STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Examen opgaven O.R. - analist

1965 t/m 1968

verzameld door
ir. P.J. Weeda

december 1968.

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Tijdsduur 3 uur.

1. Een probleem, waar elke boer voor gesteld wordt, is het maken van een bouwplan. Dit wil zeggen dat hij moet bepalen op welke wijze hij zijn grond wil gebruiken.
Een bepaalde landbouwer kan op zijn bouwland de volgende produkten verbouwen: rogge, aardappelen en voederbieten. Zijn grasland kan hij gebruiken voor hooiland en voor beweiding met melkkoeien. In totaal heeft hij ter beschikking 22 ha. grond. Hiervan is 14 ha. geschikt voor het verbouwen van rogge, aardappelen en voederbieten, terwijl 20 ha. geschikt is voor gebruik als grasland. Dit betekent dat 12 ha. zowel als bouwland, als als grasland gebruikt kan worden.
In verband met vruchtwisseling moet een perceel waar aardappelen op verbouwd zijn, gedurende de twee daarop volgende jaren bebouwd worden met rogge of voederbieten.
Voor rogge (bewerken van de grond en zaaien) zijn in de maand november 75 manuren per ha. nodig.
Voor het poten van aardappelen zijn in april nodig 55 manuren per ha., en voor het zaaien van voederbieten 20 manuren per ha., eveneens in april. Het wieden van de aardappelen en van de voederbieten dient te geschieden in mei. Hiervoor is per ha. nodig 75 manuren voor aardappelen, en 120 manuren voor voederbieten. Het oogsten van de rogge geschiedt in de tweede helft van juli of in de eerste helft van augustus en vereist 75 manuren per ha.
Het rooien van de aardappelen en voederbieten moet in oktober plaatsvinden en vraagt resp. 350 en 150 manuren per ha. Per maand zijn 600 manuren beschikbaar.
Het grasland kan worden gebruikt voor beweiding met melkkoeien of voor het verbouwen van hooi (hier wordt verder afgezien van het houden van jongvee e.d.).
Per melkkoe is gedurende de winter nodig 2000 kg. voederbieten en 2000 kg. hooi. De koeien worden opgestald van 1 november tot 1 mei. Per koe zijn gedurende deze tijd nodig 12 manuren per maand. Gedurende de overige maanden vraagt een koe 7 manuren per maand. Daarnaast kost

het hebben van vee 50 manuren per maand, onafhankelijk van de grootte van de veestapel. De arbeid welke in verband staat met het hebben van vee dient over de gehele maand verspreid te zijn. Grasland kan gebruikt worden voor beweiding of voor produktie van hooi. De hooi-opbrengst is per jaar 6000 kg. per ha. Voor beweiding is per melkkoe nodig 0,4 ha. grasland. Voor hooien is in de tweede helft van juni of in de eerste helft van juli nodig 60 manuren per ha.
In onderstaande tabel zijn de opbrengsten en kosten vermeld per ha.:

	bruto-opbrengst		kosten bemesting	netto opbrengst in guldens
	in kg.	in guldens	zaai- en pootgoed in guldens	
rogge	2500	775	175	600
aardappelen	26000	2600	600	2000
voederbieten	60000	geen marktwaarde	200	-200
hooi	6000	idem	250	-250
grasland voor beweiding	-	-	250	-250

De opbrengst van de veehouderij is per melkkoe ƒ 1700,- per jaar.
De kosten aan meel en diverse posten als verzekeringen en veearts bedragen per jaar ƒ 500,- per koe.
In al deze kosten zijn niet opgenomen de kosten van de grond, opstallen en arbeid.
Op het bedrijf rust een hypotheek van ƒ 20.000,- met een aflossing van ƒ 1000,- per jaar en een rente van 6% per jaar. Als vergoeding voor de arbeid moet ƒ 30.000,- gerekend worden. Hooi en voederbieten kunnen niet worden verkocht, evenmin als arbeid bijgehuurd kan worden.

Gevraagd wordt het produktie plan dat de hoogste opbrengst per jaar geeft (en dat ieder jaar opgaat).
U wordt verzocht de matrix op te stellen waaruit de oplossing kan worden gevonden.
Breng daarna op grond van logische overwegingen zonder uitvoerige berekeningen zoveel mogelijk vereenvoudigingen in de matrix aan.

2. De eigenaar van een autogarage overweegt om op een andere vorm van voorraadbeheer van reserveonderdelen over te gaan.
Hij denkt hierbij aan een voorraad-aanvullingssysteem waarbij een bestelserie Q besteld wordt zodra de voorraadhoogte het bestelniveau B bereikt. Als proef besluit hij één onderdeel (een wieldop) volgens dit nieuwe systeem te bestellen.
Een statisticus heeft ten behoeve hiervan reeds de volgende gegevens verzameld:
- het aantal verkochte wieldoppen bedraagt gemiddeld 4 stuks per week en is verdeeld volgens Poisson *)
  (1 jaar heeft 50 weken).
- men verwacht dat dit afname-patroon in de naaste toekomst gelijk blijft
- de inkoopprijs per wieldop bedraagt ƒ 10,-; de totale kosten van het in voorraad houden bedragen ƒ 2,- per stuk per jaar
- het plaatsen van een aanvullingsorder kost ƒ 50,-
- de levertijd bedraagt 4 weken

<u>Gevraagd</u>: 1. Geef de formule voor de optimale bestelserie (Q^*) van Camp of Wilson. Bereken Q^*.
2. Bereken het bestelniveau B, indien een kans van buiten voorraad raken, p, van 1% per bestelling toelaatbaar wordt geacht.
3. Geef een uitdrukking voor de gemiddelde voorraadhoogte, bereken de gemiddelde voorraadhoogte en voorraadkosten per jaar.

Indien de proef met de wieldoppen slaagt wil de eigenaar het gehele voorraadbeheer met bovengenoemd systeem gaan uitvoeren. De onderdelen variëren in prijs van ƒ 10,- per stuk tot ƒ 100,- per stuk. De gemiddelde afname van de betreffende onderdelen variëert van 1 tot 50

---

*) Zie: Statistische tafels voor de cursus Besliskundig analist voor de industrie.

stuks per week, de voorraadkosten bedragen 20% van de kostprijs per stuk per jaar.
Er komen levertijden voor van 1, 2 en 4 weken, terwijl de orderkosten ƒ 50,- en ƒ 15,- kunnen zijn.

4. Ontwerp tabellen of grafieken waarmede dit voorraadbeheer eenvoudig kan worden uitgevoerd, d.w.z. dat bestelniveau en seriegrootte kan worden afgelezen als functie van de relevante invloedsfactoren.

1965 (vervolg)

Tijdsduur $2\frac{1}{2}$ uur.

3. Een fabriek van kunstmest bestaat uit twee afdelingen.
   Afdeling A produceert ammoniak, die door afdeling B tot het eindprodukt wordt verwerkt.
   Tussen deze afdelingen is een opslagtank met een inhoud van 100 ton.
   Afdeling A produceert gemiddeld 840 ton per week en werkt continu.
   De produktiesnelheid is aan fluctuatie onderhevig. Wij mogen aannemen dat die snelheid in de loop van een dag constant blijft, maar dat de produktie, die gehaald kan worden als er geen gebrek aan opslagruimte is, kan worden weergegeven door tabel 1. Als in de loop van een dag de tank vol raakt, zal A de rest van die dag doordraaien met de snelheid B.
   Afdeling B verwerkt ook gemiddeld 840 ton per week, maar werkt slechts 6 dagen en staat zondags stil. Ook hier nemen we aan dat de produktie in de loop van een dag constant blijft, behoudens het leegraken van de tank. Tabel 2 geeft een frequentieverdeling van de dagprodukties bij voldoende grondstof.

   Gewenste resultaten

   1. Hoe vaak zal A door een volle tank produktie moeten minderen?
   2. Hoe vaak zal B door een lege tank produktie moeten minderen?
   3. Hoeveel ton produktieverlies veroorzaakt dit voor A?
   4. Hoeveel ton produktieverlies veroorzaakt dit voor B?

   Vragen

   1. Dit probleem kan met simulatie worden aangepakt.
      Ontwerp een simulatiemodel voor dit probleem.
   2. Maak een veronderstelling over de beginsituatie, en motiveer deze.
   3. Voer een simulatie van vier weken met dit model uit.
   4. Hoe zou het onderzoek van dit probleem verder moeten verlopen, om een betrouwbaar antwoord te geven op de "gewenste resultaten"?

Tabel 1: Dagprodukties van afdeling A (bij voldoende opslagruimte)

tonnen per dag	90	110	130	150	170
% kans	16	44	20	14	6

Tabel 2: Dagprodukties van afdeling B (bij voldoende grondstof)

tonnen per dag	110	130	150	170
% kans	20	30	30	20

4. Indien op een éénbaansrijweg de lengte der voertuigen l bedraagt terwijl de onderlinge afstand a (= remweg) gelijk is aan $b.v.^2$ (b = coëfficiënt, v = snelheid van de file) hoe groot is dan de capaciteit van de weg (N) in wagens per uur als functie van de snelheid v?
Bestaat er een optimale snelheid v^*? Zo ja, geef hiervoor dan een formule.

Indien geldt dat: (volgens ANWB)	remweg in m. (= a)	snelheid km/uur (= v)
	1	10
	4	20
	9	30
	16	40
	.	.
	.	.
	.	.
	etc.	

Hoe groot is dan v^* bij l = 4 m.

5. Een ondernemer wenst een bioscoop te bouwen en vraagt U advies ten aanzien van de gewenste capaciteit, d.w.z. het aantal plaatsen. Hij laat uitkomen dat het hem uitsluitend om de ekonomische resultaten te doen is; overwegingen van prestige, estetica, enz. spelen geen rol.

Geef een beschrijving van de wijze waarop U dit beslissingsprobleem zou aanpakken. Indien dit in Uw model mogelijk is, geef dan ook de oplossing aan.

1966

Tijdsduur 3 uur.

1. Gegeven:

Ten behoeve van het afregelen van motoren moet een nieuwe meettafel ontwikkeld worden. Deze meettafel bestaat uit drie componenten A, B en C. Nadat A en B zijn samengebouwd vormt samenstelling AB tezamen met component C een nieuwe samenstelling ABC. Deze samenstelling wordt getest en vormt dan de nieuwe meettafel.

Een voorstudie heeft uitgewezen dat de volgende activiteiten verricht moeten worden waarbij tevens een schatting werd gemaakt van de tijdsduur per activiteit in weken.

	Aanduiding	Tijdsduur in weken
Studie van het gehele project	S	3
Ontwikkelen van component A	OA	2
Tekenen van component A	TA	4
Ontwikkelen van component B	OB	6
Tekenen van component B	TB	4
Ontwikkelen van component C	OC	3
Tekenen van component C	TC	3
Tekenen van samenstelling A-B	TAB	4
Tekenen van samenstelling AB-C	TABC	3
Onderdelen maken in eigen werkplaats	OEW	4
Onderdelen bij derden bestellen	OD	10
Samenstelling ABC opbouwen en testen	ST	2

Uit gesprekken is voorts gebleken dat TA pas kan plaatsvinden nadat OA geheel klaar is; hetzelfde geldt voor TB en OB respectievelijk TC en OC.

TAB kan beginnen wanneer zowel TB als TA klaar zijn. In de eigen werkplaats moeten onderdelen gemaakt worden voor A, B en C. Omdat deze onderdelen op elkaar aansluiten kan OEW pas beginnen wanneer zowel TA, TB als TC klaar zijn. Onderdelen voor derden hebben slechts betrekking op B en A zodat de bestelling OD pas geplaatst kan worden zodra TA en TB klaar zijn. De samenstellingstekening TABC kan pas gemaakt worden nadat TC en TAB gereed zijn. Wanneer alle onderdelen binnen zijn en TABC is gereed, dan kan ABC worden samengebouwd en getest.

Gevraagd:

1. Teken een pijlendiagram of netwerkplanning van bovengenoemd project en geef met de genoemde lettercombinaties de activiteiten (pijlen) aan.
2. Bereken het kritieke pad, de totale tijdsduur en de vroegste en laatste momenten der knooppunten (of mijlpalen).
3. Voor de activiteiten TA, TB, TC, TAB en TABC is slechts één constructeur ter beschikking. De activiteiten worden als ondeelbaar beschouwd. Heeft deze beperking invloed op de einddatum van het gehele project? In welke volgorde zal de constructeur zijn activiteiten moeten verrichten teneinde de totale tijdsduur niet of zo weinig mogelijk te beïnvloeden?
4. Veronderstel dat een onbeperkt aantal constructeurs aanwezig is; men overweegt nu om tegen extra kosten de levertijd bij OD en OEW te verkorten teneinde de gehele projectduur te verkorten. Is dit streven zinvol? Verklaar Uw antwoord!

2. Een onderneming bezit 100 vrachtauto's, waarvan er elke dag vier naar de werkplaats gaan voor een onderhoudsbeurt. De ervaring heeft geleerd, dat hierbij een bepaald onderdeel in gemiddeld 25% van de gevallen moet worden vervangen door een gereviseerd exemplaar. Men kan hierbij niet voorspellen wanneer bij een bepaalde vrachtauto vervanging noodzakelijk is. De revisie van dit onderdeel duurt een dag. Dit betekent, dat een onderdeel dat op een bepaalde dag uit een auto is gehaald, de volgende dag weer in een andere auto kan worden gemonteerd. Op de 100 vrachtauto's zijn slechts 101 onderdelen aanwezig, d.w.z. er is slechts één exemplaar voor revisie aanwezig.

Als op één dag van meer dan 1 vrachtauto een onderdeel moet worden verwisseld betekent dit, dat men een of meer onderdelen buiten de gewone werkuren moet reviseren teneinde de vrachtauto's de volgende morgen weer bedrijfsklaar te hebben.

1e vraag: Op hoeveel dagen van het jaar verwacht men onderdelen tekort te komen? Een jaar bestaat uit 256 werkdagen.

2e vraag: Buiten de gewone werkuren reviseren brengt extra kosten mee ten bedrage van ƒ 50,- per onderdeel. Het in voorraad hebben van een reserve-onderdeel kost ƒ 750,- per jaar.
Hoeveel onderdelen moet men aanschaffen om de verwachte kosten te minimaliseren?

3. De vulmachines van een melkfabriek vullen de flessen met een hoeveelheid melk, waarvan het gewicht normaal verdeeld is om de instelwaarde van μ kg; de standaardafwijking bedraagt σ kg. Gevulde flessen, die minder wegen dan M kg brengen een verlies per fles van c_1 met zich mee.
Om te voorkomen dat een groot aantal flessen niet aan de eis voldoet overweegt men de instelwaarde hoger te kiezen dan de hoeveelheid melk, die voor het gewicht van M kg gemiddeld nodig zou zijn. De verkoopprijs van de flessen is echter vast, zodat iedere afgeleverde hoeveelheid boven de gestelde grens een verlies betekent. Wanneer aangenomen mag worden dat de lege flessen alle even zwaar zijn en g kg wegen en de melk c_2 per kg kost, wordt gevraagd:
   1. een formule af te leiden, waaruit de optimale instelwaarde kan worden berekend,
   2. deze formule in woorden te interpreteren.

1966 (vervolg)

Tijdsduur $2\frac{1}{2}$ uur.

4. Een fabrikant maakt drie eindprodukten A, B en C, die hem na aftrek van transportkosten van fabriek naar markt opbrengen:
   ƒ 1200,- per ton voor produkt A
   ƒ 500,- per ton voor produkt B en
   ƒ 800,- per ton voor produkt C.

   De grondstof voor de bereiding van deze produkten kan slechts geleverd en verwerkt worden in gehele eenheden en is verkrijgbaar in twee kwaliteiten. Bij verwerking van de kwaliteit genaamd Sup bedragen de variabele totaalkosten van verwerking van één snelheid ƒ 680.000,- en bij verwerking van de kwaliteit genaamd Inf ƒ 740.000,- per eenheid.

   De fabriek kan maximaal 10 eenheden per kwartaal verwerken. Het aantal tonnen produkt A, B en C, dat tegelijkertijd verkregen wordt bij verwerking van één eenheid grondstof kan per grondstof afgelezen worden uit onderstaand staatje.

Grondstof / Eindprodukt	Sup	Inf
A	130	180
B	420	180
C	380	580

   Ingevolge contracten moet de fabrikant gedurende het komende kwartaal tenminste 2520 ton produkt B en 3306 ton produkt C afleveren, maar hij kan van deze produkten ongelimiteerde hoeveelheden verkopen. Van produkt A is wettelijk geregeld, dat niet meer dan 1404 ton gemaakt mag worden. Er lopen voor dit produkt echter geen contracten, dus de fabrikant mag hiervan minder maken, als dat voordeliger is. Hij kan echter alles verkopen.

Gevraagd wordt grafisch te bepalen hoeveel eenheden van de grondstoffen Sup en Inf de fabrikant moet verwerken, zodat zijn winst gemaximaliseerd is, nadat aan de capaciteits- en markteisen voldaan is.

5. Het aantal schepen dat per dag bij een haven aankomt, is Poissonverdeeld met een gemiddelde van 18. Elk aankomend schip moet de haven worden binnengeloodst door een sleepboot. De tijd die de sleepboot hiervoor nodig heeft, is negatief exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 2 uur. In deze tijd is ook het terugvaren naar de ligplaats van de sleepboot begrepen. Er staan permanent twee sleepboten ter beschikking. De schepen worden in volgorde van binnenkomst bediend.

   Gevraagd wordt nu:

   1a) Wat is de bezettingsgraad van de sleepboten?

   1b) Hoe groot is de gemiddelde wachttijd van de aankomende schepen?

   Men vindt de wachttijd te lang en overweegt daarom uitbreiding van het aantal sleepboten.

   2) Hoe groot zou het aantal sleepboten minstens moeten zijn om te bereiken dat de gemiddelde wachttijd van de schepen minder is dan een half uur?

   In plaats van de uitbreiding van de vloot van sleepboten kan de wachttijd ook worden verminderd door de sleepboten van sterkere machines te voorzien, zodat de gemiddelde tijd voor het binnenloodsen van het schip wordt gereduceerd tot 80 minuten (de verdeling blijft negatief exponentieel).

   3a) Wat is nu de bezettingsgraad van de sleepboten?

   3b) Wat is nu de gemiddelde wachttijd van de schepen?

   4) Kunt U, naar aanleiding van Uw antwoorden op de vragen 2 en 3, een opmerking over het resultaat van de twee besproken scorten maatregelen maken?

U kunt gebruik maken van de volgende formule:

(1) $$\frac{\mathcal{E}\,\underline{w}}{\mathcal{E}\,\underline{b}} = \frac{(\rho m)^m}{m!m\,(1-\rho)^2}\,P_0, \text{ waarbij}$$

(2) $$P_0 = \frac{1}{\dfrac{(\rho m)^m}{m!\,(1-\rho)} + \sum\limits_{n=0}^{m-1} \dfrac{(\rho m)^n}{n!}} .$$

Hierin betekent:

ρ ... de bezettingsgraad

m ... het aantal loketten

$\underline{b}$ ... de bedieningstijd van een klant

$\underline{w}$ ... de wachttijd van een klant

P_0 ... de kans op 0 klanten in het systeem.

1967

Tijdsduur 3 uur.

1. Van een project is nagegaan welke activiteiten moeten worden uitgevoerd en hoe de relatie is tussen de opeenvolgende activiteiten. Het resultaat van de eerste fase van dit onderzoek is vastgelegd in onderstaande matrix.

i ↓ \ n →	a	b	c	d	e	f	g	h	j	k	l	m	tijdsduur in weken
a	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	10
b	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	10
c	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	30
d	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	10
e	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	40
f	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	10
g	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	10
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	20
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10
k	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	60
l	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	30

In totaal zijn er 12 activiteiten a, b, ..., m.
In de matrix is met $x_{in} = 1$ aangegeven, dat activiteit n slechts kan beginnen indien activiteit i klaar is.

Vraag a: Teken het netwerk dat bovengenoemd project weergeeft en bereken het kritieke pad.

Na deze berekening blijkt dat de totale projectduur te lang is.
Men wil deze tijd verkorten. Hiervoor gelden de volgende regels:

1. De tijdsduur van een activiteit kan maximaal tot de helft verkort worden.

2. Het verkorten van de tijdsduur van een activiteit brengt voor elke week tijdsverkorting extra kosten ten bedrage van ƒ 1000,- met zich mee.
3. Men wil maximaal ƒ 20.000,- extra besteden voor verkorting van de totale projectduur.
4. De activiteiten a en l kunnen niet verkort worden.

Vraag b: Met hoeveel weken kan de totale projectduur maximaal verkort worden onder de voorwaarden zoals genoemd onder punten a, b, c en d?
Welke activiteiten worden dan verkort en met hoeveel weken?
Hoe loopt nu het kritieke pad?

2. Een fabrikant mengt drie vloeistoffen, gemerkt A, B en C tot een ander produkt, dat hij verder moet verwerken. De eigenschappen der grondstoffen A, B en C laten toe, dat er meerdere mengsels gemaakt kunnen worden, waarvan de eigenschappen geschikt zijn voor verdere verwerking. Uit alle mogelijkheden wil hij nu die kiezen, die hem het minste kost. Produkt A en B zijn onbeperkt leverbaar tegen de respectievelijke prijzen van ƒ 2,- en ƒ 1,- per liter. Van produkt C heeft hij nog een flinke voorraad (kan onbeperkt verondersteld worden). Hij heeft hiervoor betaald ƒ 3,- per liter.
Hij kan er slechts twee dingen mee doen:
1) mengen met de vloeistoffen A en B
of
2) verkopen tegen een prijs van ƒ 1,50 per liter.

Eigenschappen der vloeistoffen:

vloeistof	soortelijk gewicht	vitapunt	oordlengte
A	1,2	8°	25 cm
B	1,1	6°	64 cm
C	1,15	2°	36 cm
Mengsel	Hiervoor is geen eis gesteld	$\geq 6^\circ$	≤ 49 cm

Vitapunt is een eigenschap, die zich lineair op gewichtbasis laat mengen. Lineair mengen op gewichtsbasis betekent dat indien men 1 kg van produkt A mengt met 2 kg van produkt C men een eindprodukt verkrijgt met een vitapunt van $\frac{1\times 8+2\times 2}{3} = 4^{o}$. De vierkantswortel uit het aantal cm oordlengte mengt lineair op volumebasis.

<u>Vraag a</u>: Na menging bevinden zich de grondstoffen in bepaalde volumepercentages in het eindprodukt. Schrijf de restrikties op waaraan deze percentages moeten voldoen.

<u>Vraag b</u>: Hoeveel gaat het eindprodukt de fabrikant per liter kosten? (Als functie van de onbekende percentages.)

<u>Vraag c</u>: Als men de onder b) gevonden functie wil minimaliseren, waarbij de onbekenden aan de onder a) gestelde restrikties moeten voldoen, bereken dan die percentages, algebraïsch of grafisch.

3. Beantwoord de volgende korte vragen: *)

a. Bij het aanvullen van een voorraad grondstoffen wordt een optimaal bestelsysteem gebruikt waarbij een hoeveelheid Q besteld wordt indien de ekonomische voorraad (= hoeveelheid in voorraad + hoeveelheid in bestelling) onder het bestelniveau B gedaald is. De levertijd ter verkrijging van de hoeveelheid Q is constant en gelijk aan L tijdseenheden. De vraag per tijdseenheid is een stochastische grootheid met gemiddelde μ en standaardafwijking σ.
Voorts wordt de kans op buiten-voorraad raken per bestelling α genoemd. De kosten van het buiten voorraad raken bedragen R, de voorraadkosten per eenheid produkt per tijdseenheid r en de kosten van het plaatsen van een bestelling F.
Geef met een * in de tabel voor onderstaande gevallen aan of de grootheid y toeneemt, afneemt of gelijk blijft bij toenemende x teneinde het nieuwe optimum te bereiken.

---

*) De beantwoording van vraag 3 dient te geschieden op de copie welke bij dit examen is gevoegd.

x	y	y neemt toe	y neemt af	y blijft gelijk
F	Q			
r	Q			
L	Q			
L	B			
α	B			
R	B			
α	Q			
R	Q			

b. In de wachttijdtheorie komt de volgende formule voor:

$$\overline{w}/\overline{t} = \frac{\rho}{1 - \rho} .$$

Beantwoord onderstaande vier vragen door de desbetreffende vakjes aan te strepen. Desgewenst kunt U Uw antwoord toelichten op de achterzijde van de copie, echter met maximaal 20 woorden.

1. De formule geldt voor wachttijdproblemen

met één loket
met oneindig veel loketten
met een willekeurig aantal loketten

2. De formule geldt voor wachttijdproblemen

met normaal verdeelde bedieningstijd
met exponentieel verdeelde bedieningstijd
met willekeurig verdeelde bedieningstijd

3. Indien men klanten met kortere bedieningstijden hogere prioriteit geeft, dan geldt de bovenstaande formule

altijd
nooit
in bepaalde situaties

4. Indien de verdelingen van de tussenaankomst-intervallen en van de bedieningstijden van hetzelfde type zijn, dan geldt de formule

altijd
nooit
in bepaalde situaties

1967 (vervolg)

Tijdsduur $2\frac{1}{2}$ uur.

4. In een fabriek ontstaat dagelijks een hoeveelheid bijprodukt dat in containers à 1 ton wordt opgevangen en 's nachts afgevoerd, zodanig dat de containers de volgende dag opnieuw kunnen worden gebruikt.
De hoeveelheid bijprodukt is van dag tot dag verschillend; de dagproduktie ervan kan worden beschreven door een negatief exponentiële verdeling met gemiddelde $\frac{1}{a}$ ton.

Het beschikken over een container kost b geldeenheden per dag.

Op dagen waarop meer bijprodukt ontstaat dan in de aanwezige containers kan worden verpakt, gaat het meerdere verloren. Het bedrijf leidt hierdoor een schade van s voor iedere ton bijprodukt die verloren gaat.

Vraag a: Bepaal het aantal containers c_0 dat - rekening houdende met de twee genoemde kostensoorten - voor het bedrijf het gunstigst is. (Behandel het vraagstuk continu.)

Vraag b: Gegeven is $a = \frac{1}{100}$, $b = 3$ en $s = 30$:

1. Bereken dan het optimale aantal containers c_0;
2. Wat is de waarschijnlijkheid dat, indien het bedrijf over c_0 containers beschikt, op een willekeurige dag bijprodukt verloren gaat?
3. Hoeveel bijprodukt gaat er gemiddeld per dag verloren?

5. In een conservenfabriek worden dagelijks vrachtauto's volgeladen, die groente in blik naar de inkoopcentrales vervoeren. Uit een statistisch onderzoek is gebleken dat met goede benadering het aantal aankomende lege vrachtauto's Poisson verdeeld is. De aankomsten vinden iedere dag gedurende zes achtereenvolgende uren plaats. De verwachting van het aantal aankomsten per uur bedraagt 5,0. Er kunnen slechts twee vrachtauto's gelijktijdig ingeladen worden. De tijd nodig

voor het inladen is constant en bedraagt een half uur. Na de zes uren waarin aankomsten plaatsvinden wordt de dan nog aanwezige wachtrij verder afgewerkt.

Men wil met behulp van een simulatie nagaan hoeveel parkeerruimte er voor wachtende vrachtauto's moet worden gereserveerd. In het bijzonder is men geïnteresseerd in het maximale aantal gelijktijdig aanwezige wachtenden dat per dag in de simulatie optreedt. Er behoeft niet aangegeven te worden hoe de eventueel benodigde aselecte trekkingen uit kansverdelingen met behulp van aselecte getallen verkregen worden.

Vraag a: Kies de tijdstippen waarop U het systeem wilt beschouwen en voer een notatie in voor alle relevante grootheden. Specificeer de begintoestand.

Vraag b: Geef met behulp van rekeninstructies of een blokschema aan hoe de simulatie verder uitgevoerd moet worden.

Veronderstel in afwijking van het voorafgaande het te verwachten aantal aankomsten $\lambda(t)$ in het t^e uur gedurende dat uur constant mag worden genomen, maar van uur tot uur als volgt verandert:

t =	1	2	3	4	5	6
$\lambda(t)$ =	4,5	5,0	5,5	5,5	5,0	4,5

Vraag c: Hoe zou U in dit geval het aankomstenpatroon simuleren? (In feite wordt hier een lineair met de tijd veranderende λ benaderd door een trap functie met een staplengte van één uur. Deze benadering zal het werkelijke aankomstenpatroon willekeurig dicht benaderen indien de staplengte voldoende klein gekozen wordt.)

1968

Tijdsduur 3 uur.

1. In een fabriek wordt één van de produkten gemaakt op een machine die alleen voor dit bepaalde produkt wordt gebruikt. Draait de machine, dan worden er p stuks van het produkt per dag gemaakt. De vraag, waaraan altijd zonder uitstel moet worden voldaan, bedraagt v stuks per dag, $v < p$. Men maakt het produkt in series van dezelfde lengte. Begint men een nieuwe serie, dan vergt de voorbereiding a dagen gedurende welke periode er niets geproduceerd wordt, terwijl de kosten s per dag bedragen. De voorraadkosten zijn evenredig met het aantal eenheden in voorraad en met het aantal dagen dat een eenheid ligt opgeslagen; de evenredigheidsconstante is c. Hoe lang moet men de produktseries maken, wanneer men de som van voorraadkosten en aanloopkosten wil minimaliseren? Teken ter verduidelijking een grafiek van het verloop van de voorraad.

2. Door een landbouwbedrijf wordt jaarlijks 6000 ha tarwe verbouwd. Op 1 ha staat 5 ton tarwe. De tarwe wordt geoogst met behulp van maaidorsers, waarvan er een aantal x voor de tarweoogst ter beschikking staat. Afhankelijk van de weersomstandigheden bevat de tarwe op het veld een bepaald vochtgehalte gegeven in %. De optredende vochtgehaltes zijn verdeeld in drie vochtklassen gegeven in de volgende tabel:

Vochtklasse	% vocht	maaidorssnelheid in ton/uur per maaidorser
1	< 20 %	5,0
2	20-24%	4,5
3	> 24 %	-

Tarwe van vochtklasse 3 is te vochtig en wordt niet gemaaid. Tarwe van vochtklasse 2 kan wel gemaaid worden doch moet in de drooginstallatie worden ingedroogd tot tarwe van vochtklasse 1. Tarwe van vochtklasse 1 kan na het maaien en dorsen direkt worden afgevoerd.

De maaidorssnelheid bij tarwe van vochtklasse 1, respectievelijk 2, is in de tabel gegeven. De droogcapaciteit van de drooginstallatie bedraagt y ton/uur, d.w.z. per uur kan y ton tarwe van vochtklasse 2 tot vochtklasse 1 worden ingedroogd. Voor het geval, dat de drooginstallatie de aanvoer van vochtklasse 2 niet aan kan, wordt deze opgeslagen in de opslagruimte. De inhoud van de opslagruimte bedraagt z ton. Tot vochtklasse 1 ingedroogde tarwe wordt direkt afgevoerd.

De vochtklasse van de op het land staande tarwe hangt uitsluitend af van de vochtklasse op de vorige dag. Per dag behoort alle op het land staande tarwe tot dezelfde vochtklasse. De vochtklasse wijzigt zich van dag tot dag door middel van de volgende kansverdelingen:
Is de tarwe op een dag van vochtklasse 1 dan is de kans op vochtklasse 1, 2 en 3 op de volgende dag respectievelijk gegeven door de getallen 0,6, 0,1 en 0,3. Bij vochtklasse 2 op een dag bedragen de kansen op de vochtklassen 1, 2 en 3 op de volgende dag respectievelijk 0,25, 0,5 en 0,25 en bij vochtklasse 3 zijn deze kansen respectievelijk 0,05, 0,25 en 0,7.

Per etmaal wordt gedurende 10 uur geoogst, behalve wanneer de op het land staande tarwe tot vochtklasse 3 behoort. De aanvoer van tarwe van vochtklasse 2 bij de droger is gelijkmatig over deze 10 uur gespreid. Raakt de opslagruimte vol tijdens de aanvoer dan wordt een zodanig gekozen fractie van de maaidorsers stilgezet dat de opslagruimte precies vol blijft gedurende het resterende deel van de 10 uur. Van de resterende 14 uur van het etmaal wordt nog gedurende 10 uur verder gedroogd. Op zondag staan zowel de oogst als de droger stil.

Bij dit bedrijf staat men voor het probleem het aantal maaidorsers x, de droogcapaciteit y en de inhoud van de opslagruimte z zodanig te bepalen, dat de som van de jaarlijkse exploitatiekosten en de gemiddelde jaarlijkse verliezen ten gevolge van het niet gereed komen van de oogst minimaal zijn. De duur van de oogstperiode is constant en bedraagt een gegeven aantal dagen. Met behulp van een simulatie wil men nagaan hoeveel tarwe er aan het einde van de oogstperiode nog op het land staat.

Vraag 1: Geef op overzichtelijke wijze aan hoe U deze simulatie wilt uitvoeren.

Vraag 2: Voer deze simulatie gedurende één week uit met behulp van bijgevoegde tabel van aselecte getallen. Stel dat de oogst begint op een vrijdag met een lege opslagruimte. Verder is gegeven dat op deze vrijdag de tarwe vochtklasse 2 heeft, terwijl x = 80, y = 40 ton/uur, z = 2000 ton.

3. Voor de automatisering van een procesgedeelte in een chemische fabriek is bij de N.V. Electronica een Special Purpose computer besteld. De computer bestaat uit een mechanisch en een electronisch gedeelte. Uit ervaring weet men dat een dergelijk project de volgende aktiviteiten bevat:

1) Voordat met het ontwerp kan worden begonnen moet met de klant overeenstemming zijn bereikt over het rapport van eisen. Dit neemt 4 weken in beslag.
2) Het ontwerp van het mechanische gedeelte en van het electronische gedeelte vindt in aparte ontwerpgroepen plaats en kan onafhankelijk van elkaar worden uitgevoerd. Geschatte ontwerptijd: mechanisch gedeelte 3 weken, electronisch gedeelte 10 weken.
3) Nadat het ontwerp voltooid is kan de werkvoorbereiding, waarvan de tijdsduur 2 weken is, starten. Gelijktijdig met de werkvoorbereiding kunnen zowel de electronische- (levertijd 4 weken) als de mechanische onderdelen (levertijd 6 weken) besteld worden.
4) Het mechanische gedeelte kan gefabriceerd worden nadat de werkvoorbereiding beëindigd is en na ontvangst der mechanische onderdelen. De benodigde fabricagetijd wordt geschat op 5 weken.
5) Na de werkvoorbereiding is nog een aanloopperiode van één week nodig voor de fabricage van het electronische gedeelte.
De fabricage van het electronische gedeelte kan beginnen nadat de bovengenoemde aanloopperiode beëindigd is en na ontvangst der electronische onderdelen; de duur van de fabricage is 2 weken.
6) Indien het mechanische en het electronische gedeelte gereed zijn, kan de samenbouw plaatsvinden (3 weken).
7) De eindcontrole en de opstelling van het meetrapport duurt 4 weken.

Door de N.V. Electronica wordt een levertijd opgegeven gelijk aan de tijdsduur van het kritieke pad. Het chemisch bedrijf eist echter een levertijd van 25 weken. In onderstaande tabel zijn de aktiviteiten aangegeven, die voor verkorting in aanmerking komen. Tevens zijn de hiervoor benodigde extra kosten vermeld.

mechanische werkplaats	ƒ 40,- per week
leveranciers	ƒ 50,- per week per leverancier
ontwerpgroepen	ƒ 75,- per week per ontwerpgroep.

Een aktiviteit kan met een geheel aantal weken worden ingekort tot maximaal de helft van het oorspronkelijke aantal weken.

Gevraagd:

1. Wat zijn de minimale extra kosten, waarmede de gevraagde levertijd gerealiseerd kan worden?
2. Welke aktiviteiten moet hierbij worden ingekort en hoeveel?

1968 (vervolg)

Tijdsduur $2\frac{1}{2}$ uur.

4. Een konstrukteur moet een voorstel doen betreffende de dikte van de isolatielaag van een gebouw, waarvan de levensduur wordt gesteld op 21 jaar. Het te isoleren oppervlak is 300 m^2; de kosten van de isolatie bedragen ƒ 2,- per m^2 en per cm dikte.
Naarmate de isolerende laag dikker is nemen de brandstofkosten af. De brandstofkosten zijn evenredig met de warmteverliezen en deze zijn omgekeerd evenredig met de dikte van de isolatielaag.

   Bij een laag van 1 cm dikte zijn de warmteverliezen 5 kcal/m^2 per uur en per graad temperatuurverschil binnen en buiten. De brandstofkosten zijn ƒ 0,50 per 10^4 kcal.
De konstrukteur moet de vraag beantwoorden bij welke dikte de som van isolatiekosten en brandstofkosten minimaal is.
Het isolatiemateriaal is niet verkrijgbaar in dikten van minder dan 2 cm. Voor het aanbrengen van een laag van meer dan 10 cm dikte ontbreekt de ruimte en de bouwheer kan maximaal ƒ 5000,- uittrekken voor de kosten van de isolatie.
De rentevoet is 8%.
Gedurende 1 jaar wordt gerekend op 5000 uren waarin de temperatuur buiten lager is dan binnen; het gemiddelde verschil in temperatuur gedurende deze uren is 10° C.

   Gevraagd wordt:
   a) Bereken de optimale dikte van de isolatielaag.
   b) Teken een grafiek van de relevante kosten voor verschillende dikten van de laag.

5. Een wandelaar bereikt een bushalte. Er is geen dienstregeling aanwezig, maar wel zijn de routes gegeven en de rijfrequenties.
Het blijkt hem, dat hij om zijn doel te bereiken verder gebruik kan maken van bus A, die om het kwartier rijdt, of van bus B, die om de 35 minuten zal passeren.

Bus A maakt echter een grote omweg, waardoor hij schat, dat deze bus wel een kwartier langer over de af te leggen weg zal doen dan bus B.

Vraag A: Stel bus B komt na drie minuten wachten. Hoe groot is de kans dat er voor die tijd een bus A zal arriveren?

Vraag B: Hoe groot is de kans, dat de eerste bus, die aankomt, een bus B is, terwijl hij hier langer dan vijf minuten op zal moeten wachten?

Vraag C: Als de wandelaar besluit de eerst arriverende bus te nemen, wat is dan zijn te verwachten verblijftijd bij de halte?

Vraag D: De wandelaar wil zo vlug mogelijk thuis komen. Als de eerste bus, die aankomt, nu een bus A is, kan hij dan niet beter op bus B wachten, als hij al vrij lang heeft moeten wachten? Zo ja, hoe lang moet hij op een bus gewacht hebben, om te beslissen in ieder geval niet bus A te nemen?

Oplossingen 1965

Vraagstuk 1:

Stel: k = aantal koeien
v = " ha. voederbieten
w = " " weide
h = " " hooiland
a = " " aardappelen
r = " " rogge

De variabele "vee" geeft aan of er veeteelt bedreven wordt (vee = 1) of niet (vee = 0).

1) De voorwaarden worden:

	k	a	r	v	w	h	vee			toelichting:
(1)	1					-3		=	0	hooi
(2)	1				-2,5			=	0	weide
(3)				-30				=	0	voederbieten
(4)		1	1	1				$\leqq$	14	bouwland
(5)					1	1		$\leqq$	20	grasland
(6)		1	1	1	1	1		$\leqq$	22	totaal
(7)	12		75				50	$\leqq$	600	november
(8)	12	55		20			50	$\leqq$	600	april
(9)	7	75		120			50	$\leqq$	600	mei
(10)	7					60	50	$\leqq$	600	juni/juli
(11)	7		75				50	$\leqq$	600	juli/aug.
(12)	7	350		150			50	$\leqq$	600	october
(13)		2	-1	-1				$\leqq$	0	vruchtwisseling
(14)		1						$\geqq$	0	
(15)			1					$\geqq$	0	
(16)				1				$\geqq$	0	
(17)					1			$\geqq$	0	
(18)						1		$\geqq$	0	
(19)	1							$\geqq$	0	
(20)							1	=	0 k = 0	
								=	1 k > 0	
	1200	2000	600	-200	-250	-250				criteriumfunctie

2) Substitueer de gelijkheden (1) t/m (3) in de ongelijkheden en de criteriumfunctie:

	a	r	k	vee			
(4)	1	1	1/30		$\leqq$	14	
(5)			22/30		$\leqq$	20	
(6)	1	1	23/30		$\leqq$	22	
(7)		75	12	50	$\leqq$	600	
(8)	55		12 2/3	50	$\leqq$	600	
(9)	75		11	50	$\leqq$	600	
(10)			27	50	$\leqq$	600	
(11)		75	7	50	$\leqq$	600	
(12)	350		12	50	$\leqq$	600	
(13)	2	-1	-1/30		$\leqq$	0	
(14)	1				$\geqq$	0	
(15)		1			$\geqq$	0	
(19)			1		$\geqq$	0	
(20)				1	$\left\{\begin{array}{l} = \\ = \end{array}\right.$	0 1	k = 0 k > 0
	2000	600	1010				

3) Vereenvoudigingen:

(5) vervalt t.o.v. (10)
(11) " " (7)
(9) " " (12)

De matrix wordt:

	a	r	k	vee		
(4)	1	1	1/30		$\leqq$	14
(6)	1	1	23/30		$\leqq$	22
(7)		75	12	50	$\leqq$	600
(8)	55		12 2/3	50	$\leqq$	600
(10)			27	50	$\leqq$	600
(12)	350		12	50	$\leqq$	600
(13)	2	-1	-1/30		$\leqq$	0

(14)	1				$\geqq$	0	
(15)		1			$\geqq$	0	
(19)			1		$\geqq$	0	
(20)				1	=	0	k = 0
					=	1	k > 0
	2000	600	1010				

4) Het geval k = 0, vee = 0 geeft de volgende matrix:

	a	r		
(4)	1	1	$\leqq$	14
(6)	1	1	$\leqq$	22
(7)		75	$\leqq$	600
(8)	55		$\leqq$	600
(12)	350		$\leqq$	600
(13)	2	-1	$\leqq$	0
(14)	1		$\geqq$	0
(15)		1	$\geqq$	0
	2000	600		

Verdere vereenvoudigingen:

(8) vervalt t.o.v. (12)
(6) " " (4)

Er blijft over:

	a	r		
(4)	1	1	$\leqq$	14
(7)		75	$\leqq$	600
(12)	350		$\leqq$	600
(13)	2	-1	$\leqq$	0
(14)	1		$\geqq$	0
(15)		1	$\geqq$	0
	2000	600		

Uit (12) en uit (17) volgen respectievelijk:

$$a_{max} = \frac{600}{350} = \frac{12}{7}$$

$$r_{max} = \frac{600}{75} = 8$$

Deze waarden van a en z voldoen aan (4), (13), (14) en (15) en maximaliseren de criteriumfunctie.

Opbrengst = 2000 . $\frac{12}{7}$ + 600 . 8 = f 8228.57 per jaar.

5) Het geval vee = 1, k > 0.

	a	r	k		
(4)	30	30	1	$\leqq$	420
(6)	30	30	23	$\leqq$	660
(7)		75	12	$\leqq$	550
(8)	55		12 2/3	$\leqq$	550
(10)			27	$\leqq$	550
(12)	350		12	$\leqq$	550
(13)	60	-30	-1	$\leqq$	0
(14)	1			$\geqq$	0
(15)		1		$\geqq$	0
(19)			1	>	0
	2000	600	1010		

Vraagstuk 2.

Noem: kosten aanvullingsorder c_0
inkoopprijs per stuk c_1
kosten in voorraad houden per stuk, per jaar c_2
vraag per week $\underline{\omega}$
gemiddelde vraag per week $E\underline{\omega}$

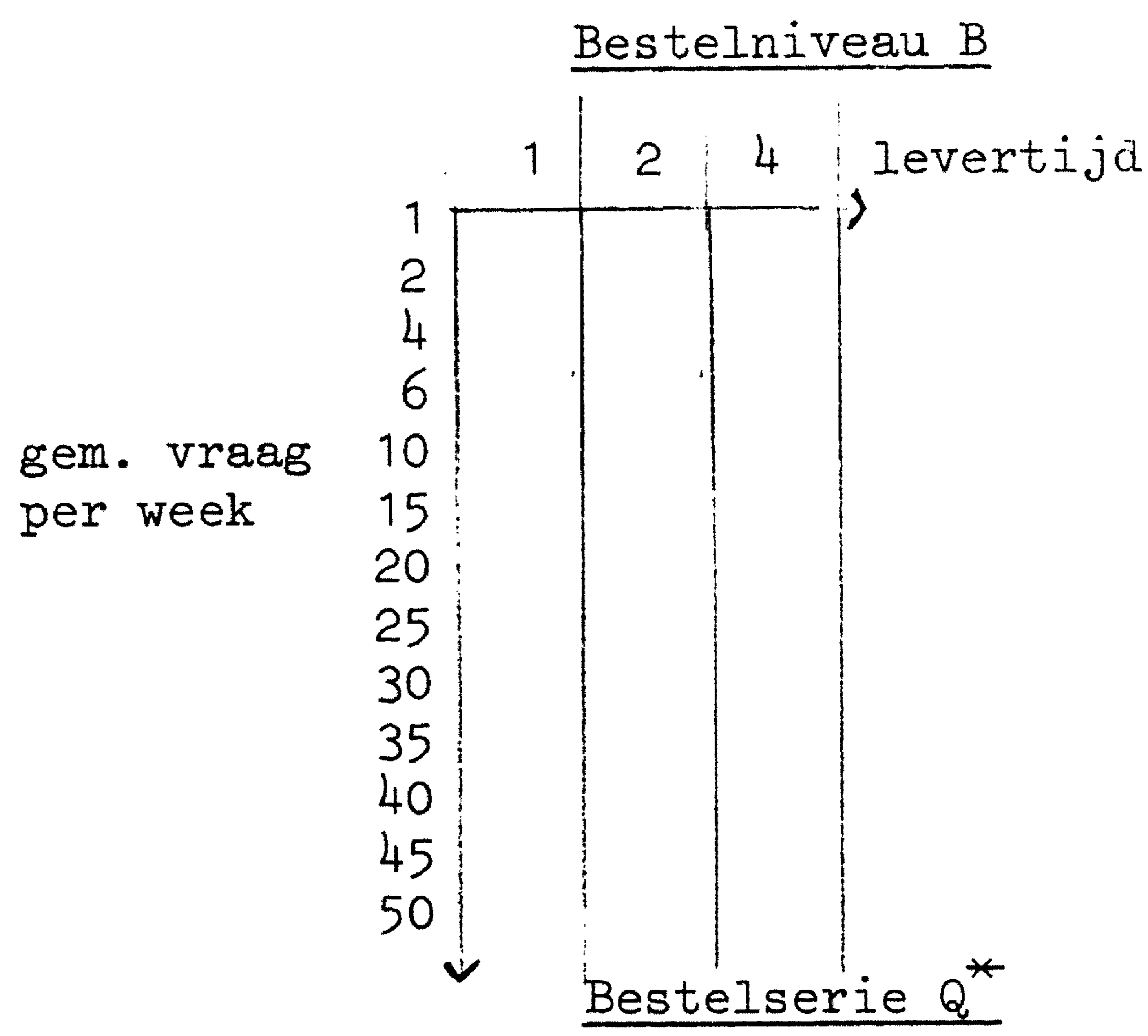
1. $Q^{*} = \sqrt{\dfrac{2c_0 \cdot 50E\underline{\omega}}{c_2}} = \sqrt{\dfrac{2.50.50.4}{2}} = \underline{\underline{100}}$

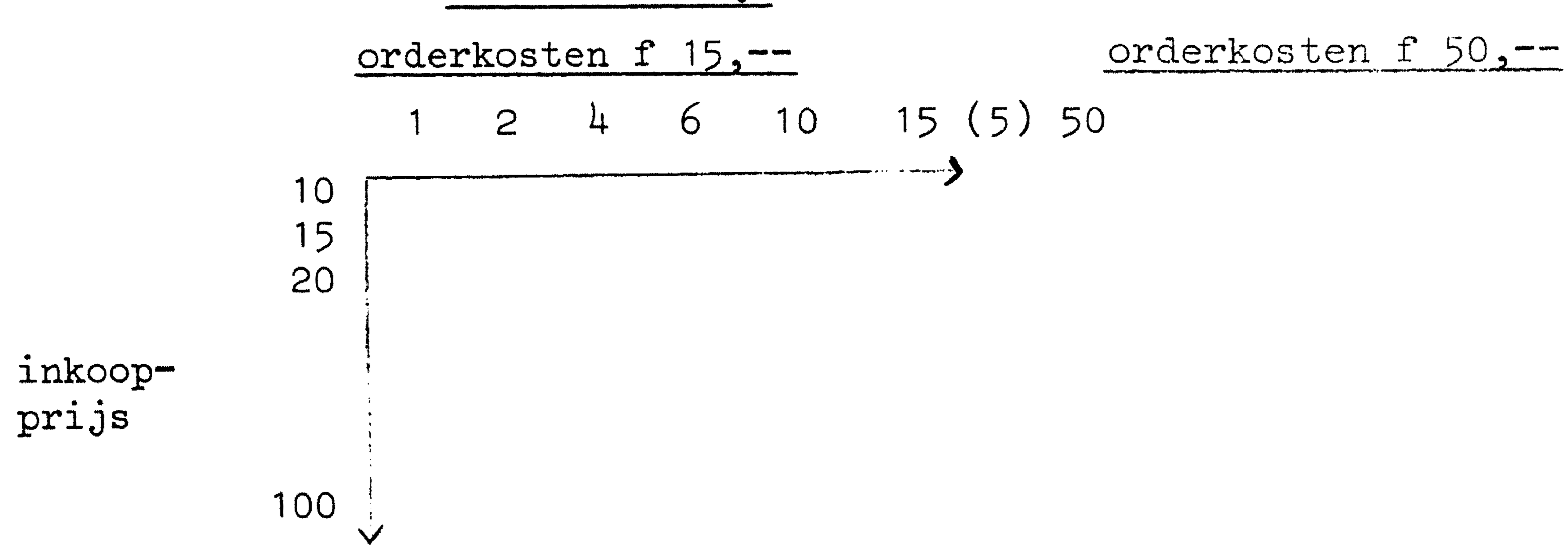
2. Vraag in 4 weken Poisson-verdeeld met parameter $4 \times 4 = 16$.
   $P[\underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2 + \underline{\omega}_3 + \underline{\omega}_4 > B] = 0{,}01$ voor $B = \underline{\underline{26}}$ (geschat uit nomogram).

3. Gemiddelde voorraadhoogte: $\frac{1}{2}Q^{*} + (B - 4E\underline{\omega}) = 50 + 10 = \underline{\underline{60}}$

   Voorraadkosten per jaar gemiddeld: $2 \times 60 = \underline{\underline{120}}$.

4.





Opmerking. De betrekkelijk willekeurige indeling van de assen kan verbeterd worden door te eisen dat de absolute fout niet meer mag bedragen dan een bepaald bedrag, of door rekening te houden met veel voorkomende combinaties van de variabelen en in die gebieden een fijner indeling te gebruiken.

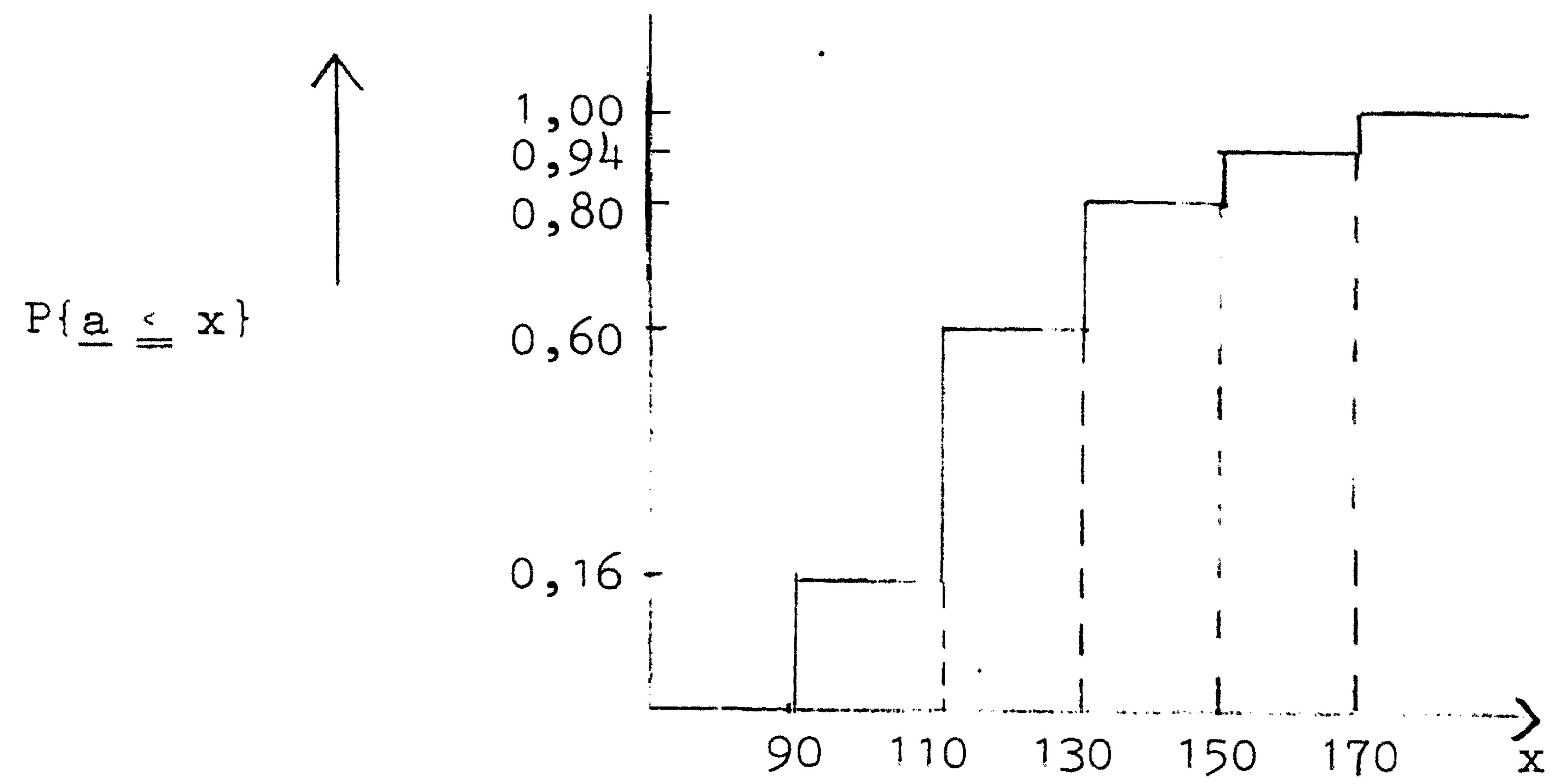
Vraagstuk 3.

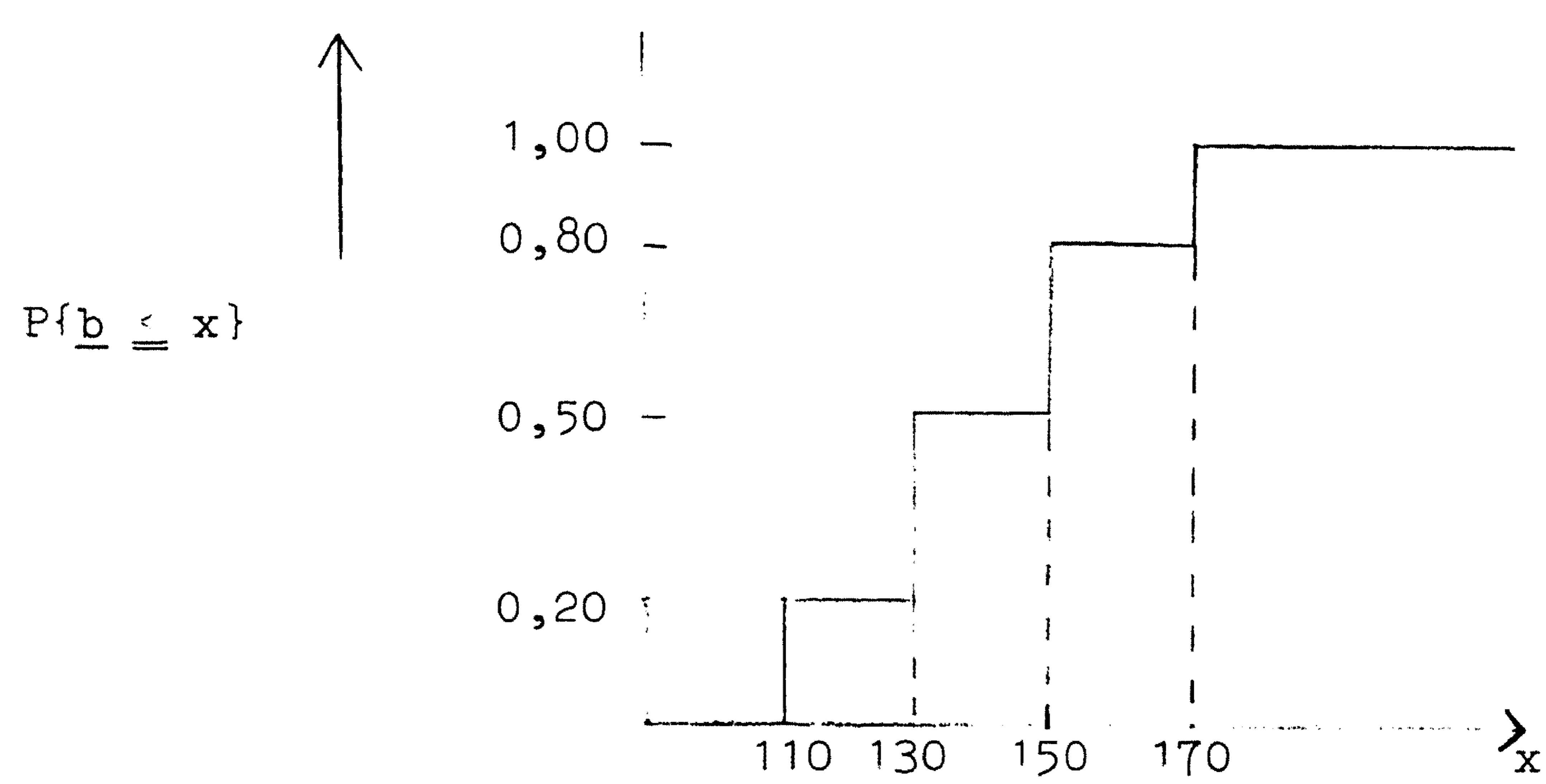
Stel: $\underline{a}$ = dagproduktie van proces A bij voldoende opslagruimte

$\underline{b}$ = " " " B bij voldoende voorraad.

(Uitgezonderd op zondag, dan produktie B = 0.)

De verdelingsfunkties van $\underline{a}$ en $\underline{b}$ zijn als volgt:





a = trekking uit de verdeling van $\underline{a}$

b = " " " " " $\underline{b}$

t = inhoud tank begin van de dag

T = inhoud volle tank

na = aantal malen dat A produkt moet minderen

nb = " " " B " " "

pa = totale produktieverlies van A

pb = " " " B

1. Simulatie schema:

(1) Trek uit de verdelingen van $\underline{a}$ en $\underline{b}$; $d := t + a - b$.

(2) Als: $d > T$ dan $na := na + 1$; $pa := pa + d - T$; $t := T$;

$T \geqq d \geqq 0$ dan $t := d$;

$0 > d$ dan $nb := nb + 1$; $pb := pb - d$; $t := 0$.

2. Beginsituatie:

Alleen over maandag valt iets te zeggen. Met kans groter dan 0,84 is de tank vol. Neem dus maandag; $t = T$; $na = nb = pa = pb = 0$.

3. Verloop van de simulatie over 4 weken:

dag	aselect getal	aselect getal	a	b	t	d	na	nb	pa	pb
							0	0	0	0
1	34	51	110	150	100	60				
2	20	23	110	130	60	40				
3	76	68	130	150	40	20				
4	80	82	150	170	20	0				
5	42	25	110	130	0	-20		1		20
6	26	46	110	130	0	-20		2		40
7	68	99	130	0	0	130	1		30	
8	87	31	150	130	100	120	2		50	
9	06	14	90	110	100	80				
10	38	47	110	130	80	60				
11	89	13	150	110	60	100				
12	15	51	90	150	100	40				
13	70	02	130	110	40	60				
14	57	77	110	0	60	170	3		120	
15	51	07	110	110	100	100				
16	89	21	150	130	100	120	4		140	
17	24	31	110	130	100	80				
18	00	33	90	130	80	40				
19	59	56	110	150	40	0				
20	57	34	110	130	0	-20		3		60
21	72	97	130	0	0	130	5		170	
22	08	94	90	170	100	20				
23	00	78	90	150	20	-40		4		100
24	89	38	150	130	0	20				
25	52	58	110	150	20	-20		5		120
26	16	59	110	150	0	-40		6		160
27	36	13	110	110	0	0				
28	10	33	90	0	0	90				

4. Verloop van het frequentiequotiënt van het aantal dagen met produktieverlies B.

0	0,25	0,13	0,14
0	0,22	0,13	0,17
0	0,20	0,12	0,16
0	0,18	0,11	0,20
0,20	0,17	0,11	0,23
0,33	0,15	0,15	0,22
0,28	0,14	0,14	0,21

Dit slingert nog te sterk, dus doorgaan met simuleren.

Vraagstuk 4.

Een wagen met snelheid v neemt enerzijds

$$1 + bv^2$$

in beslag, terwijl N wagens per uur anderzijds $\frac{1}{N}$ uur tussen twee wagens geeft, ofwel een afstand $\frac{v}{N}$.

Dus:

$$\frac{v}{N} = 1 + bv^2$$

of

$$N = \frac{v}{1 + bv^2}$$

De optimale snelheid v^* volgt uit

$$\frac{dN}{dv} = 0$$

of

$$1 + bv^{*2} - 2bv^{*2} = 0 \rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{b}}.$$

Uit de gegevens blijkt dat $b = 10^{-5}$ uur^2/km.

Dus $$v^* = \sqrt{4.10^{-3}.10^5} = 20 \text{ km/uur}.$$

Vraagstuk 5.

De keuze van de gewenste capaciteit van de bioscoop als ekonomisch vraagstuk, dus als vraagstuk van kosten en opbrengsten, wordt een probleem door het feit dat de vraag (het aantal personen dat een bepaalde voorstelling wenst bij te wonen), een stochastische grootheid is. Door het variabele karakter van de vraag zal de bioscoop telkens of te weinig of te veel plaatsen hebben. Dit betekent dat er telkens hetzij overbezettingsverliezen, hetzij onderbezettingsverliezen zullen optreden. De onderbezettingsverliezen berusten daarop dat plaatsen niet worden verkocht terwijl toch de vaste kosten daarvoor zijn gemaakt. Overbezettingsverliezen ontstaan uit winstderving: bij de gegeven vraag hadden plaatsen kunnen worden verkocht die nu niet verkocht kunnen worden. Een bepaald percentage gaat voor deze bioscoop definitief verloren. De optimale capaciteit is die waarbij de verwachting van de som van onder- en overbezettingsverliezen zo klein mogelijk is.

Er is ook een andere zienswijze mogelijk, namelijk het streven naar een zo hoog mogelijke rentabiliteit van het geïnvesteerde kapitaal. Dit laatste zal over het algemeen tot de keuze van een kleinere capaciteit leiden dan de eerstgenoemde aanpak.

Om het vraagstuk in concreto op te lossen moet een markt-onderzoek worden gehouden naar de verdeling van de vraag in de tijd en moeten de diverse kostenfactoren worden geschat. De optimale capaciteit kan dan worden gevonden door de verwachtingen voor allerlei kosten uit te rekenen, en, bijvoorbeeld grafisch, het optimum te bepalen.

Een elegantere oplossing is het werken met een wiskundig model waarbij (voor het geval van minimalisering van verliezen) het volgende resultaat wordt verkregen:

$$q = \frac{c}{e}$$

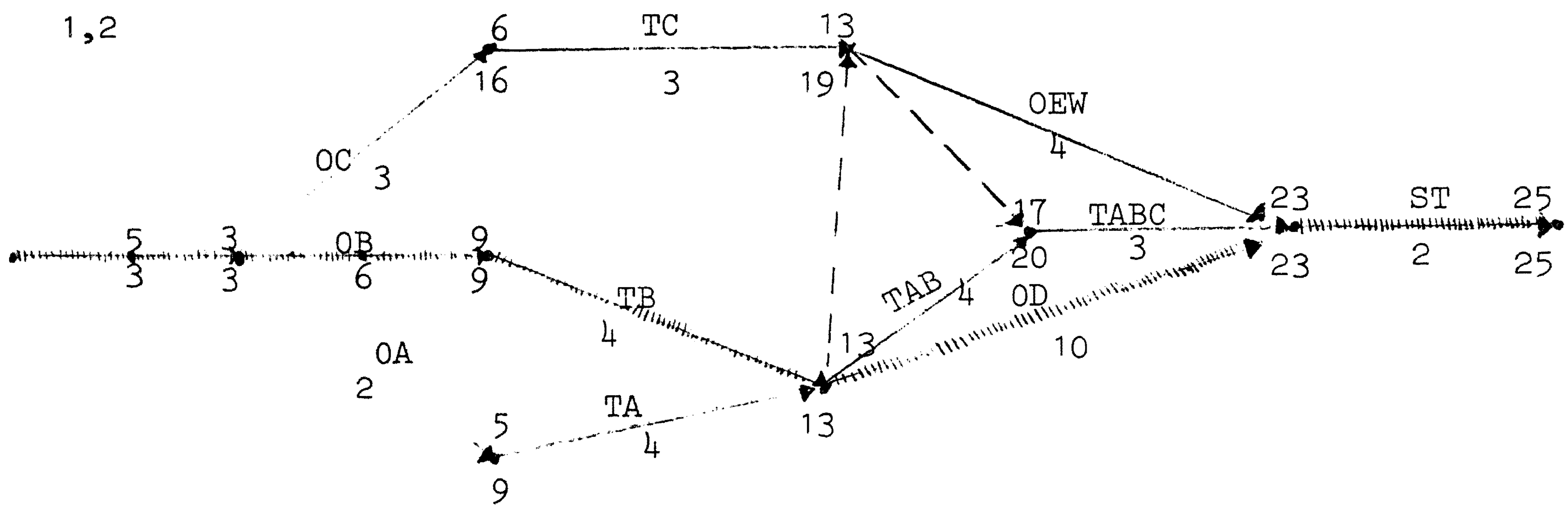
waarbij q de fraktie uitverkochte voorstellingen bij optimale keuze van de capaciteit voorstelt,
c de vaste kosten per plaats per voorstelling
en e de extra variabele kosten per afgewezen klant (gederfde netto winst).

Hierbij zijn de totale vaste kosten evenredig verondersteld met de gekozen capaciteit.

Oplossingen 1966.

Vraagstuk 1.

1,2



3. Volgorde:

$5 \xrightarrow{TA} 9 \xrightarrow{TB} 13 \xrightarrow{TC} 16 \xrightarrow{TAB} 20 \xrightarrow{TABC} 23$

De totale projectduur wordt niet beïnvloed.

4. Verkorting van de levertijd bij OD van 10 naar 7 weken is zinvol, daar dit de duur van het kritieke pad en dus de totale projektduur vermindert.
Verkorting van de levertijd bij OEW heeft geen invloed omdat OEW niet op het kritieke pad ligt.

Vraagstuk 2.

1. De kans dat van een bepaalde vrachtauto op een bepaalde dag een onderdeel vervangen moet worden is 1 : 4. Dan is de kans dat op 1 dag van alle vier vrachtauto's de onderdelen vervangen worden $(1 : 4)^4 = 1 : 256$.

De kans dat drie onderdelen vervangen moeten worden is

	$4\times(3:4)\times(1:4)^3$	$= 12 : 256$
twee	$6\times(3:4)^2\times(1:4)^2$	$= 54 : 256$
een	$4\times(3:4)^3\times(1:4)$	$= 108 : 256$
geen	$(3:4)^4$	$= 81 : 256$

Men komt onderdelen tekort op 1 + 12 + 54 = 67 dagen.

2. In onderstaande tabel is aangegeven het aantal dagen dat een tekort aan onderdelen optreedt bij verschillende aantallen reserve-onderdelen. Tevens is daarbij aangegeven het aantal onderdelen dat tekort is en dat buiten de normale werktijd gereviseerd moet worden en de kosten die dit meebrengt. In de laatste twee kolommen is aangegeven de kosten van de reserve-onderdelen en de totale kosten. Alles op jaarbasis.

aantal reserve onderd.	aantal dgn. dat er een tekort is	aantal onderd. tekort	kosten extra revisie	kosten reserve onderd.	totaal kosten
0	175	256	12.800	0	12.800
1	67	81	4.050	750	4.800
2	13	14	700	1.500	2.200
3	1	1	50	2.250	2.300
4	0	0	0	3.000	3.000

De minimumkosten bedragen f. 2.200,-- en worden bereikt bij aanwezigheid van 2 reserve-onderdelen.

Vraagstuk 3.

1. Noem M-g = N, dan bevatten de flessen gemiddeld $(\mu - N)$ kg meer melk dan minimaal vereist is; de kosten hiervan bedragen $c_2(\mu - N)$. De kans op een fles die te weinig bevat is:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{N} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

De totale verwachte verliezen bedragen per fles derhalve

$$V(\mu) = c_2(\mu - N) + \frac{c_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{N} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Wij substitueren: $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$, dan is

$$V(\mu) = c_2(\mu - N) + \frac{c_1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{N-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

Differentiatie naar μ leidt tot

$$V'(\mu) = c_2 - \frac{c_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{N-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

De optimale waarde μ^* van μ volgt uit

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{N-\mu^*}{\sigma}\right)^2} = \frac{c_2}{c_1}$$

2. De instelwaarde moet zodanig gekozen worden dat de ordinaat van de $N(\mu, \sigma)$ verdeling in het punt N gelijk is aan $\frac{c_2}{c_1}$.

Opmerking. De vergelijking $V'(\mu^*) = 0$ heeft 2 wortels als

$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} > \frac{c_2}{c_1}$, waarvan de grootste wortel de gezochte is.

Voor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{c_2}{c_1}$ is er één wortel, n.l. $\mu^* = N$; voor

$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} < \frac{c_2}{c_1}$ heeft $V'(\mu^*) = 0$ geen reële wortels,

de functie $V(\mu)$ is monotoon stijgend en het gezochte minimum is een randextreem dat bereikt wordt voor $\mu^* = N$.

Vraagstuk 4.

Als de fabrikant x_1 eenheden grondstof Sup verwerkt en x_2 eenheden grondstof Inf, dan verkrijgt hij $130x_1 + 180x_2$ ton product A,

$420x_1 + 180x_2$ " " B, en

$380x_1 + 580x_2$ " " C.

Volgens de markteisen zal:

$$\left.\begin{array}{l} 130x_1 + 180x_2 \leqq 1404 \\ 420x_1 + 180x_2 \geqq 2520 \\ 380x_1 + 580x_2 \geqq 3360 \end{array}\right\} \quad (I)$$

De capaciteitseis levert:

$$x_1 + x_2 \leqq 10 \qquad (II)$$

Verder zal $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$, x_1 geheel en x_2 geheel moeten zijn (III).

(I), (II) en (III) geven gezamenlijk de eisen weer, waaraan waarden van x_1 en x_2 moeten voldoen.

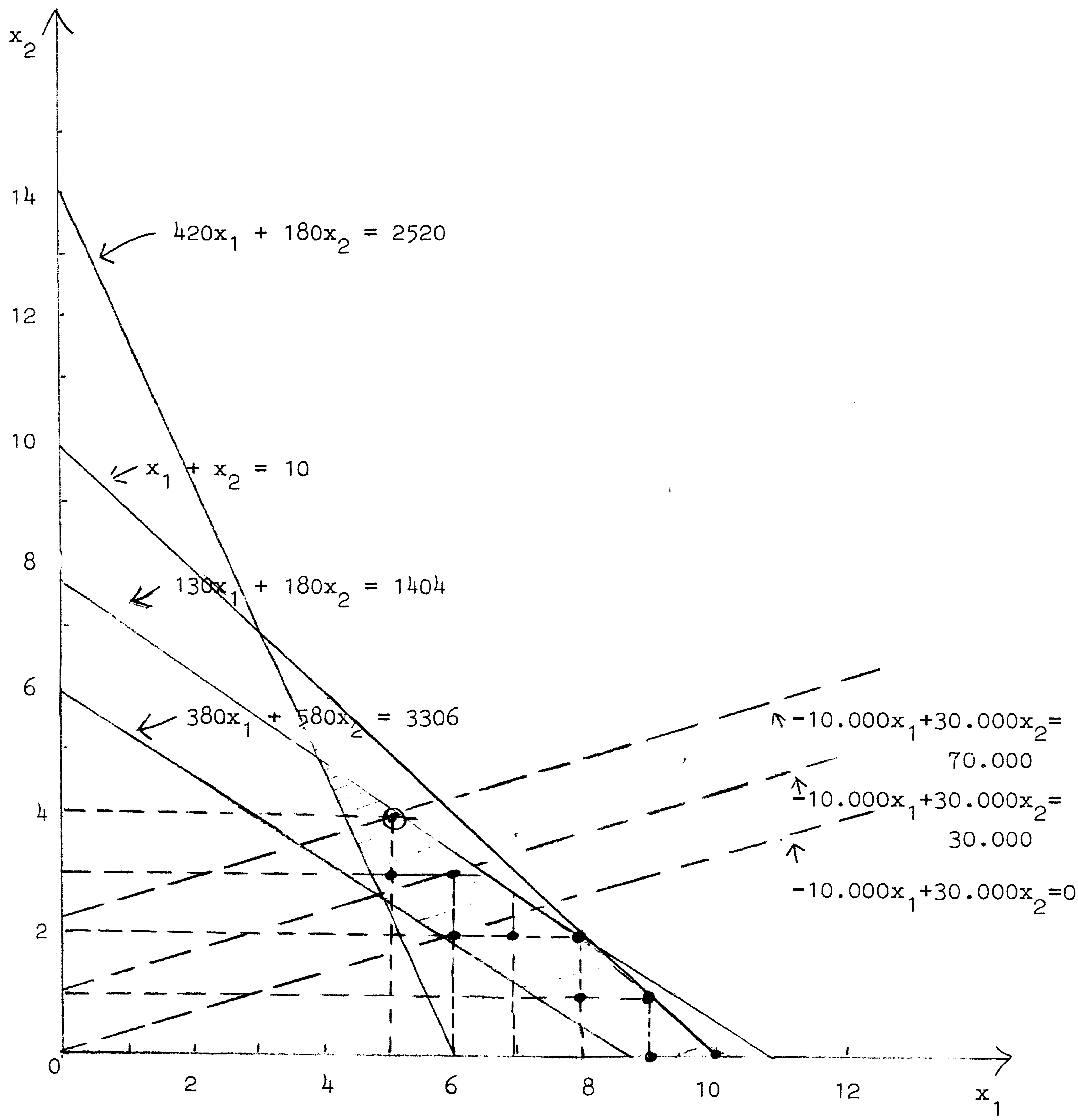
De opbrengst zal zijn $(130x_1 + 180x_2)\ 1200 +$
$+ (420x_1 + 180x_2)\ 500 +$
$+ (380x_1 + 580x_2)\ 800$.

De variabele kosten $680.000x_1 + 740.000x_2$.
Het verschil, zijnde $- 10000x_1 + 30000x_2$ moet gemaximalizeerd worden.

Het beschaduwde deel van bijgaande grafiek geeft de x_1, x_2 combinaties, die aan (I), (II), $x_1 \geqq 0$ en $x_2 \geqq 0$ voldoen. Hiervan zijn slechts de door een zwarte stip aangegeven punten die combinaties van x_1, x_2 waarden, waarvoor tevens geldt, dat zowel x_1 als x_2 geheel zijn; er zal dus een keuze gemaakt moeten worden uit deze laatste verzameling van 10 punten.

De onderbroken, evenwijdige lijnen in de grafiek laten zien, dat de waardefunctie oploopt, als men zich in Noord-Westelijke richting over het papier beweegt.

Hieruit volgt, dat het punt $x_1 = 5$, $x_2 = 4$ het optimale punt is; hiervoor geldt: $- 10000x_1 + 30000x_2 = 70000$.
De fabrikant zal dus het voordeligst handelen door 5 eenheden Sup en 4 eenheden Inf te verwerken.


x2
14
12
10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10
12
x1
420x1 + 180x2 = 2520
x1 + x2 = 10
130x1 + 180x2 = 1404
380x1 + 580x2 = 3306
-10.000x1+30.000x2=
70.000
-10.000x1+30.000x2=
30.000
-10.000x1+30.000x2=0

Vraagstuk 5.

Substitutie van m = 2 in formule (2) levert op:

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}$$

Dit leidt voor m = 2 tot

$$\frac{\mathcal{E}\underline{w}}{\mathcal{E}\underline{b}} = \frac{\rho^2}{1 - \rho^2}$$

1a) $\rho = \dfrac{\text{vereiste uren}}{\text{beschikbare uren}} = \dfrac{18 \; . \; 2}{24 \; . \; 2} = \dfrac{3}{4}$

1b) $\mathcal{E}\underline{w} = \mathcal{E}\underline{b} \dfrac{\rho^2}{1 - \rho^2} = 2. \dfrac{(\frac{3}{4})^2}{1 - (\frac{3}{4})^2} = \dfrac{18}{7}$ uur = 2,57 uur

2) Voor m = 3 wordt $\rho = \dfrac{18 \; . \; 2}{24 \; . \; 3} = \dfrac{1}{2}$

$$P_0 = \frac{4}{19}$$

$$\frac{\mathcal{E}\underline{w}}{\mathcal{E}\underline{b}} = \frac{3}{19} \quad \mathcal{E}\underline{w} = \frac{6}{19} \text{ uur} = 0{,}316 \text{ uur}$$

Dit is reeds minder dan een half uur, zodat het antwoord op vraag 2 luidt: 3 sleepboten.

3a) $\rho = \dfrac{18 \; . \; \frac{4}{3}}{24 \; . \; 2} = \dfrac{1}{2}$

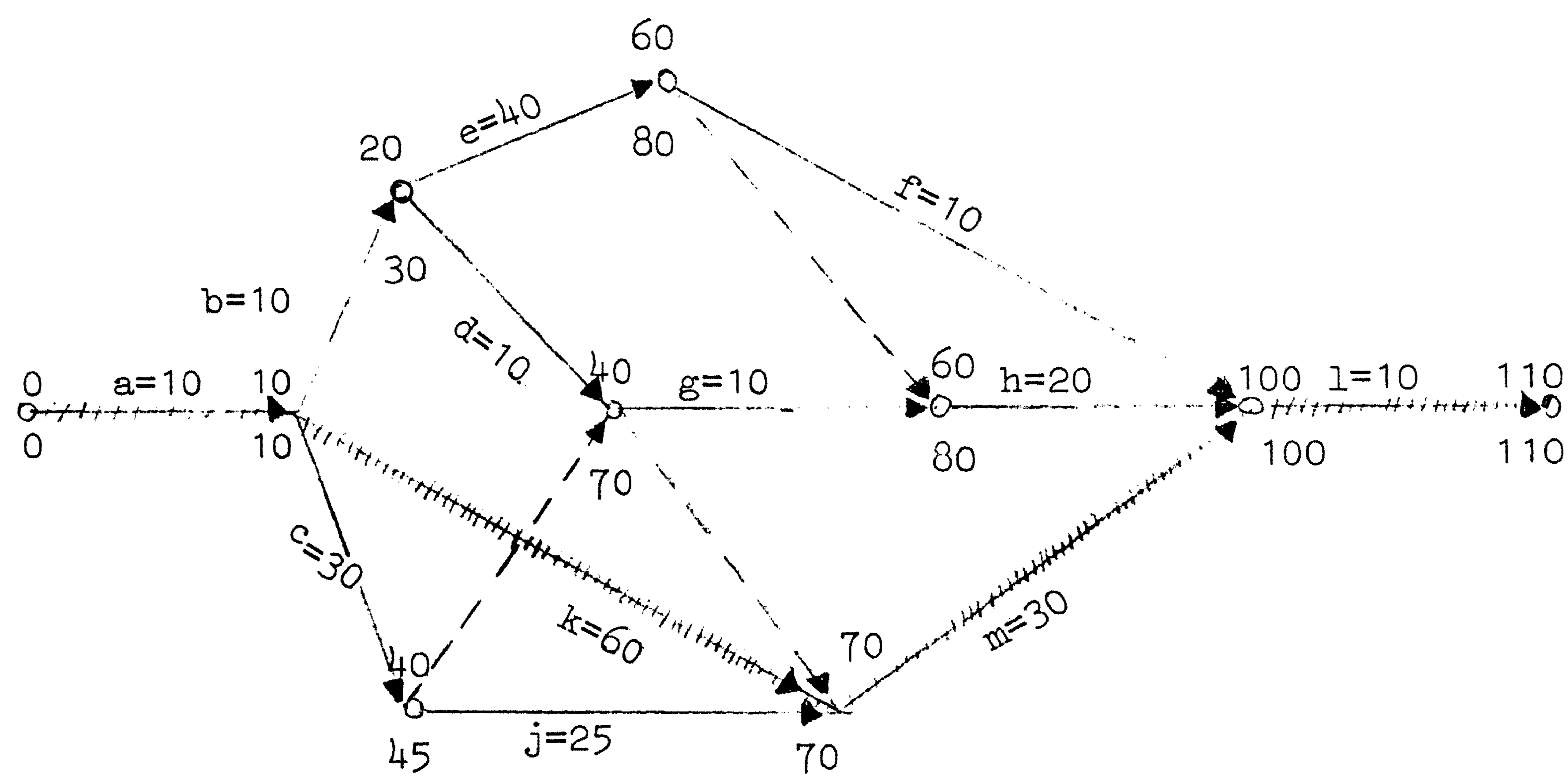
3b) $\mathcal{E}\underline{w} = \mathcal{E}\underline{b} \dfrac{\rho^2}{1 - \rho^2} = \dfrac{4}{3} \; . \; \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{9}$ uur = 0,444 uur

4) Verlaging van de bezettingsgraad leidt in het vraagstuk tot verkorting van de gemiddelde wachttijd; maar een verlaging die het resultaat is van een uitbreiding van het aantal loketten, verlaagt de wachttijd meer dan een zelfde verlaging die het resultaat is van verkorting van de bedieningstijd.

Oplossingen 1967.

Vraagstuk 1.

1a.



kritieke pad.

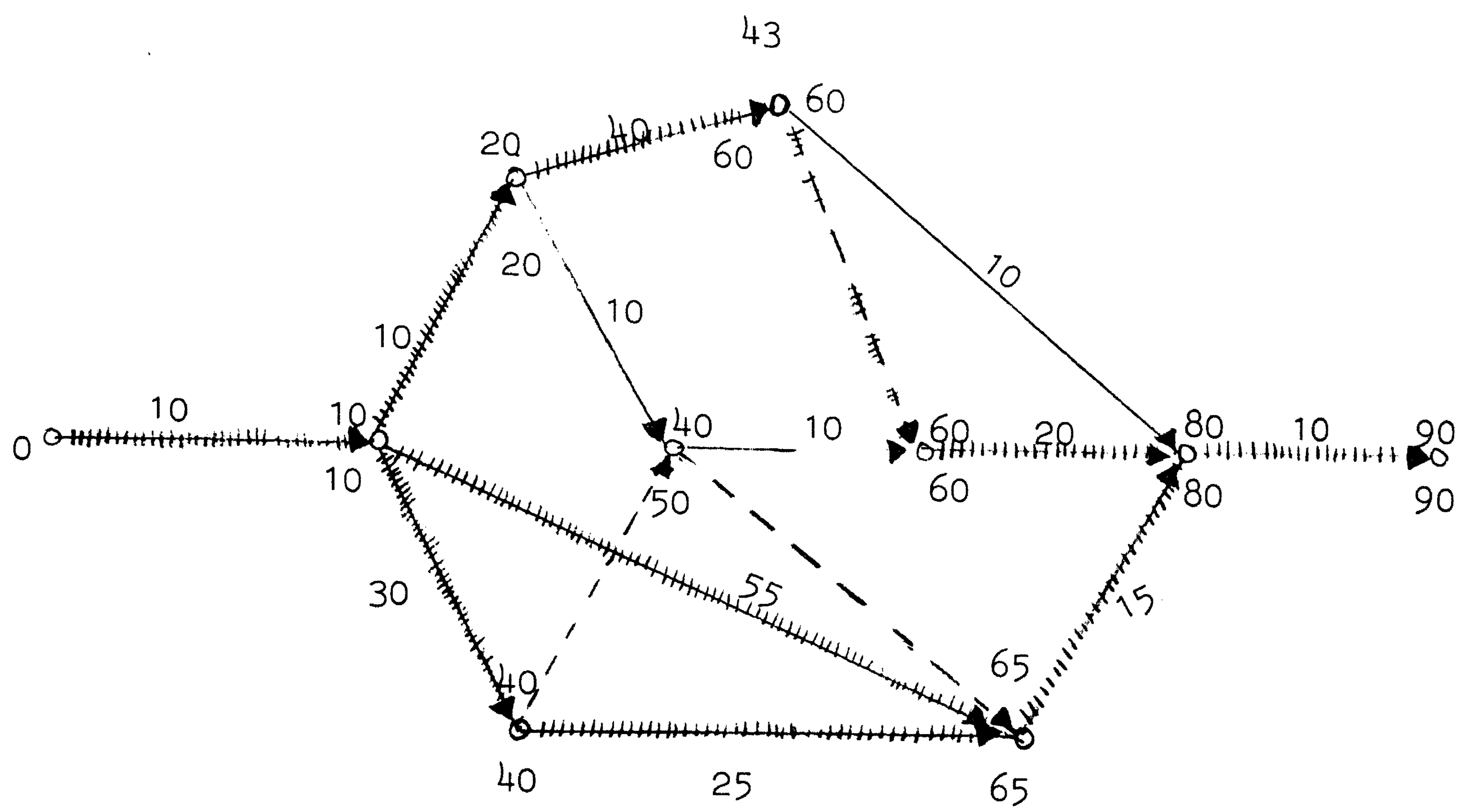
Het kritieke pad loopt via a, k, m, l.

Tijdsduur hiervan = 110 weken.

1b. Activiteit k = 60 en wordt k = 55

Activiteit m = 30 en wordt m = 15

Totale verkorting is: 20 weken.



= kritieke pad.

Na verkorting loopt het kritieke pad via drie routes n.l.

- a.b.e.h.l.
- a.k.m.l.
- a.c.j.m.l.

<u>Vraagstuk 2</u>.

2a) Laat de volume percentages produkt A, B en C in het mengsel respectievelijk x, y en z zijn. Dan moeten x, y en z voldoen aan: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$
en $x + y + z = 100$

$$1{,}2x \; . \; + 1{,}1y \; . \; 6 + 1{,}15z \; . \; 2 \geq (1{,}2x + 1{,}1y + 1{,}15z) \; . \; 6$$

$$x \; . \; \sqrt{25} + y \; . \; \sqrt{64} + z \; . \; \sqrt{36} \leq 100 \; . \; \sqrt{49}$$

of $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ en

$$\left.\begin{array}{ll} x + y + z & = 100 \\ -\,2{,}4x + 4{,}6z & \leq 0 \\ 5x + 8y + 6z & \leq 700 \end{array}\right)$$

2b) $f(\frac{x}{100} \cdot 2 + \frac{y}{100} \cdot 1 + \frac{z}{100} \cdot 1,5)$

2c) $z = 100 - x - y$

Substitutie in de laatste twee der onder a) gevonden condities levert:

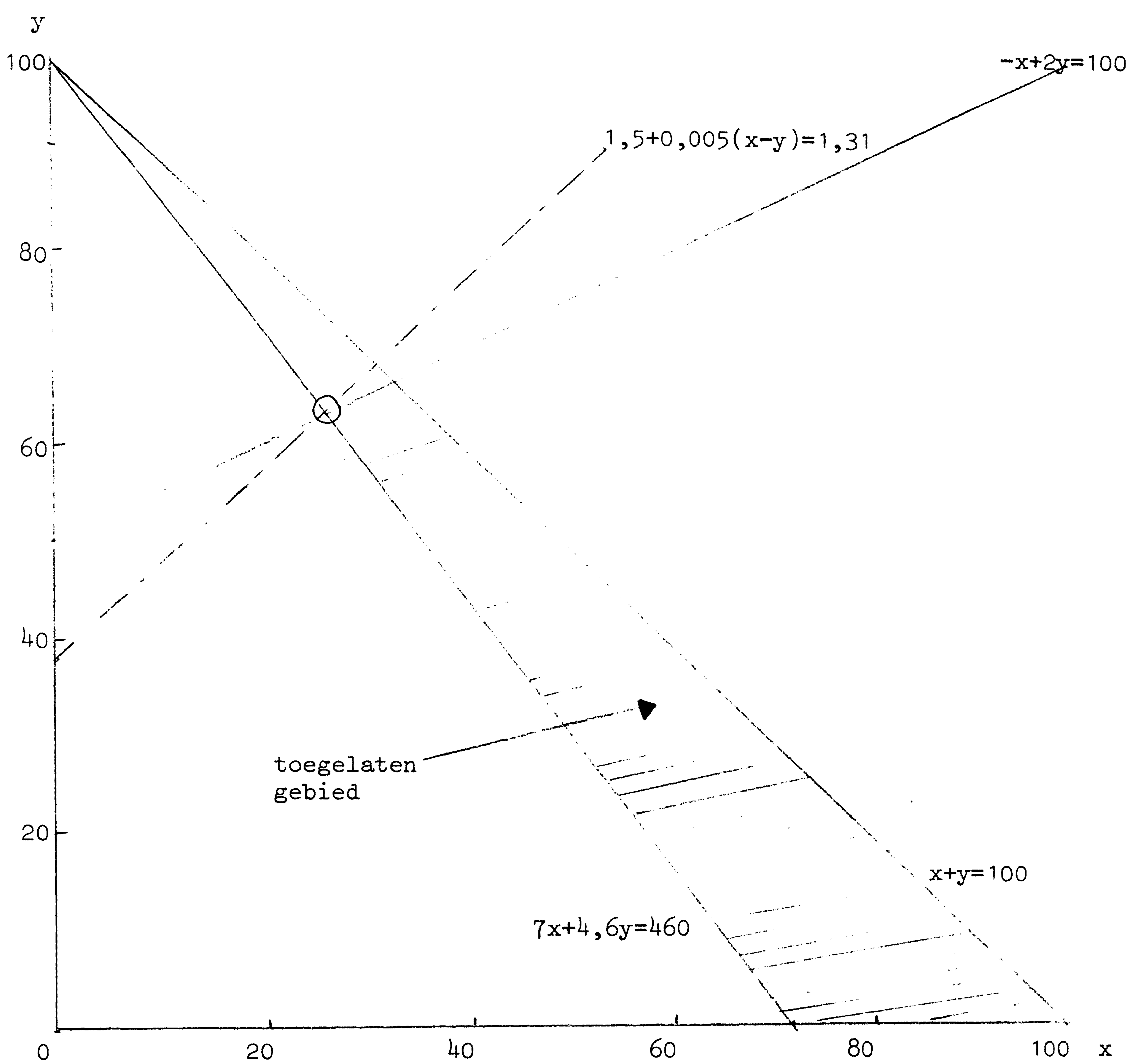
$7x + 4,6y \geq 460$ en

$-x + 2\ \ y \leq 100$

$x + y \leq 100$ is een restrictie, die we hieraan toe moeten voegen, omdat $z \geq 0$ moet worden. We zoeken nu die niet-negatieve waarden voor x en y, die aan deze drie voorwaarden voldoen. Indien er meerdere oplossingen zijn, wordt die geselecteerd, die

$0,02x + 0,01y + 0,015\ (100 - x - y) = 1,5 + 0,005\ (x - y)$

minimaliseert.



De optimale oplossing is:

x = 24,7

y = 62,4

z = 12,9

De volume percentages zijn derhalve

vloeistof A : 24,7%

" B : 62,4%

" C : 12,9%

3a.

x	y	y neemt toe	y neemt af	y blijft gelijk
F	Q	*		
r	Q		*	
L	Q			*
L	B	*		
α	B		*	
R	B	*		
α	Q	*		
R	Q	*		

3b. 1. met één loket

2. exponentieel verdeelde bedieningstijd
3. nooit
4. in bepaalde situaties n.l. beide exponentieel verdeeld.

<u>Vraagstuk 4.</u>

4a.

vraag per dag	$f(x) = a.e^{-ax}$
capaciteit	c
vaste kosten per dag	bc
schade per dag	$s(x - c)$ voor $x > c$
totale kosten per dag	k

$$k = bc + s \int_c^\infty a(x-c)c^{-ax}dx$$

$$= bc + as \int_c^\infty xe^{-ax}dx - asc \int_c^\infty e^{-ax}dx$$

differentiatie naar c levert op:

$$\frac{dk}{dc} = b - as.ce^{-ac} - as\left\{ \int_{c}^{\infty} e^{-ax}dx - c.e^{-ac} \right\}$$

De optimaliteitscontrole is:

$$\left[\frac{dk}{dc}\right]_{c=c_0} = 0, \text{ zodat } b - as \int_{c_0}^{\infty} e^{-ax}dx = 0$$

$$\int_{c_0}^{\infty} ae^{-ax}dx = \frac{b}{s}$$

$$e^{-ac_0} = \frac{b}{s}$$

$$c_0 = \frac{-\ln\frac{b}{s}}{a}$$

4b. 1) $c_0 = \frac{-\ln 0{,}1}{0{,}01} = 230$

2) $e^{-ac_0} = 0{,}10$

3) Per dag gaat gemiddeld verloren de hoeveelheid L

$$L = \int_{c_0}^{\infty} (x - c_0)\, ae^{-ax}dx$$

De substitutie $x - c_0 = y$ levert

$$L = \int_{0}^{\infty} yae^{-a(y+c_0)}dy =$$

$$= e^{-ac_0} \int_{0}^{\infty} y.ae^{-ay}dy$$

De integraal in het laatste lid, de verwachting van een exponentiele verdeling, is gelijk aan $\frac{1}{a}$, $e^{-ac_0} = 0{,}10$ volgens de oplossing van vraag b2. Dus L = 10.

Vraagstuk 5.

5a. 1) Beschouw het systeem op de tijdstippen dat er een vrachtauto binnenkomt.

2) Notatie:

ta = aankomst tijdstip, gerekend vanaf het begin van de dag

$r(\lambda)$ = trekking uit exponentiële verdeling met parameter λ

a(1) = tijdstip waarop eerstvolgende laadplaats vrijkomt

a(2) = " " andere " "

w = aantal wachtenden

w_{max} = max. aantal tegelijk wachtenden tot op dat moment.

3) Begintoestand: ta = 0, a(1) = a(2) = 0, w = 0, wmax = 0

5b. Per dag gaat de simulatie als volgt:

1) ta: = ta + r(5,0); ga naar (2)

2) a(1): = min [a(1), a(2)]; a(2): = max [a(1), a(2)]; ga naar (3)

3) ta > a(1)
- neen → w:=w+1; als w > wmax dan wmax:=w; ga naar (1);
- ja → w=0
  - ja → a(1):=ta+0,5; ga naar (1)
  - neen → a(1):=a(1)+0,5;w:=w-1; ga naar (2)

Dit gaat door totdat ta > 6

Het dagmaximum kan na zes uur niet meer bereikt worden. De volgende dag wordt er opnieuw van de begintoestand uitgegaan.

5c. Begintoestand: t:=1; ta:=0

(1) ta:= ta + $r(\lambda(t))$.

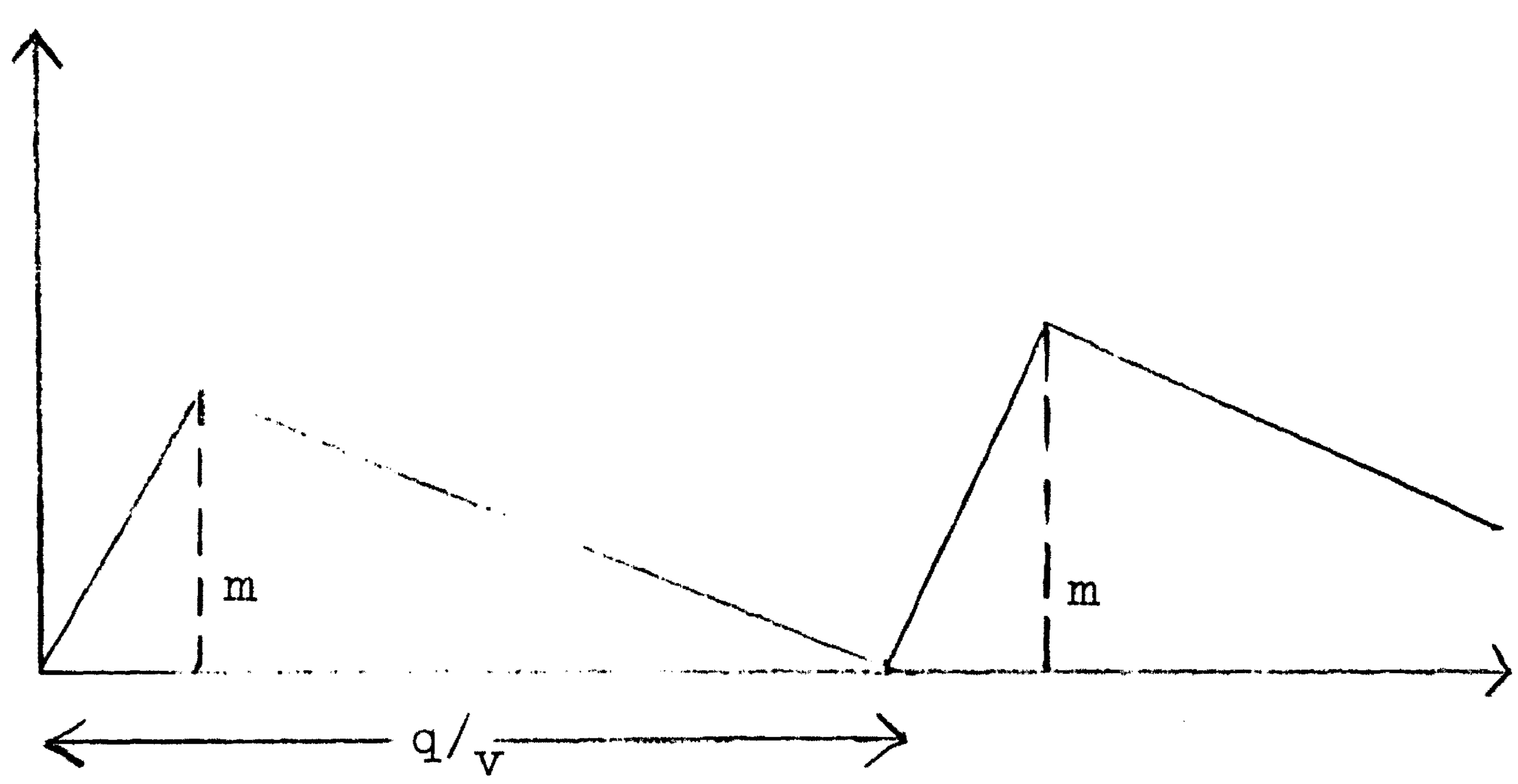
(2) ta > t
- ja → ta:=t; t:=t+1; ga naar (1)
- neen → ga naar (2) bij b.

Oplossingen 1968.

Vraagstuk 1.

Stel serielengte q stuks; produktieduur serie $\frac{q}{p}$ dagen.
Maximale hoogte voorraad $q - \frac{q}{p} \cdot v = m$

voorraad



Een serie dekt de behoeften van $\frac{q}{v}$ dagen.

Gemiddelde voorraad $\frac{q}{2}\left(1-\frac{v}{p}\right)$ voorraadkosten behorende bij één serie

$\frac{cq}{2}\left(1-\frac{v}{p}\right) \cdot \frac{q}{v}$.

Aanloopkosten per serie: as.

Totale kosten per aangemaakte eenheid: $\dfrac{\frac{cq}{2}\left(1-\frac{v}{p}\right)\frac{q}{v} + as}{q}$

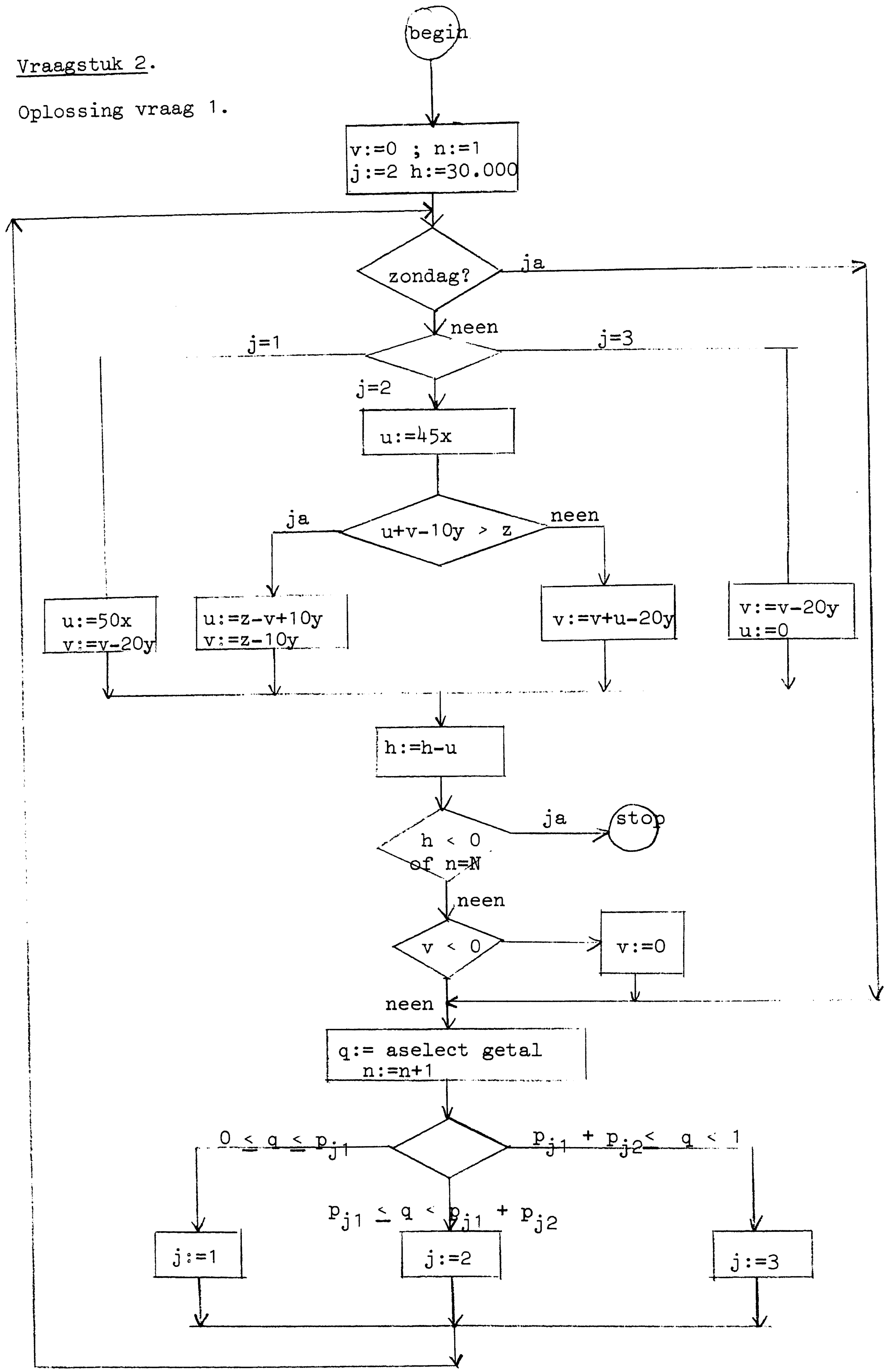
differentiatie naar q leidt tot de optimale waarden $q^* = \sqrt{\dfrac{2asv}{c\left(1-\frac{v}{p}\right)}}$.

Opmerking Dit is strikt genomen allen juist voor

$q^* > \dfrac{av}{1-\frac{v}{p}}$; is q^* kleiner, dan wordt de optimale waarde $\dfrac{av}{1-\frac{v}{p}}$.

Vraagstuk 2.

Oplossing vraag 1.



q = aselect getal
p_{ji} = kans op vochtklasse i | vorige dag vochtklasse j
n = dag nummer
N = duur oogst periode in dagen
j = vochtklasse
h = hoeveelheid tarwe op het land aan het begin van de dag in ton
u = geoogste hoeveelheid op een dag in ton
v = hoeveelheid tarwe 2 in ton aan het begin van de dag in de opslagruimte

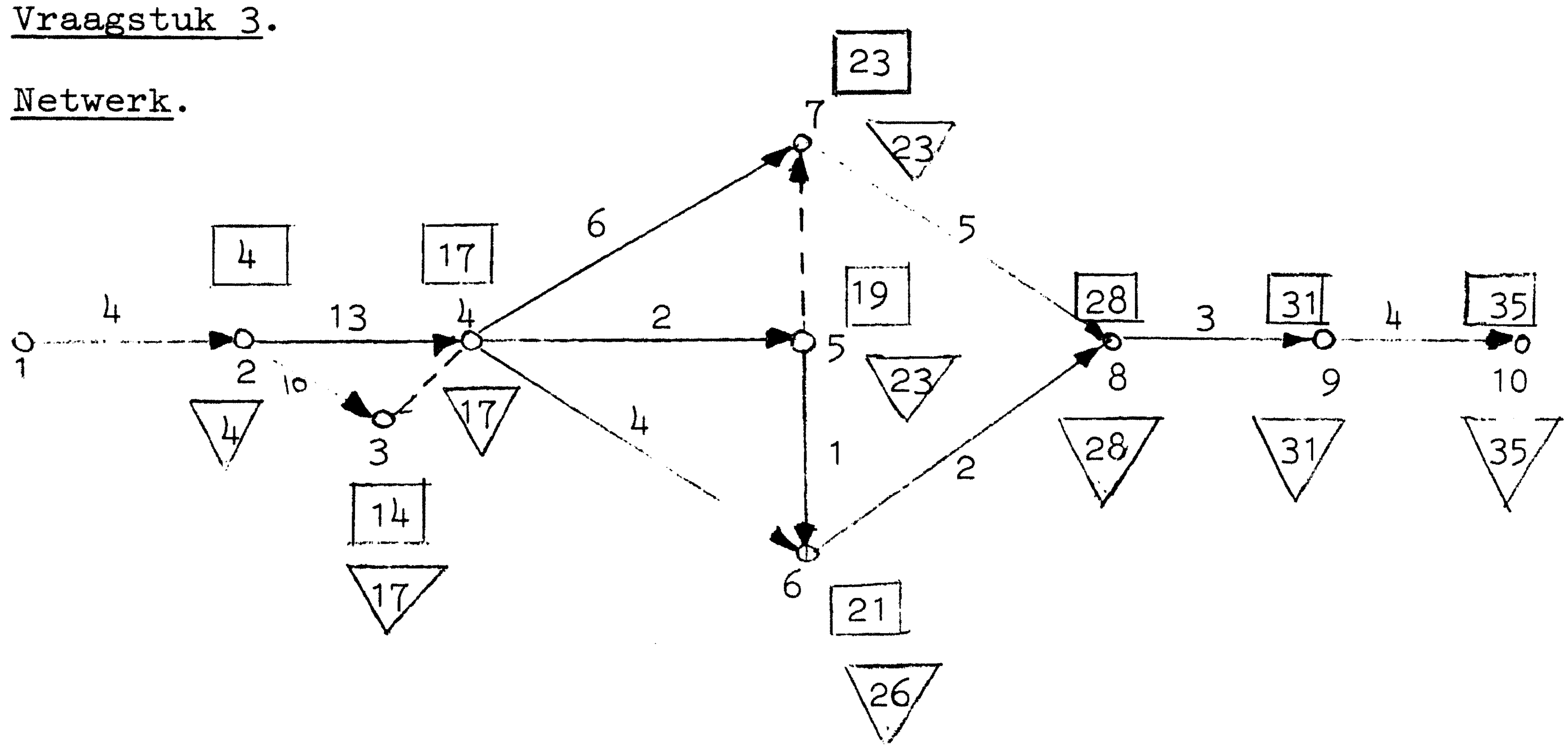
Oplossing vraag 2.

dag	q	j	v	h	u	u'
1		2	0	30.000	3600	2400
2	0,79	3	1600	27.600	0	0
3	0,67	3	800	27.600	0	0
4	0,28	2	800	27.600	3600	1600
5	0,77	3	1600	26.000	0	0
6	0,08	2	800	26.000	3600	1600
7	0,60	2	1600	24.400	3600	800
8			1600	23.600		

u' = gecorrigeerde u voor het vollopen van de opslagruimte.

<u>Vraagstuk 3</u>.

<u>Netwerk</u>.



Aktiviteiten:

1 - 2 Opstellen rapport van eisen
2 - 3 Ontwerp electronisch gedeelte
2 - 4 Ontwerp mechanisch gedeelte
4 - 5 Werkvoorbereiding
4 - 6 Levertijd electronische onderdelen
4 - 7 Levertijd mechanische onderdelen
5 - 6 Aanloopperiode electronische werkplaats
7 - 8 Fabricage mechanisch gedeelte
6 - 8 Fabricage electronisch gedeelte
8 - 9 Samenbouw
9 - 10 Eindcontrôle

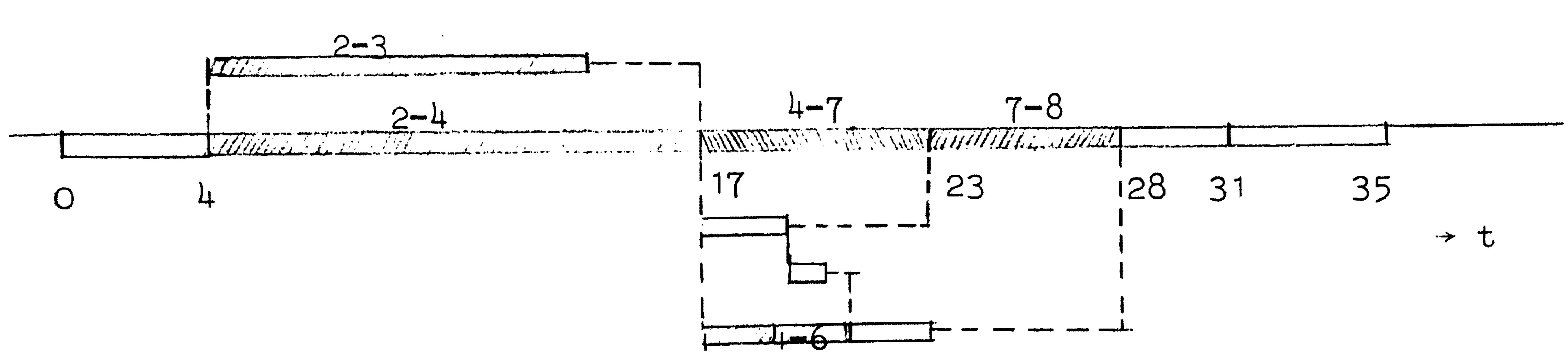
Kritieke pad.

Voor de verschillende knooppunten is eerst het vroegste startmoment (in □) en de laatst toelaatbare start (in ▽) uitgerekend. Het kritieke pad wordt dan gevonden door die knooppunten met elkaar te verbinden, waarvoor vroegste start en laatst toegestane start aan elkaar gelijk zijn. Zo ontstaat als kritieke pad:

1 - 2 - 4 - 7 - 8 - 9 - 10, duur 35 weken.

Verkorting:

De mogelijke tijdsduurverkortingen kunnen het eenvoudigst bepaald worden door het netwerk langs een tijdas weer te geven.



De voor verkorting in aanmerking komende activiteiten zijn gearceerd.
In eerste instantie wordt het kritieke pad zoveel mogelijk ingekort.
Dit geschiedt in 3 stappen.

1e stap: Mechanische fabricage (7-8) 2 weken, kosten f. 80,--

2e stap: Leverancier mech. onderdelen (4-7) 3 weken,
kosten f.150,--

3e stap: Ontwerp mechanisch gedeelte (2-4) 3 weken
kosten f.225,--

De resterende 2 weken verkorting kunnen alleen verkregen worden door de beide ontwerpgroepen samen minder tijd ter beschikking te stellen.
kosten f.300,--

Totale kosten: 80 + 150 + 225 + 300 = f. 775,--

Vraagstuk 4.

Stel de dikte van de isolatielaag = x cm

Dan zijn de kosten van de isolatie $k_i = 600x$ gulden

De brandstofkosten zijn per jaar $b = \dfrac{5.300.5000.10.0,5}{x.10^4}$

$$= \frac{3750}{x} \text{ gulden/jaar}$$

Aangezien de brandstofkosten gedurende 21 jaren jaarlijks ontstaan, moet - teneinde ze bij de isolatiekosten te mogen optellen - hun contante waarde worden berekend.

$$\text{(Contante waarde) } k_b = \sum_{i=1}^{21} \frac{3750}{x\ 1,08^i} = \frac{3750}{x} \sum_{i=1}^{21} \frac{1}{1,08^i} \qquad *)$$

De tweede term hierboven is de som van de eerste 21 termen van een meetkundige reeks waarvan de eerste term en de reden beide gelijk zijn aan $\dfrac{1}{1,08}$

$$\sum_{i=1}^{21} \frac{1}{1,08^{i}} = 1,08^{-1} \frac{1,08^{-21}-1}{1,08^{-1}-1} = 0,9259 \frac{0,80135}{0,0741} = 10,0$$

$\log 1,08 = 0,033424$

$\log 1,08^{-1} = 0,966576 - 1 \quad 1,08^{-1} = 0,9259$

$\log 1,08^{-21} = -0,701904 = 0,298096 - 1 \quad 1,08^{-21} = 0,19865$

$k_i = 600x$

$k_b = \frac{37500}{x}$

$k_{(totaal)} = 600x + \frac{37500}{x} \rightarrow \min$

$$\frac{dk}{dx} = 600 - \frac{37500}{x^2} = 0 \implies x^2 = 62,50 \Rightarrow x_{opt} = 7,91 \text{ cm} \sim 8 \text{ cm}$$

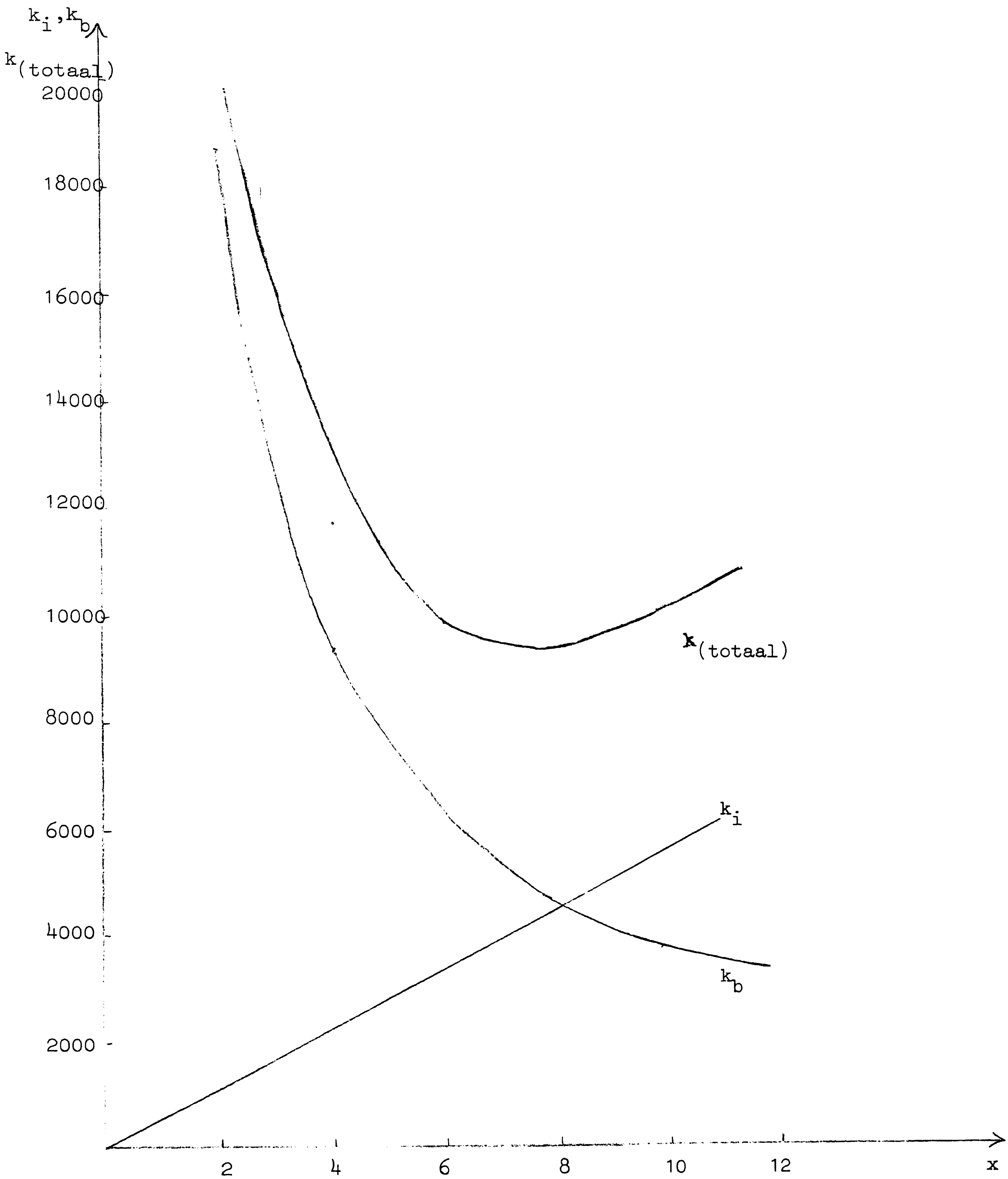
Daar $\frac{d^2k}{dx^2} = \frac{75000}{x^3} > 0$, is de oplossing een minimum

Restrikties: 1) $2 \leq x_{opt} \leqq 10$ 2) $k_i \leqq 5000$;

aan beide restrikties is voldaan.

*) Afhankelijk van het tijdstip, waarop ieder jaar de brandstofkosten worden voldaan, zijn er ook andere uitkomsten voor k_b mogelijk. Neemt men bijvoorbeeld het midden van het jaar dan volgt

$$k_b = \frac{1}{1,08^{\frac{1}{2}}} \sum_{i=0}^{20} \frac{1}{1,08^{i-}} \frac{3750}{x}$$



De relevante kosten als functie van de dikte x.

Vraagstuk 5.

A. Bus A rijdt om de 15 minuten. Daarom is de kans, dat hij in een bepaald tijdvak van 3 minuten zal arriveren:

$\frac{3}{15} = 0,2.$

B. De kans, dat de wandelaar meer dan x minuten op een bus A zal moeten wachten, als hij een bus A zou willen nemen is:

$1 - \frac{x}{15}. \quad (0 \leq x \leq 15)$

De kans, dat een bus B juist op tijdstip x zal arriveren is:

$\frac{1}{35}\,dx.$

Dus de kans, dat de eerste bus, die aankomst een bus B zal zijn en dat dit op tijdstip x gebeurt is, $\frac{1}{35} \cdot (1 - \frac{x}{15})\,dx$

De kans, dat het tijdstip x langer dan vijf minuten op zich

zal laten wachten is: $\int_5^{15} \frac{1}{35}(1 - \frac{x}{15})\,dx = \frac{2}{21}.$

C. De kans dat de 1e bus een bus B is en dat hij op tijd x komt is:

$\frac{1}{35}(1 - \frac{x}{15})\,dx$

Evenzo is de kans, dat de 1e bus een bus A is en dat hij op tijd x komt: $\frac{1}{15}(1 - \frac{x}{35})\,dx$

Dus de kans, dat de 1e bus na x minuten arriveert wordt:

$\{\frac{1}{35}(1 - \frac{x}{15}) + \frac{1}{15}(1 - \frac{x}{35})\}\,dx = \frac{2}{21}(1 - \frac{x}{25})\,dx$

Gemiddeld komt de eerste bus dus na:

$$\frac{2}{21}\int_0^{15}(1 - \frac{x}{25})\,x\,dx = 6\,\frac{3}{7} \text{ minuten aan.}$$

D. Ja.

Bus A arriveert op tijdstip a minuten. Bus B is nog niet gekomen tussen tijd 0 en tijd a minuten. Deze zal dus arriveren in de overige 35-a minuten. Gemiddeld zal dit dus gebeuren op tijd

$a + \frac{35-a}{2}$ minuten.

Hij zal dan gemiddeld na $a + \frac{35-a}{2} + c$ minuten thuiskomen, als bus B er c minuten over doet.
Zou de wandelaar bus A genomen hebben, dan zou hij na $a + c + 15$ minuten thuis gekomen zijn

$$a + \frac{35-a}{2} + c = a + c + 15 \text{ voor } a = 5$$

Als bus A dus later dan 5 minuten na aankomst wandelaar arriveert bij de halte, terwijl er nog geen bus B geweest is, dan kan hij beter op bus B wachten.