VVS

Examen statistisch analist
Technologisch toepassingsgebied
1957–1966

Deel 2 Uitgewerkte oplossingen

Examen statistisch analist
Technologisch toepassingsgebied
1957—1966

II Uitgewerkte oplossingen

Georganiseerd door de Vereniging voor Statistiek
Uitgegeven door het Mathematisch Centrum Amsterdam

Examen 1957

1. a. Uit de gegevens blijkt dat voor de steekproefomvang steeds 5% van de partijgrootte genomen is. Dit leidt tot relatief strenge keuringen bij grote partijen en tot relatief slappe keuringen bij kleine partijen. De fabrikant, die de kwaliteit van zijn produkt kent, heeft daardoor de mogelijkheid het percentage afgekeurde partijen te beïnvloeden met behulp van de grootte van de door hem afgeleverde partijen. Vooral om deze laatste reden is het beter er voor te zorgen, dat bij kleine partijen de steekproef relatief groter is dan bij grote partijen. Een dergelijke overweging wordt in de meeste bestaande steekproefsystemen gevolgd en het lijkt daarom aanbevelenswaardig één van deze systemen te gebruiken.

   b. In de onderstaande tabel is voor elke partij het percentage in de steekproef gevonden afgekeurde exemplaren gegeven.

Nummer partij	Percentage afgekeurde exemplaren in steekproef
1	3,9
2	4,5
3	3,6
4	4,0
5	5,0
6	5,0
7	3,8
8	4,4
9	3,3
10	4,0

Het percentage afgekeurde exemplaren in alle steekproeven samen is 4,1%.

De percentages afgekeurde exemplaren verschillen van steekproef tot steekproef veel te weinig. Zelfs als alle partijen hetzelfde percentage slechte produkten zouden bevatten zou men toch een grotere variatie in de steekproefpercentages verwachten. Dit blijkt bijvoorbeeld wanneer men een χ^2-toets toepast om de nulhypothese te toetsen dat de percentages slechte produkten in de tien partijen gelijk zijn. Noemt men het aantal afgekeurde produkten in de i^e steekproef n_{i1} en het totaal aantal produkten in die steekproef n_i, dan is

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} \frac{n_{i1}^2}{n_i} - \frac{35^2}{855}}{\frac{35.820}{855^2}} = 0{,}362.$$

Het bijbehorende aantal vrijheidsgraden is gelijk aan 9, omdat bij de berekening gebruik is gemaakt van de geschatte fractie slechte produkten in de partijen ($\frac{35}{855}$ = 0,041). De rechter overschrijdingskans van deze waarde van χ^2 is bijna gelijk aan 1. De gevonden waarde mag dus wel als uitzonderlijk laag beschouwd worden. De oorzaak hiervan kan zijn dat er met de resultaten geknoeid is. Het bewijs daarvan is echter niet geleverd. Een nader onderzoek zou uitsluitsel moeten geven.

2. Uit de gegevens volgt dat over langere tijd het gemiddelde uurloon en de variantie van het uurloon respectievelijk gelijk zullen zijn aan 100 + 0,5.70 = 135 ct. en 0,5.7 = 3,5 ct. Het daginkomen dat wordt verkregen als de som van acht "onafhankelijke" uurlonen zal gemiddeld gelijk zijn aan 8 × 135 ct = ƒ 10,80. De standaardafwijking is $3{,}5\sqrt{8}$ ct = ƒ 0,099.
Als aangenomen wordt dat de verdeling van de uurprestaties normaal is of althans zodanig op de normale verdeling lijkt dat de som van acht uurlonen als normaal verdeeld mag worden beschouwd, zal in gemiddeld 90 van de 100 dagen het daginkomen liggen tussen 10,80 - 1,645 × 0,099 = = ƒ 10,64 en 10,80 + 1,645 × 0,099 = ƒ 10,96.

3. Er zijn twee mogelijkheden:
   a. de controle waarop de conclusie is gebaseerd heeft betrekking op attributieve eigenschappen;
   b. de controle heeft mede betrekking op gemeten eigenschappen.

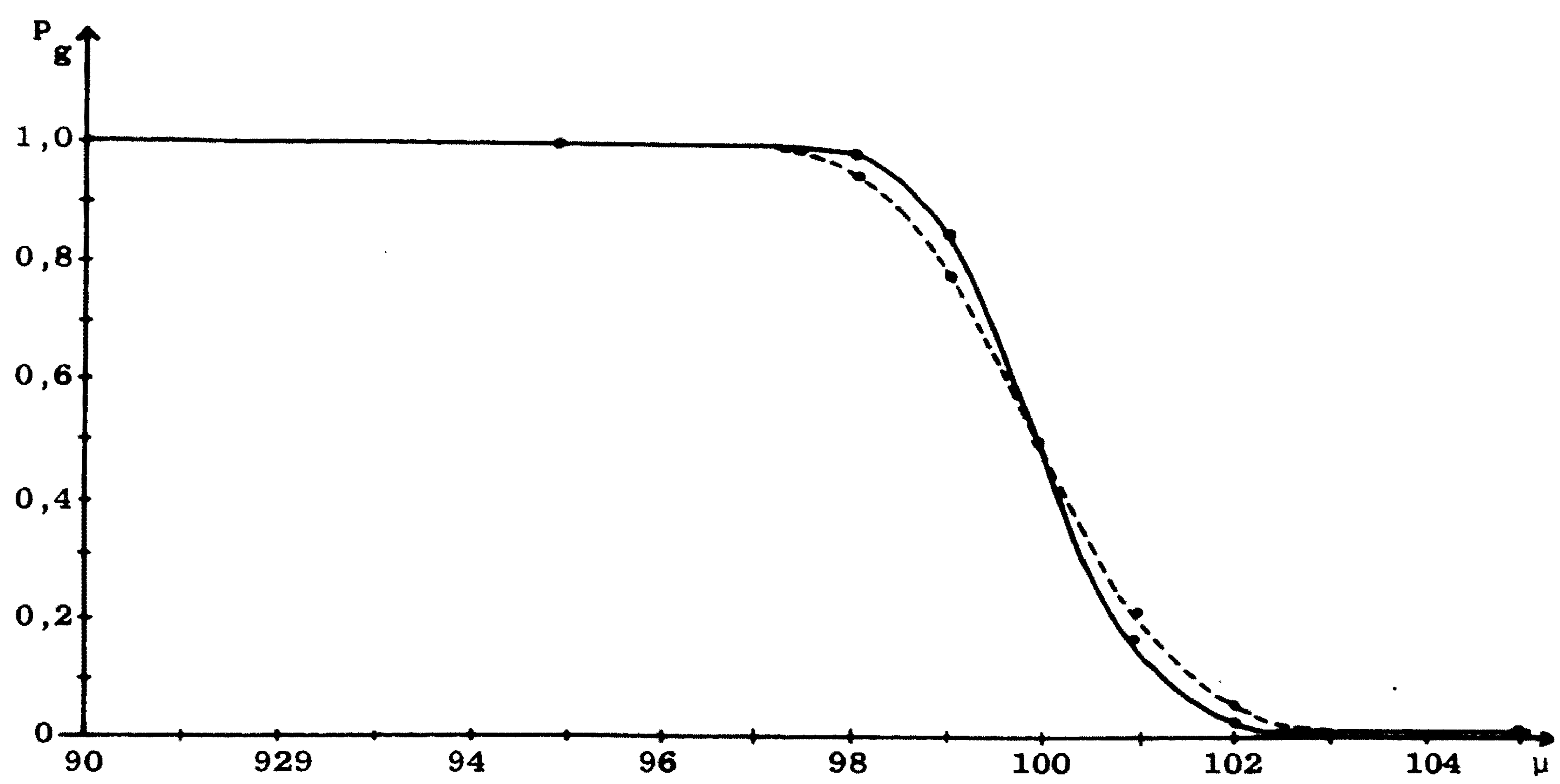
   In het eerste geval betekent het feit dat het produktieproces zonder uitval verloopt inderdaad dat het statistisch beheerst is, in het tweede geval behoeft dat niet zo te zijn. Immers, uit de mededeling volgt dan alleen dat alle geproduceerde exemplaren binnen de technische tolerantie liggen, dus dat het proces "technisch beheerst" is. "Statistisch beheerst" zijn van een proces houdt echter o.a. in dat gemiddelde en spreiding van het proces van de tijd onafhankelijke constanten zijn. Een "statistisch beheerst" proces kan echter wel degelijk uitval opleveren doordat de toleranties voor het produkt scherp c.q. te scherp gesteld zijn. Evenzo is het, in het geval van ruime tolerantie grenzen, mogelijk dat geen uitval wordt gevonden, terwijl toch het proces niet "statistisch beheerst" is.

4. Het tegen elkaar afwegen van de verschillende controlefrequenties en steekproefgrootten zou als volgt kunnen geschieden. In het algemeen zal het vaak nemen van een kleine steekproef meer tijd en arbeid en dus ook meer geld kosten dan het minder vaak nemen van een grotere steekproef, zelfs indien in beide gevallen het totaal aantal gekeurde exemplaren per tijdseenheid hetzelfde is. Een toeneming van de controlefrequentie betekent in het onderhavige geval zelfs het aanstellen van een tweede controleur (aangenomen dat er ten aanzien van het werk van de huidige controleur geen tijdsbesparende maatregelen wat betreft de keuring zelf en de registratie van de keuringsresultaten mogelijk zijn). Dit brengt dus een verhoging van de kosten met zich mee.

   Een toeneming van de controlefrequentie is daarom alleen verantwoord, indien de daaraan verbonden extra kosten een tenminste even grote besparing opleveren. Een dergelijke besparing kan bijvoorbeeld ontstaan, doordat nu eerder informatie kan worden verkregen over een kwaliteitsvermindering van het proces, als gevolg waarvan ook eerder in het proces kan worden ingegrepen en de totale door de kwaliteitsvermindering veroorzaakte schade dus kleiner is. Daarbij moet echter wel rekening worden gehouden met het feit dat in dit geval vergroting van het aantal controles gepaard gaat met verkleining van de steekproefgrootte. Men verkrijgt dus wel eerder informatie maar die is ook minder nauwkeurig. Als men verwacht dat de variaties in kwaliteit die in het proces zullen optreden, meestal groot zullen zijn, kan die minder nauwkeurige informatie toch nog wel voldoende zijn. Als men echter vermoedt dat de optredende kwaliteitsvariaties in het algemeen klein zullen zijn (maar technisch toch wel belangrijk) dan zal de verkleining van de steekproefgrootte een ongunstige invloed hebben die door de gunstige invloed van de grotere controlefrequentie niet zal worden gecompenseerd.

5. a. Als een stochastische variabele normaal verdeeld is met verwachting μ en standaardafwijking σ is ook het rekenkundig gemiddelde van n waarnemingen aan die stochastische variabele normaal verdeeld en wel met verwachting μ en standaardafwijking $\sigma/\sqrt{n}$. In dit geval is de standaardafwijking van het gemiddelde dus $\frac{5}{\sqrt{25}} =$ $= 1$ kV. Uit een tabel van de verdelingsfunctie van de normale verdeling volgt nu, dat de goedkeurkans (de kans dat het gemiddelde van 25 metingen tussen 80 en 100 kV ligt) voor $\mu = 95$ kV en $\mu = 105$ kV praktisch gelijk is aan 1, respectievelijk 0, terwijl hij voor $\mu = 100$ kV de waarde 0,5 heeft.

   b. De goedkeurkans (P_g) is afhankelijk van de absolute waarde van het verschil tussen het partijgemiddelde en het midden van het interval (80, 100). Het is dus voldoende om, zoals in de volgende figuur is gedaan, de keuringskarakteristiek te geven voor partijgemiddelden groter dan 90 kV.



c. De mediaan van n waarnemingen aan een normaal verdeelde stochastische variabele met verwachting μ en standaardafwijking σ is, als n voldoende groot is, bij benadering normaal verdeeld met verwachting μ en standaardafwijking $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. In dit geval geldt dus bij benadering dat de standaardafwijking van de mediaan normaal verdeeld is met standaardafwijking $1,25 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} = 1,25$ kV.

De keuringskarakteristiek kan, evenals bij de beantwoording van vraag b, bepaald worden door gebruik te maken van een tabel van de verdelingsfunctie van de normale verdeling. Het resultaat is in de bij het antwoord op vraag b gegeven figuur door de gestreepte lijn aangegeven.

d. De onjuiste interpretatie van het keuringsvoorschrift heeft tot gevolg dat de keuring minder scherp wordt. Het verschil is overigens niet groot.

6. a. We hebben bij de beoordeling van de verschillen tussen de controleurs zoals die uit overzicht III volgen, te maken met gepaarde waarnemingen. De te gebruiken toets kan daarom de tekentoets zijn, ook al omdat bij dit uit "aantallen" bestaande cijfermateriaal toetsen die op de normale verdeling gebaseerd zijn niet in aanmerking komen. Bij toepassing van de tekentoets blijkt dat er 11 weken zijn, waarin de uitkomst voor C_1 hoger is dan voor C_2, 1 week waarin voor C_2 meer foutieve exemplaren gevonden zijn. De hierbij behorende tweezijdige overschrijdingskans is 0,0063. De hypothese dat de verschillen tussen C_1 en C_2 uitsluitend door steekproefschommelingen zijn ontstaan moet dus verworpen worden wanneer men voor de toets, zoals inderdaad gebruikelijk is, een onbetrouwbaarheidsdrempel van op zijn minst 0,01 kiest.

b. In de beschouwde periode van 13 weken zijn voor C_1 in totaal $13 \times 3 \times 50 = 1950$ doorgelaten exemplaren onderzocht en daarbij waren 86 foutieve produkten. Hij heeft in totaal volgens overzicht I 260600 produkten gekeurd, waarvan er door hem volgens overzicht II 31771 zijn afgekeurd, zodat er 228829 zijn doorgelaten. Van deze laatste zijn er naar schatting $\frac{86}{1950} \times 228829$ ten onrechte goedgekeurd. Voor C_2 volgt op dezelfde wijze dat hij 276911 produkten in totaal heeft doorgelaten, waarvan er naar schatting $\frac{57}{1950} \times 276911$ hadden moeten worden afgekeurd. Een schatting van het percentage in de beschouwde periode ten onrechte doorgelaten produkten is dus

$$\frac{\frac{86}{1950} \times 228829 + \frac{57}{1950} \times 276911}{228829 + 276911} \times 100\% = 3,6\%.$$

c. Indien de partijen op aselecte wijze over de controleurs verdeeld zouden zijn, zou men verwachten dat per monteuse de verhouding tussen de aantallen door C_1 en C_2 gecontroleerde partijen ongeveer gelijk zou zijn aan de verhouding tussen de in totaal door hen gecontroleerde aantallen partijen (2606 en 3047). Uit de gegevens van overzicht I blijkt ook zonder toepassing van een statistische toets, dat dat bij lange na niet het geval is. Van een aselecte verdeling van de partijen over de controleurs kan dan ook niet worden gesproken.

d. Uit de overzichten I en II kunnen de percentages door de controleurs voor de verschillende monteuses gevonden foute produkten worden berekend:

	Percentage afgekeurde exemplaren		
Monteuse	C_1	C_2	Totaal
M1	7,8	8,2	8,0
M2	8,7	8,5	8,6
M3	8,1	8,5	8,5
M4	14,8	16,2	15,1
M5	13,0	18,0	13,9
M6	17,0	15,0	16,5
M7	8,1	9,7	9,1
M8	20,0	4,1	7,2
M9	9,0	9,5	9,4
M10	7,9	9,9	8,9

Er zijn drie monteuses (M4, M5 en M6) die een veel hoger percentage slechte produkten maken dan de overige monteuses. Dit zijn volgens overzicht I juist de monteuses waarvan C_1 een veel groter aantal partijen heeft gecontroleerd dan C_2. De bewering vindt dus inderdaad een zekere steun in de cijfers. Bewezen is hij daarmee echter niet; daarvoor zou een verder gaande analyse van meer gedetailleerd cijfermateriaal nodig zijn.

e. Een mogelijkheid tot fraude is de volgende: de controleur kan minder fouten opgeven dan hij gevonden heeft en zo bijvoorbeeld een bepaalde monteuse bevoordelen. Het opvallende verschil tussen het percentage fouten dat door C_1, respectievelijk C_2 gevonden is in het werk van monteuse M8, gecombineerd met het feit dat C_2 veel meer werk van M8 heeft gecontroleerd dan C_1, zou in die richting kunnen wijzen. Een nader onderzoek lijkt hier gewenst.

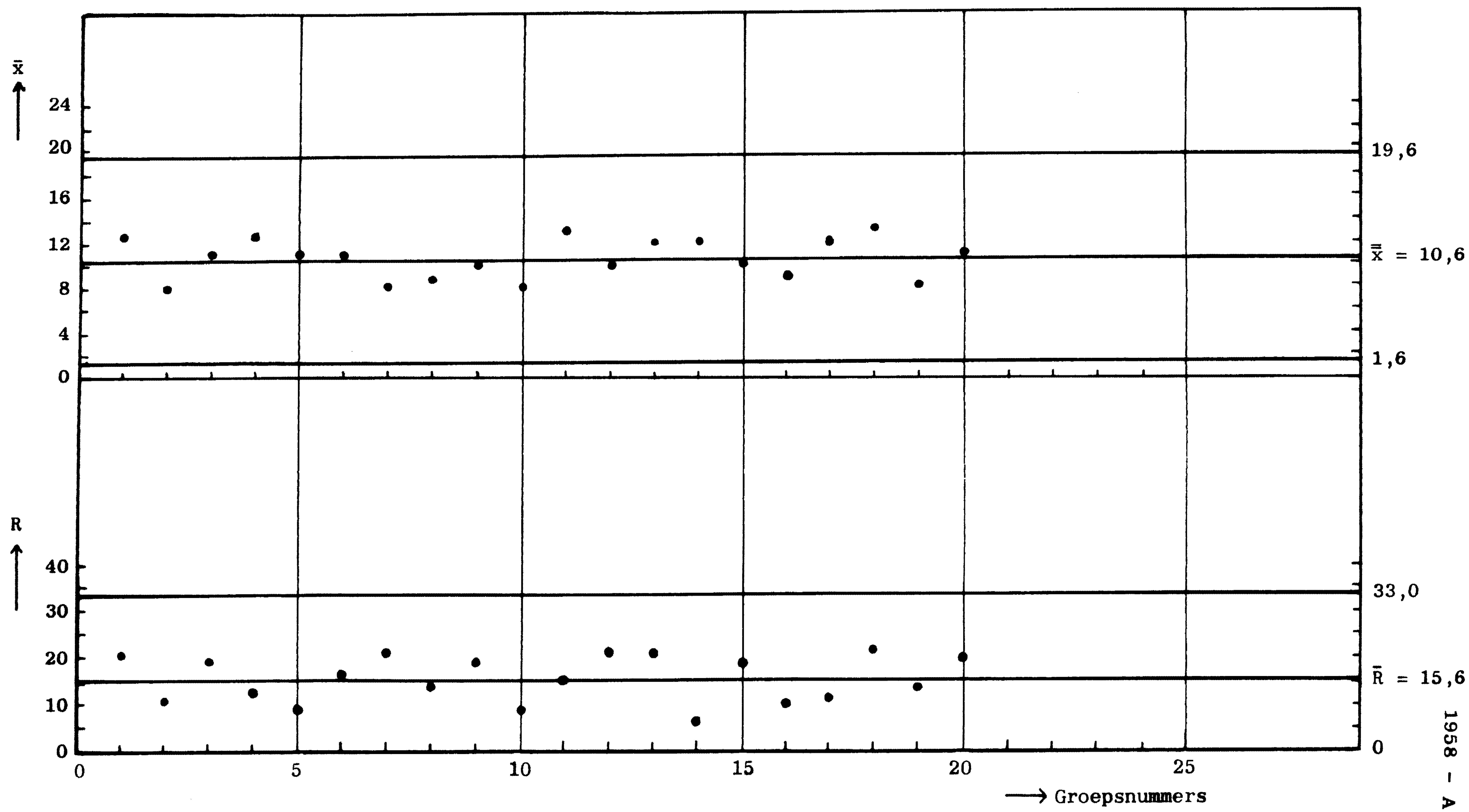
f. Uit de beschrijving van het systeem blijkt dat de afdelingschef met dit kwaliteitsbeleid geen bemoeienis heeft. Dat is onjuist: hij is daardoor minder in staat tot het nemen van maatregelen ter verbetering van de kwaliteit.

Examen 1958

1. a. Uit de gegeven tabel volgt voor het gemiddelde van alle waarnemingen $\bar{\bar{x}} = 10{,}6$ en voor de gemiddelde spreidingsbreedte van de twintig groepen $\bar{R} = 15{,}6$. Met behulp van de bekende tabellen voor de actiegrenzen op $\bar{x}$- en R-kaarten kan uit die gemiddelden de figuur van blz. A 10 geconstrueerd worden.

   b. Het valt op, dat zowel op de $\bar{x}$-kaart als op de R-kaart de punten te dicht bij de lijnen voor het gemiddelde liggen. De verklaring daarvan kan zijn, dat de veronderstelling waaronder de actiegrenzen voor de $\bar{x}$- en R-kaart werden berekend onjuist is. Bedoelde veronderstelling houdt in, dat de groepen waarnemingen beschouwd mogen worden als aselecte steekproeven uit evenzoveel normaal verdeelde populaties. In dit geval echter zijn bij iedere groep de waarnemingen afkomstig van de vijf gietstukken die uit de verschillende gietvormen van de matrijs komen. Indien er tussen de gietvormen van de matrijs verschillen bestaan, ontstaan er systematische verschillen tussen de vijf waarnemingen binnen iedere groep. Daardoor wordt de gemiddelde spreidingsbreedte groter, terwijl deze systematische verschillen, omdat ze in iedere groep op dezelfde wijze voorkomen, de variaties tussen de afzonderlijke spreidingsbreedten en de groepsgemiddelden niet beïnvloeden. De actiegrenzen liggen daardoor zowel op de $\bar{x}$- als op de R-kaart te ver uit elkaar.

   c. Voor een verdergaande analyse zou men moeten beschikken over de individuele x-waarden per groep, telkens met het nummer van de bijbehorende gietvorm. Men kan dan nagaan hoe groot de systematische verschillen tussen de 5 laaggemiddelden zijn. Indien deze systematische verschillen inderdaad aanwezig blijken kan dat verschijnsel het gevolg zijn van verschillende technische oorzaken. Het meest voor de hand liggend is wel het bestaan van verschillen in afmeting tussen de vijf gietvormen van de matrijs.



1958 - A 10

Vraagstuk 1 (1958): vraag a

Controlekaart van gemiddelde ($\bar{x}$) en spreidingsbreedte (R) van afmeting x voor 20 series van 5 gietstukken

(eenheid: 0,1 mm)

2. a. In het ontwerp V1047 "Weergeven van waarnemingsreeksen", van de Hoofdcommissie voor Normalisatie in Nederland zijn regels voor het afronden van meetwaarden te vinden. Als bovengrens voor het afrondingsinterval is daar gekozen 0,6 s.
Voor de waarnemingen geldt in dit geval dus dat het afrondingsinterval hoogstens $0{,}6 \times 13{,}35 \approx 8$ mag zijn. Men mag dus zeker op gehele eenheden en, zo men wil, zelfs op vijf eenheden afronden.
De bovengrens voor het afrondingsinterval voor het gemiddelde is:

$$0{,}6 \times \frac{13{,}55}{\sqrt{32}} \approx 1{,}4.$$

Het gemiddelde kan dus worden afgerond tot $\bar{x} = 147$. Voor de bovengrens van het afrondingsinterval voor de standaardafwijking geldt volgens het bovengenoemde ontwerp V1047:

$$\frac{0{,}4 . s}{\sqrt{31}} \approx 1.$$

De standaardafwijking kan dus tot $s = 13$ worden afgerond.

b. De spreidingsbreedten zijn voor de acht proeflapjes gelijk aan:

11,4 21,0 17,5 13,5 37,7 13,1 12,7 15,3.

Het gemiddelde is $\bar{R} = 17{,}8$, waaruit als schatting voor de standaardafwijking per lapje volgt:

$$s_R = 0{,}486 \cdot 17{,}8 \approx 9.$$

Het verschil tussen de gevonden waarden $s = 13$ en $s_R = 9$ kan verklaard worden uit het feit dat s_R inderdaad een schatting is voor de standaardafwijking per lapje, terwijl in s ook eventuele verschillen in stijfheid tussen de proeflapjes tot uiting kunnen komen, die dan kunnen leiden tot een grotere waarde voor s dan voor s_R. Blijkbaar zijn dergelijke verschillen in stijfheid tussen op grotere afstand gelegen lapjes uit één rol weefseldoek hier aanwezig. Dat kan, desgewenst, nader onderzocht worden met behulp van een variantie-analyse. Het resultaat, berekend uit de op één eenheid afgeronde waarden, is:

	Vrijheids-graden	Som van kwadraten van afwijkingen	Gemiddeld kwadraat
Tussen lapjes	7	3775.5	539.4
Binnen lapjes	24	1765.2	73.55
Totaal	31	5540.7	

De uit deze tabel berekende F-waarde is 7,33. De overschrijdingskans voor deze F-waarde blijkt (bij 7 tegen 24 vrijheidsgraden) kleiner te zijn dan 0,001, zodat de variantie-analyse de eerder getrokken conclusie bevestigt. Uiteraard moet bij het trekken van conclusies uit de variantie-analyse worden aangenomen dat de acht groepen getallen aselecte en onafhankelijke steekproeven zijn uit normaal verdeelde (althans bij benadering normaal verdeelde) populaties die alle dezelfde standaardafwijking hebben.

c. De methode is onjuist. In de eerste plaats zou bij de berekening de standaardafwijking door $\sqrt{32}$ gedeeld moeten worden, in de tweede plaats is, vanwege het bestaan van systematische verschillen tussen de lapjes, het gebruik van de waarde s = 13 niet gerechtvaardigd.
De eenvoudigste methode ter berekening van een betrouwbaarheidsinterval voor het rolgemiddelde is de volgende:
Bereken per proeflapje het lapjesgemiddelde. De 8 gemiddelden mogen dan beschouwd worden als een gewone steekproef van 8 waarden uit een populatie van lapjesgemiddelden (van de hier beschouwde soort, dus berekend uit 4 metingen per lapjes), waarvan het totale gemiddelde uiteraard weer gelijk is aan het te schatten rolgemiddelde. Uit deze acht waarden worden dan de standaardafwijking s_1 en het gemiddelde $\bar{x}$ berekend. Natuurlijk is $\bar{x} = 147$, terwijl s_1 gevonden kan worden uit het gemiddelde kwadraat "tussen lapjes" dat in de variantie-analyse in het antwoord op vraag b gegeven is, n.l. als:

$$s_1 = \sqrt{\frac{539.4}{4}} \simeq 12.$$

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het rolgemiddelde μ kan dan gebaseerd worden op de t-verdeling met 7 vrijheidsgraden:

$$\bar{x} - 2{,}36s_1 < \mu < \bar{x} + 2{,}36s_1$$

of:

$$118 < \mu < 176.$$

Bij deze berekening is weer aangenomen dat de vier metingen van elke groep een aselecte steekproef vormen uit een normaal verdeelde (of bij goede benadering normaal verdeelde) populatie met een standaardafwijking die voor alle acht populaties dezelfde is. Bovendien is aangenomen dat de proeflapjes een aselecte steekproef vormen uit de rol weefseldoek en dat voor de populatie van gemiddelde stijfheden van proeflapjes uit die rol ook een normale verdeling geldt.

3. a. Geef het totaal aantal flesjes dat op een dag onderzocht moet worden aan door N en noem het aantal groepen en het aantal flesjes per groep respectievelijk k en n.
De kans dat een aselect uit de populatie van N flesjes getrokken steekproef van n flesjes geen besmette exemplaren bevat, mag, zolang N zeer groot is t.o.v. n, benaderd worden door

$$P_0 = (1-p)^n.$$

Omdat voor p de kleine waarde 0,01 gegeven is, kan P_0 eventueel berekend worden met behulp van de tabel van de Poissonverdeling met parameter 0,01n.
De totale kosten C (in guldens) die voor de bepaling van het optimum van belang zijn, zijn:

$$C = 2{,}5k + 0{,}5k + k(1-P_0)\cdot 0{,}5n.$$

De gemiddelde kosten per flesje moeten zo klein mogelijk zijn.
Noemen we die $c = \frac{C}{N}$, dan is:

$$c = \frac{C}{N} = \frac{C}{k \cdot n} = \frac{3}{n} + 0{,}5(1-P_0).$$

Van de functie

$$y = \frac{3}{n} - 0{,}5\ P_0$$

moet dus nagegaan worden voor welke waarde van n zij minimaal is. Die waarde van n kan door systematisch proberen gevonden worden door eerst y te berekenen voor een aantal met stappen van 10 opklimmende waarden van n. In de volgende tabel zijn de resultaten van die berekening gegeven voor n = 10, 20, 30, 40, 50. Voor de bepaling van P_0 is daarbij de Poisson-tabel gebruikt.

n	y
10	-0,1525
20	-0,2595
30	-0,2705
40	-0,2600
50	-0,2435

Uit deze resultaten blijkt dat het optimum in de buurt van n = 30 moet liggen. Berekeningen voor waarden van n in de omgeving van n = 30, waarbij dan $(1-p)^n$ met behulp van een logarithmentafel is berekend, zijn in de volgende tabel gegeven:

n	y
25	-0,2690
26	-0,2697
27	-0,2702
28	-0,2703
29	-0,2703
30	-0,2700

Het minimum van y blijkt te liggen bij $n = 28$. De invloed van n in het gebied tussen $n = 25$ en $n = 30$ is zeer klein.

b. Men mag verwachten dat de optimale grootte van de groepen toeneemt naarmate p kleiner wordt. Als $p = 0$ is $P_0 = 1$ en dus is dan

$$c = \frac{3}{n}.$$

De optimale waarde van n is dan N. Het nemen van één groep is optimaal. Bij $p = 0,01$ is $n = 28$ optimaal. Als $p = 1$ is $n = 1$ de beste waarde, ofschoon dat niet direct uit de in het antwoord op vraag a gegeven formule voor de kosten blijkt: als $p = 1$ is de $P_0 = 0$ en volgens de formule zou dan

$$c = \frac{3}{n} + 0,5$$

en c zou afnemen met n. Natuurlijk is $n = 1$ toch optimaal. Er is namelijk een interval $p_0 < p \leqq 1$, waarbij de beste werkwijze is geen groepen te nemen, maar direct over te gaan tot het onderzoeken van alle flesjes afzonderlijk. De kosten zijn dan:

$$C = 0,5\ N$$

en de kosten per flesje:

$$c = 0,5.$$

Zolang nu p zodanige waarden heeft dat voor iedere waarde van n geldt:

$$0,5 \leqq \frac{3}{n} + 0,5(1 - P_0),$$

is de beste procedure om direct over te gaan tot het onderzoeken van alle flesjes.

Uit de ongelijkheid volgt:

$$P_0 \leqq \frac{6}{n}$$

of, bij benadering:

$$\frac{n(1-p)^n}{6} \leqq 1$$

of:

$$p \geqq 1 - \sqrt[n]{\frac{6}{n}}.$$

De functie $1 - \sqrt[n]{\frac{6}{n}}$ is maximaal als $n = 6e$. Aangezien p voor iedere waarde van n groter moet zijn dan $1 - \sqrt[n]{\frac{6}{n}}$, moet dus, als het direct overgaan tot het onderzoeken van alle flesjes het voordeligst zal zijn:

$$p \geqq 1 - \sqrt[6e]{\frac{1}{e}}$$

of

$$p \geqq 0{,}059.$$

Voor $0{,}059 \leqq p < 1$ is dus $n = 1$ inderdaad de beste keuze, mits men het vormen van groepen flesjes geheel achterwege laat. Voor $0 \leqq p < 0{,}059$ neemt de optimale waarde van n af met toenemende p.

<u>Opmerkingen</u>:

a. Van de kandidaten wordt het bovenstaande antwoord niet verwacht. Als antwoord waren de eerste vijf zinnen van het hier gegeven antwoord voldoende.

b. De in dit antwoord gegeven berekeningen zijn slechts bij benadering goed: er is geen rekening gehouden met het feit dat de groepen uit een eindige populatie worden getrokken en bij de berekeningen is n als een continue variabele gehanteerd. Desondanks mag aangenomen worden dat de gevonden grenswaarde van 0,059 de werkelijke grenswaarde, zolang N niet te klein is, goed benadert.

4. a. 1. Onjuist. Als in de punten op de controlekaart een systematisch verloop is te bespeuren, wijst dat juist op een statistisch niet beheerst proces.

2. Juist. Per definitie zijn de controlegrenzen zo vastgesteld.
3. Onjuist. Tolerantiegrenzen zijn technische grenzen voor een eigenschap van een produkt. Er is geen reden om te veronderstellen dat deze grenzen samenvallen met de grenzen op de controlekaart.
4. Juist. Bij een statistisch beheerst proces mag worden aangenomen dat de metingen aan opeenvolgende produkten beschouwd kunnen worden als waarnemingen aan onderling onafhankelijke stochastische variabelen die alle dezelfde verdeling hebben. Dat houdt in dat de uit metingen aan vier opeenvolgende produkten op de gebruikelijke wijze berekende variantie een zuivere schatter is voor de variantie van het proces of anders gezegd, van "alle geproduceerde exemplaren".

b. Wanneer het "Process Average $^{o}/o$" bekend is, geven de tabellen van Dodge en Romig het keuringsschema waarbij voor partijen met een percentage foutieve produkten gelijk aan dat "Process Average $^{o}/o$" de keuringskosten veroorzaakt door het keuren zelf <u>en</u> het sorteren van de afgekeurde partijen minimaal zijn.

c. Het controlepunt is het percentage foutieve exemplaren in de partij waarbij de kans op goedkeuring bij toepassing van het steekproef voorschrift 0,50 is.

d. Men zal gebruik van de mediaan overwegen:
1. indien het rekenwerk dat aan de bepaling van het gemiddelde verbonden is bezwaarlijk is;
2. indien men de invloed van uitschieters wil verminderen;
3. indien de uitkomsten in volgorde van grootte ter beschikking komen, zoals bijvoorbeeld bij duurproeven vaak het geval is.

5. a. De verschillen tussen de meetresultaten van tabel 1 en tabel 2 kunnen, behalve door de onnauwkeurigheid van het apparaat bij de machine, ook veroorzaakt zijn, doordat het betreffende apparaat en dat in de meetkamer op een verschillend niveau zijn ingesteld. Inderdaad blijkt, dat voor 8 van de 10 assen in tabel 2 een hoge-

re waarde is genoteerd dan in tabel 1. Voor één as is de waarde in tabel 2 lager dan die in tabel 1, voor één as zijn de beide waarden gelijk. Als beide apparaten op hetzelfde meetniveau zouden zijn ingesteld, zou de kans om voor eenzelfde as in tabel 2 een lagere waarde te vinden dan in tabel 1 gelijk zijn aan $\frac{1}{2}$. Deze hypothese kan met behulp van de tabel voor de tekentoets getoetst worden en blijkt dan bij gebruik van een onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05 (tweezijdig) verworpen te moeten worden. Er is dus wel degelijk reden om ook een verschil in instelling als oorzaak van het optreden van verschillen aan te nemen.

b. Het maximale verschil tussen twee metingen van één as, zoals dat gevonden is bij deze reeks van tien waarnemingen, is <u>geen</u> goede maat voor de reproduceerbaarheid van de metingen. Men mag namelijk verwachten dat dat maximale verschil groter zal zijn, naarmate het aantal paren waarnemingen groter wordt. Een goede maat voor de reproduceerbaarheid behoort de meetmethode te karakteriseren en niet afhankelijk te zijn van het aantal waarnemingen. Bovendien kan in dit geval het maximale verschil ook door een eventueel optredend verschil in meetniveau van de beide reeksen worden beïnvloed en dergelijke verschillen hebben niets met reproduceerbaarheid (in engere zin) te maken. Een juiste maat voor de reproduceerbaarheid wordt hier verkregen door eerst de verschillen tussen de aan dezelfde as uitgevoerde metingen uit tabel 1 en tabel 3 te bepalen. Deze verschillen (in mm) zijn hier:

0,00 0,01 0,00 0,02 0,02 -0,02 0,01 -0,03 -0,02 0,01

Het gemiddelde verschil is 0. De variantie is $\frac{0{,}0028}{9}$. De genoemde goede maat voor de reproduceerbaarheid van een meting wordt verkregen door uit deze variantie de standaardafwijking van de meetfouten te berekenen:

$$\sqrt{\frac{0{,}0028}{2.9}} = 0{,}012 \text{ mm.}$$

c. Er is inderdaad een verbetering bereikt, niet doordat het nieuwe apparaat een betere reproduceerbaarheid heeft, maar doordat de instelverschillen met het apparaat van de meetkamer kleiner zijn geworden. Vermoedelijk zou men dat ook door een betere instelling van het oude fabrieksapparaat hebben kunnen bereiken.

6. a. Indien sprake zou zijn van een Poissonverdeling, zouden van de gegeven frequentieverdeling het gemiddelde en de variantie, behoudens toevalsschommelingen, aan elkaar gelijk moeten zijn.
Van de gegeven frequentieverdeling bedraagt het gemiddelde en de variantie respectievelijk 683 en 238×10^2. De variantie is zoveel groter dan het gemiddelde dat zonder toetsing kan worden geconcludeerd, dat er in dit geval geen sprake is van een Poissonverdeling.

b. Als de verdeling een Poissonverdeling zou moeten zijn, zou tenminste voldaan moeten zijn aan de eis dat gedurende de periode van onderzoek de kans op het binnenkomen van een order van de tijd onafhankelijk is. Dat lijkt echter zeer onwaarschijnlijk, gezien de lange periode van onderzoek (242 werkdagen, dus bijna een jaar) en de aard van het bedrijf. Verwacht mag worden dat bijvoorbeeld in de maanden september tot en met november het aantal binnenkomende orders gemiddeld groter zal zijn dan in andere maanden in verband met het naderen van de maand december met zijn feestdagen. Ook zouden er andere seizoeneffecten kunnen zijn, als het bedrijf overwegend zomer- of winterspeelgoed fabriceert.

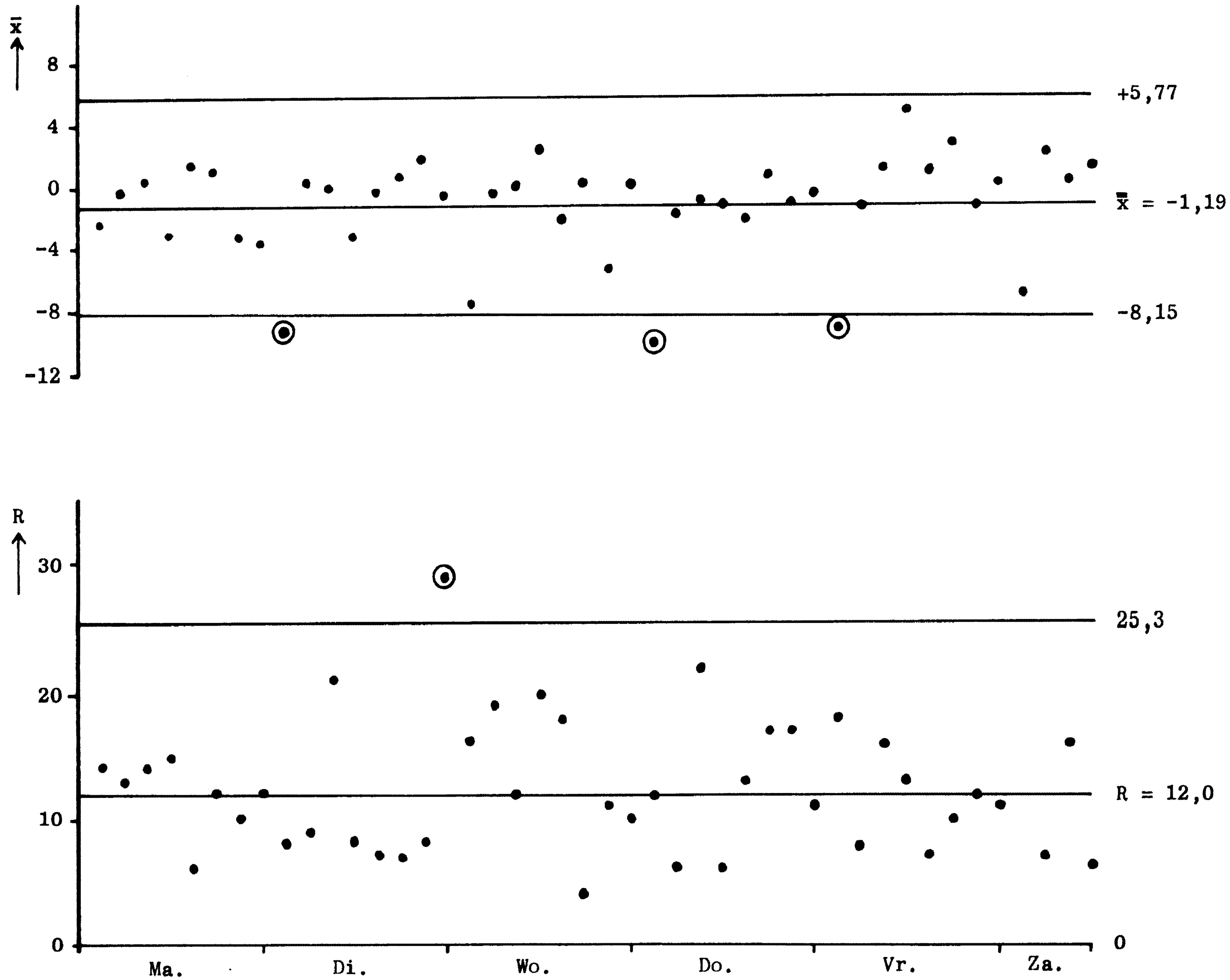
Examen 1959

1\. a. Uit de gegevens van de tabel is te berekenen

$\bar{R} = 12,3$ en $\bar{\bar{x}} = -1,19$. Uit de tabellen voor controlekaarten volgen dan de regelgrenzen voor $\bar{x}$: $-1,19 \pm 0,58 \cdot 12,3$ of $-8,32$ en $+5,94$ en die voor R: 0 en $2,11 \cdot 12,3 = 26,0$. De met deze grenzen te construeren controlekaart is op blz. A21 gegeven.

Op de R-kaart valt één waarneming boven de hoogste regelgrens. Men kan daarvoor corrigeren door de gegevens van die steekproef (de laatste op dinsdag) weg te laten en $\bar{R}$ opnieuw te berekenen. Veel zin heeft dat echter niet.

b\. Op de $\bar{x}$-kaart liggen drie punten beneden de laagste regelgrens. Al deze drie punten behoren bij steekproeven die om 8 uur 's morgens genomen zijn en wel op dinsdag, donderdag en vrijdag. Ook op woensdag en zaterdag zijn de gemiddelden van die eerste steekproef laag, al liggen de bijbehorende punten dan ook niet beneden de regelgrens. Vermoedelijk is er dus een "aanloop effect" bij het begin van de dag, waardoor de dikte van de slijpstenen dan te klein is. Voor de andere uren ligt de gemiddelde dikte vrij goed op de nominale maat: als de gegevens van de eerste steekproeven van iedere dag worden weggelaten is de gemiddelde afwijking van die nominale maat over alle overblijvende waarnemingen $-0,19$ (in 0,01 mm), dus $-0,0019$ mm. Ook op de standaardafwijking van het proces is niets aan te merken: uit $\bar{R} = 12,3$ volgt, onder de veronderstelling dat de dikte normaal verdeeld is, een schatting voor de standaardafwijking $s = 0,053$ mm en dat is voldoende klein ten opzichte van de gestelde toleranties. Tenslotte: uit deze gegevens kan niet geconcludeerd worden tot een invloed van het vervangen van de slijpsteen, zoals blijkt uit de volgende tabel waarin de gemiddelden zijn gegeven van de steekproefwaarden vlak vòòr en vlak na de vervanging.



<u>Dikte van geslepen ringen</u>

Controlekaart voor gemiddelde ($\bar{x}$) en spreidingsbreedte (R) voor steekproeven van 5.

(Afwijkingen in 0,01 mm t.o.v. nominale maat)

<u>Figuur bij 1959 - 1a</u>

	Gemiddelde dikteafwijking (in 0,01 mm)	
	Voor vervanging	Na vervanging
Maandag	-3,0	+1,6
Woensdag	+0,2	-5,2
Vrijdag	+1,0	+2,6

De standaardafwijking van deze gemiddelden, gebaseerd op de bovengenoemde schatting van de standaardafwijking in dikte van 0,053 mm (of, in 0,01 mm, 5,3), is 2,4. Van significante verschillen tussen de gemiddelden vòòr en na vervanging is, zoals gemakkelijk is na te gaan, geen sprake.

c. Indien de produktie van het eerste uur wordt gesorteerd, kan bij de overige produktie met deze procescontrole worden volstaan.

2. a. De bedrijfsleider heeft 150 minuten tijd om de afstand af te leggen. Uit de tabellen voor de normale verdeling is af te leiden dat hij een kans heeft, gelijk aan 0,023 om te laat te komen als hij route I kiest. Voor route II is die kans 0,0000003. Als hij de kans van 0,023 te groot vindt zal hij route II kiezen.

b. De bedrijfsleider heeft nu nog slechts 120 minuten ter beschikking. Als hij route I neemt, heeft hij een kans 0,50 om te laat te komen, voor route II is die kans 0,9999997, dus bijna 1. Hij zal daarom vrijwel zeker route I kiezen.

c. Hij heeft nu 165 minuten ter beschikking. De kansen om te laat te komen zijn nu bij beide routes klein. Hij zou, omdat route I aanzienlijk korter is, uit kostenoverwegingen die route kunnen kiezen.

3. Er zijn twee conclusies:

a. De oude ovenbaas behaalt met de nieuwe oven slechtere resultaten dan met de oude.

b. De assistent bereikt thans met de oude oven betere resultaten dan de oude ovenbaas vroeger.

Bij de beoordeling van deze conclusies kan men het volgende bedenken. De glazuurfouten zijn oppervlakte-fouten. Het lijkt niet onredelijk om te veronderstellen dat het aantal fouten per oppervlakte-eenheid (bijvoorbeeld per cm^2) een Poissonverdeling volgt en dat die Poissonverdeling voor de drie soorten borden hetzelfde gemiddelde m heeft. Dat gemiddelde kan natuurlijk wel afhangen van de oven waarin de borden gebakken zijn. Voor de grote borden zal nu het aantal fouten per bord ook verdeeld zijn volgens Poisson en wel met parameter $\frac{\pi}{4} \times 625 \times m$. De kans bij een groot bord op 0 fouten (dus op een goed bord) is dan:

$$e^{-\frac{\pi}{4} \times 625 \times m}.$$

De waarde van m voor grote borden (in de nieuwe oven gebakken) kan geschat worden uit het gegeven dat 70% van die borden goed is:

$$e^{-\frac{\pi}{4} \times 625 \times m} = 0{,}70.$$

Hieruit volgt met behulp van een logarithmentafel of met behulp van een tabel of nomogram voor de Poissonverdeling:

$$m = 0{,}00073$$

en voor het gemiddelde aantal fouten per groot bord een waarde 0,36. Voor de ontbijtbordjes en de schoteltjes zou het gemiddelde aantal fouten per stuk respectievelijk gelijk zijn aan:

$$\frac{441}{625} \times 0{,}36 = 0{,}25 \quad \text{en} \quad \frac{225}{625} \times 0{,}36 = 0{,}13.$$

De fractie goede exemplaren voor deze typen zou voor de nieuwe oven dan zijn:

$$e^{-0{,}25} = 0{,}78 \quad \text{en} \quad e^{-0{,}13} = 0{,}88.$$

Het gemiddelde percentage goede exemplaren, als in de nieuwe oven alle drie de typen zouden worden gebakken, zou dus onder de gemaakte veronderstellingen zijn

$$\frac{70 + 78 + 88}{3} = 78{,}7\%.$$

In de oude oven was dat volgens het vraagstuk ongeveer 75%.
Het lijkt te gewaagd om op grond van de verstrekte gegevens aan te nemen dat de nieuwe oven slechter is dan de oude: er is een redelijke veronderstelling mogelijk waardoor het verschil in uitvalpercentage verklaard kan worden, uitsluitend uit het verschil in grootte van de in twee ovens gebakken borden. Daarmee is uiteraard niet bewezen dat de resultaten met de nieuwe oven niet slechter zijn, slechts is aangetoond dat deze gegevens alleen de getrokken conclusie niet voldoende rechtvaardigen.
Wat betreft de tweede conclusie: in de oude oven wordt nu 25%, respectievelijk 15%, uitval gevonden voor de ontbijtbordjes en de schoteltjes. Daaruit kan berekend worden op dezelfde wijze en onder dezelfde veronderstellingen als hiervoor dat het aantal fouten per cm^2 voor deze typen naar schatting 0,00083 en 0,00092 bedraagt. Het gemiddelde van de twee gevallen is 0,000875 en voor de grote borden in de oude oven in deze toestand gebakken zou het gemiddelde aantal fouten per produkt 0,43 zijn geweest. Daarbij behoort een percentage uitval:

$$(1 - e^{-0{,}43}) \cdot 100 = 34\%.$$

Als in de oude oven nog steeds grote borden zouden worden gebakken, zou het uitvalpercentage naar schatting $\frac{15 + 25 + 34}{3} = 24{,}7\%$ bedragen en dat is ongeveer gelijk aan het vroeger gemaakte uitvalpercentage. Ook de tweede conclusie vindt in de verstrekte gegevens alleen niet voldoende steun.

<u>Opm</u>. In de opgave werd gesproken over gelijke aantallen schotels, bordjes en borden in de af te leveren serviezen. Dit zou op grond van bovengenoemde schattingen van de uitvalpercentages

inhouden, dat men meer borden en minder schotels dan bordjes in de oven kan plaatsen. Houdt men hiermee rekening dan vindt men voor het geschatte percentage goede exemplaren voor de nieuwe oven in plaats van 78,7% nu 78,0% en het geschatte percentage uitval in de oude oven in plaats van 24,7% nu 25,4%. Deze verschillen hebben uiteraard geen invloed op het betoog.

4. a. Omdat het mogelijk is dat het uitvalpercentage voor de beide machines verschillend is en ook omdat de invloed van de technische ingreep bij de beide machines wel eens niet dezelfde zou kunnen zijn, moet de invloed van die wijziging voor de beide machines apart worden onderzocht. Voor machine T8 was het resultaat:

	Goedgekeurd	Afgekeurd	Totaal
Voor de wijziging	144	56	200
Na de wijziging	159	41	200
Totaal	303	97	400

Bij de gegeven randfrequenties en als de wijziging geen werkelijke invloed heeft, kan nu het aantal afgekeurde exemplaren nà de wijziging beschouwd worden als een waarneming aan een bij benadering normaal verdeelde stochastische variabele met verwachting 48,5 en standaardafwijking $\sqrt{\frac{303\cdot 97\cdot 200\cdot 200}{400\cdot 400\cdot 399}} = 4{,}29$. De nulhypothese dat de wijziging geen invloed heeft kan, omdat alleen vermindering van het uitvalpercentage interessant is, onder aanbrenging van de continuiteitscorrectie, getoetst worden door de linker overschrijdingskans van de standaard normale verdeling te berekenen bij:

$$\frac{(41-48{,}5) + 0{,}5}{4{,}29} = -1{,}63.$$

Deze overschrijdingskans is 0,052. Indien zoals veelal gebruikelijk is, getoetst wordt met onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05, kan de nulhypothese dus formeel niet verworpen worden.

Voor machine T9 vindt men op precies dezelfde wijze een linker overschrijdingskans 0,104 bij

$$\frac{(24-29) + 0,5}{3,58} = -1,27.$$

Ook voor T9 kan de nulhypothese dus niet verworpen worden.
Ondanks deze resultaten kan geconstateerd worden dat bij beide machines een tendens tot verbetering bestaat. Men kan de resultaten voor beide machines combineren. De grootheid

$$\frac{41-48,5}{4,29} + \frac{24-29}{3,58} = -3,17$$

kan namelijk onder de nulhypothese beschouwd worden als waarneming aan een normaal verdeelde grootheid met gemiddelde 0 en standaardafwijking $\sqrt{2}$. De linker overschrijdingskans bij -3,17 is 0,013. Op grond van de resultaten van beide machines tezamen kan dus toch tot verwerping van de nulhypothese geconcludeerd worden.
Opgemerkt moet worden dat bij de combinatie van de resultaten de continuïteitscorrectie achterwege moet blijven; die wordt slechts gebruikt bij de analyse van één 2 × 2-tabel.
De getrokken conclusie is overigens slechts geldig als mag worden aangenomen, dat voor beide machines de vòòr en na de wijziging onderzochte produkten verkregen zijn door aselecte trekking uit de produktie. Omdat de onderzochte produkten op één dag van de machines zijn gekomen, houdt die aanname ook in dat het produktieproces statistisch beheerst is, dus dat er van dag tot dag slechts toevallige variaties in het uitvalpercentage optreden.

b. Bij het onderzoek wordt dezelfde methode gebruikt als onder a. Alleen moet hier, omdat gevraagd wordt naar een verschil zonder meer, tweezijdig worden getoetst. De overschrijdingskansen, berekend uit de resultaten vòòr en na de wijziging apart, worden in de tabel van de normale verdeling gevonden bij $\frac{|34-45|-0,5}{4,18} =$ $= -2,52$ en $\frac{|24-32,5|-0,5}{3,69} = -2,17$. Ze zijn 0,010 en 0,030. Indien getoetst wordt met onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05 moet dus de hypothese dat de uitvalpercentages voor de twee machines gelijk zijn verworpen worden: zowel vòòr als na de wijziging werkt machine T9 beter.

c. De beslissing zal gebaseerd moeten zijn op kostenoverwegingen, waarbij de kosten van de meer bewerkelijke produktie moeten worden afgewogen tegen de kosten van meer uitval.

5. a. Het gemiddelde en de standaardafwijking van de gegevens kunnen volgens de bekende formules, onder gebruikmaking van de zgn. "verkorte methode", berekend worden. Het resultaat is:

$$\bar{x} = 221 \quad \text{en} \quad s = 10{,}6.$$

Het betrouwbaarheidsinterval voor de verwachting kan berekend worden met behulp van de tabel van Student's t. Voor t wordt bij 24 vrijheidsgraden en een tweezijdige overschrijdingskans 0,05 in de tabel de waarde 2,06 gevonden. Het betrouwbaarheidsinterval is:

$$221 - 2{,}06 \cdot \frac{10{,}6}{\sqrt{25}} < \mu < 221 + 2{,}06 \cdot \frac{10{,}6}{\sqrt{25}}$$

of

$$216{,}6 < \mu < 225{,}4.$$

b. Er zijn een aantal waarnemingen die een hechtsterkte van meer dan 240 g zouden hebben opgeleverd, maar waarvoor geen exacte uitkomst kon worden gegeven omdat het garen is gebroken. Het berekenen van het rekenkundig gemiddelde van de waarnemingen kan daarom niet tot een goede schatting van de verdeling leiden. Een goede schatting kan in dit geval verkregen worden door de mediaan van de uitkomsten te bepalen. Deze is (er zijn dertig proefstukken gebruikt): $\frac{231+232}{2} = 231{,}5$ g. Een schatting van de standaardafwijking kan gevonden worden uit schattingen voor de percentielen van de verdeling: uit de gegevens blijkt bijvoorbeeld dat 30% van de hechtsterkten groter was dan 240 g en 30% kleiner dan 227 g. Dat zijn dus schattingen voor het zeventigste, respectievelijk dertigste percentiel van de verdeling. Bij een normale verdeling met verwachting μ en standaardafwijking σ zijn die percentielen $\mu + 0{,}524\sigma$ en $\mu - 0{,}524\sigma$. Een schatting voor σ is dus:

$$\frac{240-227}{2 \cdot 0{,}524} = 12{,}4 \text{ g.}$$

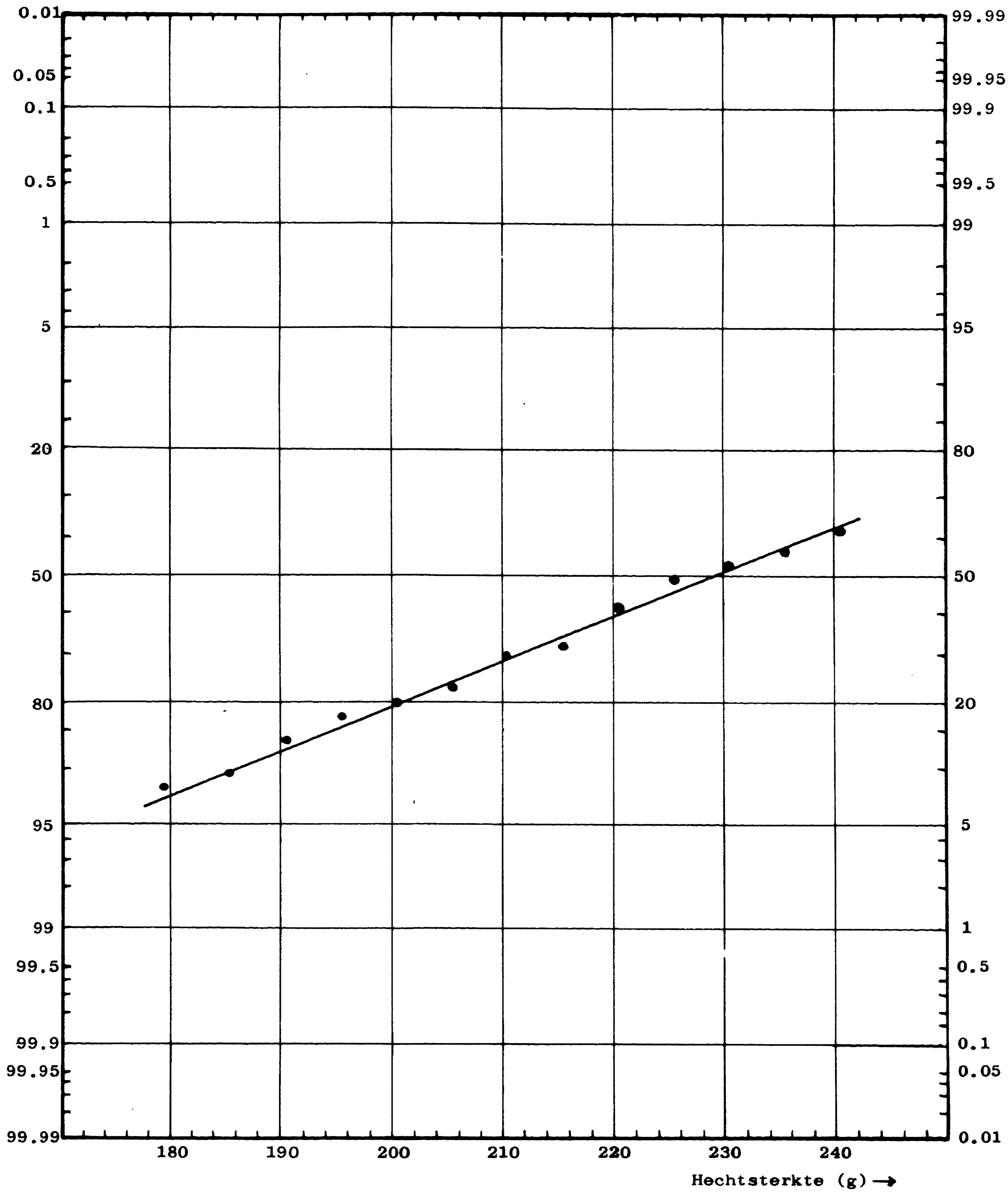
Opmerking: er zijn voor gevallen als het bovenstaande vele verschillende schatters voor μ en σ bekend. Daarvan zijn er een aantal die beter zijn dan de in het antwoord gegeven schatters. In het examenprogramma zijn die methoden echter niet opgenomen.

c. Van de uitkomsten wordt een frequentietabel gemaakt, waarbij dan de beide uiterste klassen zijn die met sterkten kleiner dan 180 g (8%) en die met sterkten groter dan 240 g (37,6%). De cumulatieve frequentieverdeling wordt op waarschijnlijkheidspapier uitgezet. Door de punten op dat papier wordt zo goed mogelijk een lijn getrokken (zie de figuur op blz.A29). Uit deze lijn worden als schattingen voor verwachting en standaardafwijking van de normale verdeling gevonden 228 g, respectievelijk 32,5 g.

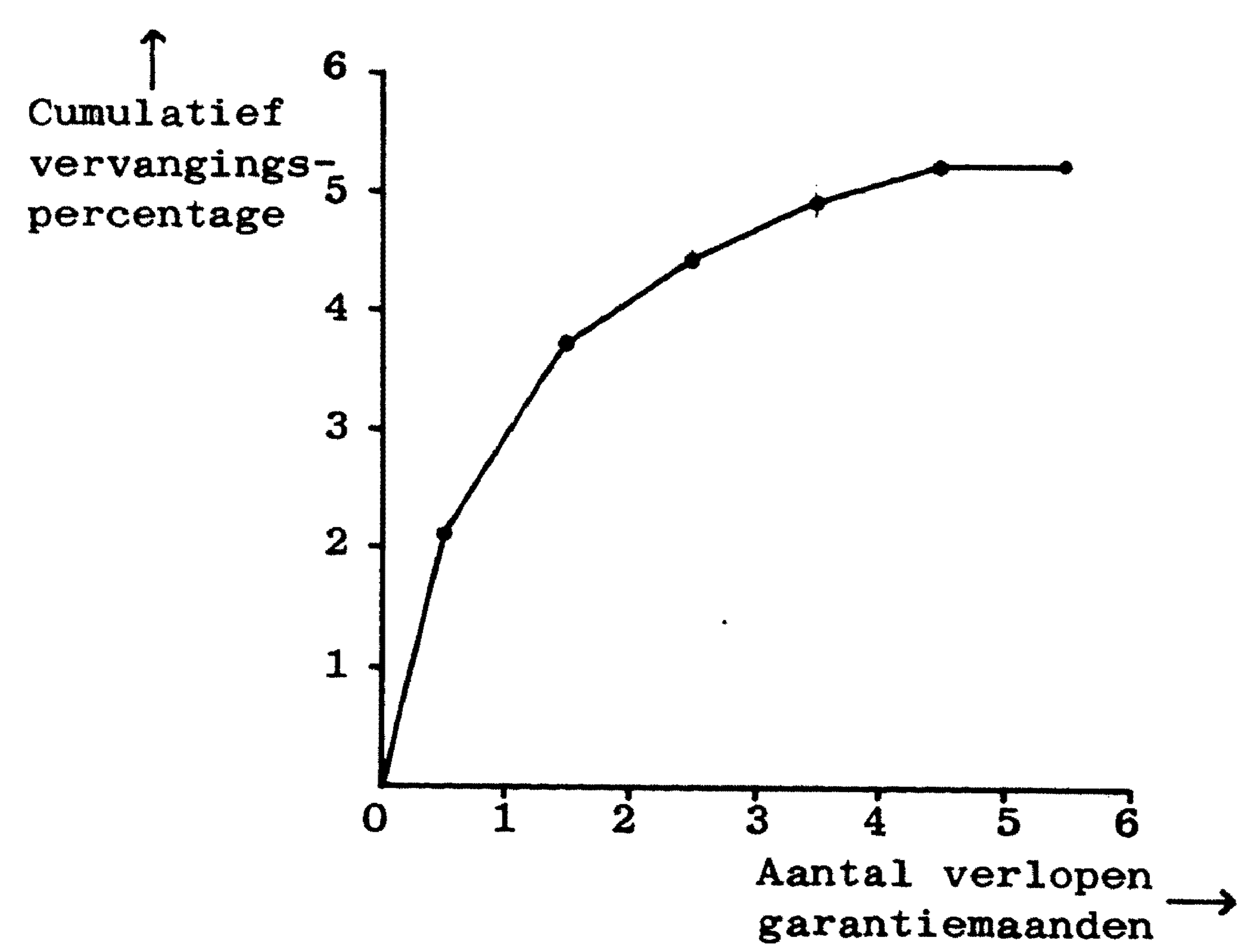
6. a. De conclusie is onjuist: de in de laatste maanden afgeleverde produkten hebben nog een aantal "garantie-maanden" voor de boeg en er is dus een kans dat ook daarvan nog een deel zal moeten worden vervangen. Het vervangingspercentage is dus te laag geschat.
De gegeven methode ter berekening van het vervangingspercentage zou wel juist kunnen zijn als het produkt al geruime tijd (dus véél langer dan 8 maanden) zou zijn verkocht en als het aantal per maand afgeleverde produkten en de kans op het afleveren van een slecht produkt van de tijd onafhankelijke constanten zouden zijn.

b. Uit tabel 2 blijkt dat van de 14253 afgeleverde produkten $9 + 32 + 32 + 38 + 41 + 47 + 42 + 57 = 298$ produkten vervangen zijn in de maand waarin ze zijn afgeleverd. Dit is een percentage van 2,1%. Als aangenomen mag worden dat over de acht produktiemaanden de kans op het maken van een slecht produkt constant is

Figuur bij 1959 - 5c



geweest en als de vervangingskromme over een periode van één maand als ongeveer rechtlijnig mag worden aangenomen geeft dat percentage de waarde aan die de kromme moet hebben na een halve maand. Daarbij moet dan bovendien worden aangenomen dat de afleveringstijdstippen gelijkmatig over de maand verdeeld zijn (in het vraagstuk is daarover niets gegeven).
Evenzo blijkt dat 8 + 19 + 29 + 28 + 35 + 31 + 37 = 187 produkten zijn vervangen in de maand volgend op de maand van aflevering.
Dat aantal heeft betrekking op slechts 11735 exemplaren (de in de achtste maand afgeleverde produkten leveren hier nog geen bijdrage).
Het vervangingspercentage na $1\frac{1}{2}$ maand kan dus geschat worden op $\left(\frac{298}{14253} + \frac{187}{11735}\right) \times 100 = 3{,}7\%$. Op dezelfde wijze kunnen de vervangingspercentages na $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$ en $5\frac{1}{2}$ maand geschat worden. De gevonden waarden zijn in de hier volgende figuur gegeven.



c. Voor de proefserie is het vervangingspercentage na drie maanden $\frac{4}{150} = 2{,}67\%$. Voor de "werkelijke" vervangingsfractie volgt daaruit een eenzijdig begrensd 95%-betrouwbaarheidsinterval $p < 0{,}061$.
Volgens de in b. geconstrueerde vervangingskromme zou deze fractie na drie maanden ongeveer 0,046 moeten zijn als de nieuwe constructie

niet beter of slechter zou zijn dan de oude.
De waarde 0,046 ligt in het betrouwbaarheidsinterval. Het is dus niet gerechtvaardigd om te concluderen tot een lager uitvalpercentage na drie maanden bij de gewijzigde constructie.

Examen 1960

1. a. Als de aangeboden partijen een fractie p aan slechte produkten bevatten en als de kans op goedkeuring van zo'n partij $P_g(p)$ is, is het over de voor verwerking beschikbaar komende partijen gemiddelde percentage ondeugdelijke exemplaren $100pP_g(p)$.
Met deze formule kan ter beantwoording van de vraag de volgende tabel worden samengesteld.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Percentage ondeugdelijke produkten in aangeboden partij: 100p	Goedkeurkans (zie fig.1): $P_g(p)$	(1) x (2)	Frequentie van binnenkomst (tabel 1)	(3) x (4)
0,5	1,00	0,50	62	31,00
1,5	0,98	1,47	53	77,91
2,5	0,89	2,23	2	4,46
3,5	0,73	2,56	4	10,24
4,5	0,55	2,48	2	4,96
5,5	0,38	2,09	7	14,63
6,5	0,25	1,63	13	21,19
7,5	0,16	1,20	23	27,60
8,5	0,10	0,85	27	22,95
9,5	0,06	0,57	18	10,26
10,5	0,03	0,35	12	4,20
11,5	0,02	0,22	2	0,44
12,5	0,01	0,13	3	0,39

Het gevraagde percentage is $\frac{1}{228}$ x de som van de waarden in de laatste kolom: 1,0%

b. Gezien de mogelijkheden van de leveranciers zoals die uit tabel 1 blijken, is het gewenst dat partijen met minder dan 2% ondeugdelijke exemplaren een hoge goedkeurkans hebben. Voor $p_{0,95}$ (zie nomogram) kan dus 0,02 gekozen worden. Uit het vraagstuk blijkt bovendien dat 0,08 een goede keuze is voor $p_{0,05}$. Dus is $\frac{p_{0,95}}{p_{0,05}} = 0,25$. Het nomogram geeft dan c = 5 en $np_{0,05} = 11$, zodat $n = \frac{11}{0,08} = 137,5$. Het steekproefvoorschrift luidt dus, omdat voor n uiteraard een geheel getal moet worden gekozen:

1. Neem een steekproef van 138 produkten.
2. Keur de partij goed als in de steekproef 5 of minder dan 5 ondeugdelijke produkten voorkomen.
3. Onderzoek de gehele partij (en verwijder daaruit de ondeugdelijke exemplaren) als het aantal ondeugdelijke exemplaren in de steekproef zes of meer dan zes is.

c. Als een dubbel steekproefsysteem goed (efficiënt) zal zijn moet het aantal exemplaren in de tweede steekproef (n_2) ongeveer twee keer zo groot zijn als in de eerste (n_1). Bovendien moet voldaan zijn aan de voorwaarde $\frac{c_1}{c_2} < \frac{n_1}{n_1+n_2}$. Daarin is c_1 het maximale aantal ondeugdelijke exemplaren in de eerste steekproef waarbij nog directe goedkeuring plaats heeft (hier dus $c_1 = 3$), terwijl c_2 het maximale aantal ondeugdelijke exemplaren (in de eerste èn in de totale steekproef) is, waarbij nog net geen afkeuring plaats heeft (hier dus $c_2 = 4$). Aan geen van de beide genoemde eisen is hier voldaan, vooral van de eerste ($\frac{n_1}{n_2} \simeq \frac{1}{2}$) is sterk afgeweken.

2. In het vraagstuk zijn enkele termen niet precies gedefinieerd. Wij zullen aannemen:

   1. De gegevens over de verdeling der wekelijkse verkopen hebben betrekking op de wekelijks van klanten binnenkomende orders voor het artikel en zijn niet afhankelijk van de gevolgde politiek van voorraadbeheer.
   2. Onder winst per kg wordt verstaan de verkoopprijs verminderd met de inkoopprijs, eventuele andere eenmalige kosten en de voorraadkosten gemaakt aan het begin van de week waarin het artikel aan

een klant verkocht wordt. Het verschil tussen de verkoopprijs en de inkoopprijs en eventuele andere eenmalige kosten is dus ƒ 0,21.

3. De 3 centen aan voorraadkosten slaan op alle artikelen die op dinsdagmorgen aanwezig zijn, en dus niet alleen op de artikelen die van de vorige week zijn overgebleven.
4. De optimale veiligheidsvoorraad is die veiligheidsvoorraad waarbij de winst zo groot mogelijk is.

a. Noem de veiligheidsvoorraad V en de gemiddelde verkoop per week μ (= 1000 kg), dan is de voorraad op iedere dinsdagmorgen (1000 + V)kg. De kans dat men gedurende een week uitverkocht raakt, is dus gelijk aan de kans dat in die week meer dan (1000 + V)kg verkocht wordt. Aangezien de wekelijkse verkoop normaal verdeeld is met verwachting 1000 kg en standaardafwijking 100 kg kan de kans dat men uitverkocht raakt bij veiligheidsvoorraad V kg gevonden worden als de overschrijdingskans van de standaard-normale verdeling bij $\frac{V}{100}$.

b. Bij toenemende veiligheidsvoorraad nemen de voorraadkosten toe, de kosten door winstderving af. Door voor een aantal waarden van V die kosten te berekenen en te sommeren kan de optimale veiligheidsvoorraad gevonden worden.
Ofschoon berekeningen niet gevraagd werden en het bovenstaande antwoord als voldoende werd aangemerkt, volgt hier toch een wat nauwkeuriger berekening. Door verhoging van de veiligheidsvoorraad (V) met 1 kg stijgen de voorraadkosten met ƒ 0,03 per week. De kans dat in een week deze extra kg verkocht wordt is de kans dat de verkoop ($\underline{x}$) in die week groter is dan (1000 + V) kg: $P(\underline{x} > 1000 + V)$. De daardoor in die week verkregen extra baten zijn ƒ 0,21. Als nu V een zodanige waarde heeft dat de genoemde stijging van de voorraadkosten net wordt goedgemaakt door de gemiddeld verkregen extra baten dan is V de optimale veiligheidsvoorraad. Die wordt dus berekend uit:

$$0{,}21\ P(\underline{x} > 1000 + V) = 0{,}03.$$

Met behulp van de tabel van de normale verdeling (zie vraag a.) volgt hieruit:

$$\frac{V}{100} = 1{,}07$$

of

$$V = 107 \text{ kg.}$$

3. a. De gatdiameters hebben een uniforme (rechthoekige) verdeling tussen b-0,18 en b, waarin b de diameter van de nieuwe boor is. De standaardafwijking van die verdeling is $\frac{0{,}18}{\sqrt{12}} = 0{,}052$.

b. Noem de gatdiameter $\underline{x}$ en de asdiameter $\underline{y}$. De speling is dus $\underline{v} = \underline{x} - \underline{y}$. Hierin is $\underline{x}$ uniform verdeeld tussen b - 0,18 mm en b mm (b is de diameter van de nieuwe boor), $\underline{y}$ is normaal verdeeld met een gemiddelde dat ligt tussen 29,93 mm en 30,07 mm en met standaardafwijking 0,05 mm. De gestelde eis kan geformuleerd worden als:

$$P(\underline{x} - \underline{y} < 0{,}1) \leq 0{,}001.$$

Omdat aan deze eis voldaan moet worden bij alle partijen, dus ook bij die waarbij gewerkt is met assen met een grote gemiddelde diameter, is het voldoende om b te bepalen voor het ongunstigste geval, dus voor $\mu_{\underline{y}} = 30{,}07$ mm. Dan geldt:

$$\mu_{\underline{v}} = \mu_{\underline{x}} - \mu_{\underline{y}} = b - 30{,}16$$

en

$$\sigma_{\underline{v}} = \sqrt{\sigma^2_{\underline{x}} + \sigma^2_{\underline{y}}} = 0{,}072.$$

Als aangenomen wordt dat de verdeling van $\underline{x}$-$\underline{y}$ normaal is, volgt uit deze waarden voor $\mu_{\underline{v}}$ en $\sigma_{\underline{v}}$ dat moet gelden

$$b - 30{,}16 - 3{,}09 \times 0{,}072 = 0{,}1$$

of

$$b = 30{,}48 \text{ mm.}$$

<u>Opmerking</u>: Van de kandidaten werd deze oplossing verwacht. Uiteraard is het niet vanzelfsprekend dat de verdeling van het verschil tussen een uniform verdeelde en een normaal verdeelde stochastische variabele goed door een normale verdeling kan worden benaderd. Een exacte berekening, die echter op grond van het examenprogramma niet van de kandidaten gevraagd kan worden, leert dat de gezochte waarde van b 30,47 mm is. De gebruikte benadering gaf dus een voldoende nauwkeurig antwoord.

c. De gatdiameters zijn, als voor de nieuwe boor de in b. gevonden diameter 30,48 mm gekozen wordt, uniform verdeeld tussen 30,30 mm en 30,48 mm. De gevraagde grenzen zijn voor de gatdiameters dus $30{,}30 + \frac{1}{200} \times 0\ 18 = 30{,}3009$ mm en $30{,}48 - \frac{1}{200} \times 0{,}18 = 30{,}4791$.
Dergelijke tolerantiegrenzen hebben uiteraard weinig zin.
Afronding levert weer de oorspronkelijke grenzen van de uniforme verdeling, 30,30 mm en 30,48 mm op.
Voor de asdiameters vindt men als tolerantiegrenzen:
$30{,}00 - 0{,}07 - 2{,}58 \times 0{,}05 = 29{,}80$ mm en
$30{,}00 + 0{,}07 + 2\ 58 \times 0{,}05 = 30{,}20$ mm.

4\. a. Bij het opzetten van de proef is er geen rekening mee gehouden, dat de drie gebruikte steundraden die diameters van resp. 97, 100 en 103µ hadden, ook wel eens niet dezelfde elasticiteitsmodulus zouden kunnen hebben. Men kan daarom niet zeker weten of de eventueel tussen de drie steundraden optredende verschillen in gemiddelde spoed aan verschillen in diameter of aan misschien optredende verschillen in elasticiteitsmodulus te wijten zullen zijn.

b. Uit de eerste twee argumenten volgt hoogstens, dat de gemiddelde spoed beïnvloed werd door de gebruikte steundraden. Het is echter onjuist daaruit de conclusie te trekken dat nu juist de diameter invloed heeft op de gemiddelde spoed. De drie gebruikte steundraden

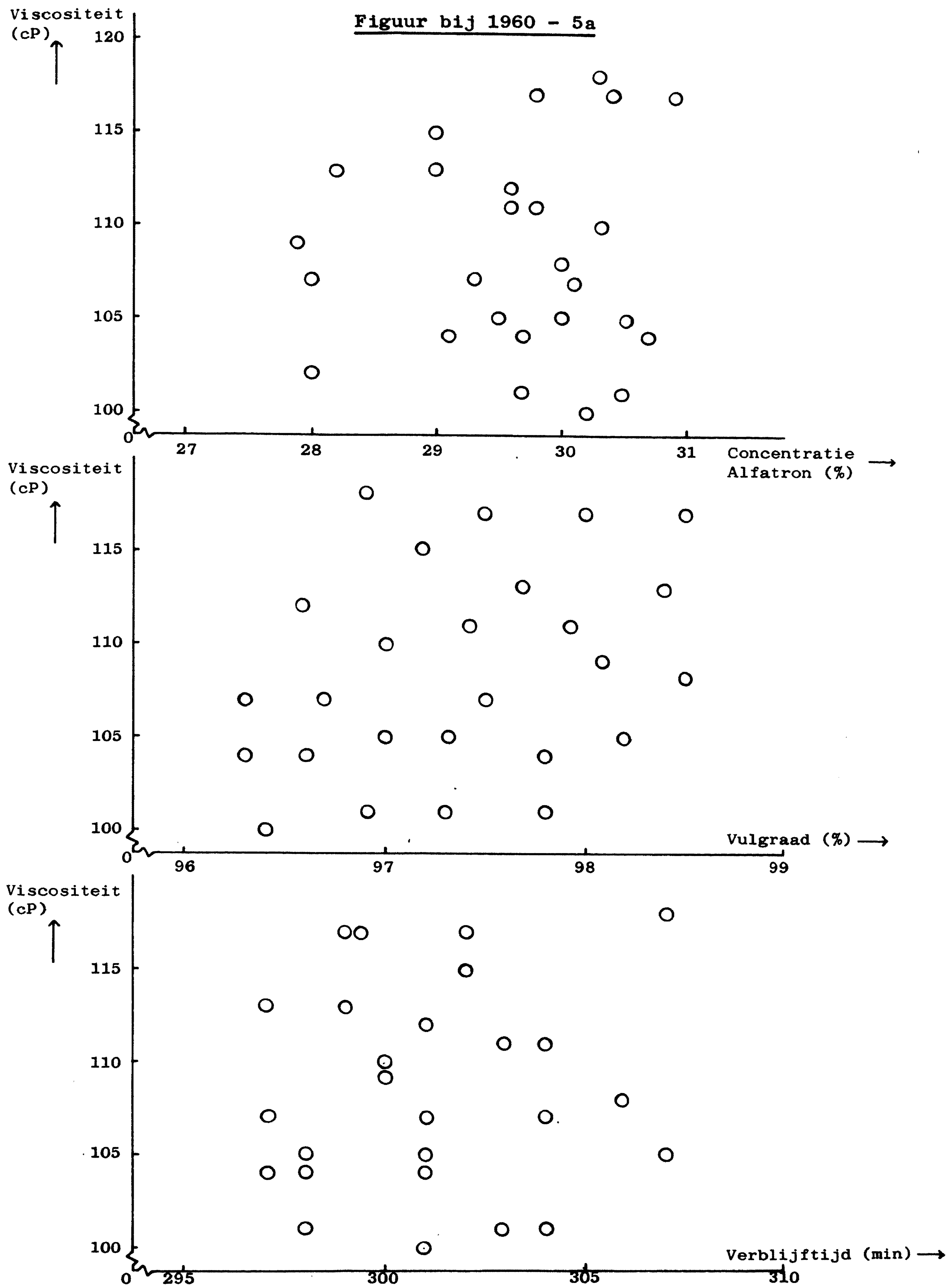
verschillen in diameter, maar vermoedelijk ook, al is dat niet gemeten, in elasticiteitsmodulus en andere eigenschappen. De geconstateerde verschillen tussen de steundraden kunnen ook veroorzaakt zijn door de variaties in die eigenschappen. Uit het experiment, waarin bij alle wikkeldraden <u>dezelfde</u> drie steundraden gebruikt zijn, is niet op te maken of het een of het ander het geval is.
Bij het derde argument kan men het volgende opmerken. Uit de manier, waarop de drie steundraden gekozen zijn, volgt dat het redelijk is om aan te nemen, dat de elasticiteitsmodulus van alle drie draden verschillend is. Dat betekent, dat daardoor alleen reeds verschillen tussen de gemiddelden voor de drie steundraden zullen kunnen ontstaan. Omdat elasticiteitsmodulus en diameter, zoals gegeven is van elkaar onafhankelijk zijn, is de kans dat in een dergelijk experiment de gemiddelde spoed bij toenemende diameter, als deze op zichzelf geen invloed heeft, monotoon zal stijgen of dalen gelijk aan 1/3. Deze kans is te groot om uit dit monotoon stijgen of dalen te mogen concluderen, dat de verschillen door variaties in diameter veroorzaakt zijn.

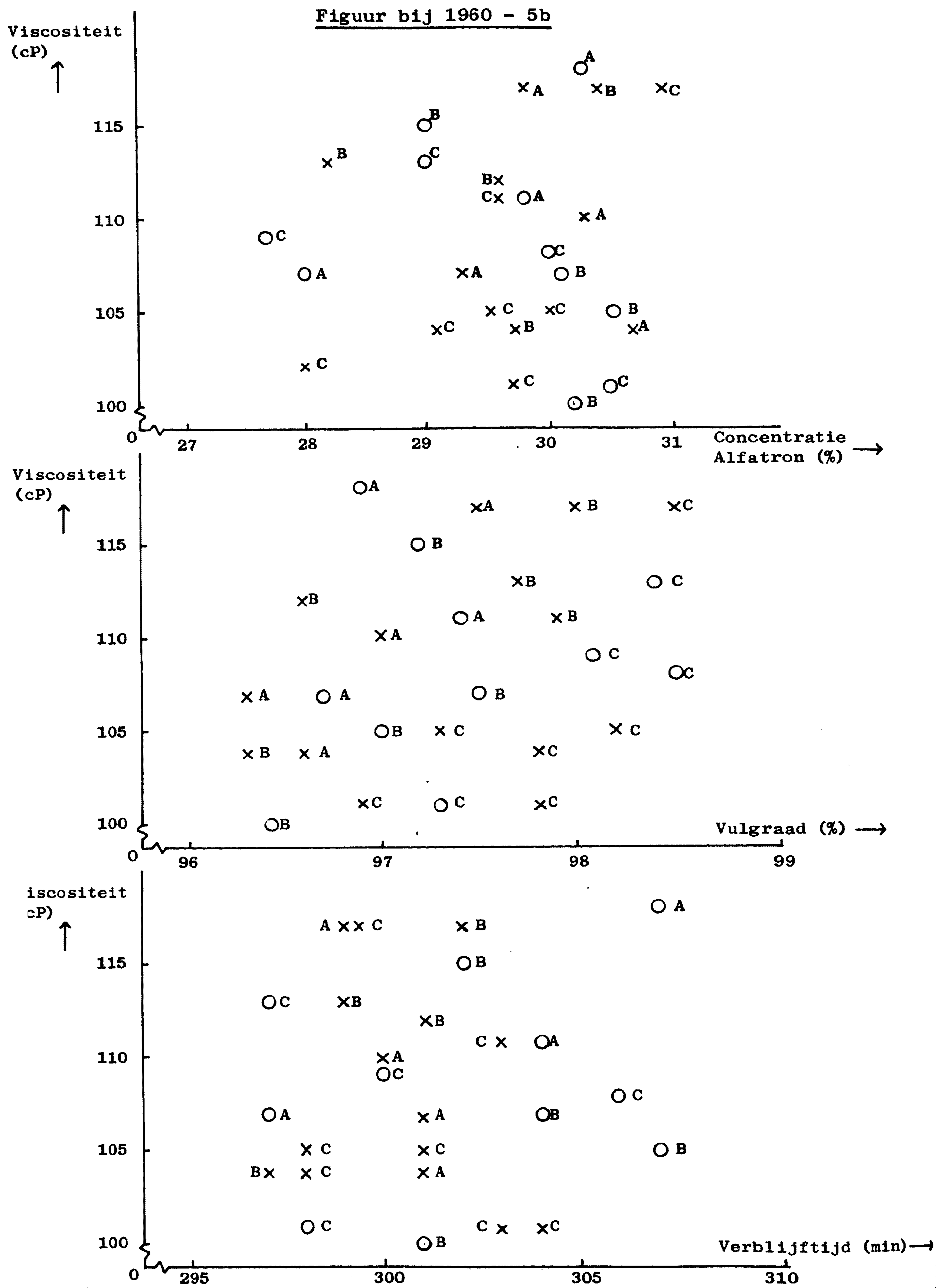
c. Als bekend is dat behalve de diameter de elasticiteitsmodulus de enige eigenschap van de steundraad is die invloed heeft op de gemiddelde spoed, kan men voor de proef een aantal steundraden uitzoeken die wel verschillen in diameter maar niet in elasticiteitsmodulus. Een andere mogelijkheid is dat men voor iedere wikkeldraad een nieuw stel steundraden met de in het vraagstuk gegeven diameters kan kiezen. Het zou wel zeer onwaarschijnlijk zijn dat dan de invloed van de elasticiteitsmodulus bij alle wikkeldraden op dezelfde manier tot uiting zou komen.

5. a. Uit de drie spreidingsdiagrammen die op blz. A 39 gegeven zijn, blijkt in eerste instantie geen aanwijsbare invloed van verblijftijd, vulgraad en alfatronconcentratie op de eindviscositeit.

b. Het ligt voor de hand na te gaan of per reactor, respectievelijk per ploeg, een verband tussen de eindviscositeit en een van de andere variabelen valt te constateren. Daartoe zijn op blz. A 40 de onder a. genoemde spreidingsdiagrammen opnieuw getekend. De bij reactor 4 behorende punten zijn nu door een kruisje aangegeven, de gegevens van reactor 5 door een cirkeltje.
Bovendien is bij ieder punt aangegeven of het betrekking heeft op ploeg A, B of C. Uit de diagrammen blijkt duidelijk dat per ploeg een verband tussen vulgraad en eindviscositeit bestaat. Bovendien blijkt dat ploeg C bij dezelfde vulgraad een gemiddeld lagere eindviscositeit bereikt dan de andere ploegen. Dit laatste is er de oorzaak van dat uit de spreidingsdiagrammen op blz.A 39 geen conclusie was te trekken.

Figuur bij 1960 - 5a




Figuur bij 1960 - 5b
Viscositeit (cP)
115
110
105
100
0
27
28
29
30
31
Concentratie Alfatron (%)
Viscositeit (cP)
115
110
105
100
0
96
97
98
99
Vulgraad (%)
iscositeit cP)
115
110
105
100
0
295
300
305
310
Verblijftijd (min)

Examen 1961

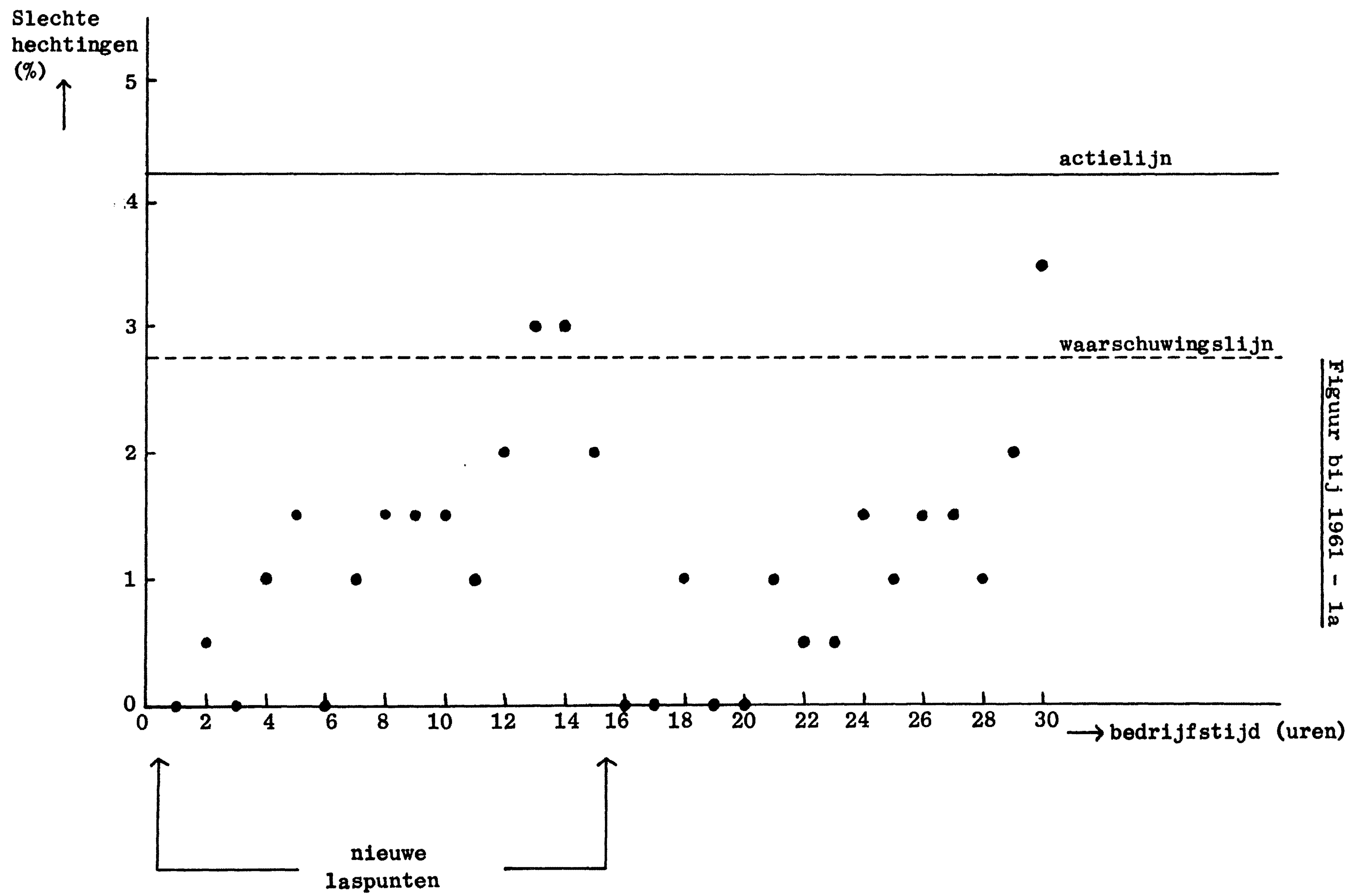
1\. a. Als het proces statistisch beheerst zou zijn, zou het aantal slechte hechtingen per steekproef binomiaal verdeeld zijn. Een schatting van de parameter p van deze verdeling is 0,0115 (het totaal aantal slechte hechtingen was 69, het totaal aantal gecontroleerde hechtingen 6000). Voor de berekening van de actie- en waarschuwingsgrenzen maakt men gebruik van deze schatting van p en van de benadering van de binomiale verdeling door de Poissonverdeling. De actiegrens blijkt te liggen tussen 8 en 9 slechte hechtingen, dus tussen 4% en 4,5%. De hoogste waarschuwingsgrens ligt tussen 5 en 6 slechte hechtingen, dus tussen 2,5% en 3%. De bij deze grenzen behorende overschreidingskansen zijn respectievelijk 0,001 en 0,03. De laagste actie- en waarschuwingslijnen kunnen in dit geval niet op zinvolle wijze (d.w.z. zodanig dat de overschreidingskansen voldoende klein zijn) geconstrueerd worden. Uit de controlekaart die op blz. A42 gegeven is, kan de conclusie worden getrokken dat de lengte van de gebruiksduur van de laspunten invloed heeft op het percentage slechte hechtingen.

b. Het lineaire verband zal worden aangegeven door:

$$E\underline{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_i,$$

waarin x_i de tijd (in uren) is die verlopen is sinds de laatste verwisseling van de laspunten en $E\underline{y}_i$ het op dat tijdstip verwachte percentage slechte hechtingen. De constante β_1 geeft dan aan hoeveel dat percentage per uur toeneemt, de constante β_0 komt overeen met het verwachte percentage slechte hechtingen direct na verwisseling van de laspunten.

c. Uit de in het vraagstuk verstrekte gegevens kunnen β_0 en β_1 geschat worden met de methode der kleinste kwadraten, hoewel aan de voorwaarden waaronder deze methode optimale eigenschappen heeft niet geheel voldaan is (niet alleen de verwachting, maar ook de



Figuur bij 1961 - 1a

variantie van y_i is van x_i afhankelijk). Bij de toepassing van de methode moet bedacht worden dat de gegevens betrekking hebben op steekproeven uit hele uurprodukties, zodat voor x_i het beste de waarden $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, ..., $14\frac{1}{2}$ gekozen kunnen worden.
Voor de berekeningen kunnen bovendien de percentages van het 1e en 15e uur, het 2e en 16e uur, enz., gemiddeld worden.
Men vindt dan uit de 15 paren waarnemingen als schattingen voor β_0 en β_1:

$$b_1 = 0{,}175$$

$$b_0 = -0{,}162.$$

d. Als de laspunten na m uren verwisseld worden, bedraagt het gemiddelde percentage slechte hechtingen per uur:

$$\tfrac{1}{2}m \times 0{,}175 - 0{,}162\%.$$

De daaraan verbonden kosten (in guldens) zijn, per geproduceerde hechting:

$$\frac{\frac{1}{2}m \times 0{,}175 - 0{,}162}{100} \times 0{,}02.$$

De aan de verwisseling verbonden kosten (in gld.) zijn, per geproduceerde hechting:

$$\frac{4}{2000m}.$$

De totale kosten

$$\frac{\frac{1}{2}m \times 0{,}175 - 0{,}162}{100} \times 0{,}02 + \frac{4}{2000m}$$

moeten door keuze van m minimaal worden gemaakt. Men kan deze optimale waarde van m vinden door de eerste afgeleide van de kosten naar m te bepalen en die gelijk te stellen aan 0:

$$\frac{\frac{1}{2} \times 0{,}175}{100} \times 0{,}02 - \frac{4}{2000m^2} = 0$$

of

$$m = 10{,}7.$$

Dat bij deze waarde van m de kosten inderdaad minimaal zijn, is gemakkelijk te constateren: de tweede afgeleide van de totale kosten naar m is altijd positief.

<u>Opmerking</u>: Van de kandidaten werd verwacht, dat zij door berekening van de totale kosten voor een aantal waarden van m de optimale waarde zouden vinden.

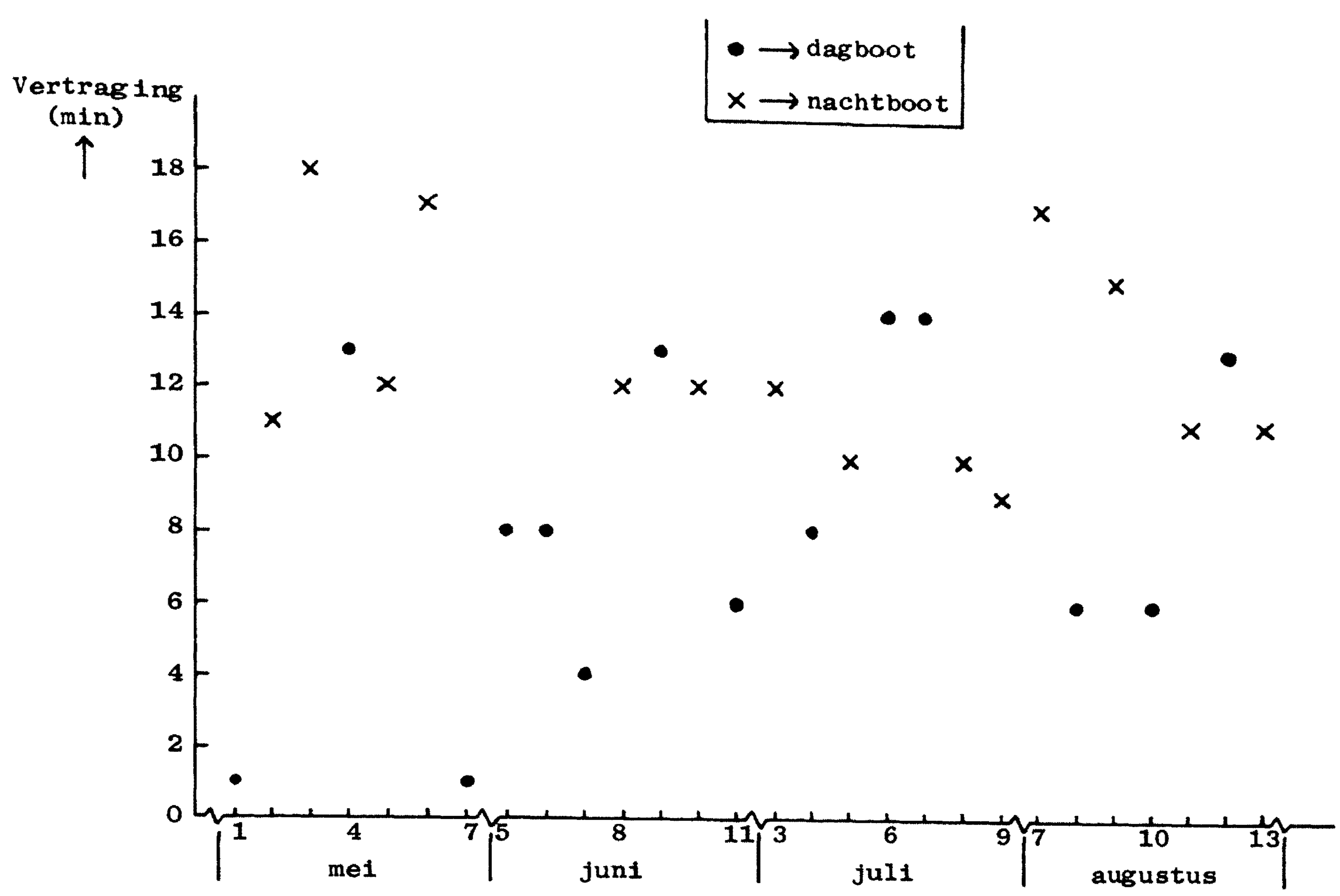
2. a. De gevraagde grafiek is gegeven op blz. A 45.

   b. Indien, zoals in de tekst gegeven is, inderdaad tussen de dagen, weken en maanden geen enkel systematisch verschil in vertraging bestaat, kan men een onderzoek naar een eventueel bestaand verschil in vertraging tussen dag- en nachtdienst uitvoeren met behulp van de toets van Wilcoxon. Bij deze aantallen waarnemingen kan de verdeling van de toetsingsgrootheid $\underline{W}$ benaderd worden door de normale verdeling met $\mu = \frac{14 \cdot 14}{2} = 98$ en $\sigma = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot 14 \cdot 14 \cdot 29} = 21{,}8$ en de verdeling van $\frac{\underline{W} - 98}{21{,}8}$ is dus bij benadering normaal met gemiddelde 0 en standaardafwijking 1. In dit geval nemen $\underline{W}$ en $\frac{\underline{W} - 98}{21{,}8}$ respectievelijk de waarden 50 en -2,20 aan. De tweezijdige overschreidingskans bij de laatste waarde is 0,028. De conclusie kan zijn dat er inderdaad een systematisch verschil in vertraging bestaat tussen dag- en nachtdienst.
   De boven gegeven variantie voor $\underline{W}$ zou eigenlijk gecorrigeerd moeten worden voor het optreden van gelijken. De correctie is in dit geval echter verwaarloosbaar klein.

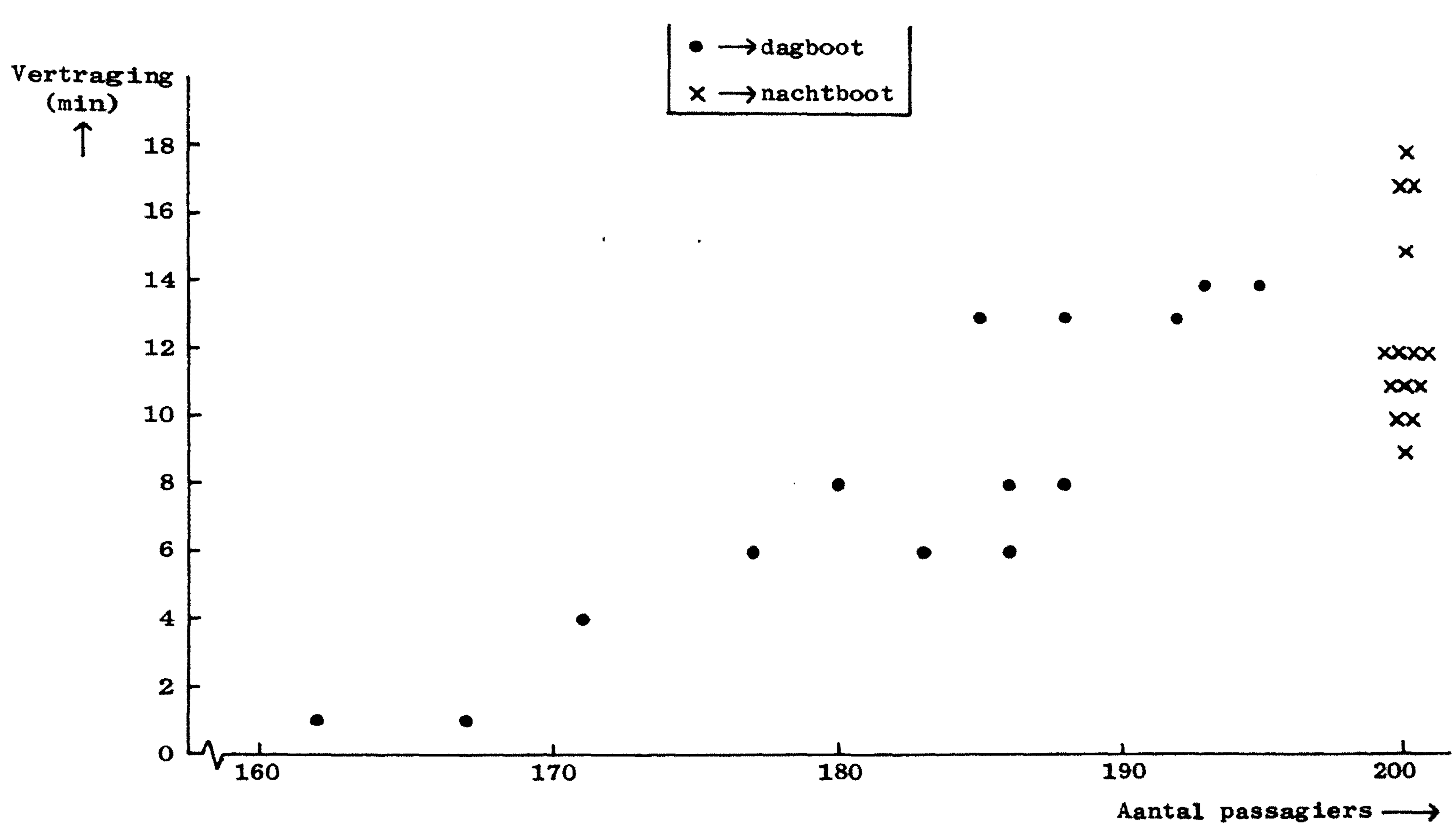
   c. Uit de tweede figuur op blz. A 45 blijkt dat het door de directie vermoede verband inderdaad bestaat: bij toenemend aantal passagiers neemt de vertraging gemiddeld toe.

   d. De beide conclusies zijn niet met elkaar in tegenspraak: met de nachtboot reizen meer passagiers dan met de dagboot.

Figuur bij 1961 - 2a



Figuur bij 1961 - 2c



3. Bij regel 3-7:

Er wordt geen rekening gehouden met het aantal inslagen per cm. Ook het omrekenen naar 10.000 kettingdraden kan bezwaarlijk zijn, bij voorbeeld wegens de mogelijkheid dat kettingdraden aan de zijkanten meer breuken leveren dan in het midden.

N.B.: Deze kritiek werd, als te technisch van aard, van de kandidaten niet verwacht.

Bij regel 10-12:

De grens van 12 kettingbreuken is onjuist. Bij het nog toegelaten gemiddelde zal men bij 100 m weefsel gemiddeld 12 breuken vinden. Neemt men aan, wat niet onredelijk is, dat het aantal breuken per 100 m weefsel een Poissonverdeling heeft, dan volgt daaruit dat de kans dat per 100 m. weefsel meer dan 12 breuken optreden gelijk is aan 0,42.

Bij regel 12-16:

Er zijn geen redenen gegeven waarom de beoordeling op het aantal breuken in 40.000 m weefsel zou moeten berusten. Men zou per 40.000 m weefsel bij een gemiddelde van 0,6 breuken per 10.000 inslagen $400 \times 12 = 4800$ breuken verwachten. Als voor het aantal breuken per 10.000 inslagen een Poissonverdeling mag worden aangenomen, zou de variantie in het aantal per 40.000 m weefsel 4800 zijn en de variatiecoëfficiënt dus $\frac{\sqrt{4800}}{4800} = 0{,}014$. Het is de vraag of een beoordeling met een zo grote relatieve nauwkeurigheid nodig is.

De eis dat het weefsel van 10 à 20 weefgetouwen afkomstig moet zijn, valt volkomen uit de lucht. Indien werkelijk een reële spreiding tussen de weefgetouwen bestaat, zal men afhankelijk daarvan een verantwoorde steekproef uit de getouwen moeten nemen.

ı het volgende wordt steeds gewerkt met het aantal bacteriën (kolonies) per 0,2 ml. verdunde suspensie. In de eisen worden de waarden ; $\times 10^7$, 125×10^7 en 105×10^7 dus vervangen door 170, 250 en 210.

a. Voor een partij met gemiddeld μ bacteriën per ml. verdunde suspensie is het gemiddelde telresultaat $\bar{\underline{x}}$ normaal verdeeld met verwachting μ en standaardafwijking

$$\sigma_{\bar{\underline{x}}} = \sqrt{\frac{\sigma_t^2}{20} + \frac{\sigma_s^2}{10}} = 5 \text{ bact. (per 0,2 ml verd. susp.).}$$

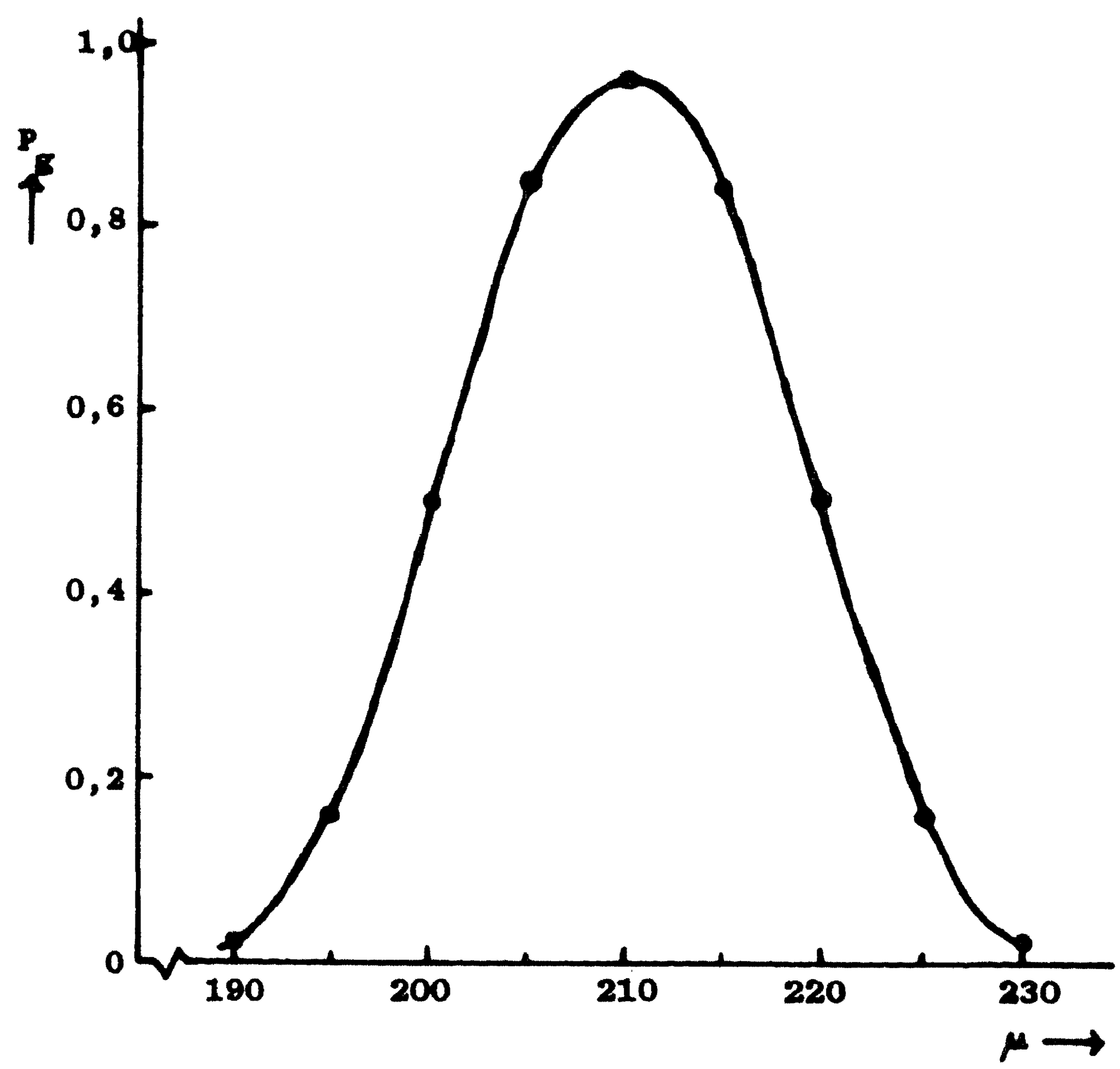
De goedkeurkans is:

$$P_g = P(200 \leqq \bar{\underline{x}} \leqq 220) =$$

$$P\left(\frac{200-\mu}{5} \leqq \underline{u} \leqq \frac{220-\mu}{5}\right).$$

Hierin is $\underline{u}$ normaal verdeeld met verwachting 0 en standaardafwijking 1. Met behulp van een tabel van de verdelingsfunctie van de normale verdeling kan P_g voor een aantal waarden van μ berekend worden. De resultaten daarvan zijn gegeven in de volgende tabel en in de daaropvolgende grafiek.

μ	P_g
190	0,023
195	0,159
200	0,500
205	0,840
210	0,954
215	0,840
220	0,500
225	0,159
230	0,023



Opmerking: toepassing van de continuïteitscorrectie in verband met de vervanging van de discrete verdeling van de aantallen bacteriën door een normale verdeling is hier achterwege gelaten.

b. Noemen wij het aantal bacteriën per 0,2 ml verdunde suspensie $\underline{x}$, dan geldt voor partijen die in de eerste twee eisen genoemd worden respectievelijk $P(\underline{x} \leq 170) \geq 0{,}01$ en $P(\underline{x} \geq 250) \geq 0{,}01$. Deze twee eisen kunnen ook geschreven worden: $P(\underline{u} \leq \frac{170-\mu}{10}) \geq 0{,}01$ en $P(\underline{u} \geq \frac{250-\mu}{10}) \geq 0{,}01$, waarin $\underline{u}$ de standaard-normale verdeling heeft en μ het partijgemiddelde is. Hieruit is af te leiden dat voor de beide soorten partijen geldt: $\mu \leq 193{,}3$, respectievelijk $\mu \geq 226{,}7$. De goedkeurkans van een partij met $\mu = 193{,}3$ is volgens het antwoord op vraag a:

$$P\left\{\frac{200-193{,}3}{5} \leqq \underline{u} \leqq \frac{220-193{,}3}{5}\right\} = 0{,}090$$

voor een partij met $\mu = 226{,}7$ is hij ook 0,090. In beide gevallen voldoet de afkeurkans niet aan de gestelde eisen: hij mag hoogstens 0,05 zijn. Wat betreft de derde eis: uit het antwoord op vraag a blijkt dat de goedkeurkans bij $\mu = 210$, 0,954 is. Ook aan de derde eis wordt dus niet voldaan.

c. Als het aantal van twee tellingen per ampul wordt gehandhaafd, is de standaardafwijking van het gemiddelde telresultaat aan een steekproef van n ampullen:

$$\sigma_{\underline{\bar{x}}} = \sqrt{\left(\frac{300}{2n} + \frac{100}{n}\right)} = 10\sqrt{\frac{5}{2n}}\ .$$

Worden bovendien de afkeurgrenzen symmetrisch gekozen ten opzichte van 210, dus bij voorbeeld 210-a en 210+a, dan volgt uit de derde eis:

$$P\left(-\frac{a}{\sigma_{\underline{\bar{x}}}} \leqq \underline{u} \leqq \frac{a}{\sigma_{\underline{\bar{x}}}}\right) \geqq 0{,}99$$

of

$$\frac{a}{\sigma_{\underline{\bar{x}}}} = \frac{a}{10}\sqrt{\frac{2n}{5}} \geqq 2{,}58.$$

De eerste en tweede eis leiden tot:

$$P\left(\frac{16{,}7-a}{\sigma_{\underline{\bar{x}}}} \leqq \underline{u} \leqq \frac{16{,}7+a}{\sigma_{\underline{\bar{x}}}}\right) \leqq 0{,}05$$

en

$$P\left(\frac{-16{,}7-a}{\sigma_{\underline{\bar{x}}}} \leqq \underline{u} \leqq \frac{-16{,}7+a}{\sigma_{\underline{\bar{x}}}}\right) \leqq 0{,}05.$$

Deze eisen zijn vanwege de symmetrie van de normale verdeling identiek, het is dus voldoende a en n zodanig te kiezen dat aan de eerste eis voldaan is. Nu is, omdat $a \geqq 2{,}58\sigma_{\underline{\bar{x}}}$ en

$\sigma_{\bar{\underline{x}}} = 10\sqrt{\frac{5}{2n}}$:

$$P\left(\underline{u} > \frac{16{,}7+a}{\sigma_{\bar{\underline{x}}}}\right) \leq P\left(\underline{u} > \frac{16{,}7+2{,}58\sigma_{\bar{\underline{x}}}}{\sigma_{\bar{\underline{x}}}}\right) = P(\underline{u} > 2{,}58+1{,}06\sqrt{n}).$$

Omdat $n \geq 1$ is $P(\underline{u} > 2{,}58 + 1{,}056\sqrt{n}) \leq P(\underline{u} > 3{,}64) = 0{,}00014$.

Dus $P\left(\underline{u} > \frac{16{,}7+a}{\sigma_{\bar{\underline{x}}}}\right) \leq 0{,}00014$ en de gevolgtrekking uit de eerste eis kan vervangen worden door:

$$P\left(\frac{16{,}7-a}{\sigma_{\bar{\underline{x}}}} \leq \underline{u}\right) \leq 0{,}05.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{16{,}7-a}{\sigma_{\bar{\underline{x}}}} \geq 1{,}645$$

en

$$a \leq 16{,}7 - 1{,}645\sigma_{\bar{\underline{x}}} .$$

De grootste waarde van $\sigma_{\bar{\underline{x}}}$ waarvoor aan deze ongelijkheid èn aan $a \geq 2{,}58\sigma_{\bar{\underline{x}}}$ wordt voldaan is 3,95, de daarbij behorende kleinste waarde van n is 16. Hieruit volgt dat de keuring behoort te berusten op metingen aan 16 aselect gekozen ampullen. Per ampul moeten twee metingen worden gedaan en geëist moet worden dat het gemiddelde telresultaat ligt tussen 199,8 en 220,2 ($210 \pm 2{,}58\sigma_{\bar{\underline{x}}}$).

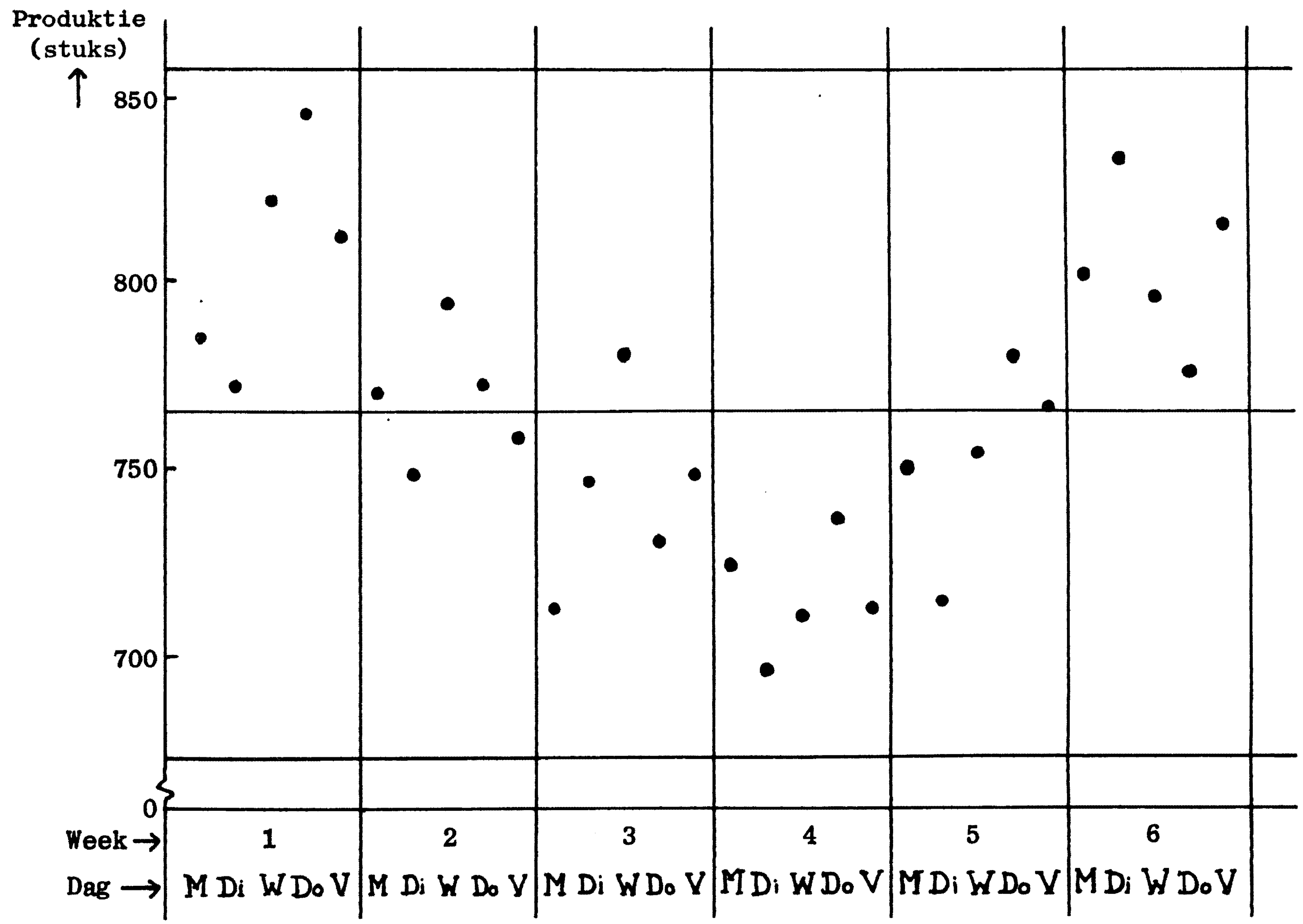
d. Een sequent systeem komt niet in aanmerking. De keuring van een partij zou daarbij te lang duren doordat tussen elke twee opeenvolgende bepalingen 14 dagen moeten verlopen.

<u>Examen 1962</u>

1. a. Een eerste indruk van het al of niet statistisch beheerst zijn van de dagprodukties kan verkregen worden door de gegevens op een controlekaart uit te zetten. Voor de constructie van de grenzen op die controlekaart kan desnoods, ook al behoeft de verdeling van de produkties nà de reorganisatie niet dezelfde te zijn als daarvoor, gebruik gemaakt worden van de gegeven standaardafwijking $\sigma = 31$. De grenzen liggen dan bij $765{,}7 - 93 = 672{,}7$ en $765{,}7 + 93 = 858{,}7$. Uit de controlekaart die op blz. A 52 gegeven is, blijkt overigens dat deze grenzen voor de interpretatie niet van belang zijn. De belangrijkste conclusie uit de grafiek is namelijk dat er een "verloop" in de dagprodukties zit: het aantal geproduceerde exemplaren daalt tot de vierde week na de reorganisatie en stijgt dan weer. Bij toepassing van een toets voor runs boven en onder de mediaan (768,5) worden in totaal 9 runs gevonden. De langste daarvan beslaat 10 waarnemingen. Daarbij behoort een (eenzijdige) overschrijdingskans van minder dan 0,01 (zie bijvoorbeeld tabel P in A.J. Duncan, "Quality control and industrial statistics").

   b. De gegevens kunnen, gezien het antwoord op vraag a, niet opgevat worden als een aselecte steekproef uit één populatie. Men mag daarom wel de conclusie trekken dat in deze periode van zes weken na de reorganisatie de produktie lager was dan daarvoor, maar die conclusie mag niet gegeneraliseerd worden tot de gemiddelde dagproduktie, die op den duur, eventueel onder "statistisch beheerste omstandigheden", bereikt zal worden.

2. a. Een moment van de populatie wordt aangeduid door machinenummer, week, dag in die week, uur op die dag en (begin van) de minuut in dat uur. Men maakt eerst een tabel als volgt (zie blz.A 53):



Figuur bij 1962 - 1a

Week	dag	uur	machine 1	2	3	4	5
1	1	1					
		2					
		3					
		4					
		5					
		6					
		7					
		8					
	2	1					
		⋮					
		8					
	⋮	⋮					
	5	1					
		⋮					
		8					
2	1	1					
⋮	⋮	⋮					

Het aselect kiezen van een moment geschiedt door achtereenvolgens cijfers te nemen uit de tabel met toevalscijfers bijvoorbeeld van de eerste bladzijde (zie de tabel bij het vraagstuk):

03 47 43 73 86

en met deze cijfers achtereenvolgens het weeknummer, dagnummer, uurnummer, minutennummer en machinenummer te bepalen.
Daarbij gelden dan de volgende afspraken:

a. Voor de bepaling van de weeknummers wordt 0 als 10 gelezen (kortweg 0 = 10).
b. Voor de bepaling van de dag- en machinenummers is 6 = 1, 7 = 2, 8 = 3, 9 = 4 en 0 = 5.
c. Voor de bepaling van de uurnummers worden de toevalscijfers 0 en 9, als ze optreden, overgeslagen en uit het volgende toevalscijfer genomen.
d. De minutennummers worden bepaald door twee opeenvolgende toevalscijfers. Daarbij worden de paren 00 en 61 tot en met 99

overgeslagen en vervangen door het volgende paar toevalscijfers.

De bovenstaande rij geldt dus: week 10, dag 3, uur 4, minuut 37, machine 3. Het gevonden moment wordt in de tabel aangegeven door bij de gekozen week, dag en uur het minutennummer onder het gevonden machinenummer te vermelden.
Het volgende moment wordt gevonden door in de tabel met toevalscijfers de volgende regel te nemen en zo gaat men door totdat 1000 verschillende momenten zijn vastgesteld.

b. De standaardafwijking van het percentage stilstand is

$$\sigma = \sqrt{\frac{p(100-p)}{n}}\ \%,$$

waarin p het percentage stilstand is in de populatie van 120.000 momenten. Een schatting voor p is, volgens de opgave, 25, een schatting voor σ is dus:

$$s = \sqrt{\frac{25 \times 75}{1000}} = 1,37\%.$$

De verdeling van het percentage stilstand kan hier door de normale verdeling benaderd worden, een betrouwbaarheidsinterval met 95% betrouwbaarheid is dus:

$$25 - 1,96s < p < 25 + 1,96s$$

of ongeveer:

$$22,3\% < p < 27,7\%.$$

Het gevonden percentage is uiteraard een schatting voor het gemiddelde over de vijf banken en over de beschouwde tien weken. Tussen de banken kunnen systematische verschillen bestaan zodat men niet zonder meer mag aannemen dat het percentage voor de afzonderlijke banken geldt.

c. De beide methoden zijn even nauwkeurig als voor de beschouwde 10 weken aan de volgende voorwaarden voldaan is.

1. de vijf draaibanken hebben dezelfde percentages of hetzelfde percentage stilstand (dit is zo volgens opgave).
2. het stilstaan van de vijf draaibanken vindt onafhankelijk van elkaar plaats.
3. er is geen verloop in de tijd in het voor de vijf banken gelijke percentage.

Als aan deze voorwaarden, zoals waarschijnlijk het geval is door gemeenschappelijke oorzaken voor stilstand als rustpauzen en dergelijke, niet is voldaan, is methode B onnauwkeuriger dan methode A.

d. Als voldaan zou zijn aan de in het begin van het antwoord op vraag c. genoemde voorwaarden zouden de vijf waarnemingen, die bij methode B op één moment gedaan worden, beschouwd mogen worden als een aselecte steekproef uit de populatie van 120.000 waarnemingen en het aantal stilstaande banken zou dan binomiaal verdeeld zijn met parameters p en n. Uiteraard is $n = 5$, terwijl voor p uit de frequentieverdeling (het gemiddelde aantal stilstaande banken is 1,25) een schatting 0,25 gevonden wordt. Een schatting van de kans dat de vijf banken stilstaan is dus $0{,}25^5 \approx 0{,}001$.
Daaruit zou volgen dat het verwachte aantal momenten waarop de 5 banken stilstaan 0,2 is. Dit wijkt zo sterk af van het gevonden aantal (21) dat verder onderzoek niet nodig is: de verdeling is niet binomiaal en aan de in het begin van antwoord c genoemde voorwaarden is niet voldaan. Er bestaat dus afhankelijkheid tussen de banken en/of een verloop in de tijd van het percentage stilstand.

e. Uit de frequentietabel zijn het gemiddelde $\bar{x} = 1{,}25$ en de standaardafwijking $s = 1{,}66$ te berekenen. Een schatting voor het percentage stilstand over de beschouwde tien weken is dus:
$\frac{1{,}25}{5} \times 100 = 25\%$. De geschatte standaardafwijking daarvan is
$\frac{1{,}66}{\sqrt{200}} \cdot \frac{100}{5} = 2{,}35\%$. Deze is dus bijna twee keer zo groot als

de in antwoord a berekende standaardafwijking.

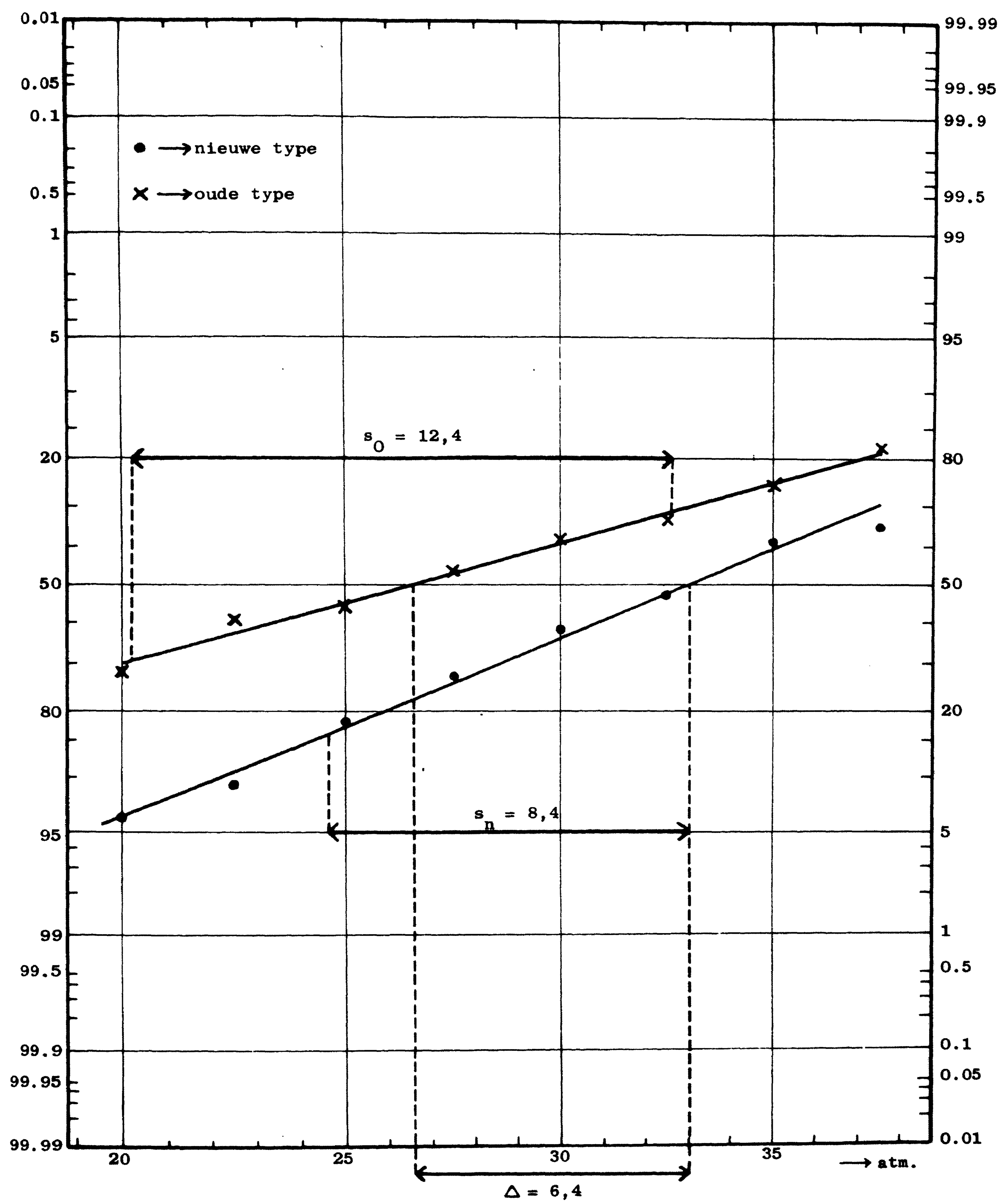
f. Een voorspelling voor de naaste toekomst dient uiterst voorzichtig te geschieden. Hij moet gebaseerd zijn op een nauwkeurige analyse van het cijfermateriaal, in het bijzonder gericht op de tijdseffecten en de eventuele voorspelbaarheid daarvan. Daartoe zou bijvoorbeeld per bank een controlekaart gemaakt kunnen worden waarop voor de opeenvolgende weken de percentages stilstand zijn aangegeven.

3. a. De in het vraagstuk gegeven tabel is eigenlijk een frequentietabel met klassen 0-20,0 atm., 20,0-22,5 atm.,..., 35,0-37,5 atm., > 37,5 atm. De in dezelfde klassen vallende waarnemingen van beide series kunnen, bij gebrek aan verdere informatie, als gelijke waarnemingen worden beschouwd.
Het gevraagde onderzoek kan worden uitgevoerd met de toets van Wilcoxon waarbij de verdeling van de toetsingsgrootheid $\underline{U}$ benaderd kan worden door een normale verdeling met gemiddelde
$\mu = \frac{1}{2} \times 100 \times 61 = 3050$ en standaardafwijking
$\sigma = \sqrt{\frac{100 \times 61 \times 162}{12}} = 287$. Voor $\underline{U}$ wordt uit de gegevens de waarde 4127 gevonden. De eenzijdige overschrijdingskans bij die waarde is gelijk aan de rechter overschrijdingskans van de standaardnormale verdeling bij $\frac{4127 - 3050}{287} = 3{,}75$. Die kans is 0,009% en de conclusie kan luiden dat het nieuwe type een systematisch hogere lekdruk heeft dan het oude.

<u>Opmerking</u>: Bij de berekening van $\sigma_{\underline{u}}$ moet eigenlijk rekening worden gehouden met het voorkomen van gelijke waarnemingen. Men vindt dan $\sigma_{\underline{u}} = 283$. Het verschil met de boven gegeven waarde is dus slechts klein.

b. Het onderzoek kan geschieden door de cumulatieve frequentieverdeling op normaal waarschijnlijkheidspapier uit te zetten (zie blz.A 57). Uit de figuur blijkt, dat het niet te gewaagd is om aan te nemen dat de populaties normaal verdeeld zijn.

Figuur bij 1962 - 3b



c. Uit de figuur op bladzijde A57 blijkt dat het gemiddelde verschil in lekdruk (Δ) ongeveer 6,4 atm. is. De standaardafwijkingen van het nieuwe en oude type zijn, zoals eveneens uit de figuur blijkt, ongeveer gelijk aan 8,4 atm. en 12,4 atm. De standaardafwijking van het verschil is dus globaal:

$$\sqrt{\frac{8,4^2}{100} + \frac{12,4^2}{61}} = 1,80 \text{ atm.}$$

4. a. Allereerst kan voor alle zekerheid onderzocht worden of de uit vroegere gegevens gevonden standaardafwijking voor de meetonnauwkeurigheid, geacht mag worden ook te gelden voor de in deze proef uitgevoerde metingen. De variantie, var($\underline{d}$), van de verschillen tussen de met beide pH-meters per oplossing gevonden pH-waarden, is een schatting van $2\sigma^2$ met $\nu = 4$ vrijheidsgraden. De nulhypothese: $\sigma = 0,054$, kan dus worden getoetst op grond van de overweging dat $\frac{4 \text{ var } (\underline{d})}{2\sigma^2}$ een χ^2-verdeling volgt met $\nu = 4$ vrijheidsgraden. Uit de gevonden verschillen (A - B):

-0,13   -0,05   -0,17   +0,02   -0,23

wordt berekend: var ($\underline{d}$) = 0,00972

zodat $$\chi^2 = \frac{4 \times 0,00972}{2 \times (0,054)^2} = 6,67.$$

De overschrijdingskans bij deze waarde van χ^2 is ongeveer 15%; er kan dus, temeer daar tweezijdig getoetst moet worden, aangenomen worden dat ook de meetonnauwkeurigheid van de in dit experiment uitgevoerde metingen wordt beschreven door een standaardafwijking $\sigma = 0,054$. Het gemiddelde verschil tussen de twee pH-meters bedraagt -0,112 en de standaardafwijking van dit gemiddelde $0,054\sqrt{\frac{2}{5}} = 0,034$. De nulhypothese $\mu_d = 0$ kan worden getoetst met de u-toets. Voor u wordt hier gevonden

$$u = \frac{-0,112}{0,034} = -3,3.$$

De tweezijdige overschrijdingskans bij deze waarde van u is 0,1%. De conclusie kan dus zijn dat de beide pH-meters systematisch in niveau verschillen.

5. a. Neen. Een latijns vierkant kan wel dienen om de invloeden van drie factoren tegelijk te onderzoeken, maar alleen als er tussen deze factoren geen interactie bestaat. In dit geval wordt er juist gezocht naar interacties tussen temperatuurinvloed en draadinvloed en/of machine-invloed.

   b. 1. Indien het antwoord (ten onrechte)bevestigend is, dient het cijfermateriaal met behulp van een variantie-analyse onderzocht te worden. Indien wij van de waarnemingen als voorlopig algemeen gemiddelde 64 aftrekken krijgen wij als variantie-analyse tabel:

	G.v.v.	Som v. kwadr.	Gem. kwadr.
Gemiddelde	1	0,25	0,25
Draden	3	430,25	143,42
Machines	3	258,75	86,25
Temperaturen	3	149,25	49,75
Rest	6	441,50	73,58
Totaal	16	1280,00	

De enige conclusie kan zijn, dat van geen van de onderzochte factoren een invloed kan worden aangetoond.

2. Indien het antwoord ontkennend is, zijn er verschillende mogelijkheden, bijvoorbeeld:

   a. Een proefopzet met 4 draden, 4 machines en 4 temperaturen in alle (64) combinaties.

   b. Men kan van één draad de helft bij lage, de helft bij hoge temperatuur spiraliseren en dat doen bij verschillende draden op verschillende machines.

Examen 1963

1. a. De berekening van de controlegrenzen voor de $\bar{x}$-kaart is niet juist. Als de grenzen een gezamenlijke overschrijdingskans van 0,3% moeten hebben, moet de afstand tussen de centrale lijn en de controlegrenzen gelijk zijn aan de gemiddelde spreidingsbreedten vermenigvuldigd met 0,577. In het voorschrift wordt echter de mediaan van de spreidingsbreedten gebruikt.

   b. Voor de berekening van de standaardafwijking van het proces dient de factor 0,430 vermenigvuldigd te worden met de gemiddelde in plaats van met de mediane spreidingsbreedte.

   c. Van de aanwijzingen ten aanzien van het buiten controle zijn van het proces komt alleen de eerste overeen met de normale gebruikswijze van een controlekaart, bij de andere twee zijn de gegeven aantallen te klein.
   Het is gebruikelijk voor deze aantallen negen, respectievelijk drie te nemen.

Opmerking: Van de kandidaten werd het bovenstaande antwoord verwacht. Hieronder volgt enige toelichting, die, evenals het antwoord, gebaseerd is op de veronderstelling dat het gaat om een normaal verdeeld proces.

a. Het gebruik van de mediaan van de spreidingsbreedten is wel toegestaan indien als factor 0,594 in plaats van 0,577 wordt genomen. Het verschil overigens is slechts klein: de overschrijdingskans van de controlegrenzen is bij de in het voorschrift gegeven werkwijze 0,36% in plaats van de gevraagde 0,3%.

b. Als voor de berekening wordt uitgegaan van de mediane spreidingsbreedte moet als factor 0,443 genomen worden.

c. Als het proces statistisch beheerst is, treden de in de tweede en derde aanwijzing van het voorschrift beschreven gebeurtenissen gemiddeld één keer op per serie van 15, respectievelijk 124 steekproeven (zie bijvoorbeeld W. Feller, "Introduction to probability theory and its applications", deel I, 2e druk, par. XIII, 7). Als voor de aantallen in die aanwijzingen negen en drie genomen wordt, wordt voor beide gebeurtenissen de gemiddelde frequentie van voorkomen kleiner dan drie keer per 1000 steekproeven.

2. a. De theoretische regressievergelijking is:

$$\underline{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \underline{\varepsilon}_i,$$

waarin $\underline{y}_i$ de opbrengst van de i^e charge is en x_i de daarbij behorende toevoegtijd. β_0 en β_1 zijn constanten, $\underline{\varepsilon}_i$ is een statistisch "residu", dat normaal verdeeld is met verwachting 0 en de in het vraagstuk genoemde standaardafwijking (σ). De stochastische variabelen $\underline{\varepsilon}$ zijn voor verschillende charges van elkaar onafhankelijk. Bij de gegevens gaat het om de totale opbrengst van twee opeenvolgende charges en dus is de theoretische vergelijking:

$$\underline{Y}_i = 2\beta_0 + \beta_1 X_i + \underline{\eta}_i,$$

waar $\underline{Y}_i$ de totale opbrengst van het i^e paar charges is en X_i de som van de bijbehorende toevoegtijden. β_0 en β_1 zijn dezelfde constanten als in de eerste vergelijking, $\underline{\eta}_i$ de som van twee $\underline{\varepsilon}$'s. $\underline{\eta}_i$ is dus normaal verdeeld met verwachting 0 en standaardafwijking $\sigma\sqrt{2}$. Voor het schatten van de coëfficiënten kan gebruik gemaakt worden van de methode der kleinste kwadraten, die dan toegepast moet worden op de tien getallenparen:

Som toevoegtijden per paar charges (X) (minuten)	Opbrengst aan C per paar charges (Y) (kg)
58	96,9
55	96,2
52	95,8
76	107,8
52	94,2
61	99,2
54	95,7
58	97,3
59	100,2
48	94,0

Deze berekeningen, waarbij ter vereenvoudiging gebruik kan worden gemaakt van codering van de waarnemingen geven voor de regressie coëfficiënt van Y op X:

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})Y_i}{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2} = 0,52,$$

voor de constante term:

$$\bar{Y} - 0,52 \times \bar{X} = 67,93$$

en voor de residuele variantie:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (Y_i - \bar{Y})^2 - \frac{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})Y_i}{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2}}{8} = 0,95.$$

De schattingen voor de coëfficiënten β_1 en β_0 zijn dus 0,52 en $\frac{67,93}{2} = 33,97$.

b. De geschatte standaardafwijking van de schatter voor β_1 is:

$$\sqrt{\frac{s^2}{\sum_{i=1}^{10} (X_i - \overline{X})^2}} = \sqrt{0,0018} = 0,042.$$

De nulhypothese $\beta_1 = 0$ kan getoetst worden met Student's toets. De toetsingsgrootheid heeft de waarde $\frac{0,52}{0,042} = 12,4$. Het aantal vrijheidsgraden is 8, de tweezijdige overschreidingskans is kleiner dan 0,001. De vermoede afhankelijkhèid wordt dus door de gegevens bevestigd.

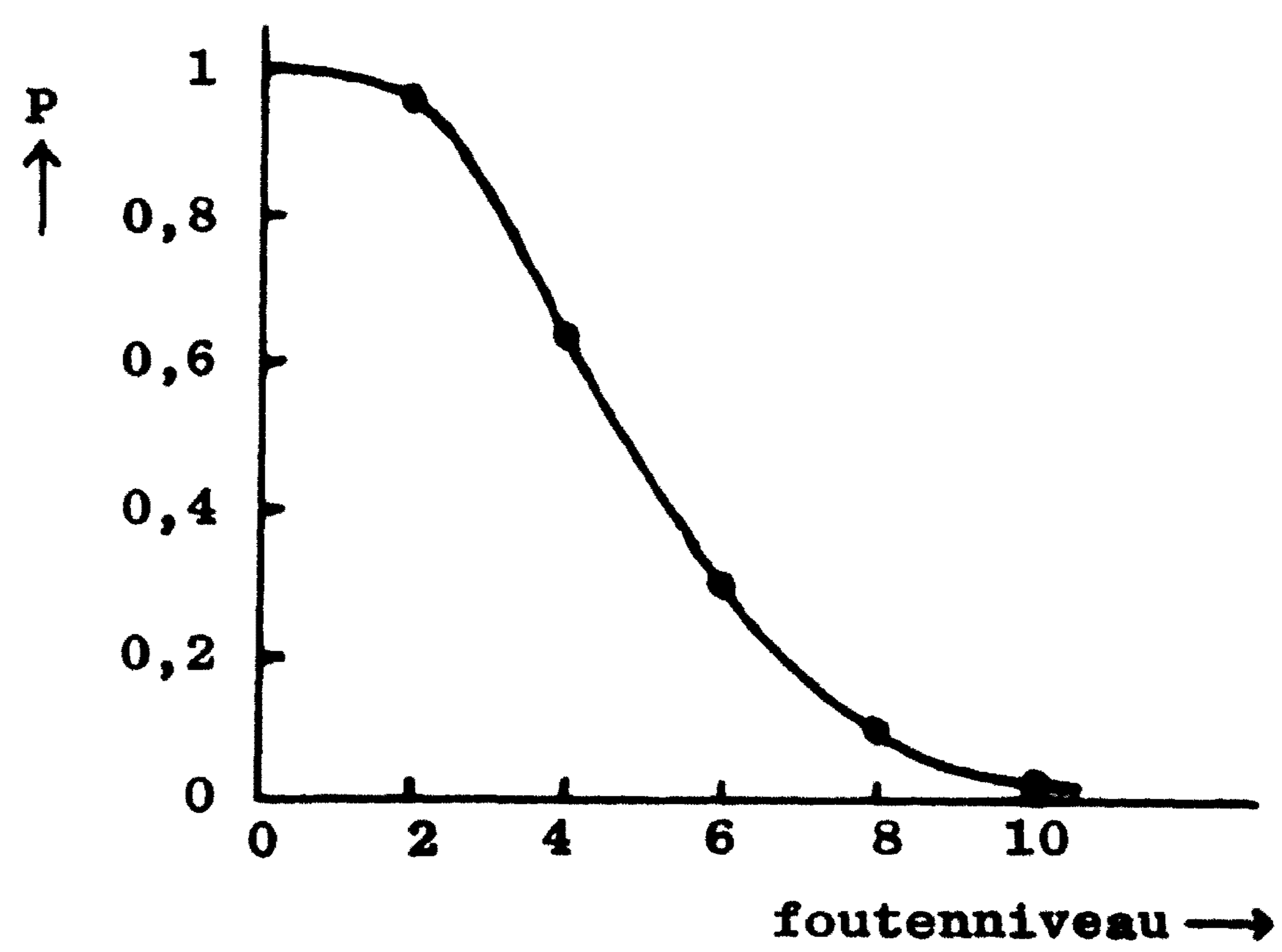
c. De in a berekende residuele variantie is een schatting van de variantie van $\underline{\eta}$, dus van $2\sigma^2$. Dus is $\sqrt{\frac{s^2}{2}} = 0,69$ een schatting voor σ.

<u>Opmerking</u>: bij deze oplossing is aangenomen dat de variaties in de opbrengst van de charges niet veroorzaakt worden door factoren die bij het afscheiden van C uit het mengsel een rol spelen. Als dat wel zo zou zijn zou de overgang van het in a eerstgenoemde theoretische model op het model voor de totale opbrengst van twee opeenvolgende charges niet juist zijn, omdat beide charges gezamenlijk worden afgewerkt.

3. a. Men mag aannemen dat het aantal putjes per staaf in de genoemde omstandigheden verdeeld is volgens Poisson.

b. Als het gemiddelde aantal fouten per staaf 2,5 is, is de kans om minder dan 5 putjes per staaf te vinden volgens de tabel van de Poissonverdeling 0,89. Ook als de vervanging van de gietmond geen invloed heeft op het foutenniveau zal men dus in de direct na de vervanging geproduceerde staaf meestal minder dan 5 putjes vinden.

c. De gevraagde kans (P) kan voor een aantal waarden van het foutenniveau gevonden worden uit de tabel van de Poissonverdeling. In de onderstaande grafiek is het resultaat gegeven. Deze grafiek is niets anders dan de bedoelde keuringskarakteristiek.



d. De eenvoudigste toets die hier kan worden toegepast is de tekentoets.

e. Dat de montage van een <u>nieuwe</u> gietmond de oorzaak is van de geconstateerde verbetering, is niet bewezen. Het is nl. ook mogelijk, dat het effect veroorzaakt wordt alléén door het uitbouwen resp. weer inbouwen van een gietmond (eventueel de oude), misschien zelfs alleen door het stoppen en/of weer starten van het proces. Indien inderdaad de gietmond zelf de oorzaak van de verslechtering is, dient de technische oorzaak expliciet te worden aangewezen.

f. Het is mogelijk dat het gemiddelde foutenniveau in de periode waarin de eerste serie waarnemingen is verzameld anders is geweest dan in de tweede periode. Men kan daarom uit een vergelijking van de twee reeksen waarnemingen geen enkele conclusie trekken over de invloed van de vervanging van de gietmond omdat het effect gestrengeld is met de eventuele invloed van de periode.

4. a. De lengte van het tweede been is:

$$\underline{q} = \underline{z} - \underline{p} - \underline{r}.$$

Dus is de verwachting van $\underline{q}$:

$$\mu_q = \mu_z - \mu_p - \mu_r = 20 \text{ cm}.$$

Omdat $\underline{z}$, $\underline{p}$ en $\underline{r}$ stochastisch onafhankelijk zijn, is de standaardafwijking van q:

$$\sigma_q = \sqrt{\sigma_z^2 + \sigma_p^2 + \sigma_r^2} = 0{,}324 \text{ cm}.$$

b. Uit $\underline{q} = \underline{z} - \underline{p} - \underline{r}$ volgt:

$$\underline{p} - \underline{q} = 2\underline{p} - \underline{z} + \underline{r}.$$

Dus

$$\mu_{p-q} = 2\mu_p - \mu_z + \mu_r = 0 \text{ cm}.$$

$$\sigma_{p-q} = \sqrt{4\sigma_p^2 + \sigma_z^2 + \sigma_r^2} = 0{,}474 \text{ cm}.$$

c. Omdat de meetfout altijd tussen -0,10 cm en +0,10 cm ligt, kan een produkt waarbij p-q buiten de tolerantiegrenzen valt ($\pm$0,50 cm) bij meting nooit een waarde voor p-q tussen -0,40 cm en +0,40 cm opleveren.

Het gevraagde percentage is dus 0%.

d. Gevraagd wordt naar die produkten waarvan de "ware maat" p-q tussen -0,50 cm en +0,50 cm ligt en die bij meting een waarde groter dan +0,40 cm of kleiner dan -0,40 cm opleveren. Dat kan alleen gebeuren bij produkten waarvoor geldt:

$$-0{,}50 < p\text{-}q < -0{,}30$$

of

$$0{,}30 < p\text{-}q < 0{,}50.$$

Een globale berekening van het gevraagde percentage kan zijn:

1. Uit de tabel van de verdelingsfunctie van de normale verdeling volgt dat 5,36% van alle produkten een waarde voor p-q heeft tussen -0,50 cm en -0,40 cm. Als we de waarde voor al deze produkten op -0,45 stellen houdt dat in dat 75% ervan een gemeten waarde kleiner dan -0,40 cm zal hebben. Dat is dus $\frac{3}{4} \times 5{,}36 = 4{,}02\%$ van de totale produktie.

2. Van de produkten waarbij p-q tussen -0,40 cm en -0,30 cm ligt (6,38% van de produktie) zal 25% (1,595% van de totale produktie) een gemeten waarde beneden -0,40 cm opleveren.

3. Voor de produkten waarbij p-q tussen +0,30 cm en +0,40 cm, respectievelijk 0,40 cm en 0,50 cm ligt, zijn de percentages die boven de grootste specificatiegrens vallen gelijk aan de onder 2, respectievelijk 1 genoemde percentages.

4. Het gevraagde percentage is ongeveer:

$$2(4{,}02 + 1{,}595) = 11{,}23\%.$$

Opmerking: Een exacte berekening van het in vraag d genoemde percentage geeft als uitkomst 11,08%. De gegeven benadering is dus goed.

5. a. De gegevens van de eerste en tweede keuring door de controleuse kunnen worden samengevat in de onderstaande 2 × 2-tabel.

		1e keuring		
		goedkeuren	afkeuren	totaal
2e keuring	goedkeuren	8	15	23
	afkeuren	6	21	27
	totaal	14	36	50

Uit deze tabel blijkt zonder meer dat de controleuse van haar werk weinig of niets terecht brengt: in 21 van de 50 gevallen is niet consistent gekeurd.

b. Over de keuringsbekwaamheid van de chef kan niets worden opgemerkt door gebrek aan gegevens.

c. Als mag worden aangenomen dat de aan beide personen ter keuring aangeboden pullen aselecte steekproeven zijn uit één populatie, kan vergelijking van de keuringsgestrengheid geschieden met behulp van een χ^2-toets op de volgende 2 × 2-tabel.

	controleuse	chef	totaal
goedgekeurd	1124	772	1896
afgekeurd	826	778	1604
totaal	1950	1550	3600

De waarde χ^2 is 21,6. Hierbij is, hoewel het in dit geval niet belangrijk is, gebruik gemaakt van de continuïteitscorrectie. Het aantal vrijheidsgraden is 1 en de overschrijdingskans van 21,6 is kleiner dan 0,1%. De conclusie luidt dan ook: de chef heeft een andere (en wel grotere) keuringsgestrengheid dan de controleuse.

d. Indien de drie foutensoorten onafhankelijk van elkaar voorkomen moet het produkt van de drie marginale kansen op niet-voorkomen van elk van de foutensoorten gelijk zijn aan de goedkeurkans voor een pul. Deze kansen kunnen uit de in het vraagstuk gegeven resultaten worden geschat en zijn in de volgende tabel gegeven, uiteraard, in verband met hun verschillende keuringsgestrengheid, voor de controleuse en de chef afzonderlijk.

	controleuse	chef
barsten	0,780	0,820
blazen	0,800	0,780
blutsen	0,667	0,600
goedkeurkans	0,576	0,498

Onder de veronderstelling van onafhankelijkheid zouden de goedkeurkansen voor een pul voor de controleuse en de chef 0,416 en 0,384 zijn. Vergelijking met de gevonden fracties (0,576 en 0,498) leert dat de foutensoorten vermoedelijk niet onafhankelijk van elkaar voorkomen.

6\. a. Noemen wij de fractie foutieve exemplaren in een partij p, de steekproefgrootte n en het maximaal aantal in de steekproef toegestane fouten c, dan bepalen bij gegeven p de parameters n en c de goedkeurkans P_g. De gemiddelde kosten voor een partij van kwaliteit p zijn, als de partij N produkten bevat:

P_g (kosten bij goedkeuring) + $(1-P_g)$ (kosten bij afkeuring) =

$P_g(Np\ 0{,}85 + 0{,}15n) + (1-P_g)(N\ 0{,}75 + 0{,}15n) =$

$P_g N(0{,}85p - 0{,}75) + 0{,}15n + 0{,}75N.$

In deze formule kunnen (bij gegeven p) P_g en n zo gekozen worden dat de gemiddelde kosten minimaal zijn. De grootheid c volgt dan uit de gevonden waarde van P_g en n. Voor waarden van p waarvoor $0{,}85p - 0{,}75 < 0$, dus voor waarden van $p < 0{,}882$ zijn de gemiddelde kosten minimaal als $P_g = 1$ en $n = 0$, voor waarden van $p > 0{,}882$ moet $P_g = 0$ en $n = 0$. In ons geval is gegeven dat p vrijwel altijd kleiner is dan 0,1. De optimale werkwijze is dus: laat alle partijen zonder keuring doorgaan.

b. De steekproefgrootte moet zo klein mogelijk zijn en bovendien moeten de parameters n en c zo gekozen zijn dat de goedkeurkans bij $p = 0{,}09$ zo dicht mogelijk bij 0,05 ligt. Dit laatste houdt in, zoals gemakkelijk te verifiëren is, dat n kleiner moet worden naarmate voor c een kleiner getal gekozen wordt. Een minimale steekproefgrootte wordt dus verkregen door $c = 0$ te nemen. Uit de Poissontabel volgt dat bij $c = 0$ en $P_g = 0{,}05$ ongeveer moet gelden $pn = 3$. Daaruit volgt $n = 33$. Het te kiezen enkelvoudige steekproefsysteem is dus $n = 33$, $c = 0$.

c. Aangezien gegeven is dat de toegeleverde partijen noch extreem goed, noch extreem slecht zijn verdient voor de gegeven situatie een enkelvoudig steekproefsysteem de voorkeur. Immers, een dubbel steekproefsysteem leidt slechts dan tot een besparing van de keuringsarbeid indien na het keuren van de eerste steekproef reeds een beslissing, hetzij goedkeuren, hetzij afkeuren, kan worden genomen en heeft daarom zin als vooral extreem goede of extreem slechte partijen ter keuring worden aangeboden.

Examen 1964

1. a. Kwaliteit is de mate waarin een kwaliteitsdrager (bijv. een produkt, een proces, arbeidsprestaties) voldoet aan ter zake gestelde specificaties (eisen, normen).

   b. Twee of meer factoren zijn in een proefschema "confounded" als het bij de analyse, ten gevolge van de structuur van het proefschema onmogelijk is hun invloed afzonderlijk te bepalen.

   c. De scherpte van een keuringssysteem wordt gemeten door de relatieve helling van de keuringskarakteristiek in het controlepunt (50%-punt).

   d. De gestrengheid van een keuringskarakteristiek wordt bepaald door de ligging van het controlepunt (50%-punt).

   e. Men past aselecteren toe om eventuele systematische invloeden van niet in het onderzoek betrokken factoren (trends e.d.) uit te schakelen.

   f. Men mag geen Latijns vierkant toepassen indien tussen de te onderzoeken factoren interacties zijn te verwachten.

   g. Een continuïteitscorrectie wordt toegepast indien men een discrete verdeling door een continue verdeling benadert.

   h. KDI = Kwaliteitsdienst voor de Industrie.
   EOQC = European Organisation for Quality Control.

   i. Tolerantie-grenzen zijn technisch voorgeschreven of statistisch berekende grenzen voor individuele exemplaren of waarnemingen. Regelgrenzen zijn meestal statistisch vastgestelde grenzen voor proces-gemiddelden.

   j. Door zijn Quality Control Handbook en zijn baanbrekende werk op het gebied van kwaliteitsbeheersing.

2. a. De zuivere hoofdeffecten worden verkregen door het algemeen gemiddelde af te trekken van de rij- en kolomgemiddelden:

$A_1 = -3$ $B_1 = -6$
$A_2 = +17$ $B_2 = +5$
$A_3 = +7$ $B_3 = -14$
$A_4 = -21$ $B_4 = +15$.

b. De variantie-analyse is:

	Netto-kwadratensom	Vrijheidsgraden	Gem. kwadraat
Hoofdeffect A	3152	3	1050
Hoofdeffect B	1928	3	643
Interactie AB	2186	9	243

c. Een eventuele aanwijzing voor de oorzaak van de hoge waarde van het gemiddelde kwadraat voor de interactie (voor het gemiddelde kwadraat werd $\sigma_e^2 = 1$ verwacht) kan worden gevonden door de zestien residuen $e_{ij} = y_{ij} - A_i - B_j - G$ te berekenen, waarin dan G het gemiddelde van de 16 waarnemingen is:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	+ 4	+ 4	-11	+ 3
A_2	+ 3	+ 4	-11	+ 4
A_3	+ 5	+ 3	-13	+ 5
A_4	-12	-11	+35	-12

Uit de tabel blijkt dat het resultaat y_{43} vermoedelijk verantwoordelijk is voor de grote interactie tussen A en B. Het is mogelijk dat men hier met een uitschieter te maken heeft.

d. De invloed van de te hoge waarde van y_{43} zal zijn dat de hoofdeffecten A_4 en B_3 te hoog zijn uitgevallen, terwijl de andere effecten te laag zijn doordat voor het algemeen gemiddelde een te grote waarde is gevonden.

e. Naast de reeds uitgevoerde variantie-analyse, zou een tweede variantie-analyse moeten worden uitgevoerd met "missing-plot" schatting ingevuld voor de "uitschieter". Bij de conclusies ten behoeve van de opdrachtgever zou uitdrukkelijk op de uitschieter gewezen moeten worden, waarna de conclusies uit beide analyses vermeld kunnen worden.

3. a. Met behulp van de tabel van de verdelingsfunctie van de normale verdeling kan worden uitgerekend dat de percentages ballons met minimale wanddikte tussen de klassegrenzen van tabel 1 gelijk zijn aan:

Klasse	Percentages
< 0,30	0,00
0,30 - 0,32	0,04
0,32 - 0,34	0,34
0,34 - 0,36	1,90
0,36 - 0,38	6,90
0,38 - 0,40	15,96
> 0,40	74,86

Het te verwachten percentage springers is dus

$$\frac{34 \times 0{,}04 + 19 \times 0{,}34 + 14 \times 1{,}90 + 4 \times 6{,}90 + 1 \times 15{,}96}{100} = 0{,}7798 \approx 0{,}78.$$

b. Bij elke waarde van het partijgemiddelde is de goedkeurkans op eenvoudige wijze te berekenen: het gemiddelde van de metingen aan een aselect gekozen steekproef van 9 stuks is normaal verdeeld met gemiddelde gelijk aan het partijgemiddelde en standaardafwijking 0,01. Met behulp van de tabel van de normale verdeling kan dus de kans dat het steekproefgemiddelde een waarde groter dan of gelijk aan 0,42 mm aanneemt, gemakkelijk berekend worden als functie van het partijgemiddelde.

Op de in het antwoord op vraag a beschreven manier kan bovendien bij ieder partijgemiddelde het te verwachten percentage springers berekend worden.

Beide berekeningen tezamen geven de gevraagde keuringskarakteristiek.

c. De goedkeurkans is 0,95 als het partijgemiddelde gelijk is aan $0{,}42 + 1{,}64 \times 0{,}01 = 0{,}4364$ mm. De bij de beantwoording van vraag a gegeven tabel wordt dan:

Klasse	Percentages
< 0,30	0,00
0,30 - 0,32	0,01
0,32 - 0,34	0,06
0,34 - 0,36	0,47
0,36 - 0,38	2,47
0,38 - 0,40	8,30
> 0,40	88,69

Dus:

$$p_1 = \frac{0{,}01 \times 34 + 0{,}06 \times 19 + 0{,}47 \times 14 + 2{,}47 \times 4 + 8{,}31 \times 1}{100} =$$

$$= 0{,}2625\% \ (\approx 0{,}26\%).$$

Als het partijgemiddelde $0{,}42 - 1{,}64 \times 0{,}01 = 0{,}4036$ mm is, is de goedkeurkans 0,05. De tabel wordt dan:

Klasse	Percentages
< 0,28	0,00
0,28 - 0,30	0,03
0,30 - 0,32	0,24
0,32 - 0,34	1,44
0,34 - 0,36	5,65
0,36 - 0,38	14,12
0,38 - 0,40	23,75
> 0,40	54,77

en

$$p_2 = 1{,}9635\% \quad (\approx 1{,}96\%).$$

d. Deze vraag kan beantwoord worden met behulp van de tabel van de Poissonverdeling. Daaruit volgt dat, als bijvoorbeeld $k = 1$ gekozen wordt, moet gelden (p_1 en p_2 zijn percentages): $p_1 n \leqq 82$ en $p_2 n \geqq 630$. Het is niet mogelijk een waarde van n te vinden die voor de onder c genoemde waarden van p_1 en p_2 aan beide ongelijkheden voldoet. Voor $k = 2$ lukt dat evenmin. Voor $k = 3$ worden de ongelijkheden: $p_1 n \leqq 137$ en $p_2 n \geqq 775$, dus $\frac{775}{p_2} \leqq n \leqq \frac{137}{p_1}$ of $394{,}7 \leqq n \leqq 521{,}8$. De gevraagde waarden van n en k zijn dus respectievelijk 395 en 3.

4. a. De toets zal zijn de u-toets, de nulhypothese $\mu \leqq 88\%$.

b. Men moet de onbetrouwbaarheidsdrempel (α) van de toets kiezen en bovendien moet voor één waarde (μ_1) die bij de alternatieve hypothese ($\mu > 88\%$) behoort het vereiste onderscheidingsvermogen ($1-\beta$) van de toets worden vastgesteld.

c. Omdat ten onrechte verwerpen van de nulhypothese financiële schade ten gevolge zou hebben, ligt het voor de hand α klein te kiezen, bijvoorbeeld $\alpha = 0{,}01$. Verder zal, omdat voor $\mu > 90\%$ overgang op de nieuwe grondstoffen financiëel zeer aantrekkelijk is, het onderscheidingsvermogen $1-\beta$ voor $\mu_1 = 90\%$ hoog moeten zijn, bijvoorbeeld 0,99.

d. De toetsingsgrootheid van de onder a genoemde toets zal zijn $\frac{\underline{\bar{x}} - 88}{\sigma/\sqrt{n}}$, waarin n het aantal waarnemingen is en $\underline{\bar{x}}$ het rekenkundig gemiddelde van die waarnemingen, terwijl $\sigma = 1\%$. Als μ het verwachte omzettingspercentage is, geldt:

$$\frac{\underline{\bar{x}} - 88}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\underline{\bar{x}} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu - 88}{\sigma/\sqrt{n}} = \underline{u} + \frac{\mu - 88}{\sigma/\sqrt{n}},$$

als $\underline{u}$ de standaard-normaal verdeelde stochastische variabele is. Als het kritieke gebied voor de toetsingsgrootheid aangegeven wordt door $\frac{\underline{\bar{x}} - 88}{\sigma/\sqrt{n}} \geqq R$ en als de onder c genoemde waarden worden geaccepteerd, moet gelden:

$$P\left(\frac{\underline{\bar{x}} - 88}{\sigma/\sqrt{n}} \geqq R \mid \mu = 88\right) = 0{,}01$$

of

$$P(\underline{u} \geqq R) = 0{,}01.$$

Dus, als $u_{0,01}$ de waarde is die door $\underline{u}$ met kans 0,01 wordt overschreden:

$$R = u_{0,01}.$$

Verder moet gelden:

$$P\left(\frac{\underline{\bar{x}} - 88}{\sigma/\sqrt{n}} \geqq R \mid \mu = 90\right) = 0{,}99$$

of

$$P\left(\underline{u} \geqq R - \frac{2}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0{,}99.$$

Dus:

$$R - \frac{2}{\sigma/\sqrt{n}} = -u_{0,01}.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{2}{\sigma/\sqrt{n}} = 2u_{0,01}$$

en

$$n = \sigma^2 u_{0,01}^2 = 2{,}33^2 \approx 5{,}43.$$

Het advies is dus zes proefcharges te vervaardigen.

e. Men kan in eerste instantie hopen, dat bij overgang op de nieuwe grondstoffen de standaardafwijking dezelfde zal zijn als bij gebruik van de oude en het onderzoek starten met het onder d gevonden aantal waarnemingen. Na uitvoering van het onderzoek kan men dan aan de hand van de voor σ gevonden schatting nagaan of nog aanvullende waarnemingen moeten worden gedaan. De uiteindelijk toegepaste toets zal, in geval σ gewijzigd blijkt te zijn, niet de u-toets maar de t-toets moeten zijn. Bovendien moet men, als de σ groter blijkt te zijn geworden, rekening houden met het feit dat dit duidt op een minder constante kwaliteit.

5. a. De standaardafwijking "binnen steekproeven" kan worden geschat uit de gemiddelde spreidingsbreedte. De schatting is $0{,}49 \times 4{,}1 =$ $= 2{,}0$ mm. Daaruit zou voor een schatting van de standaardafwijking van een gemiddelde van vier exemplaren volgen $\frac{2{,}0}{\sqrt{4}} = 1{,}0$ mm. Als standaardafwijking voor de gemiddelden is echter gevonden 4,1 mm. De beide waarden kunnen worden vergeleken via de F-toets (althans bij benadering, omdat één van beide standaardafwijkingen uit de spreidingsbreedte berekend is). Voor F wordt gevonden: 16,81. Het 0,1%-punt van de F-verdeling met 19 tegen 60 graden van vrijheid is 2,78 zodat geconcludeerd kan worden dat de spreiding tussen de steekproefgemiddelden niet uit de spreiding binnen steekproeven verklaard kan worden.

b. De grenzen van de controlekaart zouden op een afstand $\frac{3 \times 2{,}0}{\sqrt{4}} =$ $= 3{,}0$ mm van de centrale lijn liggen (bij een gezamenlijke overschrijdingskans van 0,3%). Een schatting van het percentage steekproefgemiddelden dat buiten die grenzen zal vallen onder de in de vraag genoemde omstandigheden kan verkregen worden door de genoemde afstand te vergelijken met de voor de steekproefgemiddelden gevonden standaardafwijking (4,1 mm). Uit de tabel voor de normale verdeling volgt dat de absolute waarde van een normaal verdeelde stochastische variabele met $\sigma = 4{,}1$ mm de waarde 3 met kans 0,46 overschrijdt.

Het gevraagde percentage is dus 46%.

c. De standaardafwijking binnen steekproeven was 2,0 mm, waarin dan de meetfout met standaardafwijking 1,2 mm was opgenomen. Bij de nieuwe methode zal de standaardafwijking binnen steekproeven worden:

$$s_b' = \sqrt{2{,}0^2 - 1{,}2^2 + \frac{1{,}2^2}{2}} = 1{,}81 \text{ mm.}$$

De gemiddelde spreidingsbreedte wordt dan:

$$2{,}06 \times 1{,}81 = 3{,}73 \text{ mm.}$$

d. Men kan de 20 steekproeven van 4 opeenvolgende staven beschouwen als aselecte steekproeven uit 20 verschillende populaties met gemiddelden $\mu_1, \ldots, \mu_{20}$ en standaardafwijking σ_b. Blijkens het vraagstuk (vraag b) mogen $\mu_1, \ldots, \mu_{20}$ zelf weer als aselecte trekkingen uit een normaal verdeelde populatie worden beschouwd. Noemen wij de standaardafwijking daarvan σ_t, dan is de standaardafwijking van een steekproefgemiddelde:

$$\sqrt{\sigma_t^2 + \frac{\sigma_b^2}{4}}.$$

Een schatting daarvoor is 4,1 mm zodat een schatting voor σ_t^2 is:

$$s_t^2 = 4{,}1^2 - \frac{2{,}0^2}{4} = 15{,}81 \text{ mm}^2.$$

Bij de nieuwe meetmethode zal de standaardafwijking tussen de tachtig waarnemingen ongeveer gelijk zijn aan (zie c):

$$\sqrt{15{,}81 + 1{,}81^2} = 4{,}37 \text{ mm.}$$

<u>Opmerking</u>: ook bij dit antwoord (en bij de vorige) maakt het feit, dat voor de schatting van σ_b van de spreidingsbreedte is uitgegaan, de beoordeling van de nauwkeurigheid der schattingen wat moeilijk.

Voor de praktische omstandigheden die in het vraagstuk beschouwd worden is dat echter onbelangrijk.
Verder blijkt uit de theorie van de variantie-analyse dat het antwoord op de laatste vraag eigenlijk zou moeten zijn:

$$\sqrt{1,81^2 + \frac{76}{79}\, 15,81} = 4,30 \text{ mm}.$$

Ook deze uitkomst verschilt onbetekenendweinig van de uitkomst die hierboven gegeven is.

6. Bij constante seriegrootte kan de diameter van een aselect uit de totale produktie getrokken produkt beschouwd worden als een waarneming aan een normaal verdeelde stochastische variabele. De verwachting daarvan blijkt niet uit het vraagstuk; wij zullen aannemen dat de verwachting van de instelfout 0 is en dus, dat de verwachting van de diameter gelijk is aan D, de geëiste diameter. De variantie van de diameter is $\sigma^2 = \sigma_I^2 + C_2N$, waarin σ_I de variantie van de instelfout is.
Als alle genoemde grootheden in microns worden uitgedrukt, moet, omdat de breedte van het tolerantiegebied 0,17 mm is en omdat 1% buiten de tolerantiegrenzen mag vallen, de volgende betrekking gelden:

$$2,575\sigma = \frac{170}{2}.$$

Verder blijkt uit het vraagstuk:

$$I_{max} = 1,96\sigma_I.$$

Dus, als de tijden in seconden worden genomen:

$$\begin{aligned} t_{max} &= 3600\ T_{max} \\ &= 3600\ \frac{C_1}{I_{max}} \\ &= \frac{3600\ C_1}{1,96\ \sigma_I} \end{aligned}$$

$$= \frac{3600\ C_1}{1{,}96\sqrt{\left(\frac{170}{5{,}150}\right)^2 - C_2 N}}$$

$$= \frac{1836{,}7}{\sqrt{1090 - N}} .$$

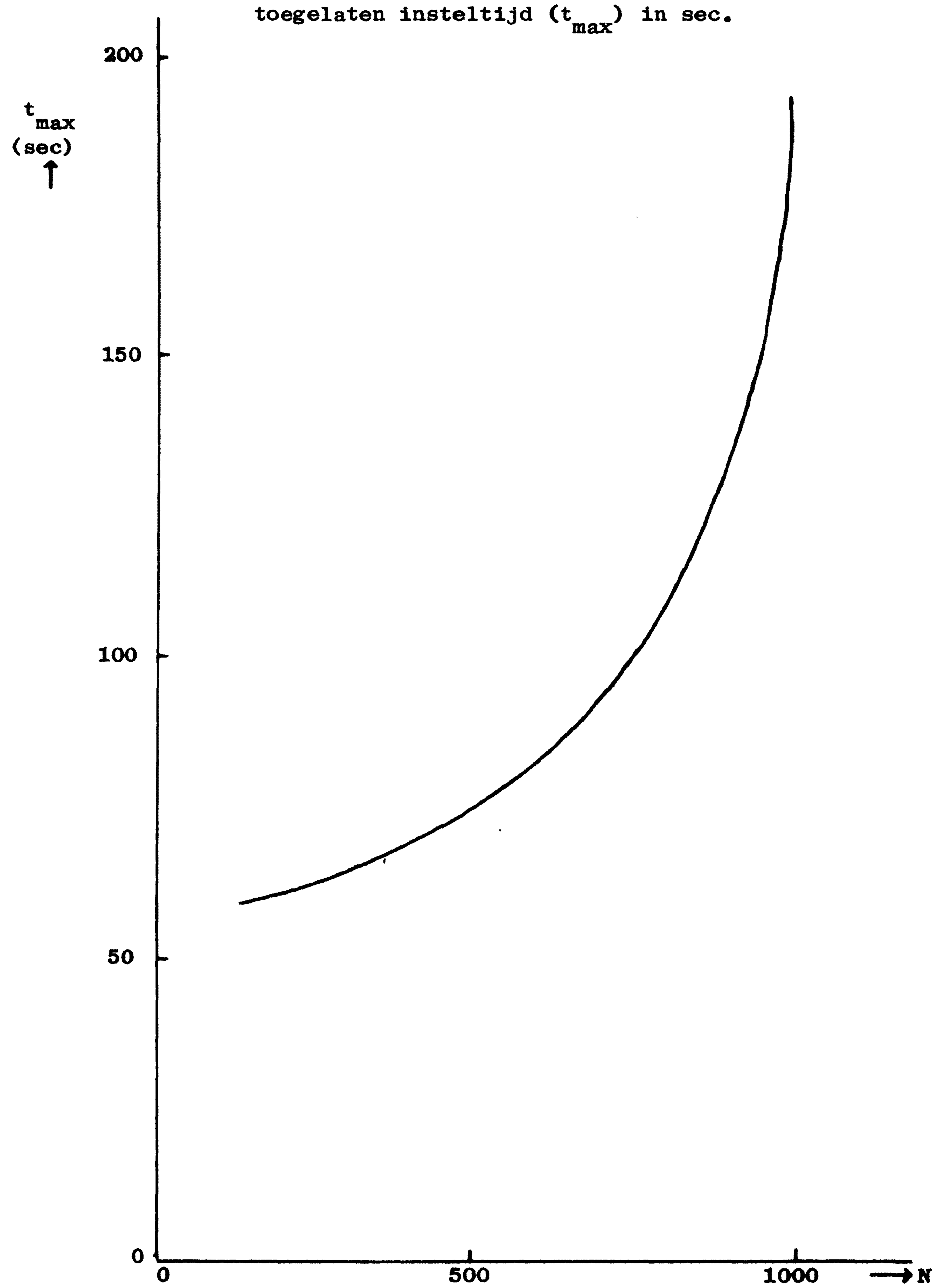
De hieruit volgende grafiek is op blz. A80 gegeven.

7. De verschillen tussen de metingen van A en B aan hetzelfde fotron kunnen beschouwd worden als samengesteld uit een aantal componenten:
   1. een "effect" van de dag waarop A gemeten heeft;
   2. een "effect" van de dag waarop B gemeten heeft;
   3. een "toevallige" meetfout van A;
   4. een "toevallige" meetfout van B.

Andere componenten kunnen wel aanwezig zijn maar zijn uit dit cijfermateriaal niet te isoleren en worden daarom buiten beschouwing gelaten. Uit de grafieken blijkt dat de variantie "binnen keuringsdata" die opgebouwd is uit de varianties van de componenten 3 en 4 en uit verschillen tussen de dageffecten van B veel kleiner is dan de variantie binnen "inzet-data" die behalve uit de varianties van de componenten 3 en 4 uit de verschillen tussen de dageffecten van A is opgebouwd. Hieruit volgt dat de verschillen tussen de dageffecten bij A veel groter moeten zijn dan bij B. Controleur B heeft dus gelijk.

Figuur bij 1964 - 6

Verband tussen produktiegrootte (N) en maximaal toegelaten insteltijd (t_{max}) in sec.



Examen 1965

1. Er kan geen algemene conclusie worden getrokken met betrekking tot het verschil tussen de methoden A en B, omdat de aantallen onderzochte lasverbindingen niet gegeven zijn.
Wel kan men onderzoeken of de ernst van de gebreken voor beide methoden verschillend is als men ten minste wil aannemen dat het optreden van breuk daarvoor een aanwijzing is. Dit onderzoek kan uitgevoerd worden door een χ^2-toets toe te passen op de volgende 2 × 2-tabel.

	breuk	geen breuk	totaal
A	7	14	21
B	17	22	39
totaal	24	36	60

De berekening geeft $\chi^2 = (1{,}4,-0{,}5)^2 \left(\frac{1}{8{,}4} + \frac{1}{12{,}6} + \frac{1}{15{,}6} + \frac{1}{23{,}4}\right) =$ $= 0{,}25$. Het aantal vrijheidsgraden is 1. Uit de χ^2-tabel blijkt dat men niet met redelijke betrouwbaarheid kan concluderen tot een verschil in ernst van de gebreken voor de methoden A en B.

2. a. Als het proces wat de mediaan betreft onder controle zou zijn, zou het verwachte aantal min-uitvallers evenals het verwachte aantal plus-uitvallers 95 zijn en het verwachte aantal niet uitvallers zou 3610 bedragen. Deze verwachte verdeling over drie categorieën kan met behulp van de χ^2-toets vergeleken worden met de gevonden verdeling. Het resultaat is $\chi^2 = 98{,}54$. Het aantal vrijheidsgraden is 2, het bovenste 0,1%-punt van de χ^2 verdeling is 13,816. De conclusie is dat het proces niet onder controle is.

   b. De onder a genoemde χ^2-toets levert, toegepast op de resultaten van Vlaer en Pronk afzonderlijk, respectievelijk $\chi^2 = 3{,}77$ en 130,91. Vergelijking met de χ^2-tabel leert dat alleen voor Pronk met reden kan worden gesteld dat het proces niet onder controle is. Voor Vlaer is dus geen correctie nodig, voor Pronk wel.

Wij nemen aan dat het niet onder controle zijn van Pronk's proces uitsluitend te wijten is aan een verschuiving van het procesgemiddelde en stellen de norm voor het proces gelijk aan 0. Wij nemen verder aan dat de standaardafwijking van het proces σ is en dat de verdeling van de mediaan van vijf onafhankelijke waarnemingen aan een normaal verdeelde stochastische variabele met verwachting μ en standaardafwijking σ normaal verdeeld is met verwachting μ en standaardafwijking $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Uit de percentages min-uitvallers en plus-uitvallers (6,0% en 0,9%) bij Pronk volgt dan dat een schatting ($\hat{\mu}$) voor zijn proces gemiddelde gevonden kan worden uit:

$$\hat{\mu} - 1{,}555 \frac{\sigma}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = - (\hat{\mu} + 2{,}365 \frac{\sigma}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}).$$

Dus:

$$\hat{\mu} = - 0{,}405 \frac{\sigma}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = - 0{,}227\sigma.$$

Het proces bij Pronk kan dus gecorrigeerd worden door een verschuiving in het niveau van +0,227 keer de standaardafwijking van het proces.

c. Ook na herstel van de administratieve fout is bij Pronk het proces niet onder controle. De χ^2-toets levert nu een waarde 194,27 op en dat is ver boven het 0,1%-punt van de χ^2-verdeling met twee vrijheidsgraden. Wel is nu een verschil tussen de kans op een plus-uitvaller en een min-uitvaller niet meer aantoonbaar: de aantallen voor de beide soorten uitvallers zijn 120 en 132. Als de beide genoemde kansen gelijk zouden zijn, zou men voor beide aantallen 126 verwachten. Een χ^2-toets (met continuïteits-correctie) geeft nu $\chi^2 = 0{,}48$, zodat tot een verschil tussen de kansen inderdaad niet kan worden geconcludeerd (het aantal vrijheidsgraden is 1). Uit deze beide feiten, het niet onder controle zijn van het proces en het niet aantoonbaar verschillend zijn van de kansen op min- en plus-uitvallers, kan men concluderen dat Pronk's proces vermoedelijk in het algemeen wel goed gecentreerd zal zijn geweest, maar dat hij òf met een te grote standaardafwijking heeft gewerkt òf van tijdstip tot tijdstip zijn niveau op een toevallige wijze heeft laten veranderen. Wij nemen, omdat dat blijkens het vraagstuk de bedoeling is, aan dat het eerste het geval is geweest. Stellen wij weer de norm voor het proces op 0 en noemen wij de controlegrenzen +A en -A dan volgt uit de percentages min- en plus-uitvallers voor Vlaer en Pronk (3,25% en 2,38%, respectievelijk 6,00% en 5,46%), als hun beide standaardafwijkingen σ_v en σ_p zijn:

$$- A = - 1,845 \frac{\sigma_v}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = - 1,602 \frac{\sigma_p}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ A = + 1,980 \frac{\sigma_v}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = + 1,555 \frac{\sigma_p}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

Hieruit volgt

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_v} = \frac{1,845 + 1,980}{1,602 + 1,555} = 1,21.$$

<u>Opmerking</u>: Zoals in het vraagstuk al vermeld is, gaat het hier uitsluitend om schattingen van σ_p en σ_v en hun verhouding. Uit de berekeningen blijkt dat de verhouding ook op andere wijze geschat kan worden, bijvoorbeeld $\frac{\sigma_p}{\sigma_v} = \frac{1,845}{1,602} = 1,15$ en $\frac{\sigma_p}{\sigma_v} = \frac{1,980}{1,555} = 1,27$.
De hier gegeven schattingsmethode heeft als voordeel dat hij ook bruikbaar is, als het constante niveau van het proces niet bij beide chefs precies gelijk is geweest aan de norm.

3. a. Als eenvoudige methode kan de bij de R-kaart in kwaliteitsbeheersing gebruikte methode gekozen worden. De achttien spreidingsbreedten en de gemiddelden daarvan zijn in de volgende tabel gegeven:

Produkt	Laboratorium 1	2	3	4	5	6	7	8	9	Som	Gem.	95% regelgrenzen onder	boven
	$R(x\ 10^{-1})$										$\bar{R}$	$0{,}18\ \bar{R}$	$2{,}17\ \bar{R}$
A	2	1	3	3	1	1	2	1	3	17	1,89	0,3	4,1
B	1	1	2	2	2	1	2	2	1	14	1,56	0,3	3,4
(A - B)	+1	0	+1	+1	-1	0	0	-1	+2	31	1,72		

Per produkt vallen alle spreidingsbreedten binnen de regelgrenzen. Ook tussen de produkten vinden we geen verschil in spreiding binnen laboratoria: van de verschillen tussen A en B zijn er 4 positief en 2 negatief. Het lijkt dus niet te gewaagd om aan te nemen dat voor beide produkten en alle laboratoria de standaardafwijking van de bepaling dezelfde is.

b. Voor de gemiddelden vinden we de onderstaande waarden:

Produkt	Laboratorium 1	2	3	4	5	6	7	8	9	Gem.	95% regelgrenzen onder	boven
	$\bar{X}$									$\bar{\bar{X}}$		
A	1,00	1,27	1,23	1,23	1,37	0,97	1,10	0,77	0,63	1,06	0,95	1,17
B	2,43	2,77	2,70	2,70	2,73	2,43	2,67	2,30	1,93	2,52	2,41	2,63

Bij de analyse van deze tabel kan de techniek van de $\bar{x}$-kaart gebruikt worden. De regelgrenzen zijn dan $\bar{\bar{x}} - 0{,}668\bar{\bar{R}}$ en $\bar{\bar{x}} + 0{,}668\bar{\bar{R}}$, waarin $\bar{\bar{R}}$ de gemiddelde spreidingsbreedte van de tabel in a is, dus $\bar{\bar{R}} = 0{,}172$. Voor beide produkten valt het merendeel van de gemiddelden buiten de regelgrenzen. Er moet dus worden aangenomen dat tussen de bepalings-niveaus van de laboratoria verschillen bestaan.

c. Toepassing van de rangcorrelatietoets van Spearman op de gemiddelde gehalten geeft het volgende resultaat

Produkt	Laboratorium 1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	Rangnummers									
A	4	8	6,5	6,5	9	3	5	2	1	
B	3,5	9	6,5	6,5	8	3,5	5	2	1	
Verschil d	0,5	1	0	0	1	0,5	0	0	0	
d^2	0,25	1	0	0	1	0,25	0	0	0	$\Sigma d^2 = 2,5$

Voor n = 9 is onder de hypothese dat geen correlatie bestaat de tweezijdige overschrijdingskans bij de gevonden waarde van Σd^2 kleiner dan 0,01. Het is dus evident dat de genoemde correlatie tussen de gemiddelde gehalten bestaat. Hij wordt veroorzaakt door de niveauverschillen tussen de laboratoria die voor beide produkten blijkbaar in sterke mate overeenstemmen.

d. In beide gevallen zijn de aantallen vrijheidsgraden 8 (voor "tussen laboratoria") en 18 (voor "binnen laboratoria"). Voor de toetsing wordt de F-toets gebruikt. De waarden van F zijn 23,9 en 3,3. Uit de F-tabel (het 2,5%-punt is 3,01) blijkt dat in beide gevallen de "tussen laboratoria"-spreiding significant groter is dan de "binnen laboratoria"-spreiding.

e. Het gemiddelde kwadraat binnen laboratoria bevat voor de sommen een komponent veroorzaakt door eventuele spreiding tussen dagen, welke in de verschillen (per dag) niet aanwezig is. Op grond hiervan was het dus te verwachten dat het gemiddelde kwadraat voor de sommen groter zou uitvallen dan voor de verschillen.

f. Deze conclusie is inderdaad korrekt, gezien het feit dat de spreiding tussen de laboratoria voor de verschillen tussen de twee produkten aanzienlijk kleiner bleek te zijn dan voor de sommen (en dus ook voor elk produkt afzonderlijk). Alleen is het mogelijk dat bij proefmonsters waarbij het gehalte sterk afwijkt van dat van de standaardmonsters de verbetering niet in dezelfde mate optreedt. Dat zou uit verder onderzoek moeten blijken.

4. Aangezien de arbeidsproduktiviteit niet in een kwantitatieve maat is opgegeven maar slechts naar rangvolgorde, kan de samenhang alleen worden getoetst m.b.v. een rangcorrelatie-methode. De rangcorrelatietoets van Spearman geeft het volgende resultaat:

Rangnummers		Verschil	
Afnemende arbeidsprod.	Toenemend pers.verloop	d	d^2
1	1	0	0
2	3	1	1
3	7	4	16
4	2	-2	4
5	9	4	16
6	5	-1	1
7	6	-1	1
8	8	0	0
9	4	-5	25
			$\Sigma d^2 = 64$

Voor n = 9 bedraagt indien geen correlatie bestaat, de tweezijdige overschrijdingskans bij de gevonden waarde van Σd^2 ongeveer 0,20. Dit betekent dus dat de getrokken conclusie door de gepresenteerde gegevens niet gerechtvaardigd wordt.
Overigens kan men zich nog afvragen of een dalende arbeidsproduktiviteit de oorzaak - zoals hier is gesteld - of het gevolg van een stijgend personeelsverloop zou kunnen zijn, en welke rol het bedrijfsklimaat hierbij speelt.

5. a. De verdeling is normaal met gemiddelde 4,0 mm en standaardafwijking $0{,}1\sqrt{8} = 0{,}283$ mm.

b. Een goed pakketje van negen plaatjes zal gefabriceerd kunnen worden als er bij de vijf aselect genomen individuele plaatjes één is met een dikte tussen 0,45 mm en 1,25 mm. De kans dat een plaatje zo'n dikte heeft, kan worden gevonden uit de tabel van de normale verdeling en is 0,691. De kans dat er bij vijf plaatjes tenminste één geschikt plaatje wordt gevonden is dan

$$1 - (1 - 0{,}691)^5 = 0{,}997.$$

c. De normale verdeling van de dikte van de pakketjes van acht plaatjes mag zoals gegeven is, door een in klassen gegroepeerde verdeling met als klassegrenzen veelvouden van 0,1 mm worden vervangen. Deze verdeling is gegeven in de kolommen 1 en 2 van onderstaande tabel.

Klasse (1)	Te verwachten rel.frequentie (2)	(3)	(4)	(2) × (4)
< 3,10 mm	0,001	0,000	0,000	0,000000
3,10 - 3,20 mm	0,002	0,000	0,000	0,000000
3,20 - 3,30 mm	0,005	0,000	0,000	0,000000
3,30 - 3,40 mm	0,010	0,006	0,030	0,000300
3,40 - 3,50 mm	0,021	0,067	0,293	0,006153
3,50 - 3,60 mm	0,040	0,309	0,843	0,033720
3,60 - 3,70 mm	0 066	0,691	0,997	0,065802
3,70 - 3,80 mm	0,094	0,933	1,000	0,094000
3,80 - 3,90 mm	0,124	0,994	1,000	0,124000
3,90 - 4,00 mm	0,137	1,000	1,000	0,137000
				0,460975

Het is uiteraard om redenen van symmetrie voldoende om, zoals in de tabel gebeurd is, de berekening voor de helft van de verdeling uit te voeren.

Als wij aannemen dat de dikte van een pakketje van acht plaatjes gelijk is aan het midden van de klasse waarin dat pakketje valt, kan de kans dat het apparaat bij vijf aselect genomen individuele plaatjes er één kan vinden dat samen met het pakketje van acht plaatjes een dikte tussen 4,1 en 4,9 mm oplevert gemakkelijk worden gevonden op de in het antwoord op vraag b gegeven wijze (zie kolom 3 en 4). Vermenigvuldiging van de bij elkaar behorende getallen in kolom 2 en 4 en optelling van de produkten geeft, na vermenigvuldiging met 2 het gevraagde rendement $0{,}460975 \times 2 = 0{,}922$.

6\. a. Uit de opgegeven toleranties volgt dat de diameter van de blanke pennen moet liggen tussen 1,090 mm en 2,030 mm. Voor de pennen van de steekproef is dat inderdaad het geval en de inspectieafdeling treft dus geen blaam.
Uit de gegeven toleranties volgt ook dat de dikte van de vergulde pennen moet liggen tussen $2{,}010 + 0{,}013 - \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}002^2} = 2{,}003$ mm en $2{,}010 + 0{,}013 + \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}002^2} = 2{,}043$ mm. Ook daaraan wordt ruimschoots voldaan en de schuld ligt dus niet bij de verguldafdeling. Het grote percentage te dikke pennen is, zoals uit de tabel overduidelijk blijkt, te wijten aan het anodiseren dat een aanzienlijke toename van de gemiddelde dikte der pennen ten gevolge heeft.

b. De ontwerpafdeling is verantwoordelijk voor de uitval omdat deze bij het stellen van de toleranties geen rekening heeft gehouden met de invloed van het anodiseren en het produktieproces op dit punt dus onvoldoende heeft bestudeerd en voorbereid.

c. Voor de spreidingsbreedte van de kant en klare pennen wordt, omdat de klassebreedte in de tabel 0,004 mm is, gevonden:

$$2{,}086 - 2{,}050 + 0{,}004 = 0{,}040 \text{ mm}.$$

Het is dus mogelijk dat het proces bij goede centrering de gewenste toleranties haalt.

d. De gemiddelden per kolom zijn achtereenvolgens: 2,0109 mm, 2,0242 mm, 2,0564 mm en 2,0684 mm. De opeenvolgende bewerkingen dragen dus bij tot de gemiddelde dikte: 0,0133 mm, 0,0322 mm en 0,0120 mm. De standaardafwijking in de vier fasen is: 0,0079 mm, 0,0072 mm, 0,0070 mm en 0,0078 mm, zodat er geen sprake van is, dat de verschillende behandelingen extra tot de spreiding bijdragen.

e. De uitval kan worden verminderd door de specificaties voor de blanke pennen te wijzigen. Als streefwaarde zou men dan een waarde van hoogstens 2,060 - (0,0133 + 0,0322 + 0,0120) = 2,0025 mm moeten kiezen. Hoever de te kiezen waarde daar onder moeten blijven en hoeveel de uitvalvermindering maximaal kan bedragen hangt af van de wijze van monteren van de pennen in de gaten (aselect of via sorteren) en van de tussen pen en gat toegestane speling.

Een andere mogelijkheid is het vergroten van de gemiddelde gatdiameters tot minstens 2,010 + (0,0133 + 0,0322 + 0,0120) = = 2,02675 mm. De te kiezen streefmaat en de mate van vermindering van de uitval hangen weer af van de in de eerste alinea genoemde factoren.

Gezien de conclusie in de antwoorden op de vragen c en d verdient het bovendien aanbeveling te onderzoeken in hoeverre de toleranties voor de blanke pennen nog kunnen worden vernauwd.

Examen 1966

1\. a. De kans dat een aselect genomen plaatje in partij A_1 valt is $\frac{1}{2}$. Voor partij B_1 geldt hetzelfde. De verdeling van de aantallen plaatjes in deze partijen is dus binomiaal met $p = \frac{1}{2}$ en $n = 200$. De beide aantallen zijn bovendien stochastisch onafhankelijk.

b. Noemen wij het aantal plaatjes in partij A_1 $\underline{x}$, dat in partij B_2 $\underline{y}$, dan is het totaal aantal overblijvende plaatjes $2|\underline{x} - \underline{y}|$. Het gaat dus om de kans

$$P(2|\underline{x} - \underline{y}| > 40)$$

of

$$P(\underline{x} - \underline{y} > 20) + P(\underline{x} - \underline{y} < -20).$$

De verdeling van $\underline{x} - \underline{y}$ is bij benadering normaal met $\mu = 0$ en $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 200 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 200} = 10$. De gevraagde kans wordt gevonden uit de tabel van de normale verdeling en is 0,046 of, na continuïteitscorrectie: 0,040.

c. Als de grootte van de uitgangspartijen n is, moet voor elke n berekend worden:

$$2P(\underline{x} - \underline{y} > 0{,}1n),$$

waarin dan $\underline{x} - \underline{y}$ bij benadering normaal is met $\mu = 0$ en $\sigma = \sqrt{\frac{n}{2}}$. $P(\underline{x} - \underline{y} > 0{,}1n)$ wordt dan gevonden door in de tabel van de verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling de overschrijdingskans af te lezen bij:

$$\frac{0{,}1n + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}}.$$

Dit getal neemt toe als n toeneemt. De gevraagde kans neemt dus af.

d. De voorraad zal afhangen van het aantal (<u>niet</u> het percentage) plaatjes dat overblijft. Nu is, bij partijgrootte n, de kans om meer dan k plaatjes over te houden:

$$2P(\underline{x} - \underline{y} > \frac{k}{2}),$$

waarin $\underline{x} - \underline{y}$ weer bij benadering normaal verdeeld is met $\mu = 0$ en $\sigma = \sqrt{\frac{n}{2}}$. $P(\underline{x} - \underline{y} > \frac{k}{2})$ wordt nu gevonden door in de tabel van de verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling de overschrijdingskans op te zoeken bij:

$$\frac{\frac{k}{2} + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}}.$$

Dit getal wordt kleiner bij toenemende n en de overschrijdingskans wordt dus groter, en wel bij elke waarde van k. Aangezien men bij het voorgestelde systeem eigenlijk de gehele plaatjes produktie als één, steeds in omvang toenemende partij kan beschouwen, houdt het bovenstaande in dat bij consequente doorvoering van het systeem de kans op zeer grote voorraden op de duur ontoelaatbaar groot wordt. Deze consequente doorvoering lijkt dus praktisch niet mogelijk.

2. a. Het gemiddelde aantal lekke zakjes per doos is 2,0, de kans, dat een willekeurig genomen zakje lek is, is dus 2/1000 = 0,002. De verdeling is binomiaal met $p = 0{,}002$ en $n = 1000$, en kan bij goede benadering door de verdeling van Poisson met $\mu = 2$ vervangen worden.

   b. Het aantal lekke zakjes bij de resterende 950 zakjes is volgens de gegevens onafhankelijk van het aantal lekke zakjes in de steekproef. Het is dus gemiddeld $0{,}002 \times 950 = 1{,}9$.

   c. De redenering is onjuist. Het gevonden aantal van 453 per 500 moet kloppen met de Poisson-verdeling (met $\mu = 0{,}1$) van de bij de keuring gevonden aantallen lekke zakjes en doet dat ook nauwkeurig: de kans om geen lekke zakjes te vinden is volgens de tabel van de Poisson-verdeling 0,905.

d. Bij het oude systeem is, zolang het proces beheerst is met een gemiddeld aantal lekke zakjes per doos van 2,0, de kans dat een doos gesorteerd moet worden gelijk aan 0,095. Van bijvoorbeeld 3000 dozen moeten er dus gemiddeld 285 gesorteerd worden.
Bij het nieuwe systeem is de kans op sortering van drie dozen gelijk aan de kans dat in een steekproef van 150 zakjes twee of meer lekke zakjes gevonden worden en die kans is volgens de tabel van de Poisson-verdeling 0,037. Van 3000 dozen moeten er dus gemiddeld $1000 \times 3 \times 0{,}037 = 111$ gesorteerd worden. De sorteerarbeid bij het nieuwe systeem is dus, mede omdat het aantal te keuren zakjes per doos gelijk blijft, geringer.

e. De kans op sorteren bij het oude systeem volgt nu uit de Poissonverdeling met $\mu = 0{,}4$ en is 0,329. Bij het nieuwe systeem volgt de kans op het sorteren van drie dozen uit de Poissonverdeling met $\mu = 1{,}2$. Hij is gelijk aan 0,337. Per 3000 dozen is het gemiddelde aantal gesorteerde dozen nu gelijk aan 987, resp. 1011. De sorteerarbeid bij het nieuwe systeem is nu dus wat groter dan bij het oude systeem.

3. a. Als het beschadigd worden van hoekpunten een stochastisch proces is waarbij voor ieder hoekpunt, de kans op beschadiging (p) gelijk is en onafhankelijk van het al of niet beschadigd zijn van andere hoekpunten van hetzelfde palet, kunnen de gegeven reeksen in het vraagstuk beschouwd worden als waarnemingen aan binomiaal verdeelde stochastische variabelen. De parameter n is voor de eerste reeks gelijk aan 2, voor de tweede reeks gelijk aan 3. Uit de beide reeksen volgen voor p de schattingen:

$$\frac{12 \times 2 + 76 \times 1}{2 \times 200} = 0{,}25 \quad \text{en} \quad \frac{1 \times 3 + 2 \times 4 + 1 \times 12}{32 \times 3} = 0{,}24.$$

De toetsing van de juistheid van de veronderstelling kan in beide gevallen geschieden met behulp van de χ^2-toets voor aanpassing.
In het eerste geval zijn de verwachte aantallen, als $p = 0{,}25$: 12,5 (gevonden 12), 75 (gevonden 76) en 112,5 (gevonden 112). De waarde van χ^2 is 0,036 en het aantal vrijheidsgraden is 1. Het is

duidelijk, ook zonder toetsing, dat de gegevens zeer goed met de gemaakte veronderstellingen te rijmen zijn.
Voor het tweede geval zijn de verwachte aantallen voor $p = 0,24$: 0,4 (gevonden 1), 4,2 (gevonden 4), 13,3 (gevonden 12) en 14,0 (gevonden 15). Het laatste getal slaat op het aantal paletten waarbij geen beschadigde hoekpunten werden gevonden. Ook hier is de overeenstemming tussen gevonden en verwachte aantal zo goed dat toetsing onnodig is. De waarde van χ^2 is 1,11, het aantal vrijheidsgraden is 2.

b. De beide schattingen voor p verschillen zo weinig dat ze tot één schatting: $\frac{100 + 23}{400 + 96} = 0,248$ gecombineerd kunnen worden.
Als wordt aangenomen dat het aantal paletten in het magazijn veel groter is dan de aantallen in de steekproeven kan gesteld worden dat de verwachte fractie beschadigde paletten gelijk is aan $t = 1 - (1 - p)^4$. Voor p is op grond van waarnemingen aan 496 hoekpunten een schatting $\hat{p} = 0,248$ gevonden. Een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor p is:

$$0,248 - 1,96\sqrt{\frac{0,248 \times 0,752}{496}} < p < 0,248 + 1,96\sqrt{\frac{0,248 \times 0,752}{496}}$$

of

$$0,210 < p < 0,286.$$

Omdat t voor $0 \leq p \leq 1$, een monotone functie is van p, is het betrouwbaarheidsinterval voor t:

$$1 - (1 - 0,210)^4 < t < 1 - (1 - 0,286)^4$$

of

$$0,61 < t < 0,74.$$

4. Laat $\underline{x}$ de hoogte zijn die een aan twee kanten éénmaal geschuurd blokje krijgt. $\underline{x}$ is normaal verdeeld met verwachting $\mu = H - 0,2$ mm

en σ = 0,1 mm. De kans dat een blokje afval wordt, is $P(\underline{x} < 39{,}9)$, de kans dat het tenminste éénmaal herschuurd moet worden is $P(40{,}1 < \underline{x})$, de kans dat het minstens i keren herschuurd moet worden is $P(40{,}1 + \frac{i-1}{10} < \underline{x})$. De totale kosten (in centen) voor herbewerking en afval zijn per blokje:

$$8 \times P(\underline{x} < 39{,}9) + 1 \times \sum_{i=1}^{\infty} P(40{,}1 + \frac{i-1}{10} < \underline{x}).$$

Indien men dat bedrag voor twee opeenvolgende, 0,05 mm verschillende, waarden van μ berekent, kan men vaststellen hoe μ gewijzigd moet worden, om de kosten te doen dalen. Door in de gevonden richting door te gaan met het berekenen van de kosten voor opeenvolgende waarden van μ kan men dan de optimale instelling vinden van μ (en H). Het verdient aanbeveling om te beginnen met waarden van μ groter dan 40,0 mm omdat de kosten voor afval zoveel zwaarder wegen dan die voor herschuren. Hieronder zijn de resultaten van enige berekeningen gegeven:

	Kosten bij		
	μ=40,05	μ=40,10	μ=40,15
$8P(\underline{x} < 39{,}9)$	0,5344	0,1824	0,0496
$P(40{,}1 < \underline{x})$	0,3085	0,5000	0,6915
$P(40{,}2 < \underline{x})$	0,0668	0,1587	0,3085
$P(40{,}3 < \underline{x})$	0,0063	0,0228	0,0668
$P(40{,}4 < \underline{x})$	0,0003	0,0014	0,0062
$P(40{,}5 < \underline{x})$	0,0000	0,0000	0,0003
Totaal	0,9162	0,8653	1,1229

Het is duidelijk dat de optimale waarden van μ en H respectievelijk 40,10 mm en 40,30 mm zijn.

5. a. De kans dat een aselect door de betreffende persoon aangewezen monster inderdaad het afwijkende monster is, is $\frac{1}{3}$, zowel bij de "groepsstructuur" FFB als bij BBF. De kans dat vervolgens correct

wordt aangegeven of dit monster "bitter" of "niet bitter" is, is $\frac{1}{2}$. Dus is de kans op correct aanwijzen van het (paar) bittere monster(s) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

b. De kans dat een proefpersoon waarvoor de kans op het correct aanwijzen van het (paar) bittere monster(s) p is, bij n sorteerproeven r of meer keren de juiste keuze doet, is:

$$P = \sum_{x=r}^{n} \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}.$$

De eis is dat, voor $p = \frac{1}{6}$ en $n = 24$, P hoogstens 0,01 mag zijn. Uit de bij het vraagstuk gevoegde tabel blijkt dat voor die waarden van p en n en voor $r = 9$, $P = 0{,}01176$. Voor $r = 10$ is $P = 0{,}00334$. Men mag een proefpersoon dus slechts in de jury opnemen als hij 10 of meer correcte beoordelingen heeft uitgevoerd. De proefpersonen 3, 4, 11 en 15 zijn dus niet geschikt.

c. Als $p = \frac{1}{2}$ zien we in de tabel dat bij $n = 24$ en $r = 10$, P gelijk is aan 0,84627. De kans dat een proefpersoon met gemiddeld 50% correcte uitspraken, niet in de jury zal worden opgenomen bedraagt $1 - P = 0{,}154$.

d. Als er "smaakverdoving" optreedt, mogen we verwachten dat het aantal correcte beoordelingen in proeven waar het eerste geproefde monster F is, kleiner is dan in proeven waar het eerste monster B is. We toetsen daarom de nulhypothese dat voor elke persoon de kans op een correcte beoordeling gelijk is, ongeacht of het eerst geproefde monster F of B is, tegen de alternatieve hypothese dat deze kans groter is als B eerst geproefd wordt dan wanneer F eerst geproefd wordt. De eenvoudigste toetsingsmethode hiervoor is de tekentoets, toegepast op de aantallen correcte beoordelingen in 12 sorteerproeven met F als eerste, resp. B als eerste monster. Dit leidt tot het volgende resultaat.

Proefpersoon	Aantal correcte beoordelingen in 12 sorteerproeven met		Teken van het verschil
	F als eerste monster	B als eerste monster	
1	4	11	-
2	4	10	-
3	1	7	-
4	3	2	+
5	5	11	-
6	4	9	-
7	2	8	-
8	2	10	-
9	7	10	-
10	3	10	-
11	4	3	+
12	2	9	-
13	4	10	-
14	8	8	0
15	2	6	-
16	4	8	-

Van de vijftien verschillen blijken er slechts twee positief te zijn. Aangezien eenzijdig moet worden getoetst is de bijbehorende overschrijdingskans ca. 0,01. De nulhypothese kan dus worden verworpen, en de conclusie luidt dat er sprake is van "smaakverdoving".

e. Om voor iedere proefpersoon apart na te gaan of bij hem "smaakverdoving" optreedt, kan men de in bovenstaande tabel weergegeven frequenties per persoon weergeven in een (2 × 2)-tabel en met de toets van Fisher (of de normale benadering daarvan) de nulhypothese toetsen dat de kans op een correcte beoordeling voor beide series van 12 sorteerproeven gelijk is. Voor de eerste proefpersoon bijvoorbeeld is het resultaat als volgt.

Beoordeling	Eerste monster		Totaal
	F	B	
Juist	4	11	15
Onjuist	8	1	9
Totaal	12	12	24

Bij gebruik van de normale benadering van Fisher's toets vinden we voor de toetsingsgrootheid u = 2,5. De bijbehorende overschrijdingskans (eenzijdig) is kleiner dan 0,01 en voor de eerste proefpersoon kan dus tot het optreden van smaakverdoving geconcludeerd worden.
De onder vraag b getrokken conclusie dat personen 3, 4, 11 en 15 ongeschikt zijn als jurylid, behoeft in twee gevallen herziening:

1. als men in de nog uit te voeren smaakproeven, rekening zou gaan houden met het verschijnsel van "smaakverdoving", bijvoorbeeld door als eerste van de drie te proeven monsters altijd B te nemen;
2. als bovendien geëist zou worden dat een proefpersoon alleen in de jury mag worden opgenomen, indien zowel met B als eerste monster als met F als eerste monster, het aantal correcte beoordelingen boven de in vraag a genoemde 1%-grens ligt.

In het eerste geval betekent dit dat alleen personen die in de 12 sorteerproeven met B als eerste monster, 6 of meer correcte beoordelingen leverden geschikt zijn. Dit zou dus inhouden dat alleen de proefpersonen 4 en 11 ongeschikt zijn als jurylid.

In het tweede geval zijn alleen personen die in beide series van 12 sorteerproeven (met B als eerste, respectievelijk F als eerste monster) 6 of meer correcte beoordelingen leverden, geschikt. Dit zou er dus op neerkomen dat alleen de personen 9 en 14 nog tot de jury kunnen worden toegelaten.