STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

SD 34r

Aselect.

Statistica Neerlandica, 15 (1961), p 225-237).

J. Hemelrijk.

1961

Aselect*)

door J. Hemelrijk

UDC 311

Summary

Inaugural address by Professor J. Hemelrijk at the University of Amsterdam. The subject is the notion of randomness.

Dames en Heren Bestuurders van Amsterdam,

Mevrouw, Mijne Heren Curatoren van de Universiteit van Amsterdam,

Mijne Heren Leden van het Presidium,

Dames en Heren Hoogleraren, Lectoren, Docenten en Leden van de Wetenschappelijke en Administratieve Staf,

Dames en Heren Studenten en voorts Gij allen, die door Uw aanwezigheid van Uw belangstelling blijkt geeft,

Homerus vertelt, in het zevende boek van de Ilias, hoe Hector voor de muren van Troje de Griekse helden uitdaagt tot een tweegevecht. Achilles is op dat moment niet beschikbaar en Menelaus neemt, na zijn — begrijpelijke — aarzeling overwonnen te hebben, de uitdaging aan; maar zijn broer en mede-aanvoerder Agamemnon weerhoudt hem, omdat hij vreest dat Menelaus niet tegen de machtige Hector opgewassen zal zijn. Na een bewogen aansporing van Nestor bieden zich negen vrijwilligers aan. Tussen deze gegadigden laat de wijze Nestor kiezen door het lot: ieder zet een merkteken op zijn eigen lot en werpt het in de helm van Agamemnon; Nestor schudt de helm tot één lot er uit springt. Tot grote vreugde der Grieken blijkt dit het lot van Ajax te zijn, juist de man waarop zij hoopten. Het tweegevecht eindigt — door ingrijpen der goden — onbeslist, maar dat is voor ons op het ogenblik niet van belang.

Wij hebben hier een vroege beschrijving van een reeds toen ongetwijfeld zeer oude procedure: de bewuste inschakeling van het lot voor het doen van een keuze. Een procedure, die tegenwoordig in statistische vaktaal met de term „aselecteren" aangegeven wordt: het maken van een keuze zonder voorkeur of althans zonder voorkeur te doen gelden, het afzonderen van één of meer elementen uit een gegeven verzameling zonder daarbij selectie naar één of andere eigenschap te gebruiken, kortom „aselecteren", niet „selecteren".

*) Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van gewoon Hoogleraar in de Mathematische Statistiek aan de Universiteit van Amsterdam, op 24 april 1961.

Het werkwoord „aselecteren" is afgeleid van het bijvoegelijk naamwoord „aselect", dat ingevoerd is door Van Dantzig als vertaling van de weinigzeggende Engelse term "random". In de meeste talen heeft men die Engelse term zonder meer overgenomen — een slechte gewoonte, die bestrijding verdient, maar die bij moeilijk vertaalbare termen begrijpelijk genoeg is — een statisticus is in de regel geen taalkundige —; waar het hier echter een sleutelbegrip van de statistiek betreft is een goede vertaling, een sprekende term bovendien, zeer waardevol en de snelle inburgering van de term „aselect" stemt dan ook niet alleen tot vreugde als eerbetoon aan het pionierswerk van zijn ontwerper maar bevordert ook een beter begrip voor de basis van de moderne statistiek en de daarmee nauw verbonden principes van het wetenschappelijk opgezette experiment.

Weinig zullen de Griekse helden destijds hebben vermoed dat de door hen toegepaste keuze door loting meer dan 2000 jaar later een essentieel onderdeel zou worden van bepaalde methoden van wetenschappelijk onderzoek. Weinig zouden zij er zich trouwens om bekommerd hebben, hadden zij het wel geweten. Schrijven konden zij niet; zij merkten hun loten met een teken. Zelfs is later door hun landgenoten beweerd dat zij niet konden tellen. Voor het beroep van statisticus waren zij dus niet geschikt. Toch waren hun drijfveren gedeeltelijk gelijk aan die van de moderne onderzoeker en het loont daarom de moeite hieraan enige aandacht te besteden.

Homerus vermeldt niet welke motieven leidden tot Nestors voorstel de tegenstander van Hector door het lot te laten aanwijzen. Maar het lijkt geen roekeloze speculatie de volgende motieven aanwezig te veronderstellen.

1. Het religieuze motief: zij legden hun lot nadrukkelijk in handen der goden (waar het ook zonder deze handeling trouwens reeds lag), om een wellicht onjuiste of zelfs fatale beslissing op grond van menselijke willekeur te vermijden.

2. Het motief van onpartijdigheid: een eerlijke, onpartijdige, beslissing te nemen, waar alle vrijwilligers op gelijkwaardige wijze in betrokken waren; d.w.z. allen met gelijke kans om aangewezen te worden en dus ook met voor allen dezelfde kans om niet voor het gevaarlijke karwei op te draaien.

Het religieuze motief is ook in andere gevallen, waarin men zich van beslissingen door het lot bedient, vaak duidelijk aanwezig. Huizinga wijst hier bij herhaling op, in "Homo Ludens". Men vindt het onverbloemd in oude godsdiensten, waarin dobbelen deel uitmaakt van de godsdienstige praktijken, bij orakels en wichelarijen. Caesar heeft, naar men zegt, bij het oversteken van de Rubicon uitgeroepen: "alea iacta est", "de teerling is geworpen". Hoewel noch de uitroep zelf, noch de preciese vorm daarvan, noch de interpretatie als vaststaand kunnen worden beschouwd, kan men zich toch goed voorstellen dat Caesar, bij het nemen van een zo belangrijke beslissing, het gevoel moet hebben gehad dat deze beslissing niet van hem alleen afhing maar ook — en misschien zelfs in hoofdzaak — van het lot, gesymboliseerd door die teerling.

De hulp van het lot werd en wordt soms ook ingeroepen bij rechtsbeslissingen. Zo wordt b.v. in de Staten-Generaal, als de stemmen drie maal staken, beslissing door het lot voorgeschreven. Velen zien — bewust of onbewust — de lotsbeslissing in dergelijke gevallen als een heilige beslissing. Zo verklaarde b.v. Ds. Donner in 1885 bij de kamer-beraadslagingen over de staatsloterij, dat hij tegen deze loterij was „omdat" — zo zei hij — „het lot voor mij heilig is; omdat ik het alleen wil aangewend hebben in die twijfelachtige gevallen, waar onze wil die voorlichting ontbreekt, welke hij nodig heeft tot het doen ener keuze". Op grond van dit standpunt verzette Ds. Donner zich ertegen het lot te gebruiken om de burger, tegen een geringe vergoeding, in het genot te stellen van een kleine kans op een grote prijs.

Hier raken wij een andere zijde van het loten: het genot dat veroorzaakt wordt door de spanning die het oproept. Dit aspect is op zichzelf voor onze beschouwingen van geen belang. De Griekse strijders zullen niet daarom tot loting tussen hun vrijwilligers zijn overgegaan en ik moet de eerste statisticus nog ontmoeten, die dit soort kansgenot ondergaat als hij zich van een tabel van aselecte getallen bedient. Maar de bron ervan, de onvoorspelbaarheid van de uitkomst van de loterij, gaat ons wel degelijk aan; deze onvoorspelbaarheid is de kern van de hele zaak en daar komen wij nog op terug.

De oude gewoonte om de goden door middel van lotsorakel of voortekens een uitspraak te ontlokken vindt men, gedegenereerd tot bijgeloof, nog terug in kaartlezen en koffiedik. De doeltreffendheid van deze methoden moet gering geacht worden. Tegenover deze ontaarding staan de moderne aselecteertechnieken, die het lotsoordeel in het wetenschappelijk onderzoek incorporeren en die merkwaardigerwijze bijzonder geschikt blijken te zijn om de goden ertoe te brengen sommige van hun geheimen prijs te geven, hoewel het religieuze motief daarbij niet meer aanwezig is: een kansmechanisme, dat gebruikt wordt bij het opzetten van een experiment of ingebouwd wordt in een rekenautomaat, mist iedere schijn van heiligheid.

Het essentiële van een loterij is, zoals reeds opgemerkt, de onvoorspelbaarheid van de uitkomst. Op dit negatieve begrip is de gehele theorie van de statistiek te funderen; en het blijkt zeer moeilijk te zijn het in een positieve vorm te brengen. Zuiver wiskundig gezien bestaat deze moeilijkheid niet: statistiek is toegepaste kansrekening en kansrekening is een onderdeel van de maattheorie. Voert men het kansbegrip axiomatisch in, dan is er van bijzondere moeilijkheden of van een negatief karakter geen sprake en dit mathematische model van met behulp van de statistiek te onderzoeken praktische verschijnselen onderscheidt zich niet essentieel van andere onderdelen van de wiskunde. Bij de interpretatie van het kansbegrip echter, die bij iedere toepassing van statistische methoden noodzakelijk is, duikt de onvoorspelbaarheid weer op in de vorm van een steeds aanwezige onzekerheid met betrekking tot de juistheid of onjuistheid der verkregen conclusies. Een onzekerheid, die nooit volledig vermeden kan worden, maar die door de statistiek tot zo gering mogelijke proporties moet worden teruggebracht.

Stel U een machine voor, die telkens als men op een knop drukt één der getallen 0, 1, . . ., 9 produceert. Wij zullen zo'n machine een aselector noemen indien aan bepaalde eisen voldaan is. De formulering van deze eisen is een fundamentele vraag, waaraan door vele onderzoekers van de grondslagen van de kansrekening aandacht is besteed, maar waarop eigenlijk nog geen geheel bevredigend antwoord gegeven is. Dit is des te merkwaardiger omdat de meeste mensen wel zo vertrouwd zijn met het grillig gedrag van dobbelstenen, dat men gewoonlijk meent het antwoord op de gestelde vraag wel te weten, ook al kan men het niet gemakkelijk formuleren.

Wij komen een heel eind, als wij eisen dat steeds het volgende door de aselector geproduceerde getal volstrekt onvoorspelbaar moet zijn in die zin, dat alle voorspellingsmethoden even succesvol — of even weinig succesvol — zijn. Men kan even goed telkens een 2 voorspellen als afwisselend 0, 1, 2, . . ., 9 in deze volgorde, of ook willekeurig gekozen cijfers. Ook het verleden van de machine mag geen invloed hebben: voorspelt men telkens het vorige door de aselector voortgebrachte getal, of een op andere wijze uit de vorige cijfers afgeleid getal, dan wint men daarmee niets.

Het is duidelijk, dat dit inderdaad de praktische eisen zijn, waaraan een goede loterij moet voldoen. Koopt men een lot, dan is het, zolang de trekking niet heeft plaatsgevonden, bij een goede loterij volstrekt onbelangrijk welk nummer dit draagt. Exploiteert men een roulette, dan is het essentieel dat de toekomstige resultaten niet uit de voorafgaande te voorspellen zijn. Anders zou een spelsysteem mogelijk zijn en daarmee zou de exploitatie onmogelijk worden. Wij zouden de gestelde eisen dus ook als volgt kunnen samenvatten: een machine is een aselector als er geen spelsysteem voor ontwikkeld kan worden.

Een andere wijze om hetzelfde te zeggen is: de door de aselector geproduceerde rij getallen moet zo wanordelijk mogelijk zijn. Wanorde en onvoorspelbaarheid zijn hier equivalent: is er orde in de rij, dan kan men daarop met vrucht voorspellingen baseren.

Deze eisen gelden niet alleen voor de gehele rij der door de aselector te produceren getallen, maar ook voor iedere daaruit van tevoren aan te wijzen deelrij. Een dergelijke deelrij kan men b.v. verkrijgen door telkens één getal over te slaan of alleen te kijken naar getallen, die na een 5 komen, enz. Zou in dergelijke deelrijen voorspelling wel mogelijk zijn, dan zou de onvoorspelbaarheid — en daarmee de wanorde — verstoord zijn.

Nu is absolute wanorde gelukkig niet mogelijk, althans niet in een rij getallen. Immers uit de onmogelijkheid van een succesvol voorspellingssysteem, d.w.z. van enig systeem dat succesvoller is dan enig ander, volgt al direct dat de aselector de getallen 0, . . ., 9 alle even vaak moet produceren. Zou hij nl. één van deze getallen, b.v. 3, vaker produceren dan een ander, b.v. 2, dan zou men meer succes hebben door telkens 3 te voorspellen dan 2 en dit is niet toegestaan. Het merkwaardige verschijnsel doet zich dus voor, dat onvoorspelbaarheid der individuele uitkomsten noodzakelijkerwijze leidt tot voorspelbaarheid in het groot: de aselector moet de getallen die hij kan voortbrengen volstrekt onpartijdig behandelen (hetgeen overeenkomt met het tweede motief, dat wij bij de Griekse helden hebben verondersteld). Wij kunnen dus wèl voorspellen hoe vaak ieder der getallen 0, . . ., 9 door de aselector wordt voortgebracht (nl. ieder gemiddeld één op de 10 keer), maar niet wanneer. De statistiek houdt zich dan ook juist bezig met al die verschijnselen, waarvan men wel kan nagaan en voorspellen hoe vaak zij voorkomen, doch niet wanneer dit precies het geval zal zijn.

Men zou nu kunnen denken, dat langs deze weg een beschrijving in positieve termen van de eigenschappen van een aselector te verkrijgen is, maar dit is niet het geval. De uitdrukking nl., dat de aselector ieder der getallen 0, . . ., 9 even vaak produceert, is slechts in schijn positief. Daar immers alles op deze aarde eindig is, geldt dit ook voor iedere getallenrij en in een eindige aselect verkregen getallenrij behoeven de getallen 0, . . ., 9 niet precies even vaak voor te komen. Als de lengte van de rij geen veelvoud van 10 is kan dit zelfs niet eens. De uitdrukking „even vaak" blijft dus vaag en betekent in feite: het ene getal niet systematisch vaker dan het andere. Zo zijn wij weer tot een negatieve uitdrukking teruggekeerd.

Het karakter van een aselector blijft dus verscholen achter een essentieel negatieve omschrijving en dit heeft o.a. tot gevolg, dat men nooit kan bewijzen dat een machine werkelijk een aselector is. Lukt het een blijvend succesvol spelsysteem te ontwikkelen, waarmee individuele uitkomsten beter kunnen worden voorspeld dan bij een aselector toelaatbaar is, dan is daarmee aangetoond dat de onderzochte machine geen aselector is. Een dergelijk experimenteel bewijs kan zodanig uitgevoerd worden dat het dezelfde wetenschappelijke overtuigingskracht bezit als andere fysische experimenten. Lukt het echter niet een spelsysteem te vinden, dan is het nog geenszins uitgesloten, dat men hierin later toch zal slagen. Immers men kan nooit alle mogelijke spelsystemen beproeven daar hun aantal onbegrensd is.

Een analoge bewijstechnische moeilijkheid doet zich in de praktijk voor bij het onderzoek van ingewikkelde speelautomaten, die men hier en daar in café's kan vinden. Deze apparaten, van vele gekleurde aan- en uitknipperende lichtjes voorzien, brengen de speler in de waan dat hij met enige hardnekkigheid de machine wel de baas zal worden en voor hij het weet heeft hij handen vol geld verspeeld. Een dergelijke machine kan zelfs zo provocerend zijn, dat men er aan verslaafd kan geraken, met bijzonder onplezierige financiële gevolgen. Als deze machines in overwegende mate kansmechanismen zijn, zijn zij volgens de Nederlandse wet verboden. Maar daar de speler allerlei strategieën ter beschikking staan, is het zeer moeilijk aan te tonen, dat er geen winnend spelsysteem te ontwikkelen is. Bovendien zou men dit, waar de bewijsplicht bij de justitie ligt, bij ieder nieuw type machine opnieuw moeten onderzoeken. Dit leidt tot een ingewikkelde juridische puzzel, waarbij gordiaanse knopen doorgehakt moeten worden. Zou de wet werkelijk een wetenschappelijk bewijs eisen van de onmogelijkheid van een winnend spelsysteem, dan zou de onmogelijkheid van dit bewijs het verbod van speelautomaten onmogelijk maken. Neemt men echter — zoals in feite het geval is — de doorsnee speler als criterium, dan volgt daaruit reeds dat iedere exploiteerbare speelautomaat onder het verbod dient te vallen; want als de doorsnee speler een winnend spelsysteem zou kunnen ontwikkelen zou weliswaar bewezen zijn, dat de speelautomaat niet in overwegende mate een kansmechanisme is — en dus niet verboden kan worden —, maar dan levert de exploitatie verlies op en is het verbod dus overbodig. Automaten die meer uitbetalen dan zij aan inzet ontvangen verdwijnen vanzelf.

Bij wetenschappelijk onderzoek kunnen wij ons niet op deze voor de wetgever toelaatbare wijze aan de geschetste moeilijkheid onttrekken. Wetenschappelijk onderzoek berust op herhaalbaarheid. Een verschijnsel ligt slechts dan wetenschappelijk vast, indien het in voldoende mate reproduceerbaar is. Volstrekte zekerheid dat deze reproduceerbaarheid ook voor de toekomst geldt hebben wij nooit; volstrekte zekerheid is voor ons niet weggelegd. De eisen, die men aan de reproduceerbaarheid van een verschijnsel stelt om het als wetenschappelijk aangetoond te kunnen beschouwen, zijn daarom niet geheel scherp vast te stellen en wisselen ook met de tijden. Maar een grote mate van reproduceerbaarheid wordt steeds gevergd en als — om een voorbeeld te noemen — een aantal wichelroedelopers tegenstrijdige aanwijzingen geeft over de plaats waar zich aardstralen bevinden, zal men hun resultaten eerder als argument tegen dan voor het bestaan daarvan beschouwen. Maar daarmee is dan het bestaan van aardstralen toch niet weerlegd en men zal dit ook strikt genomen nooit kunnen weerleggen, omdat men nu eenmaal niet wetenschappelijk kan bewijzen, dat iets niet bestaat. Dit geldt ook voor geesten, marsbewoners en vliegende schotels. Men kan in al dergelijke gevallen volhouden dat de juiste waarnemingsmethode nog niet ontwikkeld is en dat alleen dàt de algemene aanvaarding van de genoemde verschijnselen in de weg staat. Dit tekent de precaire situatie, waarin bestrijders van bijgeloof zich steeds bevinden; zij staan voor een ondankbare en in feite onmogelijke taak: wetenschappelijk te bewijzen dat iets onmogelijk is. Drukt men het bijgeloof op één plaats de kop in, dan steekt het deze op een andere plaats weer op. Dat niettemin de wetenschap een heilzame werking heeft bij het opruimen van bijgeloof is, naast het telkens ontzenuwen van schijnbewijzen, grotendeels te danken aan haar algemeen gezag en aan haar ontnuchterende werking.

Dit uitstapje naar het gebied van het bijgeloof is wellicht wat onverwacht. Ook de andere voorbeelden, die hier ter sprake komen, zijn met opzet ontleend aan de meer populaire sfeer van het dagelijks leven. Zij spreken meer tot de verbeelding dan de in de praktijk van de statisticus veel vaker voorkomende problemen uit wetenschap en industrie, en daar zij een overeenkomstige statistische structuur bezitten kunnen zij zonder de algemeenheid van het betoog te schaden ter illustratie worden gebruikt. Bovendien is het wel merkwaardig, dat het experimentele onderzoek van bijgeloof ons zo goed tot voorbeeld kan dienen waar het de principes van een statistisch experiment betreft. Immers de situatie blijkt zo te zijn, dat men het wèl bestaan van een aselector evenmin met zekerheid kan bewijzen als het niet bestaan van aardstralen e.d. Anderzijds kan men van een niet-aselect werkende machine zeer goed aantonen dat het géén aselector is en van aardstralen zou men het wèl bestaan, àls zij bestonden, precies even goed kunnen bewijzen. Dit is een merkwaardige tegenstelling: wat bij het een wel kan, kan bij het andere juist niet, en omgekeerd. De oorzaak daarvan is het negatieve karakter van de definitie van een aselector, de eis, dat de resultaten onvoorspelbaar moeten zijn, terwijl men alleen dan tot een wetenschappelijk bewijs van het bestaan van aardstralen zou komen indien bepaalde verschijnselen wèl voorspelbaar zouden blijken te zijn. En deze tegenstelling kan, zoals wij verderop aan een ander voorbeeld zullen laten zien, juist gebruikt worden als middel om de aselector in te schakelen bij een experimenteel onderzoek, dat tot doel heeft het bestaan van een bepaald verschijnsel wetenschappelijk aan te tonen. Maar daarvoor is het eerst nodig over een aselector te beschikken.

Het wordt dus tijd na te gaan of de onmogelijkheid van het strikte bewijs van het bestaan van een aselector ons ervan zou moeten weerhouden er een te construeren. Dit is gelukkig niet het geval, want het is zeer wel mogelijk aselectoren te maken, die voldoende nauwkeurig aselect zijn om bij experimenteel wetenschappelijk onderzoek te worden gebruikt. Daartoe kan men aanknopen bij de onpartijdigheid, die de aselector ten aanzien van zijn getallen moet bezitten. Deze vertaalt men dan in symmetrie, zoals bij een dobbelsteen, roulette en loterijtrommel — om enige mechanische middelen te noemen —. Symmetrie is natuurlijk nooit volmaakt (want niets is volmaakt), maar dat is gelukkig ook niet nodig. Men kan onzuiverheden in de symmetrie door een kunstgreep gemakkelijk onschadelijk maken, mits men over een mechanisme zonder geheugen beschikt, hetgeen wil zeggen dat vroegere resultaten toekomstige niet beïnvloeden. Stel men werpt „kruis" (K) of „munt" (M) met een onzuivere munt (waarvoor men b.v. een knoop kan nemen). Men beschouwt nu telkens 2 opeenvolgende worpen, zodat er 4 mogelijke uitkomsten zijn: KK, MM, KM en MK. Ook indien door de onzuiverheid van de munt K en M niet even vaak voorkomen zullen de beide combinaties KM en MK dit, wegens de afwezigheid van een geheugen, wel doen. Laat men dus de tweetallen KK en MM buiten beschouwing, en noteert men een 0 voor KM en een 1 voor MK, dan heeft men een tweetallige aselector verkregen, die een grote nauwkeurigheid bezit. Het gebruik van mechanische aselectoren is echter omslachtig en vermoeiend en men heeft daarom ook nog wiskundige methoden ontwikkeld, die tot getalrijen leiden van een soortgelijk karakter als de door mechanische aselectoren voortgebrachte. De problematiek, die ontstaat doordat deze getalrijen uitgerekend worden en dus volledig voorspelbaar zijn als men de afleidingsformule kent, laten wij hier buiten beschouwing.

De onpartijdigheid, die een aselector dient te bezitten, leidt dus natuurlijkerwijze tot het principe van symmetrie, waarop mechanische aslectoren gewoonlijk gebaseerd zijn. Men kan deze onpartijdigheid echter ook op andere wijze interpreteren door te zoeken naar gevallen, waarin men zich niet kan voorstellen dat er voorkeur voor bepaalde getallen zou bestaan. Indien men b.v., wandelend langs Amsterdams grachten, van de in rijen geparkeerde auto's telkens het laatste cijfer van de kilometerteller opneemt, verkrijgt men vermoedelijk een goede aselecte getallenrij. Dit is een eenvoudig voorbeeld van een natuurlijke aselector en dit type van aselecte verschijnselen treedt in natuur en maatschappij zeer vaak spontaan op, zij het gewoonlijk in veel ingewikkelder vorm dan hier beschreven. Men vindt het b.v. terug in de lengte van de tijdsintervallen tussen opeenvolgende aanslagen van een Geiger-teller, in de aantallen bloedlichaampjes in telvakjes onder een microscoop, in de verschillen die optreden bij herhaalde metingen van fysische en chemische aard, in de volgorde van jongens- en meisjesgeboorten die aangegeven worden bij de burgerlijke stand en in de wachttijden bij stoplichten, pontveren en in de wachtkamer van de dokter. Dat daarbij vaak verstoringen optreden met aanwijsbare oorzaak, zoals de dode tijd van de Geiger-teller en de één-eiïge tweelingen bij de burgerlijke stand, kan hier buiten beschouwing blijven.

Dat uit de resultaten van een aselector ingewikkeldere vormen van regelmaat kunnen ontstaan is op eenvoudige wijze als volgt in te zien. Een tientallige aselector geeft een onvoorspelbare rij getallen uit 0, 1, . . ., 9, waarbij geen dezer getallen systematisch vaker voorkomt dan een ander. Telt men nu telkens twee opeenvolgende getallen uit deze rij bij elkaar op, dan verkrijgt men een rij, waarin de getallen 0, 1, . . ., 18 voorkomen. Deze rij is echter geen achttientallige aselecte rij. Immers alle 100 paren (0,0), (0,1), . . ., (9,9) komen in de oorspronkelijke rij even vaak voor, maar indien men van deze 100 verschillende paren de som van de leden van ieder paar vormt, ziet men direct dat de getallen 0, 1, . . ., 18 daarin niet meer symmetrisch voorkomen: onder de 100 mogelijke gevallen wordt 0 alleen gerealiseerd als $0 + 0$ en 18 alleen als $9 + 9$, terwijl 9 als som van 2 cijfers op 10 wijzen gevormd kan worden, nl. als $9 + 0$, $8 + 1$, $7 + 2$, . . ., $0 + 9$. De som 9 komt dus het vaakst voor (en wel 10 maal zo vaak als 0), zodat de onvoorspelbaarheid in deze nieuwe rij, hoewel nog niet geheel verdwenen, aanzienlijk geringer is dan in de oorspronkelijke rij. Algebraïsche bewerkingen, toegepast op aselecte getallen, vergroten dus de individuele voorspelbaarheid van uitkomsten. De verdere uitbouw hiervan, b.v. tot de verschillende limietstellingen van de waarschijnlijkheidsrekening, en het onderzoek van het gedrag en de structuur van natuurlijke aselecte verschijnselen vormen het terrein van waarschijnlijkheidsrekening en statistiek.

Een aselector, eenmaal geconstrueerd, wordt door de statisticus niet zonder meer geaccepteerd. Deze gaat het apparaat toetsen door te trachten het te slim af te zijn. Daartoe beschikt hij over statistische toetsen, afgeleid met behulp van de kansrekening. Hij weet hoe de aselector zich onder deze proeven dient te gedragen. Daarbij kunnen wij, in dit verband, iedere statistische toets beschouwen als de beproeving van een spelsysteem, dat dus niet tot positief resultaat behoort te leiden. Vele toetsen, overeenkomend met vele spelsystemen, zijn daarvoor beschikbaar. Alleen als de aselector opgewassen blijkt te zijn tegen deze statistische beproevingen kan hij geschikt worden geacht voor gebruik bij experimentele onderzoekingen, waarbij dan dezelfde batterij van statistische toetsen gebruikt kan worden voor het analyseren van de verkregen waarnemingsresultaten.

De wijze, waarop men nu een aselector kan gebruiken voor het aantonen van een bepaald verschijnsel, willen wij in eenvoudige vorm schetsen door een geschematiseerd voorbeeld. Veronderstel dat men wenst te onderzoeken of een proefpersoon, die zich heeft aangemeld als sollicitant voor de positie van wijnproever, — de term „proefpersoon" is hier dus wel op zijn plaats —, in staat is twee weinig verschillende wijnen van elkaar te onderscheiden. Men kan hem dan achtereenvolgens, met niet al te kleine tussenpozen, telkens van één van beide wijnen laten proeven. De het eerst geproefde wijn aangevende met A dient dan de proefpersoon telkens aan te geven of hij opnieuw A proeft of de andere wijn, B.

Wij onderscheiden nu twee mogelijke situaties: de proefpersoon kan de beide wijnen wel van elkaar onderscheiden of hij kan het niet. Kan hij het wel en proeft hij het verschil duidelijk, dan is het niet moeilijk voor hem dit aan te tonen, daar hij dan steeds of vrijwel steeds het juiste antwoord zal geven. Is het smaakverschil voor hem niet waarneembaar, dan zal hij telkens naar het antwoord moeten raden en in dit geval gaat de volorde van aanbieding der twee wijnen een belangrijke rol spelen. Men heeft nl. in dergelijke situaties altijd de neiging bepaalde patronen te vermijden op grond van hun regelmaat. Voorbeelden daarvan zijn: ABAB . . ., dus beide wijnen om de beurt en AA . . . ABB . . . B, eerst voortdurend wijn A en daarna alleen B. Dit geldt echter zowel voor de proefpersoon als voor de proefleider, indien deze de volgorde zelf bepaalt. Het raden van de proefpersoon, die naar wij veronderstellen het verschil niet proeven kan, gaat daardoor, bewust of onbewust, over in het zoeken naar een spelsysteem tegen de proefleider en als hij erin slaagt dit te vinden (wat zeker niet denkbeeldig is), zou hij ten onrechte de indruk wekken de wijnen van elkaar te kunnen onderscheiden. Een dergelijke zwakheid in de proefopzet is uiteraard niet aanvaardbaar en het middel ter vermijding ligt voor de hand: gebruik een proefleider, waartegen geen spelsysteem mogelijk is, dus een aselector. Iedere poging tot het vinden van een spelsysteem is dan nutteloos en deelt men dit van te voren aan de proefpersoon mede, dan kan hij zich ook ongestoord concentreren op het smaakverschil, het enige wat hem nog de weg kan wijzen. Want juist het verschil tussen de twee wijnen maakt het de wijnproever mogelijk de aselector de loef af te steken, maar dit is dan ook de enige mogelijkheid. Natuurlijk kan men ook nog stom geluk hebben bij raden, zoals men ook een prijs kan winnen in een loterij. Maar als de aselector goed is kan men precies berekenen hoe groot de kans daarop is en deze kans — een onbekwame proefpersoon tot wijnproever uit te roepen —, de onbetrouwbaarheid van de proef genaamd, kan men klein maken door de proef voldoende uitgebreid te maken. Het principe van dit type proefopzet kan als volgt worden samengevat. De resultaten van een aselector zijn onvoorspelbaar, men kan ze niet raden. Verbind nu aan bepaalde resultaten van de aselector een verschijnsel, dan houdt waarneembaarheid van dit verschijnsel in, dat de resultaten van de aselector waarneembaar worden. Beschikt men reeds over een goede waarnemingsmethode doch twijfelt men aan het bestaan van het te onderzoeken verschijnsel, dan kan dezelfde proefopzet gebruikt worden. Heeft men b.v. één of meer erkende wijnproevers tot zijn beschikking, dan kan men op de aangegeven wijze nagaan of twee wijnsoorten verschillend van smaak zijn of niet.

Dit is het grondprincipe, in zijn eenvoudigste vorm, van het gebruik van aselectoren bij proefopzetten. Daaraan zijn, bij nadere beschouwing, nog velerlei problemen verbonden, waarvan hier slechts enkele aangestipt kunnen worden. Daar is b.v. het gebruik van „tabellen van aselecte getallen", dat zijn getalrijen verkregen met een aselector. Met recht kan men deze als motto meegeven: "alea iacta est"; de teerling is zelfs zeer vaak geworpen ter verkrijging van een dergelijke tabel. Maar de naam „aselecte getallen" is misleidend: de term „aselect" heeft geen betrekking op de getallen zelf, ook niet op een eindige rij getallen, maar alleen op de wijze waarop zij verkregen zijn. Maakt men deze onderscheiding niet, dan ontstaan allerlei begripsmoeilijkheden.

Men stelt wel eens de vraag of deze getallen nog aselect zijn als er drukfouten in voorkomen; een vraag die mij een andere in herinnering brengt: wat er gebeurt als men fouten speelt in atonale muziek. De antwoorden op beide vragen zijn, wat mij betreft althans, analoog: als het aantal fouten niet te groot is, bemerk ik er niets van; en eerst recht niet als de fouten zelf ook aselect (resp. atonaal) zijn.

Nog niet onderzocht is de vraag, wat de gevolgen zijn van het feit dat vele experimentele onderzoekers bij hun proefopzetten dezelfde tabellen van aselecte getallen gebruiken. Verder is gebleken dat de bestaande tabellen, hoewel geschikt voor niet te grote experimenten, bij zeer uitgebreide proeven, waarvoor vele duizenden aselect verkregen getallen nodig zijn, niet volledig te vertrouwen zijn. De verklaring daarvan ligt wellicht gedeeltelijk in het feit, dat men van een aselector, die in principe iedere rij getallen kan produceren en die dus van tijd tot tijd ook opvallend regelmatige resultaten moet geven, dergelijke regelmatigheden toch niet accepteert. Geeft hij b.v. enige tijd voortdurend nullen, dan zegt men terecht of ten onrechte: „hij is stuk" en deze rij nullen blijft ongebruikt. De invloed van dit menselijke selectie-effect is onbekend doch bij grote proeven vermoedelijk niet te verwaarlozen. Aselectoren worden in de statistiek bovendien niet alleen op de beschreven wijze gebruikt voor het uitschakelen van bijkomstige invloeden van allerlei aard, maar ook op een geheel andere manier in de z.g. Monte Carlo methode. Wellicht nog meer dan de reeds geschetste zou de Monte Carlo methode gekarakteriseerd kunnen worden als het verkrijgen van numerieke wiskundige resultaten door dobbelen. Het zou te ver voeren ook hierop nog in te gaan. De onvoorspelbaarheid van aselecte getallen, waarop wij speciaal onze aandacht hebben gericht, is trouwens bij de Monte Carlo methode minder essentieel dan bij het gebruik van aselectoren in proefopzetten. Beide methoden berusten echter op het gebruik van geperfectioneerde dobbelstenen. Het verschil met primitieve beslissingsmethoden, waarbij de uiteindelijke beslissing direct berust op loting, is, dat de loting hier zover mogelijk naar voren verschoven wordt en dat bij de wiskundige verwerking van de waarnemingsresultaten, die tot de uiteindelijke conclusies leidt, de eigenschappen van de gebruikte aselector in rekening worden gebracht. Zo mogen de schikgodinnen nog meespreken in de moderne wetenschap, haar zeggenschap echter is beperkt tot een onbetrouwbaarheidsmarge, die door de experimentator wordt beheerst.

Dames en Heren Bestuurderen van Stad en Universiteit,

Dat U mij hebt willen voordragen en benoemen tot hoogleraar in de mathematische statistiek is voor mij een grote eer en stemt mij tot grote dankbaarheid.

Dat ik hier sta als — gedeeltelijk — opvolger van mijn grote en betreurde leermeester Van Dantzig stemt mij tot weemoed en bescheidenheid. In de mij verstrekte opdracht — mathematische statistiek — hebt U tot uitdrukking gebracht, dat ik slechts een gedeelte van zijn zoveel omvangrijkere taak zal behoeven te vervullen. Ik waardeer dit als een juiste en wijze maatregel; het zou mij niet mogelijk zijn geweest mij te gevoelen als een volwaardige opvolger van deze zo universele geleerde. Nu echter geef ik U gaarne de verzekering, dat ik mijn ambt van ganser harte aanvaard en dat ik zal trachten Uw vertrouwen niet te beschamen.

Dames en Heren Hoogleraren en overige Docenten, in het bijzonder van de Faculteit van Wiskunde en Natuurwetenschappen en van de Verenigde Faculteiten van Wis- en Natuurkunde en Economische Wetenschappen,

Het verheugt mij zeer met U te mogen samenwerken. Mijn bindingen met de stad Amsterdam en met haar Universiteit zijn sterk. Bij enkelen van U heb ik vroeger, in angst en beven, tentamen afgelegd. U hebt het mij daarbij, gelukkig, nooit te moeilijk gemaakt en de wijze, waarop U allen mij bij mijn terugkeer in de boezem van mijn Alma Mater hebt ontvangen, heeft mij bijzonder getroffen. Dit geldt uiteraard in het bijzonder voor mijn collega's in de wiskunde, waarmee ik mij op velerlei wijzen verbonden weet en gevoel.

Waarde Collega's uit Delft,

Dat ik Uw groep moest verlaten bij de aanvaarding van dit ambt heeft mij verdrietig gestemd. Bij ieder afscheid wordt men ouder. De actieve en werkzame sfeer bij de opbouw van een eigen wiskundige opleiding en de grootscheepsheid van het onderwijs in de wiskunde in het algemeen aan de Technische Hogeschool te Delft hebben mij veel geleerd en zullen steeds in mijn herinnering blijven. En ook al werk ik niet meer onder U, ik draag nog steeds Uw toga. Ik spreek de hoop uit dat de banden, die in Delft zijn ontstaan in het ruimere verband van het Nederlandse universitaire leven zullen blijven bestaan.

Het Mathematisch Centrum is met mijn na-universitaire opleiding en ontwikkeling zo nauw verbonden, dat het mij tot grote vreugde stemt aan dit instituut te mogen blijven medewerken. De wederzijdse diensten, die Universiteit en Centrum elkaar bewijzen, zijn voor beide instellingen van groot belang. Een belangrijk gedeelte van hun praktische opleiding kunnen studenten in de wiskunde tijdens en na hun studie aan het Mathematisch Centrum genieten en anderzijds zou het Centrum niet kunnen bestaan zonder de steun van de Universiteit in de vorm van deze studenten en in de vorm van toestemming aan hoogleraren om een deel van hun tijd aan het Centrum te wijden. Daarnaast wordt door het consultatieve werk een intensief contact met andere faculteiten van de Universiteit en met wetenschap en industrie buiten de Universiteit onderhouden. En niets blijkt stimulerender te werken voor het wetenschappelijke onderzoek op wiskundig gebied dan de voortdurende noodzaak tot het oplossen van praktische problemen, die door onderzoekers op ander gebied ter oplossing worden aangeboden. Ik zal mijn best doen deze naar mijn mening uiterst vruchtbare vorm van samenwerking zo veel mogelijk te bevorderen.

Dames en Heren Studenten,

De mathematische statistiek is een vak, waarmee men alle kanten uit kan. Theorie of toepassing, wetenschap of industrie, de keuze is ruim. Het is een jong vak, nog in opkomst, maar toch reeds zo volgroeid, dat er een grote maatschappelijke behoefte aan bestaat. Dit laatste geldt trouwens voor de gehele wiskunde in steeds toenemende mate en het laat zich aanzien dat de plaats van de wiskunde in de toekomst nog veel belangrijker zal worden dan nu reeds het geval is. Het is voor een wiskunde student niet gemakkelijk te kiezen uit de vele mogelijkheden, die de revolutionaire ontwikkeling van de laatste tijd hem biedt. Ik kan U slechts aanraden tijdens Uw studie zoveel mogelijk kennis te nemen van de verschillende richtingen, die U geboden worden. Proeft van alles en kiest die vakken, die het meest met Uw aanleg overeenstemmen. Want wie met plezier werkt, werkt het best.

Ik heb gezegd.