SA

stichting
mathematisch
centrum

MC

A. HORDIJK en R. POTHARST

SD 104/72 AUGUSTUS

SYLLABUS BIJ DE WERKWEEK
"OPTIMAAL STOPPEN VAN MARKOVKETENS"
o.l.v. Prof.Dr. J.Th. Runnenburg

14-18 augustus 1972

SA

VOORLOPIGE UITGAVE

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

HOOFDSTUK 1. OPTIMAAL STOPPEN VAN MARKOVKETENS

ARIE HORDIJK

1. Model 1

2. Over lading, potentialen en excessieve funkties 7

3. De waarde van het spel 18

4. Over het bestaan van optimale strategieën 22

5. Over het bepalen van optimale strategieën 29

 i. De funktionaalvergelijking 29

 ii. Stabiele problemen 37

 iii. "Entrance-fee" problemen 47

 iv. Verkoopprobleem 51

 v. Oplossen door lineaire programmering 52

6. Literatuur 53

HOOFDSTUK 2. DE MARTINRAND

ROB POTHARST

1. De Greense functie, potentialen en harmonische functies 54

2. De Martinrand 60

3. De tweede representatiestelling 65

4. De theorie van Choquet 69

5. De derde representatiestelling 71

6. Literatuur 76

1. MODEL

We gaan uit van een (stationaire) *Markovketen* met een eindige of aftelbare toestandsruimte E. Dit betekent dat we beschouwen een rij van stochastische variabelen

$$[\underline{x}_n,\ n \geq 0] \text{ met beeldruimte E en}$$

gedefinieerd op zekere kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Verder is voor dit stochastisch proces (of stochastische wandeling) de *Markov eigenschap* vervuld, i.e. voor iedere $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}[\underline{x}_n = i_n \mid \underline{x}_0 = i_0, \ldots, \underline{x}_{n-1} = i_{n-1}] =$$

$$\mathbb{P}[\underline{x}_n = i_n \mid \underline{x}_{n-1} = i_{n-1}]$$

mits

$$\mathbb{P}[\underline{x}_0 = i_0, \ldots, \underline{x}_{n-1} = i_{n-1}] > 0.$$

Voorts nemen we aan dat de Markovketen *stationair* is, i.e. voor $n, m \geq 1$,

$$\mathbb{P}[\underline{x}_m = i_1 \mid \underline{x}_{m-1} = i_0] =$$

$$\mathbb{P}[\underline{x}_n = i_1 \mid \underline{x}_{n-1} = i_0].$$

We noteren

$$p(i,j) \overset{\text{not}}{=\!=} P[\underline{x}_n = j \mid \underline{x}_{n-1} = i] \quad ^{1)}$$

en

$$\mathbb{P}_i[.] \overset{\text{not}}{=\!=} P[. \mid \underline{x}_0 = i].$$

Door te stellen dat x_n een stochastische variabele is, veronderstellen we dat

$$\mathbb{P}_i[\underline{x}_n \in E] = 1$$

1) a $\overset{\text{not}}{=\!=}$ b betekent "voor b noteren we a"

en dus

$$\sum_j p(i,j) = 1 \text{ voor alle } i.$$

Willen we ook stochastische wandelingen beschouwen waarvoor geldt dat met positieve kans "het deeltje" uit het "systeem" verdwijnt dan kunnen we dit op verschillende wijzen in het model inbouwen:

i) een rij van "eventueel defecte" - stochastische variabelen en dus toelaten dat

$$\sum_j p(i,j) < 1$$

ii) in E opnemen van een speciaal element zeg ∞ en definiëren

$$p(i,\infty) = 1 - \sum_{j \neq \infty} p(i,j)$$

voor alle i en

$$p(\infty,\infty) = 1.$$

Uit overwegingen van notatie geven we de voorkeur aan i). Als we dit nodig krijgen zullen we aan E een toestand ∞ toevoegen (met overgangswaarschijnlijkheden zoals onder ii) gedefinieerd).

We veronderstellen nu verder dat de stochastische wandeling (afkorting SW) op ieder tijdstip $t = 0, 1, 2, \ldots$ gestopt kan worden. Indien er op tijdstip n gestopt wordt en de toestand op tijdstip n, dit is $\underline{x}_n$, gelijk is aan i dan ontvangen we een bedrag ter grootte van r(i) (r van *reward*).
Voor een stochastische variabele met beeldruimte $\{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$[1)] zeg $\underline{\tau}$ kan dan bepaald worden de verwachting van de opbrengst indien we startend vanuit toestand i de SW stoppen op tijdstip $\underline{\tau}$ ($\underline{\tau} = \infty$ betekent nooit stoppen en dus ook geen uitbetaling ontvangen). We noteren dit met

$$(1) \qquad \mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}}).$$

De bedoeling van *optimaal stoppen* is dat we een $\underline{\tau}$ vinden die (1) zo groot mogelijk maakt *voor iedere begintoestand* i. Indien we ervan uitgaan dat het

---

[1)] In het vervolg zullen we zo'n stochastische variabele een stochastische tijd noemen.

model van optimaal stoppen toepasbaar moet zijn op brokken uit de realiteit en als we bedenken dat op tijdstip n de enige informatie (afgezien van de bekend veronderstelde overgangswaarschijnlijkheden) die we hebben omtrent de SW de tot op tijdstip n doorlopen toestanden zijn, dan is duidelijk dat stoppen op tijdstip n alleen mag afhangen van de doorlopen toestanden. De stochastische tijden die hier aan voldoen heten *Markovtijden*, we zullen ze zo dadelijk definiëren. Bij het zoeken naar een optimale $\underline{\tau}$ zullen we ons beperken tot de klasse van Markovtijden, laten we deze klasse noteren met T. Het probleem van *optimaal stoppen van een Markovketen* kan nu als volgt geformuleerd worden

model 1

Bepaal een $\underline{\tau}_0 \in T$ *zó dat*

$$\mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) = \max_{\underline{\tau} \in T} \mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) \text{ voor alle } i.$$

Zo'n $\underline{\tau}_0$ *noemen we optimaal*

We zullen nu een definitie geven van Markovtijden.

definitie 1.1

Een stochastische tijd $\underline{\tau}$ heet een *Markovtijd* indien voor $n \geq 0$ geldt dat de eventualiteit $[\underline{\tau} \leq n]$ een eventualiteit is uit de kansruimte opgespannen door de stochastische variabelen $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$.

Dit betekent dat het al dan niet stoppen zoals een Markovtijd $\underline{\tau}$ dat voorschrijft op zeker tijdstip, zeg n (i.e. $[\underline{\tau} \leq n] - [\underline{\tau} \leq n-1]$) alleen afhangt van de tot tijdstip n doorlopen toestanden.

definitie 1.2

Een collectie R van eindige rijen van toestanden noemen we een (stop) strategie indien de collectie R voldoet aan de voorwaarde dat als zekere rij, zeg $i_0, i_1, \ldots, i_n$ van toestanden een element is van R dan volgt dat iedere voortzetting van deze rij (bijvoorbeeld $i_0, i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}, \ldots, i_m$) niet tot R behoort. De elementen uit R heten stoprijen.

Aan een stopstrategie R kunnen we een Markovtijd $\underline{\tau}$ toevoegen door te stellen dat $\underline{\tau} = n$ indien de SW verloopt volgens $i_0, i_1, \ldots$ (i.e. $\underline{x}_0 = i_0, \underline{x}_1 = 1, \ldots$)

en $(i_0, i_1, \ldots, i_n) \in R$. Ook omgekeerd kunnen we aan een Markovtijd een stopstrategie toevoegen. Deze toevoegingen blijken 1-1 correspondenties te zijn.

lemma 1.1

Er is een 1-1 correspondentie tussen de verzameling van Markovtijden T en de verzameling van alle stopstrategieën.

Veelal zal men een model willen gebruiken dat naast de opbrengststructuur ook nog een kostenstructuur heeft. Meestal in de vorm van iedere keer dat de SW zich in toestand i bevindt en niet tot stoppen wordt besloten, moet er een bedrag ter grootte c(i) (c van *cost*) betaald worden. Dit geeft aanleiding tot het volgende model.

model 2

Bepaal een $\underline{\tau}_0 \in T$ *zó dat*

$$E_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0-1} c(\underline{x}_n)] =$$

$$\max_{\underline{\tau}\in T} E_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)] \text{ voor alle } i.$$

Zo'n $\underline{\tau}_0$ *noemen we optimaal.*

We zullen in paragraaf 5 onder "Entrance-fee" problemen zien dat onder bepaalde voorwaarden problemen van het type van model 2 in problemen van het type van model 1 omgezet kunnen worden. Hoewel deze omzetting van problemen niet altijd mogelijk is zullen we in de paragrafen 2, 3 en 4 het minder algemene model 1 behandelen. Aan het eind van iedere paragraaf wordt aangegeven hoe de gevonden resultaten zich laten generaliseren voor model 2. Deze generalisaties evenals de rest van deze paragraaf kan bij een eerste lezing overgeslagen worden.
De modellen 1 en 2 behoren tot de *Markovbeslissingsmodellen* [Derman, Ross] en deze modellen behoren weer tot de meer algemene modellen die men wel noemt *"stochastic control of Markov chains"* [Kushner]. We zullen in kort bestek iets over deze modellen zeggen. Daartoe zullen we beginnen met model 2 in een andere terminologie te formuleren.

We voeren in de akties (soms beslissingen, soms "controls" genoemd)

a_0 voor stoppen

a_1 voor niet stoppen.

Verder voeren we een opbrengststructuur (kosten zullen negatieve opbrengsten zijn en omgekeerd) in.

Indien in toestand i aktie a_0 genomen wordt (i.e. stoppen) dan is de opbrengst $r(i,a_0)$. Voor model 2 geldt dan

$$r(i,a_0) = r(i).$$

Indien in toestand i aktie a_1 genomen wordt (i.e. niet stoppen) dan is de opbrengst $r(i,a_1)$. Voor model 2 geldt dan

$$r(i,a_1) = - c(i).$$

Een strategie kunnen we ook definiëren door een rij van momentane beslisregels zeg

$$\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$$

met

$$\underbrace{I \times \ldots \times I}_{(n+1)\text{maal}} \xrightarrow{f_n} A = \{a_0,a_1\}$$

f_n voegt dus aan iedere rij $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ één van de akties $\{a_0,a_1\}$ toe. Wil de hierdoor gedefinieerde strategie een stopstrategie zijn dan zal moeten gelden dat indien voor zekere rij $(i_0, \ldots, i_n)$ geldt $f_n(i_0, \ldots, i_n)=a_0$ dan volgt $f_{n+1}(i_0, \ldots, i_n, i) = a_0$ voor alle i.

Laat $\underline{r}_n$ de opbrengst op de "n-de dag" (of tijdstip n zo men wil) voorstellen.

<u>herformulering model 2</u>

Bepaal één stopstrategie R_0 *met bijbehorende stoptijd* $\underline{\tau}_0$ *zó dat*

$$E_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0} \underline{r}_n] \textit{ is maximaal voor alle } i.$$

De generalisatie naar algemenere modellen verloopt nu als volgt. De aktieruimte (beslissingsruimte, "set of controls") van de toestand i, zeg A(i) wordt een verzameling met meerdere elementen.[1] Indien in toestand i aktie a wordt ondernomen dan is de onmiddellijke opbrengst r(i,a). *De beweging van het systeem, de stochastische wandeling is afhankelijk van de ondernomen akties.* Bij de verwachting van de opbrengsten moet dan ook vermeld worden welke strategie R gevolgd is.
De vraag is weer, bepaal een R_0 zó dat

$$\mathbb{E}_{i,R_0}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \underline{r}_n\right] \text{ is maximaal voor alle } i..$$

Bij een opbrengstfunktie r (van r wordt meestal verondersteld dat het een begrensde funktie is) die zowel positief als negatief kan zijn is bovenstaande verwachting vaak niet gedefinieerd. Men beschouwt daarom vaak bij strategie R de *verwachte α-verdisconteerde opbrengsten* ($0 < \alpha < 1$)

$$\mathbb{E}_{i,R}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \underline{r}_n\right]$$

Naast de *verwachte totale opbrengst* (niet altijd gedefinieerd) en de verwachte verdisconteerde opbrengst beschouwt men als opbrengst ook vaak de *gemiddelde verwachte opbrengst.*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}_{i,R}[r(\underline{x}_n)] \quad ^{2)}$$

In [Derman] wordt model 1 behandeld als een Markovbeslissingsmodel (afkorting MBM) met als kriterium de gemiddelde verwachte opbrengst.[3]
In [Ross] en [Kushner] wordt model 2 behandeld als een MBM met als kriterium de totale opbrengst door een absorberende toestand, zeg ∞ toe te voegen en te stellen dat het systeem met kans 1 naar ∞ springt indien de stopaktie wordt gekozen.
Het optimaal stoppen van *Markovketens* is ook een speciaal geval van de algemene theorie van het optimaal stoppen (zie [Chow]). In deze theorie wordt de onderstelling omtrent de *Markov*-afhankelijkheid der $\underline{x}_i$'s losgelaten.

---

1) Bij een Markovbeslissingsmodel is het aantal elementen in A(i) meestal eindig voor alle i. Indien A(i) een continue verzameling is voor sommige i dan spreekt men wel van "controlled Markov chain".

2) Om reden dat de limiet niet behoeft te bestaan is de lim inf genomen.

3) Dit gaat door toestand i absorberend te maken zodra in toestand i tot stoppen besloten is.

2. OVER LADING, POTENTIALEN EN EXCESSIEVE FUNKTIES.

Veronderstel we beschouwen optimaal stopproblemen volgens model 1. I.p.v. bij bepaalde opbrengstfunktie de optimale stoptijd te bepalen kunnen we ons afvragen voor welke opbrengstfunkties onmiddellijk stoppen ($\underline{\tau} \equiv 0$) optimaal is. D.w.z. funkties r waarvoor geldt

(10) $\quad r(i) \geq \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})]$ $\quad$ voor iedere stoptijd $\underline{\tau}$.

We zullen in deze paragraaf bewijzen dat de funkties die aan (10) voldoen precies de funkties zijn uit de volgende definitie.

<u>definitie 2.1</u>

Een niet-negatieve funktie f heet *excessief* indien

(11) $\quad f(i) \geq \sum_j p(i,j)\, f(j)$ $\quad$ voor alle i.

We zullen in deze paragraaf herhaaldelijk de volgende relatie gebruiken. Voor $n \geq 0$, f een willekeurige funktie geldt [1)]

(12) $\quad \mathbb{E}_i\, f(\underline{x}_n) = \sum_j \mathbb{P}_i(\underline{x}_n = j)\, f(j) = \sum_j p^n(i,j)\, f(j).$

Met de relatie (12) vinden we dat uit (11) volgt voor $\underline{\tau} \equiv 1$

$$f(i) \geq \mathbb{E}_i\, f(\underline{x}_{\underline{\tau}}).$$

Hieruit volgt dat we de excessieve funkties kunnen omschrijven als niet-negatieve funkties waarvoor onmiddellijk stoppen zeker niet minder opbrengt dan stoppen na 1 periode.
Zoals reeds vermeld zal er bewezen worden dat onmiddellijk stoppen voor excessieve funkties altijd het beste is.

---

1) We veronderstellen impliciet dat

$$\sum_j p^n(i,j)\,|f(j)| < \infty$$

Voor funkties r waarvoor geldt

$$(13)\qquad \mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\tau}) = \mathbb{E}_i[\sum_{n=\tau}^{\infty} w(\underline{x}_n)]$$

met $w(i) = r(i) - \sum_j p(i,j)\, r(j)$ is de relatie (10) op de volgende wijze aan te tonen.
Indien r excessief is dan volgt dat $w(i) \geq 0$ voor alle i en dus $w(\underline{x}_n)$ is een niet-negatieve stochast voor iedere $n \geq 0$. We maken

$$\mathbb{E}_i\, [\sum_{n=\tau} w(\underline{x}_n)]$$

dus zo groot mogelijk door het aantal termen in de reeks zo groot mogelijk te maken. Maar dit betekent dat $\underline{\tau} \equiv 0$ (onmiddellijk stoppen) het beste is. We hebben nooit stoppen ($\underline{\tau} \equiv \infty$) niet uitgesloten. We willen dat relatie (10) ook geldt voor deze Markovtijd,daarom noemen we een funktie pas excessief als hij niet alleen aan relatie (11) voldoet maar ook nog niet-negatief is.
Om te kunnen bewijzen dat relatie (10) voor iedere excessive funktie geldt zullen we eerst een aantal begrippen moeten invoeren. We zullen daarna lemma's en stellingen gaan afleiden waarvan niet direct duidelijk is wat ze beogen. Het is daarom misschien goed om op deze plaats aan te geven waartoe de resultaten van de paragrafen 2, 3 en 4 leiden.
In deze paragraaf wordt bewezen dat de "maximale opbrengst" gelijk is aan de opbrengstfunktie r, indien r een excessieve funktie is. Gebruikmakend van dit resultaat wordt dan in paragraaf 3 bewezen dat de "maximale opbrengst" de kleinste excessieve majorant van r is. Daar in veel gevallen de kleinste excessieve majorant van r te bepalen is, in een volgend hoofdstuk zal een karakterisering van de klasse van alle excessieve funkties gegeven worden, is daarmee de "maximale opbrengst" bekend. In paragraaf 4 wordt aangetoond dat dan het optimaal stopprobleem is opgelost. D.w.z. indien de "maximale opbrengst" bekend is dan kan bepaald worden in welke toestanden er gestopt moet worden om deze opbrengst te verkrijgen. Om precies te zijn in die toestanden stoppen waarvoor geldt dat r gelijk is aan de "maximale opbrengst", levert een "optimale" stoptijd.

definitie 2.2

i) Een funktie w heet een *lading* indien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)|w(j)| < \infty \qquad \text{voor alle } i$$

ii) Een funktie f heet een *potentiaal* indien er een funktie w bestaat zó dat w een lading is en

$$f(i) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)\, w(j) \qquad \text{voor alle } i$$

iii) Voor een begrensde funktie w heet h de α-*potentiaal* ($0 < \alpha < 1$) van w indien

$$h(i) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j \alpha^n p^n(i,j)\, w(j).$$

Dat iedere begrensde funktie w een α-potentiaal heeft is niet moeilijk te verifiëren. Echter niet iedere begrensde funktie is een lading.

voorbeeld

De symmetrische "random walk" op $\mathbb{Z}^k$ met $w = 1$ (zie [Dynkin].

lemma 2.1

Een excessieve funktie r is een potentiaal met niet-negatieve lading

(14) $$w(i) = r(i) - \sum_j p(i,j)\, r(j)$$

indien

(15) $$\lim_{n\to\infty} \sum_j p^n(i,j)\, r(j) = 0 \qquad \text{voor alle } i.$$

bewijs

Daar $w(i) = r(i) - \sum_j p(i,j)\, r(j)$ en r een excessieve funktie is, volgt uit relatie (11) dat $w(i) \geq 0$.
Schrijven we

(16) $$r(i) = w(i) + \sum_j p(i,j)\, r(j)$$

en substitueren we in het rechterlid voor r(j) weer

$$w(j) + \sum_k p(j,k)\, r(k)$$

dan vinden we

$$r(i) = w(i) + \sum_j p(i,j)\, [w(j) + \sum_k p(j,k)\, r(k)]$$

$$= w(i) + \sum_j p(i,j)\, w(j) + \sum_j p^2(i,j)\, r(j)$$

Door deze substitutie n maal te doen, vinden we

$$r(i) = w(i) + \ldots + \sum_j p^n(i,j)\, w(j) + \sum_j p^{n+1}(i,j)\, r(j)$$

oftewel

$$(17) \qquad \sum_{k=0}^{n} \sum_j p^k(i,j)\, w(j) = r(i) - \sum_j p^{n+1}(i,j)\, r(j) \quad {}^{1)}$$

Daar $w(i) \geq 0$ en dus $|w(i)| = w(i)$ volgt hieruit met relatie (15) dat w een lading is met potentiaal r. □

Een Markovketen waarvoor geldt dat de kans om startend vanuit toestand i ooit in toestand i terug te komen kleiner is dan 1 voor iedere toestand i noemen we *voorbijgaand*. In [Feller] wordt bewezen dat een kriterium hiervoor is

$$(18) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} p^n(i,j) < \infty \qquad\qquad \text{voor alle } i,j.$$

Dit betekent dat voor het bestaan van potentialen met een lading w die positief is in iedere toestand i moet gelden dat de Markovketen voorbijgaand is.

Voor een Markovketen met eindige toestandsruimte E die aan relatie (18) voldoet (en dus voorbijgaand is) geldt dat iedere funktie een lading is. Ook is iedere funktie r een potentiaal (met w(i) van relatie (14) als

---

1) We gebruiken in deze formule de conventie

$$p^0(i,j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

lading). Een excessieve funktie is dan een potentiaal met niet-negatieve lading.

lemma 2.2

Indien r een potentiaal is dan geldt voor iedere Markovtijd $\underline{\tau}$ [1] dat

$$(19) \qquad \mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) = \mathbb{E}_i\, [\sum_{n=\underline{\tau}}^{\infty} w(\underline{x}_n)] \qquad \text{voor alle } i$$

met w zoals in (14).

bewijs

Substitueren we $\underline{\tau} = 0$ in (19) dan staat er dat r een potentiaal met lading w is. Dat r een potentiaal is dat is gegeven maar dat w dan automatisch de lading wordt en dus dat de lading door de potentiaal (uniek) bepaald wordt moeten we nog aantonen.

Veronderstel r is potentiaal met lading $\tilde{w}$, dus

$$(20) \qquad r(j) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k p^n(j,k)\, \tilde{w}(k)$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_j p(i,j)\, r(j) = \sum_j p(i,j)\, [\sum_{n=0}^{\infty} \sum_k p^n(j,k)\, \tilde{w}(k)].$$

Bij absoluut convergente reeksen doet de sommatie volgorde er niet toe

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k p^{n+1}(i,k)\, \tilde{w}(k).$$

Met (20) volgt dan

$$\begin{aligned} w(i) &= r(i) - \sum_j p(i,j)\, r(j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \ldots - \sum_{n=1}^{\infty} \ldots \\ &= \tilde{w}(i) \text{ en dus is de lading een funktie van de potentiaal.} \end{aligned}$$

---

[1] Er kan bewezen worden dat (19) niet alleen geldt voor Markov tijden maar voor iedere stochastische tijd $\underline{\tau}$ die meetbaar is t.o.v. de σ-algebra voortgebracht door $[\underline{x}_0, \underline{x}_1, \ldots]$.

Om (19) aan te tonen voor $\underline{\tau} \not\equiv 0$ zullen we gebruiken dat voor een *Markovtijd* $\underline{\tau}$ geldt met $k \geq 0$ en g willekeurig

$$\mathbb{E}_i\, g(\underline{x}_{\underline{\tau}+k}) = \sum_j \mathbb{P}_i(\underline{x}_{\underline{\tau}} = j)\, \mathbb{E}_j\, g(\underline{x}_k) \tag{21}$$ [1)]

Hiermee

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i \left[\sum_{n=\underline{\tau}}^{\infty} w(\underline{x}_n)\right] &= \mathbb{E}_i \left[w(\underline{x}_{\underline{\tau}}) + w(\underline{x}_{\underline{\tau}+1}) + \dots\right] \\
&= \mathbb{E}_i\, w(\underline{x}_{\underline{\tau}}) + \mathbb{E}_i\, w(\underline{x}_{\underline{\tau}+1}) + \dots \\
&= \sum_j \mathbb{P}_i(\underline{x}_{\underline{\tau}}=j) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_j\, w(\underline{x}_k)\right] \\
&= \sum_j \mathbb{P}_i(\underline{x}_{\underline{\tau}}=j)\, r(j) \\
&= \mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}}).
\end{aligned}$$

We verwisselden diverse malen sommatie en "verwachting nemen". Dit is correct omdat w een lading is. □

Met lemma 2.2 hebben we precies aangegeven wanneer relatie (13) geldt. Voor het geval funktie r naast excessief ook een potentiaal is hebben we dan ook aangetoond dat (10) geldt voor iedere Markovtijd.
Voor het geval r begrensd (en niet noodzakelijk een potentiaal) is gaan we α-potentialen gebruiken.

<u>lemma 2.3</u>

Indien r begrensd is dan geldt voor iedere Markovtijd $\underline{\tau}$ en iedere $0 < \alpha < 1$ dat

---

1) Dat (21) niet voor iedere stochastische tijd geldt, laat zich met het volgende voorbeeld inzien.
Symmetrische "random walk" op $\mathbb{Z}^1$, dus $p(i,i-1) = p(i,i+1) = \frac{1}{2}$. Zij $\underline{\tau}$ intreetijd in verzameling $\{1\}$ dus $\underline{\tau} = \min\{n \geq 0 \mid \underline{x}_n = 1\}$. Dan is $\underline{\tau}$ Markovtijd echter $\tilde{\underline{\tau}} = \underline{\tau} - 1$ is het niet. Voor $\tilde{\underline{\tau}}$, $k = 1$ en $g(i) = \begin{cases} 1 & \text{voor } i=1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$

$$\mathbb{E}_0\, g(\underline{x}_{\tilde{\underline{\tau}}+1}) = \mathbb{E}_0\, g(\underline{x}_{\underline{\tau}}) = 1 \text{ en } \mathbb{P}_0(\underline{x}_{\tilde{\underline{\tau}}} = 0) = 1 \text{ dus}$$

$$\sum_j \mathbb{P}_i(\underline{x}_{\tilde{\underline{\tau}}} = j)\, \mathbb{E}_j\, g(\underline{x}_1) = \mathbb{E}_0\, g(\underline{x}_1) = \tfrac{1}{2}. \text{ Dus (21) geldt niet voor}$$

iedere stochastische tijd $\underline{\tau}$, wel geldt voor iedere $\underline{\tau} \geq 0$

$$\mathbb{E}_i\, g(\underline{x}_{\underline{\tau}+k}) = \sum_j p^k(i,j)\, \mathbb{E}_j\, g(\underline{x}_{\underline{\tau}}) \tag{21a}$$

(22) $\quad \mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}} r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] = \mathbb{E}_i[\sum_{n=\underline{\tau}}^{\infty} \alpha^n w_\alpha(\underline{x}_n)]$ $\quad$ voor alle i [1)]

met $\quad w_\alpha(i) = r(i) - \alpha \sum_j p(i,j)\, r(j)$

bewijs

Substitueren we $\underline{\tau} = 0$ in (22) dan staat er dat r een α-potentiaal is met lading w_α. Dit is niet moeilijk te verifiëren. Met de volgende "formele" rekenwijze maken we plausibel dat r de α-potentiaal van w_α is.

$$w_\alpha = (I - \alpha P) r \quad {}^{2)}$$

Hieruit volgt

$$r = \frac{1}{I-\alpha P} w_\alpha$$

$$= w_\alpha + \alpha P w_\alpha + \alpha^2 P^2 w_\alpha + \ldots$$

en dus

$$r(i) = \mathbb{E}_i\, w_\alpha(\underline{x}_0) + \mathbb{E}_i\, \alpha w_\alpha(\underline{x}_1) + \mathbb{E}_i\, \alpha^2 w_\alpha(\underline{x}_2) + \ldots$$

r is begrensd $\Longrightarrow$ w_α is begrensd. Zeg $|w_\alpha(i)| \leq M$ dan volgt $\mathbb{E}_i|\alpha^n w_\alpha(\underline{x}_n)| \leq M\alpha^n$ en dus is de reeks absoluut convergent voor $0 < \alpha < 1$. In het vervolg van dit bewijs laten we de index α aan w weg.
Volgens (21) geldt

$$\mathbb{E}_i\, w(\underline{x}_{\underline{\tau}+k}) = \sum_j \mathbb{P}_i(\underline{x}_{\underline{\tau}} = j)\, \mathbb{E}_j\, w(\underline{x}_k)$$

Daar

$$\mathbb{P}_i(\underline{x}_{\underline{\tau}} = j) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(\underline{\tau} = n, \underline{x}_n = j)$$

volgt dan

---

1) Ook hier kan bewezen worden dat (22) ook geldt voor iedere stochastische tijd $\underline{\tau}$ die meetbaar is t.o.v. de σ-algebra voortgebracht door $[\underline{x}_0, \underline{x}_1, \ldots]$

2) Hierin is I de iedentieke operator en P de operator die aan funktie f de funktie Pf toevoegt met $Pf(i) = \sum_j p(i,j)\, f(j)$.

$$\mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}+k}\ w(\underline{x}_{\underline{\tau}+k})] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j \mathbb{P}_i(\underline{\tau}=n, \underline{x}_n=j)[\alpha^{n+k}\ \mathbb{E}_j\ w(\underline{x}_k)].$$

Hiermee

$$\mathbb{E}[\sum_{n=\underline{\tau}}^{\infty} \alpha^n\ w(\underline{x}_n) = \mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}}\ w(\underline{x}_{\underline{\tau}}) + \alpha^{\underline{\tau}+1}\ w(\underline{x}_{\underline{\tau}+1}) + \ldots]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j \mathbb{P}_i(\underline{\tau}=n,\ \underline{x}_n=j)\ \alpha^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\ \mathbb{E}_j\ w(\underline{x}_k)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j \mathbb{P}_i(\underline{\tau}=n,\ \underline{x}_n=j)\ \alpha^n\ r(j)$$

$$= \mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}} r(\underline{x}_{\underline{\tau}})].\ \square$$

stelling 2.1 (Hunt)

Indien de excessieve funktie r begrensd is of een potentiaal is dan geldt voor Markov tijden $\underline{\tau}_0$ en $\underline{\tau}_1$ met $\underline{\tau}_0 \leq \underline{\tau}_1$ dat

(23) $$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_1})] \leq \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})] \qquad \text{voor alle } i.$$

bewijs

Indien r een potentiaal is dan volgt uit (19)

(24) $$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - r(\underline{x}_{\underline{\tau}_1})] = \mathbb{E}_i[\sum_{n=\underline{\tau}_0}^{\underline{\tau}_1-1} w(\underline{x}_n)].$$

Indien r excessief is dan geldt $w(i) \geq 0$. Het rechterlid van (24) is de verwachting van een (stochastisch) aantal niet-negatieve stochasten en is dus groter dan of gelijk aan nul. In dit geval geldt (23).
Indien r begrensd is dan volgt analoog m.b.v. relatie (22) dat

(25) $$\mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}_0}\ r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \alpha^{\underline{\tau}_1}\ r(\underline{x}_{\underline{\tau}_1})] \geq 0.$$

Relatie (25) geldt voor alle $0 < \alpha < 1$. Daar op grond van de stelling over gemajoreerde convergentie het linkerlid van (25) naar

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - r(\underline{x}_{\underline{\tau}_1})]$$

convergeert voor een monotoon stijgende rij van α's met limiet 1, volgt dan dat ook in dit geval relatie (23) geldt. $\square$

gevolg 2.1

Indien de excessieve funktie r begrensd is of een potentiaal is dan geldt voor willekeruige Markovtijd $\underline{\tau}$ relatie (10).

bewijs

Substitueer in relatie (23) $\underline{\tau}_0 = 0$ en $\underline{\tau}_1 = \underline{\tau}$. □

gevolg 2.2

Indien de excessieve funktie r begrensd is of een potentiaal is dan geldt voor willekeurige Markovtijd $\underline{\tau}$ dat

$$h(i) = \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \text{ een excessieve funktie is.}$$

bewijs

Daar r een niet-negatieve funktie is volgt dat de verwachting op tijdstip $\underline{\tau}$ ook niet-negatief is.
Verder geldt daar ook $\underline{\tau} + 1$ een Markovtijd is

$$\begin{aligned} h(i) &= \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \\ &\overset{(23)}{\geq} \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}+1})] \\ &\overset{(21a)}{=} \sum_j p(i,j)\, \mathbb{E}_j[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \\ &= \sum_j p(i,j)\, h(j). \end{aligned}$$

Hiermee is relatie (11) aangetoond). □

We hebben nu gezien dat voor opbrengstfunktie r die excessief is onmiddellijk stoppen optimaal is in het model 1. De rest van deze paragraaf zal gaan over de generalisatie van de gevonden resultaten naar model 2. Dit gedeelte kan bij eerste lezing overgeslagen worden.

definitie 2.1*

Voor c een niet-negatieve funktie of een lading heet funktie r een *c-excessieve funktie* indien

(26) $$r(i) \geq - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j} p^n(i,j)\, c(j)$$ en

(27) $$r(i) - \sum_{j} p(i,j)\, r(j) \geq - c(i).$$

Deze definitie generaliseert het begrip excessiviteit uit definitie 2.1. Immers een excessieve funktie volgens definitie 2.1 is een 0-excessieve funktie (met 0 notatie voor de funktie die identiek gelijk aan nul is). Relaties (26) resp. (27) zeggen dat in model 2 onmiddellijk stoppen niet minder is dan nooit stoppen resp. stoppen na 1 periode.

stelling 2.1*

Indien de funktie c niet-negatief is of een lading is en indien de c-excessieve r begrensd is of een potentiaal is dan geldt voor Markovtijden $\underline{\tau}_0$ en $\underline{\tau}_1$ met $\underline{\tau}_0 \leq \underline{\tau}_1$ dat

(28) $$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_1}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_1 - 1} c(\underline{x}_n)] \leq$$
$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0 - 1} c(\underline{x}_n)] \qquad \text{voor alle } i.$$

bewijs

Indien r een potentiaal is dan volgt met (19) dat

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0 - 1} c(\underline{x}_n)] - \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_1}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_1 - 1} c(\underline{x}_n)] =$$
$$\mathbb{E}_i[\sum_{n=\underline{\tau}_0}^{\underline{\tau}_1 - 1} (w(\underline{x}_n) + c(\underline{x}_n))]$$

Daar r een c-excessieve funktie is volgt uit (27) dat $w(i) + c(i) \geq 0$. We hebben dus weer dat het rechterlid de verwachting is van een stochastisch aantal niet-negatieve stochasten en dus niet-negatief is.
Ook het bewijs voor het geval dat r begrensd is gaat geheel analoog aan stelling 2.1. □

Geheel analoog aan zoals voor model 1 hebben we dat voor c de kostenfunktie en r de opbrengstfunktie c-excessief, onmiddellijk stoppen een optimale strategie is.

gevolg 2.1*

Indien de funktie c niet-negatief is of een lading is en indien de c-excessieve funktie r begrensd is of een potentiaal is, dan geldt voor willekeurige Markovtijd $\underline{\tau}$ dat

$$r(i) \geq \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\tau-1} c(\underline{x}_n)] \qquad \text{voor alle } i. \tag{29}$$

bewijs

Substitueer in relatie (28) voor $\underline{\tau}_0 = 0$ en $\underline{\tau}_1 = \underline{\tau}$.

gevolg 2.2 *

Indien de funktie c niet-negatief is of een lading is en indien de c-excessieve funktie r begrensd is of een potentiaal is dan geldt voor willekeurige Markovtijd $\underline{\tau}$ dat

$$h(i) = \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\tau-1} c(\underline{x}_n)] \text{ een c-excessieve funktie is.}$$

bewijs

Indien r een potentiaal is dan volgt uit lemma 2.2

$$\mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) = \mathbb{E}_i[\sum_{n=\underline{\tau}}^{\infty} w(\underline{x}_n)]$$

Met relatie (27) volgt $w(i) \geq - c(i)$ voor alle i en dus

$$\geq - \mathbb{E}_i[\sum_{n=\underline{\tau}}^{\infty} c(\underline{x}_n)].$$

Indien r begrensd is dan kan m.b.v. lemma 2.3 en limietovergang (voor $\alpha \uparrow 1$) ook bewezen worden dat

$$\mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) \geq - \mathbb{E}_i[\sum_{n=\underline{\tau}}^{\infty} c(\underline{x}_n)] \tag{30}$$

Relatie (30) zegt dat op welk tijdstip we ons ook bevinden (bijvoorbeeld $\underline{\tau}$) onmiddellijk stoppen minstens zo goed is als nooit stoppen.
Uit (30) volgt

$$h(i) = \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\tau}) - \sum_{n=0}^{\tau-1} c(\underline{x}_n)]$$

$$(30) \qquad \geq - \mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\infty} c(\underline{x}_n)].$$

De funktie h voldoet dus aan de 1e voorwaarde voor c-excessiviteit. De verificatie van de 2e voorwaarde gaat analoog aan het bewijs van gevolg 2.2. □

3. DE WAARDE VAN HET SPEL

We hebben in paragraaf 1 een strategie optimaal genoemd indien de bijbehorende stopregel een maximale opbrengst (minus kosten) opleverde voor iedere begintoestand. In paragraaf 4 zullen we middels een tegenvoorbeeld laten zien dat er niet altijd een optimale strategie bestaat. Dit betekent dat de verzameling van verwachte opbrengsten niet in alle gevallen een maximum heeft. We definiëren daarom de *waarde van het spel* v als het *supremum* over de opbrengsten behorende bij stopstrategieën.

definitie 3.1

De waarde van het spel wordt gegeven door

$$(31) \qquad v(i) = \sup_{\underline{\tau} \in T} \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)] .$$

Het optimaal stoppen van een Markovketen kan gezien worden als een spel waarin de "natuur" of het "systeem dat de SW bepaalt" de tegenspeler is. Zo komt men tot de naam "waarde van het spel".

definitie 3.2

We zeggen dat funktie f kleiner (of gelijk) is aan funktie g indien $f(i) \leq g(i)$ voor alle i. In dit geval noemen we g een majorant van f.

We zullen in deze paragraaf aantonen dat in het geval $v(i) < \infty$ voor alle i, v de kleinste c-excessieve majorant van r is. We zullen dit weer aantonen voor het model 1 (dus voor kostenfunktie $c \equiv 0$). Voor we hieraan beginnen zullen we een voorbeeld geven van een funktie r met $v(i) = \infty$ voor alle i.

voorbeeld 3.1

De symmetrische "random walk" op $\mathbb{Z}^1$ met $r(i) = i$. Dit is het niet-beperkte munt-werp spel met uitbetalingsfunktie het aantal malen dat munt gegooid is minus het aantal malen dat kruis gegooid is op het moment van stoppen.

Volgens [Feller] is de kans om vanuit toestand 0 de toestand i te bereiken gelijk aan 1 voor iedere i. Dit betekent dat $v(0) = \infty$.

Voor een begrensde uitbetalingsfunktie (en $c \equiv 0$) geldt dat ook de waarde van het spel begrensd is. Tenzij anders vermeld zullen we steeds veronderstellen dat $|v(i)| < \infty$ voor alle i.

stelling 3.1

Indien f excessief is en f is een majorant van opbrengstfunktie r dan is f een majorant van v, de waarde van het spel.

bewijs

Voor een willekeurige Markovtijd $\underline{\tau}$ geldt volgens gevolg 2.1

$$\mathbb{E}_i[f(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \leq f(i) \qquad \text{voor alle } i.$$

Daar f een majorant is van r geldt ook

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \leq \mathbb{E}_i[f(\underline{x}_{\underline{\tau}})].$$

Door deze ongelijkheden te combineren vinden we

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \leq f(i)$$

en dus

$$v(i) = \sup_{\underline{i} \in T} \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \leq f(i). \quad \square$$

lemma 3.1

Indien bij iedere toestand i een Markovtijd $\underline{\tau}_i$ gegeven is, dan geldt dat de stochastische tijd $\underline{\tau}$ die verkregen wordt door aan een realisering aan de SW zeg $(i_0, i_1, \ldots)$ de tijd $1 + \underline{\tau}_{i_1}(i_1, i_2, \ldots)$ toe te voegen een Markovtijd is.

bewijs

We moeten bewijzen dat indien voor twee realiseringen van de SW zeg $\omega = (i_0, i_1, \ldots)$ en $\omega^* = (i_0, i_1, \ldots)$ geldt dat $\underline{\tau}(\omega) = n$ èn $i_0 = i_0^*$ t/m

$i_n = i_n^*$ dat dan volgt $\underline{\tau}(\omega^*) = n$.
Welnu uit

$$\underline{\tau}(\omega) = 1 + \underline{\tau}_{i_1}(i_1, i_2, \ldots) = n$$

volgt dat

$$\underline{\tau}_{i_1}(i_1, i_2, \ldots) = n-1$$

waaruit daar $i_1 = i_1^*$, $\underline{\tau}_i$ Markov en $i_1 = i_1^*$ t/m $i_n = i_n^*$ volgt

$$\underline{\tau}_{i_1^*}(i_1^*, i_2^*, \ldots) = n-1$$

en hieruit volgt dan

$$\underline{\tau}(i_0^*, i_1^*, \ldots) = n. \quad \square$$

<u>stelling 3.2</u>

De waarde van het spel v is een excessieve funktie.

<u>bewijs</u>

Daar ook $\underline{\tau} \equiv \infty$ een Markovtijd is volgt dat de waarde van het spel niet kleiner is dan de opbrengst onder $\underline{\tau} \equiv \infty$ en dus $v(i) \geq 0$ voor alle i.
Uit de definitie van v als een supremum volgt dat er voor willekeurige $\varepsilon > 0$ en toestand i een Markovtijd $\underline{\tau}_{\varepsilon,i}$ bestaat met

(32) $$\mathbb{E}_i \, r(\underline{x}_{\underline{\tau}_{\varepsilon,i}}) \geq v(i) - \varepsilon.$$

De indices ε,i gebruiken we om aan te geven dat het mogelijkerwijs zó is dat bij ieder paar ε,i een andere $\underline{\tau}$ genomen moet worden om aan relatie (32) te voldoen. In paragraaf 4 zullen we zien dat bij $\varepsilon > 0$ er altijd een $\underline{\tau}$ bestaat die aan (32) voldoet voor iedere i.
Zij $\underline{\tau}$ de stochastische tijd die verkregen wordt door aan een realisering van de SW zeg $(i_0, i_1, \ldots)$ de tijd $1 + \underline{\tau}_{\varepsilon,i_1}(i_1, i_2, \ldots)$ toe te voegen. Volgens lemma 3.1 is $\underline{\tau}$ dan een Markovtijd en dus geldt

(33) $$v(i) \geq \mathbb{E}_i \, r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) \qquad \text{voor alle i.}$$

Voorts geldt

$$\mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) \overset{(21a)}{=} \sum_j p(i,j)\, \mathbb{E}_j\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}_{\varepsilon,j}})$$

$$\geq \sum_j p(i,j)\, [v(j) - \varepsilon]$$

$$\geq \sum_j p(i,j)\, v(j) - \varepsilon.$$

Met (33) geeft dit dat

$$v(i) \geq \sum_j p(i,j)\, v(j) - \varepsilon \qquad \text{voor willekeurige } \varepsilon > 0.$$

Hiermee is aangetoond dat v excessief is. □

<u>gevolg 3.1</u>

De waarde van het spel is de kleinste excessieve majorant van de opbrengstfunktie r.

<u>bewijs</u>

Volgens stelling 3.2 is v excessief. Daar $\underline{\tau} \equiv 0$ een Markovtijd is volgt dat v een majorant is van r immers $\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] = r(i)$. Volgens stelling 3.1 is iedere excessieve majorant van r een majorant van v. Dus is v de kleinste excessieve majorant van r. □

Dat m.b.v. gevolg 3.1 de waarde van het spel in sommige gevallen eenvoudig gevonden kan worden, illustreren we met het volgende voorbeeld.

<u>voorbeeld 3.2</u>

De begrensde symmetrische "random walk" op $\mathbb{Z}^1$, ook wel de dronkemanswandeling genoemd.
Hierin is

$$E = \{0,1,\ldots,N\}$$

en

$$p(i,i-1) = p(i,i+1) = \tfrac{1}{2} \qquad \text{voor } 1 \leq i \leq N-1.$$

De toestanden 0 en N zijn absorberend d.w.z.

$$p(0,0) = p(N,N) = 1.$$

Een excessieve funktie is hier een convexe funktie, immers indien f excessief is dan volgt

$$\begin{aligned} f(i) &\geq \sum_j p(i,j)\, f(j) \\ &= \tfrac{1}{2}\,[f(i-1) + f(i+1)] \qquad \text{voor } 1 \leq i \leq N-1. \end{aligned}$$

De waarde van het spel is dus de kleinste convexe majorant van r. Bij gegeven r kan hiermee v op de volgende wijze "bepaald" worden. Construeer in iedere punt i een staafje ter lengte van r(i) en span een touw over deze staafjes heen.

Evenaals in paragraaf 2 laten de resultaten van deze paragraaf zich weer generaliseren tot model 2. We wullen de stellingen alleen formuleren. De bewijzen verlopen volstrekt analoog aan die voor model 1.

stelling 3.1*

Indien f c-excessief is en f is een majorant van r dan is f een majorant van v.

stelling 3.2*

De waarde van het spel is een c-excessieve funktie.

gevolg 3.1*

De waarde van het spel is de kleinste c-excessieve majorant van r.

4. OVER HET BESTAAN VAN OPTIMALE STRATEGIEËN

De verzameling van toestanden waarin direct stoppen een "maximale opbrengst" oplevert noemen we de *steunverzameling*.

definitie 4.1

De *steunverzameling* [1], zeg Γ_0, wordt gegeven door

$$\Gamma_0 = \{i: r(i) = v(i)\} .$$

Γ_0 is dus de verzameling van toestanden waar de opbrengstfunktie r haar kleinste excessieve majorant steunt, vandaar de naam steunverzameling.

Indien i een toestand uit Γ_0 is dan levert onmiddellijk stoppen een opbrengst v(i). Dit betekent dat geen enkele strategie een hogere verwachting van de opbrengst heeft in toestand i.
Indien i geen toestand van Γ_0 is dan is r(i) echt kleiner dan v(i). Er zijn dan strategieën die een hogere verwachting van de opbrengst hebben in toestand i. Dit betekent dat deze strategieën niet stoppen in i en dus nog minstens een periode wachten met stoppen.
Een strategie die stoppen dikteert in de toestanden van Γ_0 en niet stoppen daarbuiten lijkt dus optimaal te zijn. Dit is ook zo mits er een optimale strategie bestaat. Dat er niet altijd een optimale strategie bestaat toont het volgende voorbeeld.

voorbeeld 4.1

$\mathbb{N}$ is de verzameling van toestanden.
$r(1) = 1$ en $r(i) < 1$ voor $i \geq 1$ en $\lim_{n\to\infty} r(n) = 1$.

$$1 - p(n,1) = p(n,n+1) = \frac{n^2-1}{n^2} .$$

Kies ε en zij N_ε zó dat $r(n) \geq 1-\varepsilon$ voor $n \geq N_\varepsilon$. Zij $\underline{\tau}_\varepsilon$ de intreetijd in de verzameling

$$\Gamma_\varepsilon = \{1, N_\varepsilon\ N_\varepsilon+1, \ldots\}.$$

Daar $\mathbb{N}\backslash\Gamma_\varepsilon$ eindig veel toestanden heeft en Γ_ε vanuit iedere toestand bereikbaar is volgt

$$\mathbb{P}_i[\underline{\tau}_\varepsilon < \infty] = 1 \qquad \text{voor alle } i.$$

---

[1] Γ_0 wordt ook wel de stopverzameling genoemd.

Hieruit volgt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon})] &= \sum_{j\in\Gamma_\varepsilon} \mathbb{P}_i(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}=j)\; r(j) \\
&\geq \sum_{j\in\Gamma_\varepsilon} \mathbb{P}_i(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}=j)\; (1-\varepsilon) \\
&= \mathbb{P}_i(\underline{\tau}_\varepsilon<\infty)\; (1-\varepsilon) \\
&= (1-\varepsilon)
\end{aligned}
$$

De waarde van het spel overtreft de opbrengst voor iedere $\underline{\tau}_\varepsilon$ en is dus identiek gelijk aan 1. De steunverzameling Γ_0 bestaat uit het punt 1. De kans om vanuit toestand n ooit in Γ_0 te komen zeg $\pi(n)$ is gelijk aan 1 minus de kans dat het systeem zonder onderbreking naar rechts verspringt, zodat

$$\pi(n) = 1 - \prod_{k=n}^{\infty} \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{1}{n} .$$

De strategie met als stoptijd de binnenkomsttijd in Γ_0, zeg $\underline{\tau}_0$ heeft als verwachte opbrengst

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})] = \frac{1}{i} .$$

Deze strategie heeft een verwachte opbrengst die kleiner is dan de waarde van het spel indien $i > 1$ en is dus niet optimaal.

We zullen in deze paragraaf bewijzen dat er altijd strategieën bestaan waarvoor de verwachte opbrengst minder dan ε van de waarde van het spel verschilt, voor ieder startpunt. Deze strategieën noemen we *ε-optimale strategieën.*

Voorts zullen we in deze paragraaf voldoende voorwaarde geven voor het bestaan van optimale strategieën.

<u>stelling 4.1</u>

Indien v, de waarde van het spel, een potentiaal is dan is $\underline{\tau}_0$, de binnenkomsttijd in Γ_0, een optimale stoptijd.

<u>bewijs</u>

We zullen in dit bewijs gebruiken dat voor een toestand, zeg i, die niet tot Γ_0 behoort geldt

(41) $$v(i) = \sum_j p(i,j)\, v(j).$$

Relatie (41) volgt onmiddellijk uit de optimaliteitsvergelijking die we in de volgende paragraaf zullen afleiden. Een bewijs van (41) laten we hier dan ook achterwege.
Indien v een potentiaal is dan volgt uit lemma 2.2 dat

(42) $$v(i) - \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})] = \mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0-1} w(\underline{x}_n)]$$

met

(43) $$w(i) = v(i) - \sum_j p(i,j)\, v(j).$$

Uit (41) en (43) volgt dat

$$\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0-1} w(\underline{x}_n) = 0.$$

Met (42) volgt dan dat

(44) $$v(i) = \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})] \qquad \text{voor iedere } i.$$

Daar op Γ_0 de funkties r en v aan elkaar gelijk zijn en $\underline{x}_{\underline{\tau}_0} \in \Gamma_0$ volgt dat

$$r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) = v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}).$$

Met relatie (44) geeft dit

$$v(i) = \mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}).$$

En dus is $\underline{\tau}_0$ een optimale stoptijd. □

We hebben in paragraaf 2 opgemerkt dat voor een voorbijgaande Markovketen met *eindige* toestandsruimte iedere funktie een potentiaal is. Met stelling 4.1 volgt dan dat in dit geval stoppen in Γ_0 een optimale strategie is.

voorbeeld 4.2

Indien we in de begrensde symmetrische "random walk" op $\mathbb{Z}'$ (zie voorbeeld 3.2) de absorberende toestanden weglaten dan houden we alleen voorbijgaande toestanden over. De Markovketen wordt dan voorbijgaand. In voorbeeld 3.2 gaven we aan hoe v te bepalen is. Stoppen waar v = r is hier optimaal.

Uit het bewijs van stelling 4.1 is te lezen dat relatie (44) een voldoende voorwaarde voor het bestaan van een optimale strategie. Relatie (44) is ook noodzakelijk.
In het voorbeeld 4.1 is relatie (44) dan ook niet vervuld.
Een analoge relatie voor de binnenkomst in de ε-steunverzameling

$$\Gamma_\varepsilon = \{i: r(i) \geq v(i) - \varepsilon\}$$

geldt wel altijd en hiermee kan dan het bestaan van ε-optimale strategieën aangetoond worden.

stelling 4.2

Voor $\underline{\tau}_\varepsilon$, de binnenkomsttijd in Γ_ε geldt

(45) $$\mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}) \geq v(i) - \varepsilon \qquad \text{voor alle } i.$$

$\underline{\tau}_\varepsilon$ is dus een ε-optimale stoptijd.

bewijs

Het grootste gedeelte van het bewijs zal nodig zijn om aan te tonen dat

(46) $$v(i) = \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon})] \qquad \text{voor alle } i.$$

Laten we deze relatie voor het moment aannemen.
Daar voor $i \in \Gamma_\varepsilon$ geldt $r(i) \geq v(i) - \varepsilon$ volgt

$$r(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}) \geq v(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}) - \varepsilon.$$

En dus met (46)

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon})] \geq v(i) - \varepsilon.$$

Waaruit dan de ε-optimaliteit van $\underline{\tau}_\varepsilon$ volgt.

Zij

$$h(i) = \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon})].$$

Om relatie (46) aan te tonen moeten we dus bewijzen dat $h = v$.

De funktie v is excessief, volgens stelling 2.1 geldt dan dat $h(i) \leq v(i)$ voor alle i.

Gevolg 2.2 zegt dat h een excessieve funktie is.

Daar v de kleinste excessieve majorant van r is (gevolg 3.1) volgt dan dat

$$h(i) \geq v(i) \text{ en dus } h(i) = v(i) \quad \text{voor alle } i,$$

<u>indien</u> h een majorant is van r.

Stel h is geen majorant van r, dan is

$$c = \sup_i \{r(i) - h(i)\} > 0.$$

Zij i_0 zó dat $r(i_0) > h(i_0)$ en $r(i_0) \geq h(i_0) + c - \varepsilon$.

Daar $h + c \geq r$ en $h + c$ is excessief volgt (gevolg 3.1) dat $h + c \geq v$. En dus

$$r(i_0) \geq [h(i_0)+c] - \varepsilon \geq v(i_0) - \varepsilon.$$

Waaruit volgt dat $i_0 \in \Gamma_\varepsilon$ en dus

$$h(i_0) = \mathbb{E}_{i_0}[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon})] = v(i_0) \geq r(i_0).$$

Dit is in tegenspraak met $r(i_0) > h(i_0)$. $\square$

<u>stelling 4.3</u>

Zij de opbrengstfunktie r begrensd.

Indien de kans om vanuit toestand i ooit in de steunverzameling te komen gelijk aan 1 is dan geldt

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})] = v(i).$$

bewijs

Kies een rij $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ met $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.
Daar

$$\mathbb{P}_i[\underline{\tau}_0<\infty] = 1$$

volgt er dat

$$\underline{x}_{\underline{\tau}_{\varepsilon_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{x}_{\underline{\tau}_0} \qquad \text{met} \quad \mathbb{P}_i \text{ - kans } 1.$$

Met de begrensdheid van r volgt hieruit dat

$$(47) \qquad \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_{\varepsilon_n}})] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})]$$

Uit relatie (45) en $\varepsilon_n \to 0$ volgt dat

$$(48) \qquad \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_{\varepsilon_n}})] \xrightarrow[n\to\infty]{} v(i).$$

De relaties (47) en (48) geven

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})] = v(i). \qquad \square$$

Ook de stellingen van deze paragraaf kunnen weer gegeneraliseerd worden tot model 2. We veronderstellen daarbij dat de kostenfunktie c niet-negatief is of een lading is.

stelling 4.1*

Indien v, de waarde van het spel, een potentiaal is dan is $\underline{\tau}_0$, de binnenkomsttijd in Γ_0, een optimale stoptijd.

stelling 4.2*

Voor $\underline{\tau}_\varepsilon$, de binnenkomsttijd in Γ_ε geldt

$$(49) \qquad \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_\varepsilon - 1} c(\underline{x}_n)] \geq v(i) - \varepsilon \qquad \text{voor alle } i.$$

stelling 4.3*

Zij r begrensd. Indien $\mathbb{P}_i[\underline{\tau}_0<\infty] = 1$ dan geldt

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0-1} c(\underline{x}_n)] = v(i).$$

5. OVER HET BEPALEN VAN OPTIMALE STRATEGIEËN

In paragraaf 4 hebben we gezien dat er niet altijd een optimale stopregel bestaat. Maar indien ze wel bestaat dan is ze gelijk aan de binnenkomsttijd in de steunverzameling Γ_0. We hebben ook gezien dat de binnenkomsttijd in de ε-steunverzameling Γ_ε een ε-optimale strategie oplevert.
Om (ε-)optimale strategieën te vinden moeten we dus de waarde van het spel v bepalen.
In een ander hoofdstuk zal met gebruikmaking van stellingen omtrent de Martinrand een karakterisering van de klasse van alle excessieve funkties gegeven worden. Hieruit kan v als kleinste excessieve majorant van r bepaald worden. We zullen in deze paragraaf enige andere manieren aangeven om v te bepalen. We doen dit voor model 2. Daar we in deze paragraaf relaties zullen gebruiken die afgeleid zijn van model 1 maar ook geldig zijn voor model 2, zullen we deze relaties indien gebruikt voor model 2 met een * versieren.

DE FUNKTIONAALVERGELIJKING

De waarde van het spel v voldoet aan een funktionaalvergelijking, veelal de *optimaliteitsvergelijking* genoemd. Indien we een oplossing w van de funktionaalvergelijking kunnen vinden. En indien we weten dat de optimaliteitsvergelijking een unieke oplossing heeft dan is v = w en daarmee het optimaal stopprobleem opgelost.
We zullen de optimaliteitsvergelijking afleiden en tevens een voldoende voorwaarde voor de uniciteit van de oplossing geven.

stelling 5.1

De waarde van het spel v voldoet aan de optimaliteitsvergelijking

$$(51) \qquad v(i) = \max[r(i),\ -c(i) + \sum_j p(i,j)\ v(j)] \qquad \text{voor iedere } i.$$

bewijs

We definiëren inductief een rij van funkties op E door

$$(52) \qquad x_0(i) = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)\ c(j)$$

en

$$(53) \qquad x_{n+1}(i) = \max[r(i),\ -c(i) + \sum_j p(i,j)\ x_n(j)].$$

Om het rechterlid van (52) gedefinieerd te doen zijn, moeten we evenals in paragraaf 2 aannemen dat c niet-negatief is of een lading is. Het is dan mogelijk dat x_0 de waarde $-\infty$ aanneemt.
Met volledige inductie zullen we bewijzen dat de rij $x_n(i)$ monotoon niet-dalend is voor iedere i. Immers

$$\begin{aligned} x_1(i) &\geq -c(i) + \sum_j p(i,j)\ x_0(j) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)\ c(j) \\ &= x_0(i). \end{aligned}$$

Stel dat $\quad x_n(i) \geq x_{n-1}(i) \qquad$ voor iedere i,

indien $\quad x_n(i) = r(i)$

dan geldt

$$\begin{aligned} x_{n+1}(i) &= \max[r(i),\ \ldots] \\ &\geq r(i) = x_n(i), \end{aligned}$$

indien $\quad x_n(i) = -c(i) + \sum_j p(i,j)\ x_{n-1}(j)$

dan geldt

$$x_{n+1}(i) \geq -c(i) + \sum_j p(i,j)\; x_n(j)$$

$$\geq -c(i) + \sum_j p(i,j)\; x_{n-1}(j)$$

$$= x_n(i).$$

We hebben hiermee aangetoond dat $x_n(i)$ monotoon niet-dalend is. Uit de monotonie volgt dat $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(i)$ bestaat. Zij

(54) $$x_\infty(i) = \lim_{n\to\infty} x_n(i).$$

Uit de relaties (53) en (54) volgt dat

$$x_\infty(i) = \max[r(i), -c(i) + \sum_j p(i,j)\; x_\infty(j)].$$

De funktie x_∞ voldoet dus aan de optimaliteitsvergelijking. We zullen vervolgens bewijzen dat $x_\infty = v$.

$$x_\infty \geq -c(i) + \sum_j p(i,j)\; x_\infty(j) \quad \text{en} \quad x_\infty \geq x_0,$$

volgens de relaties (26) en (27) is x_∞ dus een c-excessieve funktie. Bovendien is x_∞ een majorant van r. Daar v de kleinste majorant van r is (gevolg 3.1*) volgt dan dat

(55) $$x_\infty \geq v.$$

De waarde van het spel v is c-excessief, volgens relatie (26) geldt dus $v \geq x_0$,
Stel $v \geq x_n$ dan volgt uit $v \geq r$ en de c-excessiviteit dat

$$v(i) \geq \max[r(i), -c(i) + \sum_j p(i,j)\; v(j)]$$

$$\geq \max[r(i), -c(i) + \sum_j p(i,j)\; x_n(j)]$$

$$= x_{n+1}(i).$$

Met volledige inductie volgt dan $v \geq x_n$ voor alle n. Hieruit volgt

(56) $$v \geq x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Relaties (55) en (56) geven dat $x_\infty = v$. $\square$

definitie 5.1

Een funktie h waarvoor geldt dat

$$h(i) = \sum_j p(i,j)\, h(j)$$

wordt een *harmonische* funktie genoemd.

In het volgende hoofdstuk zal ook een karakterisering van de klasse van harmonische funkties gegeven worden. Het is niet moeilijk in te zien dat indien $c \equiv 0$ iedere harmonische majorant van r een oplossing is van de optimaliteitsvergelijking. In veel gevallen heeft deze funktionaalvergelijking dus geen unieke oplossing.

gevolg 5.1

Indien $\quad r(i) \geq - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p(i,j)\, c(j)$

dan is v de kleinste oplossing van de optimaliteitsvergelijking.

bewijs

Zeg w is een oplossing van (51)
dan geldt

$$w(i) \geq r(i) \geq - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p(i,j)\, c(j)$$

en

$$w(i) \geq -c(i) + \sum_j p(i,j)\, w(j).$$

Hieruit volgt dat w een c-excessieve majorant van r is en dus volgens gevolg 3.1* groter dan of gelijk aan v. $\square$

definitie 5.2

Zij toestand ∞ met bijbehorende overgangswaarschijnlijkheden gedefinieerd zoals onder ii) op pag 2.

Een Markovketen heet *absorberend* indien het systeem startend vanuit een willekeurige toestand met kans 1 de toestand ∞ ooit bereikt.

lemma 5.1

Een Markovketen is absorberend dan en slechts dan als

(57) $$\lim_{n\to\infty} \sum_j p^n(i,j) = 0 \qquad \text{voor iedere } i.$$

bewijs

Uit $\mathbb{P}_i[\underline{x}_n=\infty] = 1 - \sum_j p^n(i,j)$ volgt dat (57) equivalent is met

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_i[\underline{x}_n=\infty] = 1 \qquad \text{voor iedere } i.$$

De Markovketen is absorberend $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{P}_i[\bigcup_{n=1}^{\infty}(\underline{x}_n=\infty)] = 1$ voor iedere i.

Voorts geldt daar ∞ een absorberende toestand is dat

$$\mathbb{P}_i[\bigcup_{n=1}^{\infty}(\underline{x}_n=\infty)] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_i[\bigcup_{n=1}^{N}(\underline{x}_n=\infty)]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_i[\underline{x}_N=\infty] \qquad \text{voor iedere } i. \quad \square$$

Voor Markovketens met eindig veel toestanden vallen de begrippen voorbijgaand (zie definitie in paragraaf 2) en absorberend samen. In het algemeen geldt dat

Markovketen absorberend $\Longrightarrow$ Markovketen voorbijgaand.

Een interessant voorbeeld van een absorberende Markovketen krijgen we indien de kosten of opbrengsten verdisconteerd worden. Een bedrag zeg k op de n-de "dag" ontvangen heeft op de 0-de "dag een economische waarde van $\alpha^n k$ met $0 < \alpha < 1$ als *verdisconteringsfaktor*. Voor het optimaal stopprobleem met $c \equiv 0$ betekent dit dat de stoptijd $\underline{\tau} \equiv n$ als verwachte opbrengst

$$\mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}} r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] = \sum_j p^n(i,j)\, \alpha^n r(j)$$

heeft als het systeem start in i. We kunnen dit tot een bekend optimaal stopprobleem terugbrengen door een Markovketen met nieuwe overgangswaarschijnlijkheden te definiëren door

$$\tilde{p}(i,j) = \alpha p(i,j).$$

Deze nieuwe Markovketen is dan absorberend.

stelling 5.2

Indien c niet-negatief en r een begrensde funktie is en de Markovketen absorberend is dan geldt

i) er is een optimale stoptijd

ii) de optimaliteitsvergelijking heeft een unieke begrensde oplossing.

bewijs

i) Daar c niet-negatief en r begrensd is volgt er dat ook v, gedefinieerd in relatie (31), een begrensde funktie is. Uit (57) volgt dan dat

$$\lim_{n\to\infty} \sum_j p^n(i,j)\, v(j) = 0 \qquad \text{voor iedere } i.$$

Indien $c \equiv 0$ dan is volgens lemma 2.1 de funktie v een potentiaal en volgens stelling 4.1 is $\underline{\tau}_0$ de binnenkomsttijd in de steunverzameling, een optimale stoptijd.

Indien $c \not\equiv 0$ dan is v niet noodzakelijk een potentiaal [1]. We zullen de optimaliteit van $\underline{\tau}_0$ bewijzen door aan te tonen dat

$$\text{(57a)} \qquad v(i) - \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0})] = -\mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0-1} c(\underline{x}_n)].$$

Immers uit deze relatie volgt, daar r = v op Γ_0,

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0-1} c(\underline{x}_n)] = v(i)$$

---

[1] Het lemma 2.1 kan als volgt gegeneraliseerd worden:
Een c-excessieve funktie f is een potentiaal indien c een lading is en

$$\lim_{n\to\infty} \sum_j p^n(i,j)\, f(j) = 0 \qquad \text{voor iedere } i.$$

Hieruit volgt dan dat voor het geval c een lading is de waarde van het spel weer een potentiaal is.

en dus dat $\underline{\tau}_0$ optimaal is.

Zij $\qquad \underline{\tau}_N = \min[\underline{\tau}_0, N]$,

uit relatie (22) volgt dat voor alle $0 < \alpha < 1$ geldt

$$v(i) - \mathbb{E}_i[\alpha^{\underline{\tau}_N} v(\underline{x}_{\underline{\tau}_N})] = \mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_N - 1} \alpha^n w_\alpha(\underline{x}_n)]$$

met $w_\alpha(i) = v(i) - \alpha \sum_j p(i,j)\, v(j)$.

Daar $\underline{\tau}_N \leq N$ volgt hieruit door de limietovergang van $\alpha \uparrow 1$ dat

$$v(i) - \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_N})] = \mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_N - 1} w(\underline{x}_n)].$$

Maar voor $n \leq \underline{\tau}_N$ geldt dat $\underline{x}_n \notin \Gamma_0$ en hieruit volgt met relatie (51) dat

$$v(\underline{x}_n) = -c(\underline{x}_n) + \sum_j p(\underline{x}_n, j)\, v(j)$$

$$\Longrightarrow w(\underline{x}_n) = -c(\underline{x}_n).$$

Dus geldt

(57b) $$v(i) - \mathbb{E}_i[v(\underline{x}_{\underline{\tau}_N})] = -\mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_N - 1} c(\underline{x}_n)].$$

Verder geldt

$$|\mathbb{E}_i\, v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}) - \mathbb{E}_i\, v(\underline{x}_{\underline{\tau}_N})| \leq \mathbb{P}_i[\underline{\tau}_0 > N]\, (\sup_i v(i) - \inf_i v(i)).$$

Daar de Markovketen absorberend is volgt er dat

$$\lim_{N\to\infty} P_i[\underline{\tau}_0 > N] = 0$$

en dus

(57c) $$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_i\, v(\underline{x}_{\underline{\tau}_N}) = \mathbb{E}_i\, v(\underline{x}_{\underline{\tau}_0}).$$

Uit $c \geq 0$ volgt dat $\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_N - 1} c(\underline{x}_n)$ monotoon niet-dalend naar $\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0 - 1} c(\underline{x}_n)$ convergeert. Met de monotone convergentiestelling volgt hieruit dat

(57d) $$\lim_{N\to\infty} -\mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_N - 1} c(\underline{x}_n)] = -\mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}_0 - 1} c(\underline{x}_n)].$$

De relaties (57b), (57c) en (57d) tesamen impliceren relatie (57a).

ii) Veronderstel dat naast v ook de funktie w een oplossing is van de optimaliteitsvergelijking. We zullen bewijzen dat

$$(58) \qquad v(i) - w(i) \leq \sum_j p(i,j)\ |v(j) - w(j)|.$$

Indien toestand i een element van de steunverzameling Γ_0 is dan geldt $v(i) = r(i)$.
Daar $w(i) \geq r(i)$ volgt dan

$$v(i) - w(i) \leq 0,$$

dus zeker (58) geldt.

Indien toestand i geen element van Γ_0 is dan geldt

$$v(i) = -c(i) + \sum_j p(i,j)\ v(j)$$

voorts geldt

$$w(i) \geq -c(i) + \sum_j p(i,j)\ w(j).$$

Hieruit volgt

$$v(i) - w(i) \leq \sum_j p(i,j)\ [v(j) - w(j)]$$

en dus zeker (58) geldt.

Analoog aan (58), maar dan met $\Gamma^* = \{i: w(i) = r(i)\}$ i.p.v. Γ_0, laat zich bewijzen dat

$$w(i) - v(i) \leq \sum_j p(i,j)\ |v(j) - w(j)|.$$

Hieruit volgt

$$(59) \qquad |v(i) - w(i)| \leq \sum_j p(i,j)\ |v(j) - w(j)|.$$

Door relatie (59) herhaald toe te passen vinden we dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$

(60) $$|v(i) - w(i)| \leq \sum_j p^n(i,j)\ |v(j) - w(j)|.$$

Daar de Markovketen absorberend is en $|v - w|$ begrensd is, volgt dat

$$\lim_{n\to\infty} \sum_j p^n(i,j)\ |v(j) - w(j)| = 0$$

Met (60) volgt hieruit dat $v = w$. □

STABIELE PROBLEMEN

In veel gevallen is het oplossen van de funktionaalvergelijking erg moeilijk. Om ε-optimale strategieën te bepalen is het voldoende om v i.p.v. te bepalen dicht genoeg te benaderen. Met het bepalen van benaderingen van v zullen we ons in deze paragraaf bezig houden.

notatie 5.1

De waarde van het spel onder de voorwaarde dat het spel niet langer dan n+1 perioden gespeeld mag worden duiden we aan met v_n.
Zij T_n de collectie van Markovtijden $\underline{\tau}$ met $\underline{\tau} \leq n$. Dan geldt

(61) $$v_n(i) = \sup_{\underline{\tau}\in T_n} \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{k=0}^{\tau-1} c(\underline{x}_k)].$$

definitie 5.1

Een optimaal stopprobleem heet stabiel indien

(62) $$\lim_{n\to\infty} v_n(i) = v(i) \qquad \text{voor iedere } i$$ [1].

Voor stabiele problemen kunnen we benaderingen van v vinden door v_n's te berekenen. We zullen zien dat de funktie v_{n+1} op eenvoudige wijze uit v_n te bepalen is. Dit betekent dat voor eindige toestandsruimten met gebruikmaking van rekentuig de bepaling van v_n, mits n niet te groot is, meestal zeer goed mogelijk is. Indien geldt voor zeker getal $a > 0$ dat

[1] In de referenties komen verschillende definities van stabiliteit voor. Definitie 5.1 is de zwakste versie van stabiliteit.

(63) $\quad v_n(i) \geq v(i) - a \qquad$ voor iedere i

dan zal de binnenkomsttijd in verzameling Γ^* met

$$\Gamma^* = \{i: r(i) \geq v_n(i) - \varepsilon\}$$

een ($a+\varepsilon$)-optimale stoptijd zijn (stelling 4.2*).
Voor a niet te groot zullen we in de meeste praktische gevallen een aanvaardbare oplossing van het probleem gevonden hebben.
Om te weten dat voor bepaalde n en a relatie (63) vervuld is moeten we niet alleen een stabiel probleem hebben maar moeten we ook de snelheid van convergentie in relatie (62) kennen. We zullen een stelling hierover afleiden. Verder zullen we middels een voorbeeld laten zien dat niet alle optimale stopproblemen stabiel zijn en voorts een voldoende voorwaarde geven voor stabiliteit.
We hebben v_n gedefinieerd als de maximaal te verkrijgen opbrengst onder de voorwaarde dat er vóór tijdstip n+1 gestopt moet worden. Dit is een n-staps beslissingsprobleem nl. op de tijdstippen 0,1,...,n-1 moet er een beslissing genomen worden omtrent al dan niet stoppen. Het *optimaliteitsprincipe van Bellman* zegt dat een optimale strategie over (n+1) perioden zó is dat de beslissingen op de (k+1) t/m n-de tijdstip een optimale strategie oplevert voor de laatste (n-k) perioden. Dit impliceert dat de maximale opbrengst over een eindig aantal perioden gevonden wordt middels het principe van de *dynamische programmering*. Dit zegt dat een oplossing voor het (n+1) staps beslissingsprobleem gevonden wordt door met relatie (65) v_{n+1} uit v_n te bepalen en op de 0-de "dag" te stoppen al naar gelang $v_{n+1} \geq r$ en op de overige tijdstippen te beslissen volgens de n-staps optimale strategie.
We zullen dit bewijzen.

<u>stelling 5.3</u>

Voor de rij v_n van verwachte opbrengsten die gedefinieerd is in relatie (61) gelden de volgende relaties

(64) $\quad v_0(i) = r(i)$

en

(65) $\quad v_{n+1}(i) = \max[r(i), -c(i) + \sum_j p(i,j)\, v_n(j)].$

Zij $\underline{\tau}_n$ de strategie die stoppen dikteert in toestand i op het k-de tijdstip indien k het kleinste niet-negatieve getal is met

(66) $$r(i) \geq v_{n-k}(i)$$

dan geldt voor $\underline{\tau}_n$ en v_n dat

(67) $$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_n}) - \sum_{k=0}^{\underline{\tau}_n-1} c(\underline{x}_k)] = v_n(i).$$

<u>bewijs</u>

Uit de definitie van v_n (relatie (61)) volgt dat v_n een niet-dalende rij van funkties is. Hieruit volgt dat door relatie (66) op ondubbelzinnige wijze een Markovtijd wordt gedefinieerd.
Daar $v_0 = r$ volgt er dat $\underline{\tau}_n \leq n$.
Het bewijs van de geldigheid van de relaties (65) en (67) geven we met volledige inductie.
Stel dat de relaties (65) en (67) zijn bewezen voor alle niet-negatieve getallen $\leq n$.
Zij

(67a) $$w(i) = \max[r(i), -c(i) + \sum_j p(i,j)\, v_n(j)].$$

Voor de inductiestap moeten we nu aantonen dat $w = v_{n+1}$ en dat v_{n+1} aan (67) voldoet.
Zij de strategie $\underline{\tilde{\tau}}$ gedefinieerd door

$$\underline{\tilde{\tau}} = 0 \qquad \text{indien } r(\underline{x}_0) = w(\underline{x}_0)$$

$$\underline{\tilde{\tau}} = 1 + \underline{\tau}_n \qquad \text{anders.}$$

We zullen aantonen dat

(68) $$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tilde{\tau}}}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tilde{\tau}}-1} c(\underline{x}_n)] = w(i).$$

Met (67a) volgt dat $r(i) \leq w(i)$ en dus geldt er dat $r(i) = w(i)$ of $r(i) < w(i)$.
Indien voor i geldt $r(i) = w(i)$ dan volgt

$$\underline{\tilde{\tau}} = 0 \qquad \text{met } \mathbb{P}_i \text{ - kans } 1.$$

Hieruit volgt dan dat het linkerlid van relatie (68) gelijk is aan r(i). Dus in dit geval geldt relatie (68).
Indien voor i geldt $r(i) < w(i)$ dan volgt met relatie (67a) dat

$$w(i) = -c(i) + \sum_j p(i,j)\, v_n(j).$$

Voorts volgt uit

$$\underline{\tilde{\tau}} = 1 + \underline{\tau}_n \qquad \text{met } \mathbb{P}_i \text{ - kans } 1$$

dat

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tilde{\tau}}}) - \sum_{k=0}^{\underline{\tilde{\tau}}-1} c(\underline{x}_k)] =$$

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{1+\underline{\tau}_n}) - \sum_{k=0}^{\underline{\tau}_n} c(\underline{x}_k)] =$$

$$-c(i) + \sum_j p(i,j)\, \mathbb{E}_j[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_n}) - \sum_{k=0}^{\underline{\tau}_n-1} c(\underline{x}_k)] =$$

$$-c(i) + \sum_j p(i,j)\, v_n(j),$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit de inductie-aanname voor de relatie (67). Dus ook voor deze waarden van i geldt relatie (68).

Daar $\underline{\tilde{\tau}} \le 1 + \tau_n \le 1 + n$, volgt uit de definitie van v_{n+1} als de maximale opbrengst over (n+1) perioden dat

$$w \le v_{n+1}.$$

Indien we nog aantonen dat

$$(69) \qquad v_{n+1} \le w$$

dan hebben we de inductiestap bewezen, immers dan volgt dat $v_{n+1} = w$ en hieruit $\underline{\tilde{\tau}} = \tau_{n+1}$ en met (68) dan ook relatie (67) voor n+1.

We zullen (69) aantonen door voor een willekeurige Markovtijd $\underline{\tau} \leq n+1$ te bewijzen dat

$$(70) \qquad \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{k=0}^{\tau-1} c(\underline{x}_k)] \leq w(i) \qquad \text{voor iedere } i.$$

Daar $\underline{\tau}$ een Markovtijd is geldt voor willekeurige toestand i

òf $\underline{\tau} = 0$

òf $\underline{\tau} > 0$ voor alle realiseringen met $\underline{x}_0 = i$.

Indien $\underline{\tau} = 0$ voor $\underline{x}_0 = i$ dan is het linkerlid van (70) gelijk aan r(i) en geldt dus zeker de relatie (70) daar $w(i) \geq r(i)$.

Indien $\underline{\tau} > 0$ voor $\underline{x}_0 = i$ dan volgt dat als we ons tot de realiseringen met $\underline{x}_0 = i$ beperken dat voor

$$\underline{\tau}^* \overset{\text{def}}{=} \underline{\tau} - 1$$

geldt, $\underline{\tau}^*$ is een Markovtijd en $\underline{\tau}^* \leq n$.

Hieruit volgt

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{k=0}^{\tau-1} c(\underline{x}_k)] =$$

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{1+\underline{\tau}^*}) - \sum_{k=0}^{\tau^*} c(\underline{x}_k)] =$$

$$-c(i) + \sum_j p(i,j)\, \mathbb{E}_j[r(\underline{x}_{\underline{\tau}^*}) - \sum_{k=0}^{\tau^*-1} c(\underline{x}_k)] \leq$$

$$-c(i) + \sum_j p(i,j)\, v_n(j) \leq w(i).$$

De voorlaatste ongelijkheid volgt uit de definitie van v_n en de laatste ongelijkheid uit relatie (67a). □

We merken op dat de recursieve relaties (53) en (65) dezelfde zijn. Dit impliceert dat als

$$(71) \qquad r(i) \geq - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)\, c(j)$$

het probleem volgens stelling 5.1 stabiel is. Immers dan geldt dat $v_n = x_{n+1}$ en dus

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} x_n = v$$

We hebben dus de volgende stelling bewezen.

stelling 5.4

Relatie (71) is een voldoende voorwaarde voor stabiliteit.

Dat niet ieder optimaal stopprobleem stabiel is toont het volgende

voorbeeld 5.1

De symmetrische "random walk" op $\mathbb{Z}^1$ met kostenfunktie identiek gelijk aan nul en opbrengstfunktie $r(i) = i$. Dit is het niet-beperkte munt-werp spel met uitbetalingsfunktie het aantal malen dat munt gegooid is minus het aantal malen dat kruis gegooid is op het moment van stoppen. We zagen in paragraaf 3 dat $v \equiv \infty$.
De funktie r is harmonisch en dit impliceert dat

$$v_n = r \qquad \text{voor alle } n.$$

Dus is de limiet van v_n voor $n \to \infty$ ongelijk aan v en het probleem is dus ook niet stabiel.
Uit $v_n(0) = 0$ voor iedere n volgt dat voor iedere stoptijd $\underline{\tau}$ geldt dat voor iedere n

$$\mathbb{E}_0[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_n})] \leq 0 \qquad \text{met } \underline{\tau}_n = \min[\underline{\tau},n].$$

Uit de symmetrie om nul van dit probleem is duidelijk dat ook geldt

$$\mathbb{E}_0[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_n})] \geq 0.$$

En dus geldt voor iedere stoptijd $\underline{\tau}$ die met kans 1 begrensd is dat de verwachting van de opbrengst gelijk aan nul is. Voor begrensde stoptijden is het munt-werp spel dus een eerlijk spel.

In paragraaf 4 hebben we een voorbeeld gezien van een optimaal stopprobleem waarvoor stoppen in de steunverzameling niet optimaal was. Daar voor dit voorbeeld geldt dat $c \equiv 0$ en $r \geq 0$ is volgens stelling 5.4 het probleem stabiel. We zien hieruit dat stabiliteit niet het bestaan van een optimale stoptijd behoeft te impliceren.

In de volgende stelling veronderstellen we dat r begrensd is en $\inf c(i) > 0$ het probleem is dan stabiel. We kunnen echter in dit geval iets zeggen omtrent de snelheid waarmee v_n naar v convergeert. We geven in deel ii) van de stelling een afschatting voor $v - v_n$ die we m.b.v. het resultaat van deel iii) kunnen verscherpen tot de uitspraak onder iv). Deel iii) is een generalisatie van het bekende feit dat in de "sequential probability ratio test" het verwachte aantal waarnemingen exponentieel begrensd is.

<u>stelling 5.5</u>

Zij r begrensd

(72) $$c_0 \overset{\text{not}}{=} \inf_i c(i) > 0$$

en

(73) $$r_0 \overset{\text{not}}{=} \sup_i r(i) < \infty$$

dan geldt

i) Er bestaat een optimale strategie.

ii) $$v(i) - v_n(i) \leq \frac{[r_0 - r(i)][r_0 - c_0]}{(n+1)c_0}.$$

iii) De stoptijd behorende bij de steunverzameling is exponentieel begrensd.

iv) v_n gaat exponentieel snel naar v.

<u>bewijs</u>

Zij $\underline{\tau}$ een Markovtijd waarvoor geldt

(73a) $$r(i) \leq \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)].$$

Hieruit volgt dat voor $\underline{\tau}$ geldt

(74) $$\mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)] \leq \mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] - r(i)$$

Daar $c(i) \geq c_0$ voor alle i volgt

$$\mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_n)] \geq \mathbb{E}_i[\sum_{n=0}^{\underline{\tau}-1} c_0]$$

$$= c_0\, \mathbb{E}_i[\underline{\tau}].$$

We substitueren dit in (74) en we gebruiken dat

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \leq r_0.$$

Dan volgt

(75) $$\mathbb{E}_i[\underline{\tau}] \leq \frac{r_0 - r(i)}{c_0} .$$

We zullen met een bewijs uit het ongerijmde aantonen dat ook voor $\underline{\tau}_\varepsilon$ de stoptijd behorende bij de ε-steunverzameling

$$\Gamma_\varepsilon = \{i: r(i) \geq v(i) - \varepsilon\}$$

relatie (73a) geldt. Stel dat voor i_0 relatie (73a) niet geldt dan volgt dat

$$r(i_0) > \mathbb{E}_{i_0}[r(\underline{x}_{\underline{\tau}_\varepsilon}) - \sum_{n=0}^{\underline{\tau}_\varepsilon-1} c(\underline{x}_n)]$$

$$\geq v(i_0) - \varepsilon,$$

de laatste ongelijkheid volgt uit relatie (49).
Hieruit volgt dat $i_0 \in \Gamma_\varepsilon$ en dus moet er volgens $\underline{\tau}_\varepsilon$ in i_0 gestopt worden.
Dit betekent dat de opbrengst voor i_0 als startpunt gelijk is aan $r(i_0)$.
Dit is in tegenspraak met de aanname.
Omdat relatie (73a) voor iedere $\underline{\tau}_\varepsilon$ met $\varepsilon > 0$ geldt, volgt er dat (75) voor iedere $\underline{\tau}_\varepsilon$ vervuld is. Met

$$\underline{\tau}_0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \underline{\tau}_\varepsilon$$

volgt hieruit dat ook de verwachting van $\underline{\tau}_0$ eindig is. Dit impliceert dat $\underline{\tau}_0$ eindig is met kans 1. Volgens stelling 4.3^* geldt dan dat $\underline{\tau}_0$ optimaal is.
Daar $v \geq r$ en de verwachte opbrengst van $\underline{\tau}_0$ gelijk aan v is wordt dus ook

voor $\underline{\tau}_0$ aan relatie (73a) voldaan.

Zij $\underline{\tau}_n = \min[\underline{\tau}_0, n]$.
v is de verwachte opbrengst van $\underline{\tau}_0$ en v_n is niet kleiner dan de verwachte opbrengst van $\underline{\tau}_n$ dus $v - v_n$ is kleiner dan of gelijk aan de verwachte opbrengst van $\underline{\tau}_0$ minus de verwachte opbrengst van $\underline{\tau}_n$. Met de relatie (72) en (73a) volgt dan

$$(76) \qquad v(i) - v_n(i) \leq (r_0 - c_0)\, \mathbb{P}_i[\underline{\tau}_0 > n].$$

Volgens [Feller] geldt

$$(77) \qquad \mathbb{E}_i[\underline{\tau}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_i[\underline{\tau} > n].$$

Omdat $\mathbb{P}_i[\underline{\tau} > n]$ monotoon niet-stijgend is volgt dan uit (75) en (77) dat

$$(78) \qquad \mathbb{P}_i[\underline{\tau} > n] \leq \frac{r_0 - r(i)}{(n+1)c_0}.$$

Door dit te substitueren in (76) vinden we

$$v(i) - v_n(i) \leq \frac{[r_0 - r(i)][r_0 - c_0]}{(n+1)\, c_0}.$$

Hiermee is deel ii) bewezen.
Zij N en $a < 1$ zó dat

$$(79) \qquad \frac{r_0 - r(i)}{(N+1)\, c_0} \leq a \qquad \text{voor alle } i.$$

Zij verder $\tilde{P}$ de Markovmatrix op $\Gamma_0^c \overset{\text{not}}{=} I \backslash \Gamma_0$ die we verkrijgen door P te beperken tot Γ_0^c. Dus

$$\tilde{p}(i,j) = p(i,j) \qquad \text{voor } i,j \in \Gamma_0^c.$$

De Markovmatrix $\tilde{P}$ beschrijft de beweging van het systeem zolang het systeem zich in Γ_0^c bevindt. Indien $\underline{\tau}_0 > n$ dan moet het systeem zich tot en met tijdstip n in Γ_0^c bevinden en dus geldt

$$\mathbb{P}_i[\underline{\tau}_0 > n] = \sum_j \tilde{p}^n(i,j).$$

Uit (78) en (79) volgt dan

$$\sum_j \tilde{p}^N(i,j) \leq a \qquad \text{voor alle } i.$$

Hieruit volgt voor $n > N$

$$\sum_j \tilde{p}^n(i,j) = \sum_{j,k} \tilde{p}^{n-N}(i,k)\, \tilde{p}^N(k,j)$$

$$\leq a \sum_k \tilde{p}^{n-N}(i,k).$$

Door deze relatie m maal toe te passen indien $n = mN + r$ met $0 \leq r < N$ vinden we dat

$$\sum_j \tilde{p}^n(i,j) \leq a^m.$$

En dus algemeen

(80) $\qquad \mathbb{P}_i[\underline{\tau}_0 > n] \leq a^{[n/N]} \qquad$ voor iedere i [1].

Volgens deze relatie is $\underline{\tau}_0$ exponentieel begrensd. Door (80) in (76) te substitueren vinden we

$$v(i) - v_n(i) \leq (r_0 - c_0)\, a^{[n/N]} \qquad \text{voor iedere } i.$$

v_n gaat dus exponentieel snel naar v. □

Uit het bewijs van de voorafgaande stelling is te zien dat niet alleen de stoptijd behorende bij Γ_0 exponentieel begrensd is maar ook iedere andere binnenkomsttijd die voldoet aan relatie (73a).
In [Breiman] wordt een stoptijd $\underline{\tau}$ stabiel genoemd indien de verwachte opbrengst behorende bij $\underline{\tau}_n = \min[\underline{\tau}, n]$ naar de verwachte opbrengst van $\underline{\tau}$ convergeert voor $n \to \infty$. Uit relatie (75) volgt dat $\underline{\tau}$ stabiel is, dus iedere $\underline{\tau}$ die aan (73a) voldoet is stabiel in de zin van Breiman.

---

[1] $[x]$ betekent het grootste gehele getal $\leq x$.

"ENTRANCE-FEE" PROBLEMEN

"Entrance-fee" problemen zijn optimaal stopproblemen waarvoor de opbrengstfunktie r identiek gelijk aan nul is. Deze problemen zijn dan pas interessant indien kostenfunktie c zowel positieve als negatieve waarden aanneemt. Immers indien $c \geq 0$ dan is onmiddellijk stoppen optimaal en indien $c \leq 0$ dan is nooit stoppen optimaal.
Toestanden waarvoor de kostenfunktie niet-positief is noemt men *gunstig*, omdat een volgend deel-spel negatieve kosten (negatieve "entrance-fee") heeft en dus gunstig is om te doen. Na dit deelspel kan altijd nog tot stoppen besloten worden.
Dus zolang we in de gunstige toestanden zijn kunnen we de opbrengst vergroten door verder te spelen. Indien we in de niet-gunstige toestanden terecht komen dan kan doorspelen ook gunstig zijn bijvoorbeeld als het systeem met grote kans weer in de gunstige toestanden zal terugkeren. Indien het echter onmogelijk is om vanuit de niet-gunstige toestanden in de gunstige te komen, dan moet een optimale strategie onmiddellijk stoppen als het systeem in de niet-gunstige toestanden terechtkomt. Dus de optimale stopverzameling is de verzameling van niet-gunstige toestanden. Hiermee is aangetoond.

stelling 5.6

Zij $r \equiv 0$ en $S = \{i: c(i) \geq 0\}$
indien

$$p(i,j) = 0 \qquad \text{voor } i \in S \text{ en } j \notin S$$

dan geldt dat de stoptijd met stopverzameling S optimaal is.

We hebben tot nu toe ingevoerd als optimaal stopprobleem het model 1, hiervoor geldt dat $c \equiv 0$. We zouden dit een *zuiver* optimaal stopprobleem kunnen noemen. Zojuist voerden we in de "*entrance-fee*" problemen, hiervoor is $r \equiv 0$. Het in paragraaf 1 ingevoerde model 2 is een combinatie van deze problemen, we zullen optimaal stopproblemen van model 2 maar *gemengde* problemen noemen.
In veel gevallen kan een "entrance-fee" probleem omgezet worden in een zuiver probleem en omgekeerd een zuiver probleem in een "entrance-fee" probleem.

stelling 5.7

i) Een "entrance-fee" probleem met kostenfunktie c kan in een zuiver probleem worden omgezet indien c een lading is.

ii) Een zuiver probleem met opbrengstfunktie r kan in een "entrance-fee" probleem worden omgezet indien r een potentiaal is.

iii) Een gemengd probleem kan in een zuiver probleem worden omgezet indien kostenfunktie c een lading is.

Een gemengd probleem kan in een "entrance-fee" probleem worden omgezt indien opbrengstfunktie r een potentiaal is.

bewijs

i) Zij $r(i) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j} p^n(i,j)\, c(j)$

Daar c een lading is, is dan r wel gedefinieerd en r is een potentiaal. Volgens lemma 2.2 geldt voor $\underline{\tau}$ een willekeurige Markovtijd dat

$$\text{(80a)} \qquad \mathbb{E}_i\, r(\underline{x}_{\underline{\tau}}) = \mathbb{E}_i[\sum_{k=\underline{\tau}}^{\infty} c(\underline{x}_k)]$$

$$= r(i) - \mathbb{E}_i \sum_{k=0}^{\underline{\tau}-1} [c(\underline{x}_k)].$$

Hieruit volgt dat een $\underline{\tau}$ die de kosten

$$\mathbb{E}_i[\sum_{k=0}^{\underline{\tau}-1} c(\underline{x}_k)] \qquad \text{"minimaliseert"}$$

de opbrengst

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \qquad \text{zal "maximaliseren"}$$

en omgekeerd.
Een optimale stoptijd $\underline{\tau}$ voor het "entrance-fee" probleem zal

$$\mathbb{E}_i[\sum_{k=0}^{\underline{\tau}-1} - c(\underline{x}_k)] \qquad \text{maximaal maken}$$

en dus ook

$$\mathbb{E}_i[r(\underline{x}_{\underline{\tau}})] \qquad \text{maximaal maken.}$$

Waaruit dan volgt dat $\underline{\tau}$ ook een optimale stoptijd is voor het <u>zuivere probleem met opbrengstfunktie r</u>.
Geheel analoog volgt dat als $\underline{\tau}$ optimaal t.o.v. het zuivere probleem dat $\underline{\tau}$ dan ook optimaal is t.o.v. het "entrance-fee" probleem.

ii) Zij $\quad c(i) = r(i) - \sum_j p(i,j)\, r(j)$

r is een potentiaal $\Longrightarrow$ c is een lading en r is de bijbehorende potentiaal. Hieruit volgt dat relatie (80a) weer geldig is. We voeren hier natuurlijk het "entrance-fee" probleem met kostenfunktie c in. De verdere argumentatie verloopt als onder i).

iii) Het bewijs van iii) volgt uit dat van i) en ii). □

Een gevolg van deze stelling is dat voor toestandsruimte E eindig en de Markovketen voorbijgaand ieder model in ieder ander model kan worden omgezet. Immers we stelden in paragraaf 2, relatie (18), dat voorbijgaand equivalent is met

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n(i,j) < \infty \qquad \text{voor alle i en j.}$$

Met E eindig impliceert dit dat iedere funktie zowel een potentiaal als een lading is.

In de volgende stelling zullen we stelling 5.6 generaliseren voor het gemengde model. In die gevallen waarin het probleem in een "entrance-fee" model kan worden omgezet volgt deze stelling dus uit stelling 5.6.

<u>stelling 5.8</u>

Veronderstel dat het optimaal stopprobleem met kostenfunktie c en opbrengstfunktie r stabiel is en dat er een optimale stoptijd bestaat.
Zij

$$S = \{i: c(i) - [\sum_j p(i,j)\, r(j) - r(i)] \geq 0\}$$

indien

$$p(i,j) = 0 \qquad \text{voor } i \in S \text{ en } j \notin S$$

dan geldt dat de stoptijd met stopverzameling S optimaal is.

bewijs

We zullen bewijzen dat

(81) $$v_n(i) = r(i) \qquad \text{voor } i \in S \text{ en alle } n \geq 0.$$

Voor n = 0 geldt $v_0 = r$ en dus is (81) zeker vervuld, neem aan (81) geldt voor n-1. Dan is voor $i \in S$

$$\begin{aligned} v_n(i) &= \max[r(i), -c(i) + \sum_j p(i,j)\, v_{n-1}(j)] \\ &= \max[r(i), -c(i) + \sum_{j\in S} p(i,j)\, v_{n-1}(j)] \\ &= \max[r(i), -c(i) + \sum_{j\in S} p(i,j)\, r(j)] \\ &= r(i) \qquad \text{(volgens de definitie van S)} \end{aligned}$$

Middels volledige inductie volgt dan (81). Uit de stabiliteit volgt dan ook

$$v(i) = \lim_{n\to\infty} v_n(i) = r(i) \qquad \text{voor } i \in S.$$

Hieruit volgt dat S in de steunverzameling Γ_0 ligt. Voor $i \notin S$ geldt

$$c(i) - [\sum_j p(i,j)\, r(j) - r(i)] < 0$$

$$\Longrightarrow -c(i) + \sum_j p(i,j)\, r(j) > r(i).$$

Dit betekent dat als i de begintoestand is stoppen na 1 periode (dit is het linkerlid van bovenstaande ongelijkheid) meer opbrengt dan onmiddellijk stoppen. Daar Γ_0 de verzameling is waar onmiddellijk stoppen de "maximale" opbrengst oplevert, volgt dan dat $i \notin \Gamma_0$. Hiermede is aangetoond dat S en Γ_0 samenvallen. Daar gegeven is dat stoppen in Γ_0 optimaal is, is dus ook stoppen in S optimaal. □

Uit de definitie van S is duidelijk dat S precies uit die toestanden bestaat waarvoor onmiddellijk stoppen beter is dan stoppen na 1 periode.

Dat de stelling 5.8 tot interessante toepassingen kan leiden dat toont het volgende voorbeeld.

VERKOOPPROBLEEM

Iemand wenst zijn huis te verkopen en krijgt iedere dag een bod op het huis binnen. We veronderstellen dat de geboden bedragen onderling onafhankelijk zijn en dezelfde kansverdeling hebben. Zij de kans op een geboden bedrag ter grootte van j gelijk aan p_j voor $j = 1,\dots,N$. We nemen aan dat een bod op het huis dat niet onmiddellijk geaccepteerd wordt niet verloren gaat maar op een later tijdstip nog geaccepteerd kan worden. Verder zijn er voor iedere dag dat het huis nog niet verkocht is onderhoudskosten ter grootte van een constant bedrag c. Voor de toestand op zeker tijdstip gebruiken we het tot dan toe grootste geboden bedrag.
Hieruit

$$p(i,j) = \begin{cases} 0 & j < i \\ \sum_{k=0}^{i} p_k & j = i \\ p_j & j > i \end{cases}$$

De verzameling S uit stelling 5.8 wordt

$$S = \{i\colon c - [i \sum_{k=0}^{i} p_k + \sum_{j=i+1}^{N} jp_j - i] \geq 0\}$$

$$(\text{met } i - i \sum_{k=0}^{i} p_k = \sum_{j=i+1}^{N} ip_j)$$

$$= \{i\colon c \geq \sum_{j=i+1}^{N} (j-i)\, p_j\}.$$

Daar $\sum_{j=i+1}^{N} (j-i)p_j$ monotoon niet-stijgend is in i vinden we dat

$$S = \{i^*, i^*+1, \dots, N\}$$

met

$$i^* = \min\{i\colon c \geq \sum_{j=i+1}^{N} (j-i)p_j\}.$$

Daar $p(i,j) = 0$ als $j < i$ volgt er dat

$$p(i,j) = 0 \qquad \text{voor } i \in S \text{ en } j \notin S.$$

Volgens stelling 5.4 is het probleem stabiel. Volgens stelling 5.5 is er een optimale strategie. Volgens stelling 5.8 is dan stoppen in S optimaal. "Optimaal-verkopen" betekent dus het eerste bod dat groter dan of gelijk aan i^* is, accepteren.

OPLOSSEN DOOR LINEAIRE PROGRAMMERING

Uit praktisch oogpunt waarschijnlijk de meest interessante oplossingstechniek bestaat eruit om van het bepalen van v een lineair programmeringsprobleem te maken.

stelling 5.9

De waarde van het spel v is de optimale oplossing van het lineair programmeringsprobleem

minimaliseer $\sum_j x(j)$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_j (\delta(i,j) - p(i,j))\, x(j) \geq -c(i) \quad ^{1)}$$

èn

$$x(i) \geq m(i)$$

met

$$m(i) = \max[r(i), -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_j p^n(i,j)\, c(j)].$$

bewijs

De optimale oplossing van het lineaire programmeringsprobleem is de kleinste c-excessieve majorant van r en volgens gevolg 3.1^* dus gelijk aan v. □

---

1)
$$\delta(i,j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

6. LITERATUUR

[Breiman]

L. *Breiman*; "Stopping-rule problems" in *Applied Combinatorial Mathematics*, E.F. Beckenbach (Editor), New York: John Wiley & Sons, Inc., 1964.

[Chow]

Y.S. Chow, H. Robbins, D. Siegmund; *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1971.

[Derman]

C. *Derman*; *Finite State Markovian Decision Processes*. New York: Academic Press, 1970.

[Dynkin]

E.B. Dynkin - A.A. Juschkewitsch; *Sätze und Aufgaben über Markoffsche Prozesse*. Berlin: Springer-Verlag, 1969.

[Feller]

W. Feller; *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume I. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1950.

[Kushner]

H. Kushner; *Introduction to Stochastic Control*. New York: Holt, Rinehart, and Winston, Inc., 1971.

[Ross]

S.M. Ross; *Applied Probability Models with Optimization Applications*. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1970.

HOOFDSTUK 2. DE MARTINRAND

§1. De Greense functie, potentialen en harmonische functies

1.

In het voorafgaande hoofdstuk hebben we gezien dat de klasse van de excessieve functies bij een Markov-keten een belangrijke rol speelt bij het optimaal stoppen van die keten. Deze klasse zullen we in dit hoofdstuk onderwerpen aan een nader onderzoek, dat zal leiden tot enkele karakteriseringen van de excessieve functies. Tijdens dat onderzoek zullen we stuiten op de Martin-rand van onze keten: een belangrijk begrip dat ook in andere delen van de theorie der Markov-ketens tevoorschijn komt.

In dit hoofdstuk *) zullen we steeds uitgaan van een Markov-keten $\{\underline{x}_n : n\in\mathbb{N}_0\}$ met aftelbare toestandsruimte E en overgangswaarschijnlijkheden $\{p(i,j): i,j\in E\}$, met voor elke $i \in E$

$$\sum_{j\in E} p(i,j) \leq 1.$$

We eisen verder dat alle toestanden doorgangstoestanden zijn, d.w.z. als voor $i \in E$

$$q(i) := \mathbb{P}_i[\underline{x}_n = i \text{ voor een } n\in\mathbb{N}] \tag{1}$$

de kans op terugkeer naar i voorstelt, dan luidt onze eis dat voor alle $i \in E$

$$q(i) < 1. \tag{2}$$

2. Notaties

In het vervolg zullen we vrijelijk gebruik maken van de volgende notaties: voor $n \in \mathbb{N}_0$, $i,j \in E$ is

$$p^{(n)}(i,j) := \mathbb{P}_i[\underline{x}_n = j]$$

---

*) $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$, $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$

de kans om, uitgaande van i in n stappen in j te komen. In het bijzonder is $p^{(1)}(i,j) = p(i,j)$ en $p^{(0)}(i,j) = \delta(i,j)$, waarbij δ Dirac's delta-functie is:

$$\delta(i,j) := \begin{cases} 1 & \text{als } i = j \\ 0 & \text{als } i \neq j \end{cases}$$

Evenzo is

$$\pi^{(n)}(i,j) := \mathbb{P}_i[\underline{x}_n = j \text{ en } \underline{x}_k \neq j \text{ voor alle } k \text{ met } 1 \leq k < n]$$

de kans om, uitgaande van i in n stappen voor het eerst in j te komen. Weer geldt $\pi^{(1)}(i,j) = p(i,j)$ en $\pi^{(0)}(i,j) = \delta(i,j)$. Verder definiëren we nog

$$\pi(i,j) := \mathbb{P}_i[\underline{x}_n = j \text{ voor een } n \in \mathbb{N}_0]$$

en

$$\pi_*(i,j) := \mathbb{P}_i[x_n = j \text{ voor een } n \in \mathbb{N}]$$

beide voorstellende de kans om, uitgaande van i, ooit in j te komen (alleen met twee verschillende betekenissen van 'ooit'). Merk op dat voor $i \neq j$ $\pi(i,j) = \pi_*(i,j)$, doch dat $\pi(i,i) = 1$, terwijl $\pi_*(i,i) = g(i) < 1$. Tenslotte zullen we nodig hebben

$$g(i,j) := \mathbb{E}_i\left(\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{\underline{x}_n = j\}}\right)$$

ofwel het verwachte aantal bezoeken aan j, uitgaande van i. De functie $g(.,.)$ op $E \times E$ heet de <u>Greense functie</u> van de Markov-keten.

3. Basisformules

De zojuist ingevoerde functies kunnen als volgt uitgedrukt worden in de overgangswaarschijnlijkheden van de Markov-keten: voor $n \in \mathbb{N}_0$ is

$$p^{(n+1)}(i,j) = \sum_{k \in E} p(i,k)\, p^{(n)}(k,j) \qquad (3)$$

zodat $p^{(n)}$ achtereenvolgens voor $n = 2,3,\ldots$ berekend kan worden; evenzo kan $\pi^{(n)}$ berekend worden, als we bedenken dat voor $n \in \mathbb{N}$

$$p^{(n)}(i,j) = \sum_{k=1}^{n} \pi^{(k)}(i,j)\, p^{(n-k)}(j,j) \tag{4}$$

terwijl π_* en g gevonden kunnen worden door

$$\pi_*(i,j) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi^{(n)}(i,j) \tag{5}$$

en

$$g(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(i,j). \tag{6}$$

Al deze formules kunnen worden verkregen door eenvoudige kansinterpretatie (cf. Feller I, pp. 383,388). Uit het feit dat alle toestanden doorgangstoestanden zijn, volgt (cf. Feller I, p. 389)

$$g(i,j) < \infty$$

voor alle $i,j \in E$.

4. Operatoren

Uit overwegingen van leesbaarheid zullen we nog enkele operatoren invoeren. Hier zullen we slechts operatoren A beschouwen die aan een functie $f: E \to \bar{\mathbb{R}}^+ = [0,\infty]$ een functie $Af: E \to \bar{\mathbb{R}}^+$ toevoegen. Zo is de identieke operator I gedefinieerd door $If := f$, terwijl de operator P aan een niet-negatieve functie f de functie Pf toevoegt met

$$Pf(i) := \sum_{j\in E} p(i,j)\, f(j).$$

Stellen we $P := I$, dan kunnen we de rij operatoren (P^n) als volgt definiëren:

$$P^{n+1}f := P(P^n f) \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}_0$$

dus, P^n is het n maal achtereen toepassen van P. Uit (3) volgt, dat P^n ook rechtstreeks gedefinieerd had kunnen worden door

$$P^n f(i) = \sum_{j\in E} p^{(n)}(i,j)\ f(j) \qquad \text{van } n \in \mathbb{N}_0.$$

Vervolgens definiëren we de operator G als

$$Gf := f + Pf + P^2 f + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} P^n f$$

zodat uit (6) volgt:

$$Gf(i) = \sum_{j\in E} g(i,j)\ f(j).$$

Merk op, dat de beschouwde sommen eindig dan wel oneindig mogen zijn. Met de toegepaste verwisselingen van sommaties hebben we geen moeilijkheden omdat alle beschouwde grootheden niet-negatief zijn (Fubini).

5. Definities

Na deze inleidende opmerkingen kunnen we beginnen aan het onderzoek van de klasse der excessieve functies. Zoals bekend, heet een functie $f: E \to \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$ *excessief* als $Pf \leq f$. Belangrijke voorbeelden van excessieve functies zijn potentialen en harmonische functies:

Een functie $h: E \to \mathbb{R}^+$ heet *harmonisch* als $Ph = h$.

Een functie $f: E \to \mathbb{R}^+$ heet een *potentiaal* als er een functie $\phi: E \to \mathbb{R}^+$ bestaat met $f = G\phi$.

Is f een potentiaal, dan bestaat er precies één functie $\phi: E \to \mathbb{R}^+$ met $f = G\phi$. Immers, als $f = G\phi$, dan volgt met Fubini $Pf = P(G\phi) = G\phi - \phi = f - \phi$, of $\phi = f - Pf$, zodat ϕ eenduidig bepaald is. Deze ϕ heet de *lading* behorende bij f.

6. Opmerkingen

Daar '=' sterker is dan '$\leq$', is elke harmonische functie excessief. Ook potentialen zijn excessief; immers, is $f = G\phi$ een potentiaal dan is $Pf = f - \phi \leq f$.

Vanzelfsprekend is de som van twee excessieve functies weer excessief; in het bijzonder is dus de som van een potentiaal en een harmonische functie excessief. Het zal nu echter blijken, dat ook omgekeerd elke excessieve functie de som is van een potentiaal en een harmonische functie. Dit leidt tot de eerste representatiestelling voor excessieve functies.

7. Stelling

Elke excessieve functie f is te schrijven als som van een potentiaal $G\phi$ en een harmonische functie h

$$f = G\phi + h \; ; \tag{7}$$

bovendien is deze schrijfwijze uniek, terwijl ϕ en h gegeven worden door

$$\phi = f - Pf \tag{8}$$

en

$$h = \lim_{n\to\infty} P^n f. \tag{9}$$

Bewijs

a) We bewijzen eerst de uniciteit: als f te schrijven is volgens (7) met $\phi \geq 0$ en h harmonisch, dan is noodzakelijkerwijs

$$Pf = P(G\phi + h) = PG\phi + Ph = G\phi - \phi + h = f - \phi$$

zodat ϕ en dus ook $G\phi$ en h vastliggen (en tevens (8) bewezen is).

b) Vervolgens bewijzen we de eerste bewering van de stelling. Neem ϕ volgens (8). Dan is $\phi \geq 0$, daar f excessief is. We hebben nu $f = \phi + Pf$, zodat voor $n \in \mathbb{N}_0$ $P^n f = P^n\phi + P^{n+1} f$, en dus

$$f = \sum_{k=0}^{n} P^n\phi + P^{n+1} f \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}_0. \tag{10}$$

Uit deze afleiding volgt allereerst, dat voor alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$P^{n+1} f \leq P^n f \tag{11}$$

zodat de rij $(P^n f)$ een eindige niet-negatieve limiet heeft, zeg h. Tevens volgt hieruit dat $G\phi = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} P^k\phi$ eindig is. Nemen we in (10) aan beide kanten van het gelijkteken de limiet, dan krijgen we (7). Nog aangetoond moet worden, dat h harmonisch is: $Ph = P(\lim_{n\to\infty} P^n f) = \lim_{n\to\infty} P^{n+1} f = h$, waarbij het tweede gelijkteken een gevolg is van de gemajoreerde convergentiestelling: $0 \leq P^n f \leq f$, wegens (11). □

8. Gevolg

Is f excessief dan geldt

$$f \text{ is een potentiaal} \iff P^n f \to 0 \text{ voor } n \to \infty.$$

Bewijs: volgt onmiddellijk uit bovenstaande stelling. □

Met behulp van het lemma van Fatou ($f_n \geq 0 \Longrightarrow \int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$) kunnen we gemakkelijk inzien,,dat de limiet van een rij excessieve functies weer excessief is. In het bijzonder is dus de limiet van een rij potentialen excessief. Ook dit geldt echter weer omgekeerd: elke excessieve functie is te schrijven als limiet van een rij potentialen. Voor het bewijs hebben we het volgende lemma nodig:

9. Lemma

Het minimum van een potentiaal en een excessieve functie is een potentiaal.

Bewijs

We bewijzen eerst dat het minimum f van twee excessieve functies f' en f'' weer excessief is: $Pf = P(\min(f',f'')) \leq \min(Pf',Pf'') \leq \min(f',f'') = f$; is nu f' een potentiaal, dan moeten we aantonen dat ook f een potentiaal is. We doen dit met het criterium uit Gevolg 8.

$$0 \leq P^n f = P^n(\min(f',f'')) \leq P^n f' \to 0 \quad \text{voor } n \to \infty. \quad \square$$

10. Stelling

Is f excessief, dan bestaat er een niet-dalende rij potentialen $(G\phi_n)$ met

$$f = \lim_{n\to\infty} G\phi_n.$$

Bewijs

Zij (B_n) een rij eindige deelverzamelingen van E met $B_n \subset B_{n+1}$ en $\cup B_n = E$. Dan is voor elke n $G\chi_{B_n}(i) = \sum_{j\in B_n} g(i,j) < \infty$, zodat $nG\chi_{B_n}$ een potentiaal is, en dus ook, wegens lemma 9

$$f_n = \min(nG\chi_{B_n}, f).$$

Wegens $B_n \subset B_{n+1}$, is de rij (f_n) niet-dalend. Bij vaste $i \in E$ geldt voor n voldoende groot $f_n(i) = f(i)$, immers voor n voldoende groot is

$$nG\chi_{B_n}(i) = n \sum_{j \in B_n} g(i,j) \geq ng(i,i) \geq n \to \infty$$

dus $f_n \to f$. □

§2. De Martin-rand

1. Aanname

Voor het vervolg van ons verhaal hebben we in onze Markov-keten minstens een toestand nodig, van waaruit alle andere toestanden bereikbaar zijn. We veronderstellen dus, dat voor zekere toestand, zeg $0 \in E$, geldt

$$\pi(0;j) > 0 \qquad \text{voor alle } j \in E, \tag{1}$$

zodat ook $g(0,j) > 0$ voor elke $j \in E$ (zie (1.5) en (1.6)). Deze aanname garandeert ons dat de volgende definitie zinvol is.

2. Definitie

De functie $k: E \times E \to \mathbb{R}^+$, gegeven door

$$k(i,j) := \frac{g(i,j)}{g(0,j)}$$

heet de Martin-kern van de Markov-keten. Voor vaste $j \in E$, zullen we de functie $k(.,j)$ op E aangeven met k_j.

Nu we de Martin-kern gedefinieerd hebben kunnen we ons doel nader toelichten: het gaat erom de excessieve functies te schrijven als integralen over deze Martin-kern, in een nader te preciseren zin. Voor het speciale geval van potentialen is deze representatie niet moeilijk in te zien; we beginnen daarom met dit speciale geval.

3. Stelling

Elke potentiaal $f = G\phi$ is te schrijven als

$$f(i) = \int_E k(i,j)\, d\mu(j) \tag{2}$$

voor precies één eindige maat μ op E. Deze maat wordt gegeven door

$$\mu(j) = g(0,j)\, \phi(j) \qquad \text{voor } j \in E.$$

Omgekeerd definieert (2) voor elke eindige maat μ op E een potentiaal f. Verder is $\mu(E) = f(0)$.

Bewijs

Bij nadere beschouwing blijkt in (2) niets anders te staan dan $f = G\phi$. Voor de derde bewering behoeven we alleen aan te tonen dat het rechterlid van (2) eindig is bij eindige μ. Die volgt uit de afschatting voor k in het bewijs van Stelling 10. □

4. Opmerking

De functie k_j uit Definitie 2 is juist de potentiaal die resulteert wanneer we in (2) de maat μ massa 1 in het punt j geven en overal elders massa 0. Dus k_j is een potentiaal met lading geconcentreerd in j. Hieruit volgt onmiddellijk, dat de afbeelding $j \mapsto k_j$ een 1-1 correspondentie vastlegt tussen E en de functies $\{k_j : j \in E\}$.

5. Definities

Zij nu

$$E^* := \{k_j : j \in E\}$$

en

$$K := \{y : y = \lim_{n\to\infty} k_{j_n} \text{ voor een rij } (j_n) \text{ met } j_n \in E\}.$$

De elementen van K zijn dus die functies op E, welke te schrijven zijn als limiet van een rij functies uit E^*. In het bijzonder is elke $k_j \in K$ (neem maar $j_n = j$ voor elke n), zodat $E^* \subset K$. De verzameling

$$B := K - E^*$$

heet nu de Martin-rand van de Markovketen.

6. Opmerking

Door de 1-1 correspondentie uit Opmerking 4 is de toestandsverzameling E op natuurlijke wijze ingebed in K. In deze zienswijze is K een uitbreiding van E: de elementen van B zijn dan nieuwe "toestanden" toegevoegd aan de oude toestandsruimte E.

7. Definitie

We definiëren de functie $\tilde{k}$: $E \times K \to \mathbb{R}^+$ als volgt:

$$\tilde{k}(i,y) := y(i) \qquad \text{voor } i \in E,\ y \in K.$$

De functie $\tilde{k}$ is in de volgende zin op te vatten als een uitbreiding van de Martin-kern.

Als $j \in E$ en $y = k_j$ het bijbehorende element uit E^*, dan geldt voor alle $i \in E$

$$\tilde{k}(i,y) = k(i,j). \tag{3}$$

We kunnen nu iets preciezer het doel van ons huidige betoog omschrijven: het gaat erom, voor excessieve functies f een representatie van de vorm (2) te vinden, waarbij echter E vervangen moet worden door K, en boven k een slang gezet moet worden. Dit doel zal echter pas in de volgende paragraaf bereikt worden. Eerst zullen we nog wat eigenschappen van K, B en $\tilde{k}$ af moeten leiden.

8. Stelling

K is begrensd. N.l. als $y \in K$, dan geldt voor alle $i \in E$

$$0 \le y(i) \le \frac{1}{\pi(0,i)}.$$

Voor het bewijs maken we gebruik van het volgende lemma.

9. Lemma

Voor alle $i,j \in E$ geldt

(a) $g(i,j) = \pi(i,j)\, g(i,j)$ en $g(i,i) = \dfrac{1}{1 - q(i)}$

(b) $\pi(0,j) \geq \pi(0,i)\ \pi(i,j)$.

Bewijs

(a) Voor willekeurige $i,j \in E$ hebben we

$$g(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(i,j) = \delta(i,j) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi^{(k)}(i,j)\ p^{(n-k)}(j,j) =$$

$$= \delta(i,j) + \sum_{k=1}^{\infty} \pi^{(k)}(i,j) \sum_{n=k}^{\infty} p^{(n-k)}(j,j) =$$

$$= \delta(i,j) + \pi_*(i,j)\ g(j,j);$$

de beweringen volgen nu met gebruikmaking van $\pi(i,i) = 1$, $\pi_*(i,i) = q(i)$ en als $i \neq j$, $\pi_*(i,j) = \pi(i,j)$.

(b) Zij $A := \{\underline{x}_n = j$ voor een $n \in \mathbb{N}\}$ en $B := \{\underline{x}_m = i$ en $\underline{x}_n j$ voor zekere $m,n \in \mathbb{N}$ met $m < n\}$; dan is duidelijk $B \subset A$, zodat $\mathbb{P}_0[B] \leq \mathbb{P}_0[A]$. Nu is per definitie $\pi_*(0,j) = \mathbb{P}_0[A]$, terwijl

$$\mathbb{P}_0[B] = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}_0[B \mid \underline{x}_m = i]\ \pi^{(m)}(0,i) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \pi_*(i,j)\ \pi^{(m)}(0,i) = \pi_*(0,i)\ \pi_*(i,j).$$

Mét sterren is (b) nu bewezen. Door de gevallen $0 = i$, $0 = j$ en $i = j$ te beschouwen, zien we dat de sterren ook weggelaten kunnen worden. □

10. Bewijs van stelling 8

Het is voldoende te bewijzen dat de bewering geldt voor de functies in E^*. Immers, als hij voor deze functies geldt, dan ook voor hun limieten. Voor willekeurige $i,j \in E$ is, wegens lemma 9,

$$0 \leq k_j(i) = k(i,j) = \frac{g(i,j)}{g(0,j)} = \frac{\pi(i,j)}{\pi(0,j)} \leq \frac{1}{\pi(0,i)}$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit (a) en de laatste ongelijkheid uit (b). □

11. Opmerking

We willen vervolgens aantonen, dat K compact is. Om deze bewering inhoud te geven hebben we natuurlijk een topologie nodig voor de ruimte der reële functies op E. We nemen hiervoor de topologie der puntsgewijze convergentie. K is nu de afsluiting van E^* in deze topologie. Om aan te tonen dat K compact is in deze topologie, zullen we laten zien dat K rijtjescompact is. In metrische ruimten zijn deze twee begrippen equivalent; dus we zijn klaar, als onze topologie metrizeerbaar blijkt. De lezer wordt uitgenodigd na te gaan, dat in ons geval als metriek genomen kan worden

$$\rho(y,y') := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(0,i_n)}{2^n} \left|y(i_n) - y'(i_n)\right| \qquad \text{voor } y,y' \in K$$

waarbij $i_1, i_2, \ldots$ een aftelling is van de elementen uit E. Wordt in het vervolg impliciet een topologie op de ruimte der reële functies op E verondersteld, dan bedoelen we steeds de bovenstaande.

12. Stelling

K is compact.

Bewijs

Zij weer $i_1, i_2, \ldots$ een aftelling van E, en zij (y_n) een willekeurige rij functies uit K. We moeten aantonen, dat (y_n) een convergente deelrij (z_n) bezit met $z = \lim z_n \in K$. Wegens Stelling 8 is het mogelijk een deelrij $(y_n^{(1)})$ van (y_n) te vinden waarvoor $(y_n^{(1)}(i_1))$ convergeert. Evenzo kunnen we een deelrij $(y_n^{(2)})$ van $(y_n^{(1)})$ construeren, waarvoor $(y_n^{(2)}(i_2))$ convergeert, etc. Zij nu $z_n := y_n^{(n)}$. Dan is (z_n) een deelrij van (y_n), puntsgewijs convergent, en, wegens de geslotenheid van K, met limiet in K. $\square$

13. Opmerking

Voor elke $i \in E$ is de functie $\tilde{k}(i,.)$ op K continu. Immers, als $y_n \to y$, dan ook $\tilde{k}(i,y_n) \to \tilde{k}(i,y)$, zoals onmiddellijk uit de definitie van $\tilde{k}$ volgt.

Als limieten van excessieve functies (n.l. van potentialen) zijn de functies uit $K = E^* \cup B$ vanzelfsprekend weer excessief. De functies uit E^* zijn potentialen (zie Opm. 4); en zoals we later zullen zien bevat B (indien niet leeg) altijd harmonische functies. Hoewel dit voor de rest van ons betoog niet nodig is, zullen we nu laten zien, dat in een speciaal geval alle functies uit B harmonisch zijn, n.l. in het geval dat vanuit elke toestand in één stap slechts eindig veel toestanden bereikbaar zijn.

14. Stelling

Als voor elke $i \in E$ de verzameling $\{j \in E: p(i,j) > 0\}$ eindig is, dan bevat B slechts harmonische functies.

Bewijs

Zij $y \in B$ willekeurig, d.w.z. $y = \lim_{n\to\infty} k_{j_n}$ van een rij (j_n) uit E, doch $y \notin E^*$. Uit dit laatste volgt, dat voor elke $i \in E$ $\chi_{\{j_n\}}(i) = 0$ voor n voldoende groot. Immers, ware dit niet het geval, dan zou $j_n = i$ voor oneindig veel $n \in N$ gelden, zodat dan $y = k_i$ zou zijn, hetgeen uitgesloten is. Uit Opm. 4 volgt nu, dat voor elke n

$$Pk_{j_n} = k_{j_n} - c_n \chi_{\{j_n\}}$$

voor een positieve constante c_n, zodat er volgt

$$Py = P(\lim k_{j_n}) = \lim Pk_{j_n} = \lim k_{j_n} = y,$$

waarbij het tweede gelijkteken geldt wegens het feit dat, onder het gegeven van de stelling, de operator P slechts eindige sommen oplevert. □

15. Opmerking

Uit het bewijs blijkt dat de volgende iets sterkere bewering ook geldt: Als voor zekere $i \in E$ de verzameling $\{j \in E: p(i,j) > 0\}$ eindig is, dan geldt voor elke $y \in B$

$$Py(i) = y(i).$$

§3. De tweede representatiestelling

Nu de verzameling K, de Martin-rand B en de gegeneraliseerde Martinkern $\tilde{k}$ ingevoerd zijn, en de benodigde eigenschappen afgeleid, kunnen we komen tot de in de vorige paragraaf aangekondigde representatiestelling voor de excessieve functies. In het bewijs van deze stelling zullen we echter twee bekende resultaten uit de Lineaire Analyse aanroepen; voor het gemak van de lezer zullen we beide stellingen, echter zonder bewijs, vooraf laten gaan aan het resultaat waarom het ons gaat. Het zijn de representatiestelling van RIESZ en de HAHN-BANACH-stelling.

1. Definitie

Zij L een reële lineaire ruimte. Een functie $t: L \to \mathbb{R}$ heet een ijkfunctie als

(i) $t(x+y) \leq t(x) + t(y)$ voor alle $x,y \in L$

(ii) $t(\alpha x) = \alpha t(x)$ voor $\alpha \geq 0$ en $x \in L$.

Zoals bekend, heet een functie $f: L \to \mathbb{R}$ lineair als $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ voor alle $x,y \in L$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Lineaire functies op een lineaire ruimte heten ook wel lineaire functionalen. Een hypervlak H in L is een verzameling van de vorm $H_\alpha = \{x \in L: f(x) = \alpha\}$, waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$ en $f \not\equiv 0$ een lineaire functionaal op L. Het is duidelijk, dat $0 \in H_\alpha \iff \alpha = 0$.

2. Stelling (Hahn-Banach)

Zij L een reële lineaire ruimte en M een deelruimte van L. Zij t een ijkfunctie op L en f een lineaire functionaal op M met $f(x) \leq t(x)$ voor alle $x \in M$. Dan bestaat er een lineaire functionaal f^* op L met $f = f^*$ op M en $f^*(x) \leq t(x)$ voor alle $x \in L$.

Bewijs

Zie b.v. MUNROE, Introduction to Measure and Integration, p. 56. □

3. Definitie

Is K een compacte metrische ruimte, laat dan C(K) de ruimte der continue reële functies op K zijn. Een lineaire functionaal l op een functie-ruimte L heet positief als $l(f) \geq 0$ voor alle $f \in L$ met $f(x) \geq 0$ voor elke x.

4. Stelling (Riesz)

Bij elke positieve lineaire functionaal l op $C(K)$ bestaat een Borelmaat μ op K zódat voor elke $f \in C(K)$

$$l(f) = \int_K f \, d\mu. \tag{1}$$

Bewijs

Zie b.v. HALMOS, Measure theory, p. 247. □

5. Opmerkingen

De functie $f \equiv 1$ op K is continu. Substitueren we deze f in (1), dan vinden we als nevenresultaat $\mu(K) < \infty$.

Wij formuleren de stelling van Riesz minder algemeen dan hij in Halmos staat: bij Halmos behoeft K slechts een lokaal-compact Hausdorff ruimte te zijn. Wij zullen de stelling echter gebruiken in bovenstaande vorm. Van nu af, is K weer de in §2 ingevoerde verzameling.

6. Stelling

Elke excessieve functie f is te schrijven als

$$f(i) = \int_K k(i,y) \, d\mu(y) \tag{2}$$

voor een eindige Borelmaat μ op K. Omgekeerd definieert (2) voor zo'n maat μ een excessieve functie f. Verder is $f(0) = \mu(K)$.

Bewijs

De tweede bewering volgt onmiddellijk uit het feit dat een mengsel van excessieve functies weer excessief is (Fubini). We bewijzen nu de eerste bewering.

Zij f een willekeurige excessieve functie. Volgens St. 1.10 is f dan de limiet van een rij potentialen $(G\phi_n)$, ofwel met St. 2.3 en Def. 2.7

$$f(i) = \lim_{n\to\infty} \int_E k(i,j) \, d\mu_n(j) = \lim_{n\to\infty} \int_{E^*} \tilde{k}(i,y) \, d\mu_n^*(y),$$

waarbij $\mu_n^*(y) = \mu_n(j)$ als y en j de met elkaar corresponderende elementen uit resp. E^* en E zijn; nemen we $\mu_n^*(B) = 0$, en noemen we μ_n^* weer μ_n dan krijgen we de representatie

$$f(i) = \lim_{n\to\infty} \int_K \tilde{k}(i,y)\, d\mu_n(y) \tag{3}$$

voor een rij maten (μ_n) op K.

We beschouwen nu de lineaire ruimte C(K) van de continue functies op K. Wegens Opm. 2.13 is voor elke $i \in E$: $\tilde{k}(i,.) \in C(K)$.

Zij verder M de lineaire deelruimte van C(K) bestaande uit die continue functies $c \in C(K)$ waarvoor $\lim_{n\to\infty} \int_K c\, d\mu_n$ bestaat. Uit (3) volgt dat voor elke $x \in E$

$$\tilde{k}(i,.) \in M.$$

We definiëren nu op M de volgende lineaire functionaal l:

$$l(c) := \lim_{n\to\infty} \int_K c\, d\mu_n \qquad \text{voor } c \in M.$$

Op C(K) definiëren we de ijkfunctie t aldus:

$$t(c) := \sup_{n\in N} \int_K c\, d\mu_n \qquad c \in C(K).$$

Dat dit supremum altijd eindig is zien we als volgt in

$$\int_K c\, d\mu_n \leq \int_K |c|\, d\mu_n \leq \mu_n(K).\max_{y\in K} |c(y)| = G\phi_n(0).\max_{y\in K} |c(y)|$$

waarbij het laatste gelijkteken volgt uit de laatste bewering in St. 2.3. De eindigheid van het supremum volgt nu uit $G\phi_n \to f$.

Het is gemakkelijk na te gaan, dat t een ijkfunctie is. Vanzelfsprekend is $l \leq t$ op M. Volgens de Hahn-Banach stelling is er dus een uitbreiding l^* van l op C(K) met $l^* \leq t$ op C(K). We bewijzen dat de lineaire functionaal l^* positief is: als $c \geq 0$, dan is volgens de definitie van t $t(-c) \leq 0$, zodat $l^*(c) = -l^*(-c) \geq -t(-c) \geq 0$.

Volgens de stelling van Riesz bestaat er nu een eindige Borelmaat μ op K met voor alle $c \in C(K)$: $l^*(c) = \int_K c\, d\mu$. Nemen we in het bijzonder voor

$c = \tilde{k}(i,.)$, dan krijgen we de gewenste representatie. □

7.

In het algemeen is de maat μ op K behorende bij een excessieve functie f niet eenduidig bepaald. Bovendien is het verband tussen de zojuist afgeleide representatie en die uit St. 1.7 onduidelijk. Deze kwesties zullen we bespreken in de volgende paragrafen.

§4. De theorie van Choquet

Zoals aangekondigd in de vorige paragraaf, willen we nu een integraalvoorstelling voor excessieve functies verkrijgen, zó dat bij elke excessieve functie f precies een maat μ bestaat met $f = \int \tilde{k} d\mu$. Om dit te bereiken moeten we natuurlijk de klasse van te beschouwen maten inperken. Wij zullen dit doen door in plaats van alle maten op K alleen maten op een zekere deelverzameling van K te beschouwen. We zullen echter eerst in deze paragraaf de hiervoor benodigde theorie uiteenzetten, die dan in de volgende paragraaf toegepast zal worden op het zojuist geschetste probleem.

1. Definities

Een verzameling S heet partieel geordend als in S een relatie $\leq$ is gedefinieerd die reflexief, transitief en anti-symmetrisch is:

$x \leq x$ (reflexiviteit)

$x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (transiviteit)

$x \leq y,\ y \leq x \Longrightarrow x = y$ (anti-symmetrie).

Twee partieel geordende verzamelingen S en S' heten isomorf als er een 1-1-correspondentie $x \longleftrightarrow x'$ bestaat tussen de elementen van S en S' zó dat $x \leq y \Longleftrightarrow x' \leq y'$.

Laten x en y twee elementen van een partieel geordende verzameling S zijn. Een element $z \in S$ heet dan een grootste ondergrens van x en y als

(i) $z \leq x$ en $z \leq y$

(ii) $u \leq x$ en $u \leq y \Longrightarrow u \leq z$ voor alle $u \in S$.

Analoog definiëren we een kleinste bovengrens.

Uit de anti-symmetrie volgt, dat een grootste ondergrens (resp. kleinste bovengrens), als hij bestaat, uniek is.

Een partieel geordende verzameling S heet een rooster als elk tweetal elementen van S een kleinste bovengrens en een grootste ondergrens heeft.

2. Definities

Zij L een lineaire ruimte. Een deelverzameling X van L heet convex als voor elk tweetal elementen $x_1, x_2 \in X$ ook elke convexe combinatie $p_1x_1 + p_2x_2$ van x_1 en x_2 ($p_1, p_2 > 0$, $p_1+p_2 = 1$), een element is van X.

Een punt $x \in X$ heet een extremaal punt van X als uit $x = p_1x_1 + p_2x_2$ met $x_1, x_2 \in X$, $p_1, p_2 > 0$, $p_1+p_2 = 1$ volgt dat $x = x_1 = x_2$.

De verzameling van extremaalpunten van X zullen we aanduiden met $\mathcal{E}(X)$.

Een deelverzameling C van L heet een kegel als $\rho x \in C$ voor alle $\rho \geq 0$ en $x \in C$.

Een kegel C heet een echte kegel als $C \cap (-C) = \{0\}$.

Is X een willekeurige deelverzameling van L, dan is $\Gamma(X) := \{\rho x\colon \rho \geq 0,\ x \in X\}$ een kegel. $\Gamma(X)$ heet de kegel voortgebracht door X.

3. Opmerkingen

Het is eenvoudig na te gaan dat een kegel C convex is als voor elke $x,y \in C$ ook $x+y \in C$.

Als X convex is, is ook $\Gamma(X)$ convex. Is bovendien $0 \notin X$, dan is $C(X)$ een convexe echte kegel.

Op een convexe echte kegel C laat zich op natuurlijke wijze een partiële ordening definiëren, n.l.

$$x \leq y \quad \text{als} \quad y-x \in C.$$

(Ga na, dat $\leq$ de benodigde eigenschappen heeft.) Deze ordening van C heet z'n natuurlijke ordening. Waar in het vervolg op een echte konvexe kegel een ordening verondersteld is, bedoelen we deze.

Opdat een convexe echte kegel C een rooster is, is het reeds voldoende dat elk tweetal elementen een grootste ondergrens bezit. Immers, is $z \in C$ de grootste ondergrens van x en y, dan is $x+y-z \in C$ de kleinste bovengrens van x en y. (Ga na.)

4. Definitie

We gaan nu het begrip simplex invoeren voor een algemene lineaire ruimte.

Zij X een convexe verzameling in een lineaire ruimte L. Laat $\tilde{X}$ de kegel in $\mathbb{R} \times L$ zijn, voortgebracht door $\{1\} \times X$, dus

$$\tilde{X} := \Gamma(\{1\}\times X).$$

Omdat $0 \notin \{1\} \times X$, is $\tilde{X}$ een convexe echte kegel. Nu heet X een <u>simplex</u>, als $\tilde{X}$ een rooster is.

5. <u>Opmerking</u>

Als X ligt in een hypervlak dat niet door nul gaat, dan is $\tilde{X}$ isomorf met $\Gamma(X)$. In zo'n geval is X dus een simplex als $\Gamma(X)$ een rooster is.

We kunnen nu de stelling formuleren waar het ons om gaat.

6. <u>Stelling</u> (Choquet)

Zij X een convexe compacte deelverzameling van een metrische lineaire ruimte L en zij $x \in X$. Dan bestaat er een kansmaat μ op $\mathcal{B}(X)$, zó dat voor elke continue lineaire functionaal f op L

$$f(x) = \int f \, d\mu.$$

Voor elke $x \in X$ bestaat een unieke kansmaat met deze eigenschap dan en slechts dan als X een simplex is.

<u>Bewijs</u>

Zie Robert R. Phelps, Lectures on Choquet's Theorem. □

(Een kansmaat op een metrische ruimte X is een maat μ op de Borelverzamelingen van X met $\mu(X) = 1$. De Borelverzamelingen van X vormen een σ-algebra van deelverzamelingen van X n.l. de kleinste σ-algebra die alle open verzamelingen bevat.)

§5. <u>De derde representatie-stelling</u>

In deze paragraaf zullen we de theorie van Choquet toepassen en komen tot de laatste representatie-stelling voor excessieve functies. We doen dit door eerst de harmonische functies te karakteriseren.

1. Definities

Zij $V := \{f\colon f$ excessief en $f(0) = 1\}$ en $H := \{h \in V\colon h$ harmonisch$\}$. Definiëren we op de lineaire ruimte van functies $y\colon E \to \mathbb{R}$ voor elke i de continue lineaire functionaal l_i als $l_i(y) := y(i)$, dan zien we dat V en H in het hypervlak $\{y\colon l_0(y) = 1\}$ liggen.

2. Opmerking

V en H zijn convex en compact.
Immers, de convexiteit en geslotenheid zijn triviaal, en uit St. 3.6 en St. 2.8 volgt voor $f \in V$:

$$f(i) \leq \frac{f(0)}{\pi(0,i)} = \frac{1}{\pi(0,i)} ,$$

zodat op dezelfde manier als in het bewijs van St. 2.12 de compactheid volgt.

3. Opmerking

Elke excessieve functie $g \not\equiv 0$ kan geschreven worden in de vorm $g = cf$ voor precies een $c > 0$ en $f \in V$.
Immers, uit St. 3.6 volgt: als voor een excessieve functie g $\;g(0) = 0$, dan is ook voor elke bijbehorende μ op K $\;\mu(K) = 0$ zodat $f \equiv 0$. Hieruit volgt de existentie van c en f. De eenduidigheid volgt uit $g(0) = cf(0) = c$.

4. Gevolg

$\Gamma(V)$ is de verzameling van excessieve functies. $\Gamma(H)$ is de verzameling der harmonische functies. Beide zijn dus convexe echte kegels.

5. Stelling

H is een simplex.

Bewijs

Volgens Opm. 4.5 behoeven we slechts aan te tonen dat de kegel $\Gamma(H)$ der harmonische functies een rooster is. De natuurlijke ordening op $\Gamma(H)$ is: $h \leq h'$ puntsgewijs. (Ga na.) Volgens de laatste opmerking uit 4.3 moeten we nu bij elk tweetal harmonische functies h_1 en h_2 een harmonische grootste ondergrens h aangeven. Uit het bewijs van lemma 1.9 blijkt dat $\min(h_1,h_2)$ excessief is, zeg $G\phi + h$. We zullen aantonen dat deze h voldoet.

(i) $h \leq G\phi + h = \min(h_1,h_2)$;

(ii) Zij $h' \leq G\phi + h$ willekeurig, dan moeten we bewijzen dat $h' \leq h$; zij nu $f := G\phi + h - h'$, dan is $f \geq 0$ en $Pf \leq f$, dus f is excessief, dus te schrijven als som van een potentiaal en een harmonische functie; deze laatste wordt in dit geval $h - h' \geq 0$, dus $h' \leq h$. □

6. Stelling

Elke harmonische functie h is te schrijven als

$$h(i) = \int 1_i(y)\, d\mu(y) \tag{1}$$

voor precies een eindige Borelmaat μ op $\mathcal{E}(H)$.

Bewijs

Nemen we in stelling 4.6 $X = H$ en $f = 1_i$ dan krijgen we de representatie (1) voor functies $h \in H$. Tezamen met opmerking 3 geeft dit de stelling. □

7. Opmerking

Hoewel de representatie (1) ook op zichzelf al interessant is, wordt de samenhang met de vorige karakteriseringen pas gelegd door de nu volgende ontwikkelingen: het blijkt namelijk dat de punten van $\mathcal{E}(H)$, de extreem-harmonische functies dus, zich alle in de Martin-rand bevinden. Als aanloop voor het bewijs van deze bewering eerst twee lemma's.

8. Lemma

$\mathcal{E}(V) \subset K$.

Bewijs

Zij f een extremaalpunt van V. Volgens St. 3.6, is er een maat μ op K met $f(i) = \int k(i,y)\, d\mu(y)$ met $\mu(K) = f(0) = 1$. Wegens de compactheid van K moet er een $z \in K$ zijn zodat voor elke open omgeving $U \subset K$ van z $\mu(U) > 0$.

Immers, ware dit niet het geval, dan zouden er eindig veel U's zijn die K overdekken met voor elke U $\mu(U) = 0$, zodat dan $\mu(K) = 0$ zou zijn, hetgeen niet waar is.

Als $\mu(U) = 1$ voor elke omgeving $U \subset K$ van z, dan is $\mu(\{z\}) = 1$, zodat dan $f = z \in K$ geldt, en we klaar zijn. Als $\mu(U) < 1$ voor een U, dan kunnen we f ook schrijven als

$$f(i) = \mu(U) \int_U \frac{\tilde{k}(i,y)}{\mu(U)}\, d\mu(y) + (1-\mu(U)) \int_{K\setminus U} \frac{\tilde{k}(i,y)}{\mu(U)}\, d\mu(y).$$

Beide integralen zijn, als functies van i, element van V, dus uit het feit dat f extremaal is volgt

$$f(i) = \int_U \frac{k(i,y)}{\mu(U)}\, d\mu(y).$$

Laten we U inkrimpen tot $\{z\}$, dan vinden we $f(i) = \tilde{k}(i,z) = z(i)$, zodat $f \in K$. □

9. Lemma

$E^* \subset \mathcal{E}(V)$.

Bewijs

Volgens Opm. 2.4 is $k_j \in E^*$ een potentiaal t.o.v. een éénpuntslading in het punt j. Stel $k_j = p_1 f_1 + p_2 f_2$ met $p_1, p_2 > 0$, $p_1 + p_2 = 1$, $f_1, f_2 \in V$. Dan is $p_1 f_1 \leq k_j$, zodat $f_1 \leq \frac{k_j}{p_1}$ en dus $f_1 = \min(f_1, \frac{k_j}{p_1})$, het minimum van een potentiaal en een excessieve functie, dus f_1 is een potentiaal. Evenzo is f_2 een potentiaal, b.v. $f_1 = G\phi_1$ en $f_2 = G\phi_2$. Dan is $p_1\phi_1 + p_2\phi_2 = \phi$ zodat ook ϕ_1 en ϕ_2 eenpuntsladingen in het punt j zijn. Daar $f_1(0) = f_2(0) = k_j(0) = 1$, hebben we dan $f_1 = f_2 = k_j$. □

10. Stelling

$B_e := \mathcal{E}(H) \subset B$.

Bewijs

Het is voldoende te laten zien dat $\mathcal{E}(H) \subset \mathcal{E}(V)$. Immers, omdat $\mathcal{E}(H) \cap E^* = \emptyset$, volgt dan uit de vorige lemma's

$$\mathcal{E}(H) \subset \mathcal{E}(V) \setminus E^* \subset K \setminus E^* = B.$$

Zij h extremaalpunt van H. We moeten laten zien dat h ook extremaalpunt van V is. Stel $h = p_1 f_1 + p_2 f_2$ met $p_1, p_2 > 0$, $p_1 + p_2 = 1$, $f_1, f_2 \in V$. Dan is $f_1 = G\phi_1 + h_1$ en $f_2 = G\phi_2 + h_2$, dus $h = G(p_1\phi_1 + p_2\phi_2) + p_1 h_1 + p_2 h_2$, zodat $p_1\phi_1 + p_2\phi_2 \equiv 0$ en dus $\phi_1 = \phi_2 \equiv 0$. Dus $h = p_1 h_1 + p_2 h_2$, maar $h \in \mathcal{E}(H)$ en dus $h = h_1 = h_2 = f_1 = f_2$. $\square$

11. Apotheose

Combineren we St. 6 en St. 10, opmerkende dat voor $y \in B$ $1_i(y) = y(i) = \tilde{k}(i,y)$, dan krijgen we voor harmonische functie de eenduidige representatie

$$h(i) = \int_{B_e} \tilde{k}(i,y)\, d\mu(y).$$

Combineren we dit met onze eenduidige representatie voor potentialen (St. 2.3), dan krijgen we: elke excessieve functie f is te schrijven als

$$f(i) = \int_{E^* \cup B_e} \tilde{k}(i,y)\, d\mu(y)$$

Voor precies een eindige Borelmaat μ, waarbij de integraal over E^* een potentiaal is en die over B_e een harmonische functie.

6. LITERATUUR

Over de Martin-rand:

[Dynkin]

E.B. Dynkin, A.A. Juschkewitsch; *Sätze und Aufgaben über Markoffsche Prozesse*. Berlin: Springer-Verlag, 1969, blz. 128-133.

[Doob]

J.L. Doob; *Discrete Potential Theory and Boundaries*. J. of Math. and Mech. 8 (1959), blz. 433-458.

[Freedman]

D. Freedman; *Markov Chains*. San Franciso: Holden Day 1971, blz. 111-137.

[Hunt]

G.A. Hunt; *Markoff chains and Martin boundaries*. Illinois J. Math. 4 (1960) 313-340.

[Kemeny]

J.G. Kemeny, J. Snell, A.W. Knapp; *Denumerable Markov Chains*. Princeton: Van Nostran , 1966, blz. 323-400.

[Hennequin]

P.L. Hennequin, A Tortrat; *Théorie des probabilités et quelques applications*. Paris: Masson, 1965, blz. 411-441.

[Meyer]

P.A. Meyer; *Processus de Markov: la frontière de Martin*. Berlin: Springer-Verlag, 1968.

Onze presentatie sluit zeer nauw aan bij die van het eerstgenoemde werk.