspelbaar zijn. Allerlei modellen worden bedacht en onderzocht om hun theoretisch fraaie eigenschappen. Ook worden nog vaak problemen gevonden, waarvoor een voordien onbekend type model ter beschrijving gewenst is. Zo wordt het arsenaal steeds verder uitgebreid. Voor praktische problemen beschikken we nu over een uitgebreide keuze van pasklare theorieën.

Zoals immer bij modelvorming, let men vooral op de grote lijn van het proces: het model dient in grove trekken voorspellend te werken. Anderzijds mag het mathematisch niet te gecompliceerd zijn, want dan is het niet hanteerbaar. Het streven naar mathematische eenvoud heeft altijd tengevolge, dat het proces onder studie in een keurslijf geperst wordt. Belangrijk is, dat we daarbij de natuurlijke vormen geen geweld aandoen. Kleine afwijkingen tussen theoretisch model en experiment zullen altijd aanwezig zijn en behoeven ons niet te verontrusten.

Een stochastisch proces wordt beschreven met behulp van stochastische variabelen. Voor ons doel is het voldoende, een stochastische variabele op te vatten als een grootheid, die bij het uitvoeren van een experiment een (niet voorspelbare) getalwaarde aanneemt en wel zó, dat bij veelvuldige herhaling van het experiment beneden elke vaste grens een vaste fractie der waarnemingsresultaten valt. Men spreekt meestal niet van de fractie getalwaarden van een stochastische variabele, die bij veelvuldige herhaling beneden een bepaalde grens valt, maar van de *kans*, dat die stochastische variabele een waarde beneden die grens *aanneemt*. We „kennen" een stochastische variabele, zodra we die fractie als functie van de grens, de zogenaamde verdelingsfunctie, kennen. De waarde, die de stochastische variabele bij het experiment aanneemt, zullen we de optredende waarde bij *realisering* van de stochastische variabele noemen.

Hebben we met twee stochastische variabelen te doen, dan kunnen deze al dan niet onafhankelijk zijn. Ze zijn onafhankelijk, als de frekwenties van de getalwaarden, die als resultaat bij waarneming van de tweede stochastische variabele optreden, niet afhangen van de waarde, die de eerste variabele heeft aangenomen. Ter illustratie: gooien we op geschikte wijze met een dobbelsteen, dan is (vóór de worp) het aantal ogen dat zal optreden een stochastische variabele. Het optredende aantal ogen, de waarde, die de stochastische variabele aanneemt bij het uitvoeren van de worp, is 1, 2, 3, 4, 5 of 6. De fractie keren, dat bij het werpen een waarde kleiner dan 3 (dus 1 of 2) optreedt, is 1/3 bij een „goede" dobbelsteen. Een tweede worp geeft (voor de worp) opnieuw aanleiding tot een stochastisch, onvoorspelbaar, aantal ogen. We kunnen het nu optredende aantal ogen zowel opvatten als afkomstig van een tweede stochastische variabele, dan wel als afkomstig van een tweede realisering van dezelfde stochastische variabele. Van die tweede worp zal het optredende resultaat onafhankelijk zijn van het bij de eerste worp gevonden aantal ogen, mits die worp op geschikte wijze, éérlijk, uitgevoerd wordt. Dus bijvoorbeeld *niet*, door de dobbelsteen over de tafel te *verschuiven*, zodat het aantal ogen niet verandert. Ook bij meer dan twee stochastische variabelen kunnen we op analoge manier onafhankelijkheid invoeren. Laten we als stochastische variabelen ook variabelen toe, die altijd bij realisering, bij uitvoering van het experiment, dezelfde waarde aannemen, dan kunnen we de definiete processen als een bijzonder geval van de indefiniete, stochastische processen opvatten. Er is dan slechts één type model.

Een heel eenvoudig voorbeeld van een stochastisch proces, dat tot heel diepliggende functietheoretische beschouwingen voert, komt tevoorschijn als we het vervangen van kapotte gloeilampen door nieuwe beschouwen. In het dagelijkse leven laat men een gloeilamp niet 24 uur per dag branden. Ook vervangt men een kapotte lamp niet zó snel door een nieuwe, dat de verlichting zonder onderbreking áán blijft. Maar stel eens, dat U dat wel doet. Op tijdstip 0 draait U de schakelaar om, zodat een eerste nieuwe gloeilamp gaat branden. Zodra de eerste lamp kapot gaat vervangt U deze direct door een nieuwe en U gaat hier zonder ophouden mee door. De levensduur der verschillende gloeilampen heeft niet één vaste waarde, zij is stochastisch. We kunnen de levensduren der verschillende gloeilampen beschouwen als onafhankelijke variabelen en wel als onafhankelijke realiseringen van één stochastische variabele. Hiermee drukken we uit, dat de eerder genoemde verdelingsfunctie voor al de gloeilampen dezelfde is. Het „de volle levensduur laten branden" van één lamp kunnen we nooit herhalen. Toch kunnen we, door een andere lamp van hetzelfde fabrikaat te nemen, wel spreken van een herhaling van het verschijnsel onder gelijksoortige omstandigheden. De vraag, die de theorie nu in de eerste plaats beantwoordt, is: hoeveel lampen gaan er stuk in een tijdsinterval $(t, t+h)$, dus met lengte h en beginnend op tijdstip t? Wat is de limiet van dit aantal als t naar oneindig gaat? Het zal U verbazen, dat zo'n eenvoudige vraag als de laatste een moeilijk mathematisch probleem formuleert.

Een verwant probleem, dat slechts iets gecompliceerder is, maar ineens heel anders geformuleerd wordt, is het volgende. Een draad, van katoen, wol of nylon, wordt opgebouwd uit vezels, waarvan de asrichting samenvalt met de lengterichting van de draad. Elke vezel heeft een kop en een staart. Linkereindpunten van vezels noemen we koppen, rechtereindpunten staarten. Veronderstel gemakshalve, dat alle vezels even lang zijn. Dit is waar voor kunstvezels, dus bijvoorbeeld voor nylon. De plaats van een vezel in de draad ligt vast, als we de plaats van de kop van de vezel aangeven. Het fabricageproces van de draad is zodanig, dat de afstand tussen twee opeenvolgende koppen niet constant is, maar variëert, juist op de manier zoals de levensduren van opvolgende lampen bij het vorige voorbeeld. Ook nu beschrijft één verdelingsfunctie de samenstelling van de draad. Als de koppen plaatselijk dun gezaaid liggen, zijn daar weinig vezels, zodat de draad dun is; liggen de koppen dicht opeen, dan is de draad dik. De dikte is dus een stochastische variabele voor elk punt van de draad. De belangrijkste problemen zijn hier: a) wat zijn de stochastische eigenschappen van de dikte van de draad en b) wat zijn de stochastische eigenschappen van de dunste plek in een draad van gegeven lengte? De tweede vraag is nog niet beantwoord, maar mogelijk wel zonder al te formidabele mathematische moeilijkheden oplosbaar.

Op het moment, dat ik deze openbare les schreef, had men mij juist een heel ander probleem voorgelegd, dat in de terminologie van de draad luidt: wat zijn de stochastische eigenschappen van de dikste plek in een stuk draad met lengte t? Ik vertel U dit, om aanstonds een illustratie te kunnen geven van het feit, dat ogenschijnlijk volkomen verschillende problemen niet alleen verwant kunnen zijn, maar zelfs identiek. Een ander mij uit ervaring bekend voorbeeld uit de praktijk, waarbij een theorie werd ontwikkeld, terwijl die onder een andere naam al bestond, betrof het verspreiden van brand in een stad, waarin aanvankelijk één huis in brand staat. Precies hetzelfde probleem kan men formuleren betreffende het verspreiden van een besmettelijke ziekte van één plant naar de planten in de omgeving. Er bestaat een nog veel oudere formulering van hetzelfde probleem, namelijk: wat gebeurt er met een achternaam, als aanvankelijk één man die naam draagt? Met deze vage vraag doelt men op hetzelfde probleem als dat van het verspreiden van brand. De precieze formulering zal ik U niet geven. Als treffende bijzonderheid kan ik U vertellen, dat men voor de Verenigde Staten heeft uitgerekend, dat van de blanke bevolking, in de gezinssamenstelling van 1920, een naam in ongeveer 0,9 van de gevallen uitsterft. Hier is, als men het ene probleem gezien heeft, het andere duidelijk hetzelfde. Dat is in het geval van de draad helemaal niet van toepassing, zoals U straks zult zien.

Een uitgebreide klasse van voorbeelden van stochastische processen wordt gevormd door de wachttijdproblemen. Dit zijn problemen, waarbij wachten in de gewone alledaagse zin van het woord, optreedt. Zelfs kunnen we dat wachten een ruimer interpretatie geven, dan in het dagelijkse leven gebruikelijk is. Een voorraad in een opslagplaats bijvoorbeeld wordt meestal niet als „wachtend" aangeduid. Ook kan dat wat wacht behalve een mens een machine zijn en niet alleen wacht een klant vóór het loket van de posterijen, maar ook de ambtenaar achter dat loket en wel op de eerstvolgende klant. Zoals Hille semigroepen ontdekte, waar hij ook keek in de wiskunde, zo kunnen U en ik wachttijdproblemen vinden, waar we ook kijken in het dagelijkse leven.

Er wordt de laatste jaren veel gepubliceerd over wachttijden. De redenen van de belangstelling voor dit type problemen zijn van praktische en theoretische aard. In het algemeen stellen we belang in het wachten van mensen bij het verstrekken van diensten (zoals bij het loket van de P.T.T.) omdat we wensen na te gaan of een bestaande situatie bij de beschikbare middelen wel zo ideaal mogelijk is en regelend willen ingrijpen, in gevallen waar dat niet het geval is. Bij het wachten van arbeiders in een bedrijf ontstaan verliezen aan produktieve arbeidsuren, die we zoveel mogelijk willen beperken. Bij het wachten van machines op werk of reparatie treedt produktieverlies op, dus weer geldverlies, dat we zo gering mogelijk willen houden. Het gaat hierbij telkens om verhoudingen, om het tegen elkaar afwegen van factoren, zoals uit de volgende voorbeelden blijkt.

In een spinnerij worden vele eenvoudige machines, elk bezig met het overspinnen van een draad van een kleine klos naar een grote klos, door één arbeider bediend. De machine is hier goedkoop en de arbeider duur. Voor een economisch bedrijf is het van belang, dat de arbeider voortdurend werk heeft, ook al houdt dit in, dat daardoor constant een kleine fractie der machines stilstaat.

In de grote automatische bedrijven, bijvoorbeeld in de autoindustrie, waar goederen vervaardigd worden zonder tussenkomst van mensenhanden, behalve op die schaarse momenten, waarbij ernstige fouten in de machines optreden, zijn kostbare machines aan het werk, die nooit mogen stilstaan. Het legertje monteurs, ter verzorging bij deze machines aanwezig, is verhoudingsgewijs zó goedkoop, dat het gerust de tijd met kaarten kan vullen, zolang het fabricageproces ongestoord loopt, als het maar bliksemsnel ingrijpt, zodra dat nodig is. Niet, dat men het kaarten onder werktijd zal aanmoedigen: de arbeiders worden met minder belangrijk werk, onderhoud en aanvoer van materiaal beziggehouden tussen twee ingrepen in.

Een niet te onderschatten moeilijkheid bij het weven en spinnen is het vinden van een eerlijke beloning voor gedane arbeid. Bij het spinnen van een zwakke draad treden herhaaldelijk draadbreuken op, die de arbeider veel werk opleveren en het arbeidsproces stagneren. De opbrengst van het werk, de hoeveelheid gesponnen draad, zal daardoor gering zijn. Hoe belonen we de arbeider nu zó, dat hij niet jaloers wordt op zijn kameraad, die een sterke draad spint, welke weinig draadbreuken, weinig werk en daardoor een grote opbrengst geeft? U ziet, dat er zelfs sociale kanten aan de wachttijdproblemen zijn.

Bij voorraadvorming wil men zijn geld doelmatig beleggen en niet te veel kopen, daar dit kapitaalverlies door renteverlies, bederf, onderhoud en opslagkosten met zich brengt. Maar te kleine voorraden geven aanleiding tot ontstemde klanten, die liever kopen in een zaak, die wel steeds over voldoende voorraad beschikt. Ook dat geeft verlies. Er zal altijd verlies optreden, door de éne of de andere oorzaak. Belangrijk is, dit verlies zo klein mogelijk te houden.

Bij bussen, trams, treinen, vliegtuigen wil de eigenaar van het betreffende vervoerbedrijf met een zo klein mogelijk aantal voertuigen in de behoefte aan vervoer voorzien. Hij legt daarom een voorraad van ruilmotoren aan, die voor snelle vervanging van kapotte motoren dienen. Ook hij dient zich af te vragen, hoe groot zijn voorraad moet zijn: is de voorraad te groot, dan treedt verlies op, doordat kapitaal op niet nuttige manier belegd is en door roesten, opslagkosten en veroudering zelfs afneemt. Is de voorraad te klein, dan ontstaat gebrek aan vervoerscapaciteit, hetgeen kapitaalverlies en prestigeverlies veroorzaakt. Ook hier dient gezocht te worden naar een zo gunstig mogelijke balans der verliezen.

Ik hoop U hiermee duidelijk het praktische belang geschetst te hebben van het verwerven van inzicht in wachttijdproblemen. Laten we nu de theoretische kant bezien. Juist door de eenvoud en alom aanwezigheid van het wachtverschijnsel kan een theorie geformuleerd worden, die vrijwel uitsluitend termen uit het dagelijks leven bevat. Een typische bijzonderheid is, dat ook de overwegingen met behulp waarvan men bepaalde vragen oplost eerder op gezond verstand, dan op wiskundig inzicht berusten. Heel simpele praktische vragen voeren echter snel tot vrijwel onoplosbare wiskundige problemen, die een pikante uitdaging vormen. Allerlei wapens van de analyticus moeten in de strijd geworpen worden: naast de waarschijnlijkheidsrekening benut men de theorie der differentiaalvergelijkingen, de Laplacetransformatie, de theorie der integraalvergelijkingen, de matrixtheorie en de functietheorie. Wat vooral velen tot het onderzoek aantrekt, is dat een simpel praktisch idee soms het afleiden van allerlei fraaie formules mogelijk maakt. Men kan de kans op succes bij het zoeken naar aardige formules vergroten, door bepaalde vereenvoudigende veronderstellingen te maken, zonder daarbij op een al beschouwd probleem te stoten. De uitgebreide literatuur is dan ook (althans wat de meeste publikaties betreft) niet diepgaand, maar wel breed.

Hoe kunnen we een stochastisch proces aanvatten? Ik wil U ook daar wat van vertellen en wel iets over een wachttijdprobleem in het geval van klanten, die voor één loket in de rij staan. Stelt U zich de situatie aan het loket bij de posterijen voor. Direct meetbaar zijn de tijdstippen, waarop opeenvolgende klanten achter de rij aansluiten en ook kunnen wij voor elk van hen de wachttijd en de bedieningstijd meten, dat wil zeggen hoe lang een klant in de rij moet wachten tot hij aan de beurt is en hoe lang het duurt voordat hij geholpen is, vanaf het moment dat hij aan de beurt komt. We kunnen natuurlijk niet elke rij wachtenden volledig waarnemen, maar ons wel een idee vormen, ook gebruik makend van onze ervaringen in het dagelijkse leven bij het wachten aan loketten, hoe de theorie er uit zou kunnen zien. We weten, dat klanten op niet voorspelbare momenten binnenkomen, niet alle even lang behoeven te wachten en niet alle even snel bediend worden. Het proces dient dus zeker niet definiet beschreven te worden.

Waarneming leert, dat vele praktische situaties de volgende kenmerken vertonen:

a) de tijdsintervallen tussen opeenvolgende achter de rij aansluitende klanten kunnen beschouwd worden als onafhankelijke realiseringen van één stochastische variabele,
b) de klanten gaan in de volgorde van aankomst in de rij staan, de voorste in de rij wordt het eerst geholpen en niemand verlaat de rij voor hij geholpen is (een enkele keer loopt dit wel eens mis, maar daar tobben we niet over),
c) de bedieningstijden der klanten kunnen óók opgevat worden als onafhankelijke realiseringen van één stochastische variabele.

Kennis van de verdelingsfunctie van de twee stochastische variabelen: a) het aankomstinterval, dat wil zeggen de lengte van het tijdsinterval tussen twee opeenvolgende aankomsten van klanten aan het einde van de rij wachtenden, en b) de bedieningstijd van een klant, geeft ons juist voldoende informatie om, in geval aankomstintervallen en bedieningstijden onafhankelijke stochastische variabelen zijn, de verdelingsfunctie van een derde stochastische variabele, namelijk de wachttijd van een klant, te berekenen. In wat algemenere, vagere termen gezegd: het blijkt mogelijk, uit de frekwentie van het aankomen der klanten en de duur van hun bedieningstijd de duur van hun wachttijd te berekenen. Uit twee eenvoudig waarneembare grootheden kunnen we zo informatie over de lastig meetbare wachttijd verkrijgen.

Het stochastische proces kan hier beschreven worden, door voor elk tijdstip één stochastische variabele te geven, namelijk het aantal aanwezigen bij het loket op dat tijdstip. De informatie, die we bij het proces bekend veronderstellen, geeft juist aan, wanneer er een toename van dit aantal en wanneer een afname optreedt. Het is verder duidelijk, dat hier alleen een stationair wachtproces beschreven is, dat wil zeggen een proces, dat in de loop der tijd niet van karakter verandert. Als bijvoorbeeld de bedieningstijd der klanten belangrijk groter wordt, doordat de ambtenaar aan het loket vermoeid raakt, dan kunnen we de bedieningstijden niet opvatten als verschillende realiseringen van één stochastische variabele.

Eigenlijk kunnen we bij het wachtproces twee stochastische processen onderscheiden: ten eerste het aankomstproces, dat aangeeft op welke tijdstippen er een nieuwe klant bij de rij aansluit en ten tweede het vertrekproces, dat aangeeft op welke tijdstippen er een klant, na bediend te zijn, van het loket vertrekt. De koppeling tussen deze twee processen wordt gevormd door het loket en wat daar plaatsvindt. Karakteristiek voor deze processen is, dat er iets gebeurt op één enkel tijdstip (er gaat bij het eerste proces een nieuwe klant in de rij staan), nadat er een tijdlang niets gebeurd is. Dergelijke processen noemt men wel puntprocessen.

Ik wil nu even terugkomen op het aangekondigde extreme geval van twee problemen, die hetzelfde zijn maar er door de aankleding volkomen verschillend uitzien. Stelt U zich een situatie voor, waarbij naast elkaar k loketten werken. De klanten komen op dezelfde wijze aan als al beschreven is, ze gaan opnieuw in één rij staan, maar worden nu sneller geholpen, doordat zodra er een loket vrij is, de voorste van de rij wachtenden naar dat loket mag gaan om geholpen te worden. De bedieningstijd veronderstellen we hier constant. Als we de plaats van de koppen van de vezels op de draad laten corresponderen met de tijdstippen op de tijdas, waarop klanten achter de rij aansluiten en de lengte van de bedieningstijd gelijk nemen aan de vezellengte, dan is het probleem: „in welke fractie van de gevallen behoeven de in een interval van lengte t binnenkomende klanten géén van allen te wachten" precies hetzelfde als „in welke fractie van de gevallen is de maximale dikte van een draad van lengte t hoogstens k vezels?" Ik ben er van overtuigd, dat U hier de draad bent kwijtgeraakt. Ook als men met deze processen vertrouwd is, is het geen eenvoudige zaak problemen als analoog of hetzelfde te herkennen. Het eenvoudigste hulpmiddel hiertoe is het tekenen van plaatjes. Daar kan men de belangrijkste karakteristieken van een probleem in aanbrengen en vervolgens het plaatje „lezen" met de terminologie van een ander type probleem. Maar dit is echt wel een hulpmiddel voor „gevorderden".

Een voorbeeld van een aan het wachtproces analoog type stochastisch proces is ook het geboorte- en sterfteproces uit de Biologie. Bij het bestuderen van een bevolking, die aan toename of groei onderhevig is door geboorte en afname door sterfte en die verder niet variëert, kan men vragen naar het aantal individuen, dat op tijdstip t aanwezig is, dán de bevolking vormt, als het aantal individuen op tijdstip o bekend is. Deze bevolking behoeft niet noodzakelijk uit mensen te bestaan, bevolkingen van vleermuizen of bacteriën komen evengoed in aanmerking, vandaar dat we de term individuen gebruiken. Als van een werkelijk voorkomende bevolking vanaf tijdstip o het aantal aanwezigen en alle toe- en afnamen geregistreerd worden, met vermelding van het tijdstip waarop ze plaatsvinden, dan volgt uit de administratie de samenstelling der bevolking op tijdstip t. Dit is echter slechts het antwoord bij één experiment. Als het groeiproces met een even grote bevolking vanaf een nieuw tijdstip o opnieuw bestudeerd wordt onder dezelfde omstandigheden met even grote sterfte- en geboortefrekwenties per tijdseenheid, dan zal vaak een ander aantal individuen op tijdstip t na aanvang gevonden worden, dan bij het eerste experiment. Er is dus een stochastisch model nodig.

Oorspronkelijk heeft men geprobeerd toch een definiet, deterministisch model te maken. Niet, omdat men daar de voorkeur aan gaf, maar omdat de stochastische beschouwingswijze toen nog niet was doorgedrongen. Laten we verder afzien van het verschijnsel sterfte en alleen de groei van een bevolking door geboorte onder de loep nemen. De groei in een klein tijdsinterval is afhankelijk van het aantal aan het begin van dat tijdsinterval aanwezige individuen en de sinds tijdstip o verlopen tijd. Deze afhankelijkheid kunnen we met een differentiaalvergelijking weergeven en die vergelijking oplossen. De oplossing geeft globaal aan, hoe de bevolking zich in de tijd ontwikkelt en kan door variatie van parameters aan een echte bevolking worden aangepast. Op deze wijze ontstaat niet meer dan een globale beschrijving, want dit model voert tot één vaste waarde voor de omvang der bevolking op tijdstip t, in tegenspraak tot het experimentele resultaat. Hier is een definiete beschouwing niet correct.

Een bevolking bevat altijd een geheel aantal individuen en kan alleen met eenheden groeien. Bij het opstellen van de differentiaalvergelijking gaan we uit van de gedachte, dat in een kleine tijd een kleine bevolkingstoename zal plaatsvinden, dat de bevolking dus continu groeit en bijvoorbeeld ook halve individuen kan bevatten. Het belangrijkste bezwaar is echter de definiete, niet met de werkelijkheid overeenkomende, beschouwingswijze.

Het stochastische model is op analoge, maar dichter bij de werkelijkheid aansluitende overwegingen gebaseerd. In een klein tijdsinterval kán de bevolking met één individu toenemen, maar het hoeft niet. Door voor dergelijke intervallen de fractie gevallen aan te geven, waarin wél toename optreedt, als functie van het aantal aanwezige individuen en de sinds tijdstip 0 verlopen tijd, geven we een stochastische beschrijving van het groeiproces. Een stochastische variabele wordt, grofweg, gegeven door een rij getallen met hun frekwenties. Daarbij kan een representatief getal voor die variabele, een gemiddelde, ingevoerd worden, door die rij getallen met zijn frekwenties te wegen. Als bijvoorbeeld in een fractie 1/3 van de gevallen de waarde a en in een fractie 2/3 van de gevallen de waarde b optreedt (men zegt dan meestal: de kans op de waarde a is 1/3, die op b is 2/3) dan is het gemiddelde $1/3\ a + 2/3\ b$. Het aantal aanwezige individuen in de bevolking op tijdstip t is een stochastische variabele. Voor het gemiddelde van dit aantal vinden we bij eenvoudige modellen, die hier verder ongenoemd blijven, óók een definiete kromme, die aan een differentiaalvergelijking voldoet, net als bij de definiete beschouwing. Blijkbaar was de oude theorie niet flexibel genoeg en gaf deze slechts het gedrag van het gemiddelde weer!

Aan dit voorbeeld kunt U ook zien, dat er bij een stochastisch model vragen van een nieuw type gesteld kunnen worden, die bij een definiet model geen betekenis hebben, bijvoorbeeld: hoeveel wijkt het werkelijk op tijdstip t aanwezige aantal individuen van het gemiddelde aantal voor dat moment af? Vragen betreffende fluctuaties in aantallen hebben bij een definiet model geen zin, daar kunnen geen fluctuaties optreden.

Een nauw verwante toepassing in de Biologie en de Medicijnen vormen de theorieën betreffende de verspreiding van besmettelijke ziekten bij planten en mensen. Het geboren worden van nieuwe individuen in de bevolking, het ziek worden van nieuwe planten en mensen, verloopt analoog aan het aankomen van nieuwe klanten aan een loket. Ook hier hebben we telkens met puntprocessen te doen.

De analogie blijft niet beperkt tot het terrein van Biologie en Medicijnen. In de Natuurkunde kent men de met radioactiviteit samenhangende verschijnselen. Sommige stoffen zenden deeltjes uit; het aantal deeltjes, dat in een vast tijdsinterval wordt uitgezonden kan experimenteel bepaald worden met een teller. In de teller komt een stroom deeltjes binnen, die geteld moet worden. Echter kan, gedurende de eindige tijd, dat de teller een bepaald deeltje registreert, de zogenaamde dode tijd, een ander deeltje ter telling binnenkomen, dat dan, althans bij het eenvoudigste type teller, niet wordt geregistreerd en zo voor de telling verloren gaat. De getelde deeltjes vormen dus slechts een fractie van alle in de teller binnengekomen deeltjes. Deze fractie willen we kunnen berekenen, op grond van de frekwentie der onafhankelijke tussenruimten tussen opvolgende aan de teller aangeboden deeltjes en de lengte van de dode tijd. Deze laatste kan óók stochastisch zijn, dus van registratie tot registratie anders, maar is voor bepaalde typen tellers constant. De gezochte fractie zal bij een herhaling van de telling anders uitvallen. We kunnen proberen, de frekwentieverdeling van die fractie te berekenen. Het geboorte- en sterfteproces komen we hier opnieuw in zijn eenvoudigste vorm tegen: de aan de teller aangeboden deeltjes vormen een bevolking, die in de loop der tijd slechts toeneemt. De teller vormt uit deze bevolking, analoog aan het loket bij een rij klanten, een nieuwe bevolking, die der getelde deeltjes. Bij het loket passeert iedereen, interesseren we ons voor het oponthoud der klanten. Bij de teller „passeert" slechts een fractie, deze fractie bepalen is hier het doel van ons onderzoek.

Niet altijd heeft men succes bij het oplossen van een probleem, verband houdend met een stochastisch proces, dus geformuleerd in termen van stochastische variabelen. Men kan dan echter zijn toevlucht nemen tot de zogenaamde Monte Carlo methoden. Van verschillende definiete processen is bekend, dat zij tot mathematisch zo ingewikkelde verschijnselen voeren, dat men hun effect beter door nabootsing kan bestuderen dan door berekening. Ik noem U hier slechts het werk in het Waterloopkundig Laboratorium, waar bijvoorbeeld de invloed van het afsluiten van riviermonden op de zeestromingen onderzocht wordt. Op soortgelijke wijze kunnen ook stochastische processen nagebootst worden.

Ook in de Scheikunde kennen we tal van toepassingen, bijvoorbeeld het gebruik van stochastische modellen bij chemische reacties. Bij de studie van ketens van polymeren maakt men ook meer en meer en met succes gebruik van de theorie der stochastische processen. Ik wil op deze toepassingen, vanwege het technische karakter, liever niet ingaan, maar U tot slot iets vertellen over het stochastische proces in de risicotheorie. Deze theorie behoort tot het gebied der Actuariële Wetenschappen.

Een verzekeringsmaatschappij ontvangt premies voor het verzekeren tegen schaden. We kunnen zonder bezwaar aannemen, dat dit een constant bedrag per tijdseenheid is. Zij betaalt schadevergoedingen uit op discrete tijdstippen. Gemakshalve veronderstellen we, dat bij elke schade één vast bedrag a wordt uitgekeerd. De maatschappij vangt zijn werkzaamheden met een zeker beginkapitaal aan en dient voor zij begint een redelijke premie vast te stellen. Als zij bekend is met de frekwentieverdeling van de afstand tussen opeenvolgende schadeclaims (hier heeft U weer een puntproces zoals wij dat telkens tegengekomen zijn), dan zal zij daaruit in de eerste plaats willen berekenen, hoe groot het risico van failliet gaan is. Daar snel opeen een groot aantal claims kan binnenkomen, is het niet mogelijk dit risico geheel uit te sluiten, hoe hoog zij de premie ook maakt.

Op elk tijdstip vanaf de aanvang van de werkzaamheden van de maatschappij kunnen we berekenen: het beginkapitaal plus de ontvangen premies (dit geeft tezamen een lineaire functie van de tijd, die sneller toeneemt, naarmate men hogere premies eist). Dit totaal kunnen we verminderen met de tot dat moment uitbetaalde schaden. Zo vinden we voor elk tijdstip de experimentele, in werkelijkheid optredende, waarde van het bezit van de maatschappij op dat tijdstip. In de theorie is dit een stochastische variabele. Zodra deze variabele negatief wordt, is de maatschappij failliet. Het binnenkomen van schadeclaims kan op dezelfde wijze beschreven worden als het aankomen van klanten aan een loket. Uit de theorie volgt, hoe de frekwentie van het failliet gaan van de maatschappij, onder gelijksoortige omstandigheden, dat wil zeggen bij het zelfde beginkapitaal, dezelfde premieheffing en dezelfde stochastische eigenschappen van de afstand tussen en de grootte van de schadeclaims, als functie van de grootte van de premie berekend kan worden. Het resultaat van deze berekening is een belangrijk hulpmiddel voor het vaststellen van de premie, die uiteindelijk gevraagd wordt.

Dames en Heren,

Ik heb in het voorgaande opzettelijk slechts gesproken over stochastische processen, die als puntprocessen opgevat kunnen worden. Voorbeelden, die niet tot de puntprocessen behoren, zijn veel moeilijker toe te lichten, maar ongetwijfeld ook van veel belang voor praktische toepassingen. Het beschrijven van de hoeveelheid neerslag, die in een bepaald gebied in de loop der jaren valt, dient ook met een stochastisch model te gebeuren. Een puntproces is hier niet aan te geven: wel regent het soms niet, maar als het regent, gebeurt dat zonder onderbreking, gedurende enige tijd, continu. Het electrisch geruis, dat bij radio en televisie optreedt, wordt ook niet door puntprocessen beschreven.

Ik hoop U met het voorgaande getoond te hebben, hoe de stochastische processen tal van verschijnselen een gemeenschappelijke achtergrond geven. De wiskunde kon hierbij slechts vaag aangeduid worden, maar wellicht kunt U nu toch wat beter begrijpen, waarom de theorie der stochastische processen vele, door haar gefascineerde, beoefenaars kent.

Dames en Heren Bestuurderen en Leden van de Raad van de Stad Amsterdam,

Bij de aanvaarding van mijn ambt betuig ik U mijn oprechte dank voor mijn benoeming tot lector in de waarschijnlijkheidsrekening en de analyse aan de Universiteit van Amsterdam.

Mevrouw en Mijne Heren Curatoren,

Ik acht het een voorrecht voor de Universiteit te mogen werken en ben U dankbaar voor Uw medewerking aan mijn benoeming.

Mijn wetenschappelijke vorming dank ik in de eerste plaats aan *Professor Van Dantzig*. Zijn onverwachte heengaan was een onschatbaar verlies voor de Universiteit. De grootte van de leemte, die hij bij ons heeft achtergelaten, komt misschien beter dan door woorden tot uitdrukking door het feit, dat zijn taak in wezen door twéé mensen, Professor Hemelrijk en mijzelf, overgenomen wordt. Ik zal mijn uiterste best doen, mijn aandeel in die taak zo goed mogelijk te volbrengen. Zijn werk en zijn voorbeeld vormen voor ons, zijn leerlingen, een blijvende bron van inspiratie.

Hooggeleerde Heyting,

Uw colleges hebben mij altijd geïmponeerd, door de klare taal, de rust en de waardigheid, waarmee zij gegeven werden. Tot Uw medewerkers te behoren stemt mij tot grote vreugde. De perfectie van Uw onderwijs zal mij steeds als ideaal voor ogen staan.

Hooggeleerde De Bruijn,

Na Professor Van Dantzig heb ik van U, meer dan van enig ander, geleerd wat wiskunde voor mij betekent. Uw vertrek is een verlies voor de Universiteit van Amsterdam. Ik hoop, dat ik ook in de toekomst een beroep op U zal mogen doen, als de omstandigheden daartoe aanleiding geven. Uw bereidwilligheid om aan mijn promotie mee te werken, heb ik bijzonder gewaardeerd.

Hooggeleerde Popken,

Het toeval wilde, dat ik in mijn studietijd vrijwel geen contact met U had. Toen U kwam was ik al bijna weg. Ik hoop de schade in de komende jaren te kunnen inhalen en van Uw kennis te profiteren. Uw voorkomendheid en warme belangstelling maken het mij des te gemakkelijker mijn moeilijkheden aan U voor te leggen en om Uw raad te vragen.

Dames en Heren Hoogleraren, Lectoren, Leden van de Wetenschappelijke Staf en Assistenten,

U heeft mij reeds gedurende enige tijd in Uw midden opgenomen. Tot mijn vreugde is ook hier, evenals in mijn vorige werkkring, de collegiale omgang bijzonder vriendschappelijk. Ik verheug mij er op U allen nader te leren kennen. Weest er van verzekerd, dat U ook altijd op mij een beroep kunt doen.

Hooggeleerde Hemelrijk,

Sinds 1952 heb ik onder Uw leiding op het Mathematisch Centrum gewerkt. Nu hebben wij naast elkaar een taak aan de Universiteit te vervullen. Uw scherpzinnigheid, diep inzicht, tact in de omgang en diplomatieke gaven dienen mij dagelijks tot lering. Uw studenten mogen zich gelukkig prijzen met een leermeester, die een zo veelzijdige ervaring heeft en hen zo goed naar waarde weet te schatten. Ik heb van onze toekomstige samenwerking de hoogste verwachtingen.

Hooggeleerde Koksma en Hooggeleerde Van Wijngaarden,

In U dank ik het Mathematisch Centrum voor al wat het mij geboden heeft: een voortreffelijk milieu om in te werken, gelegenheid tot studie, tijd om mijn promotie voor te bereiden, raad en advies van ouderen, kortom een unieke werkkring.

Ik hoop ook in de toekomst nauwe betrekkingen met het Mathematisch Centrum te kunnen blijven onderhouden. Zoals men uit de jaarverslagen kan lezen, heeft reeds menigeen de weg naar het Centrum gevonden en daar advies betreffende zijn wiskundige problemen verkregen. De gelegde contacten blijken niet alleen voor de opdrachtgevers vruchtbaar te zijn. Zij werken ook blikverruimend en stimulerend voor de wiskundigen. Zij zijn voor mij van niet te overschatten betekenis.

Dames en Heren van het Mathematisch Centrum,

Ik denk met bijzonder veel genoegen terug aan de jaren, waarin ik op het Mathematisch Centrum gewerkt heb. Steeds heerste er een opgewekte hartelijke sfeer, altijd was U bereid mij te helpen. Ik hoop in de toekomst nog vaak samen met U aan de problemen, die ons na aan het hart liggen, te kunnen werken en met U van gedachten te kunnen wisselen.

Dames en Heren Studenten,

Zoals te doen gebruikelijk is, heb ik U voor het laatst bewaard, hoewel U het belangrijkste bent. Immers zonder U zouden wij vandaag niet hier bijeen zijn.

Eigenlijk verkeert U in een beklagenswaardige positie. Elke dag kunt U nóg meer leren dan de vorige, staat er een nóg grotere rijstebrijberg van kennis voor U klaar, zonder dat U daar ooit doorheen zult kunnen komen. Gelukkig is dat ook niet nodig.

Vergeet echter nooit, dat die rijstebrijberg bestaat en dat U van ons slechts een kleinigheid van dat wat te weten valt, onderwezen krijgt. Weliswaar worden de smakelijkste hapjes voor U uitgezocht en is het menu zo gekozen, dat de voedingswaarde zo groot mogelijk is, toch dient Uw eetlust méér te eisen, dan U van ons krijgt. Uw eigen initiatief, Uw eigen voorkeur, zijn voor U minstens zo leerzaam als de onze. Daarom zeg ik U, volsta niet met wat U van ons hoort, maar probeer ook zelfstandig Uw horizon te verbreden. Bladert U eens in een boek, dat niet rechtstreeks met de tentamenstof verband houdt, tracht U eens een eigen idee verder uit te pluizen, komt U eens praten over een onderwerp, dat Uw belangstelling heeft getrokken. U bent altijd welkom.

Ik heb gezegd.