MATHEMATICISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 32 (M 4)

Gebruiksaanwijzing voor de toets van Wilcoxon ,

door

H.R. van der Vaart

1950
2e druk 1952.

Gebruiksaanwijzing voor de toets van Wilcoxon.

§1. Inleiding.

A Een eenvoudige methode om de hypothese te toetsen, dat twee steekproeven (= samples (Eng.)) - één van een quantitatieve variabele grootheid x en één van een dergelijke grootheid y - uit eenzelfde collectie (= populatie, = universum) komen, is aangegeven door:

F. Wilcoxon, Individual comparisons by ranking methods, Biometrics 1 (1945) p. 80-83; de methode werd verder uitgewerkt door H.B. Mann en D.R. Whitney, On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other; Annals of Mathematical Statistics 18 (1947), 50-60.

Het rekenwerk, dat voor deze toets vereist wordt, is zeer veel minder dan het rekenwerk, nodig om de voor dit probleem vaak toegepaste toets van "Student" (voor het verschil van twee gemiddelden) uit te voeren. De toets van Wilcoxon is niet voor alle denkbare gevallen van de hierboven omschreven aard te gebruiken. Wel is zij van wijdere toepassing dan de toets van "Student", daar het voor "Wilcoxon" niet nodig is, dat de collecties, waaruit de steekproeven van x en y zijn genomen, een normale verdeling bezitten.

B Er zijn drie belangrijke voorwaarden, waaraan voldaan moet zijn, opdat "Wilcoxon" kan worden toegepast.

1. De waarnemingen van x en y moeten alle onderling onafhankelijk zijn en de steekproeven representatief. Vergelijk hierover § 4, C, 1 onder: "Onafhankelijkheid en representativiteit".

2. x en y moeten continu verdeeld zijn. Vergelijk hierover § 4, C, 2 onder: "Continuïteit".

3. Om duidelijk te maken, waarover de derde voorwaarde gaat, merken we op, dat men in het algemeen slechts dan ertoe zal overgaan te onderzoeken, of twee steekproeven wel uit eenzelfde collectie zouden kunnen komen, als men enige reden heeft om aan te nemen, dat ze uit verschillende collecties komen.

Opm. Men hoopt in zulk een geval, dat het resultaat van de toepassing der toets zal zijn: verwerping van de hypothese, dat x en y tot eenzelfde collectie behoren.

De toets van Wilcoxon is slechts toepasbaar indien men weet, dat het eventueel bestaande verschil tussen de collecties, waaruit de x- resp. de y-waarnemingen stammen, van bepaalde aard is. De desbetreffende derde voorwaarde kan hier nog niet behandeld worden. Vergelijk hiervoor § 4, C, 3 onder: "Toegelaten mogelijkheden voor verschillen tussen de x- en de y-collecties".

C De gang van zaken is als volgt.

1. Men berekent de waarde van een op nader aan te geven wijze gedefinieerd getal U voor het beschouwde steekproevenpaar (volgens § 2, vgl. ook § 6, A en B). Noem deze waarde s (van het steekproevenpaar).

Opm. 1. Mann en Whitney schrijven $\overline{U}$, waar wij s schrijven.

2. Indien de hypothese juist zou zijn, dat de x- en y-waarnemingen uit éénzelfde collectie komen, is er voor elke waarde, die U kan aannemen, een bepaalde waarschijnlijkheid (vergelijke hiervoor § 3: Resultaten van Mann en Whitney). De tweede stap is nu, dat men berekent, hoe groot, als genoemde hypothese juist zou zijn, de kans zou zijn, dat U de in C, 1, genoemde waarde s, òf een waarde die minstens evenver van het gemiddelde van U verwijderd zou liggen, aan zou nemen (vergelijk hiervoor § 5; Slotphase; vgl. ook § 6, C, waar deze kans met de letter P is aangeduid).

3. Is deze kans "te klein" (zie hieronder), dan verwerpt men deze hypothese, d.w.z. men concludeert, dat de x- en y-waarnemingen niet uit eenzelfde collectie komen. Dit doet men, omdat men anders zou moeten aannemen, dat men een betrekkelijk zeldzame gebeurtenis heeft aangetroffen (vgl. ook § 6, D).

Opm. 2. Is deze berekende kans niet "te klein" in de hieronder aangegeven zin, dan kan men op grond van deze methode niet tot ongelijkheid van de x- en y-collecties, waaruit het beschouwde steekproevenpaar voortkomt, concluderen.
Als men de gelijkheid niet kan verwerpen, wil dit niet zeggen, dat de beide collecties werkelijk gelijk zijn. Het is niet uitgesloten, dat men met grotere steekproeven of een andere toetsmethode toch tot verwerping van gelijkheid zou kunnen komen.

Onder "te klein" versta men: kleiner dan ε. ε is de zgn. onbetrouwbaarheidsdrempel (Eng.: level of significance). Hoe groot ε gekozen wordt, hangt van aard van onderzoek en onderzoeker af. Wil men aanvaarden ongeveer 1 keer van de 20 ten onrechte tot ongelijkheid van de x- en y-collecties te concluderen (d.w.z.: als ze in werkelijkheid gelijk zijn), dan kiest men $\varepsilon = 0,05$.

Opm. 3. Degenen, die een kans liever in % uitdrukken - waarom eigenlijk? - zouden zeggen: 5%. Naar analogie van de uitdrukkingen per cent en per mille zegt men wel 0,05 per unum in plaats van 5 per cent. In dit stuk en in de tabellen ervan worden de kansen steeds per unum uitgedrukt, ook zonder afzonderlijke vermelding.

Vindt men dit te vaak en wil men dit niet meer dan ongeveer 1 keer van de 100 meemaken, dan kiest men $\varepsilon = 0,01$.

Opm. 4. Het hangt o.a. van de ernst der gevolgen af, hoe groot men ε kiest. Als men b.v. de geneeskracht van 2 medicamenten vergelijkt, waarvan het ene reeds meer gevaar voor onaangename nevenverschijnselen bleek op te leveren dan het andere, zal men niet gaarne ten onrechte concluderen, dat het gevaarlijkste geneesmiddel de ziekte het doeltreffendst bestrijdt. Men kiest dan ε zeer klein.

Opm. 5. Als de onder C, punt 2, aangeduide kans gelijk α ($< \varepsilon$) is, zegt men: De waarde s van U is significant met onbetrouwbaarheid α.

Indien men vooral geïnteresseerd is in de practische hantering van de toets en minder in de theoretische achtergrond, wijde men de meeste aandacht aan § 4 (Opmerkingen over de toepassing) en § 6 (Samenvatting en voorbeelden).

§ 2. Definitie en berekening van U.

Mann en Whitney berekenen uit de beide steekproeven tezamen een grootheid U, naar het volgende voorschrift:
Laten er n waarnemingen van x zijn (de ene steekproef) en m waarnemingen van y (de andere steekproef). Rangschik deze x- en y-waarden in één rij naar opklimmende grootten: links kleine, rechts grote getallen.

Voorbeeld. Als we voor x waargenomen hebben: /5/3/9/6/ (n=4)
en voor y : /7/8/11/10/ (m=4)

is deze rij: /$\underline{3}$/$\underline{5}$/$\underline{6}$/7/8/$\underline{9}$/10/11/ .
Hierbij zijn de onderstreepte getallen waargenomen waarden van x, de niet-onderstreepte van y.

Het gaat nu om de opéénvolging van x en y in deze rij. Men vervangt in bedoelde rij de waargenomen waarden van x door de letter x en de waargenomen waarden van y door de letter y.

<u>Voorbeeld</u>. In het boven gegeven voorbeeld komt er dan:

x x x y y x y y

Men bepaalt voor iedere y het aantal x-waarden, dat verder naar rechts in deze laatste rij voorkomt, en men telt de zo verkregen getallen op. Deze som is de bij het beschouwde steekproevenpaar behorende waarde van het getal U(vgl. ook §6).

<u>Voorbeeld</u>. Wat hiermee precies bedoeld wordt, moge blijken uit de bespreking van het boven gegeven en nog een ander voorbeeld. In het voorbeeld hierboven: /<u>3</u>/<u>5</u>/<u>6</u>/7/8/<u>9</u>/10/11/

x x x y y x y y

geldt zowel voor de y-waarde 8, als voor de y-waarde 7, dat de x-waarde 9 rechts ervan staat, zodat U hier de waarde 2 heeft. (Rechts van de y-waarden 10 en 11 staat geen x-waarde). Men kan U eenvoudig bepalen door van rechts af de rij:

x x x y y x y y

te doorlopen. Bij elke y, die men op die tocht ontmoet, gaat men dan na, hoeveel x-waarden rechts van die y staan. Laat dit aantal voor een bepaalde y-waarde k zijn. Dan draagt die y tot het getal U k bij. Doet men dit bij de rij x x x y y x y y, dan ontmoet men eerst 2 y-waarden , rechts waarvan geen x staat; dan een x; en vervolgens 2 y-waarden, voor elk waarvan geldt, dat er één x rechts van staat. Vervolgens ontmoet men geen y meer. Het getal U heeft hier dus de waarde 2.
We geven nog een voorbeeld. Stel men heeft voor x waargenomen:

/112,5/109,6/123,9/106,0/115,4/121,0/120,0/ (n=7) en
voor y: /115,1/105,0/116,4/114,3/130,6/ 93,2/ (m=6)

Bij dit voorbeeld is het gemakkelijk om, voordat men de x- en y-waarden in één rij naar opklimmende grootten rangschikt, eerst de x en y afzonderlijk te rangschikken:
x//106,0/109,6/112,5/115,4/120,0/121,0/123,9/
y// 93,2/105,0/114,3/115,1/116,4/130,6/
De rangschikking in één rij wordt (strepen onder de x-waarden):

/93,2/105,0/<u>106,0</u>/<u>109,6</u>/<u>112,5</u>/114,3/115,1/<u>115,4</u>/116,4/
120,0/<u>121,0</u>/<u>123,9</u>/130,6/ of als men de getallen door x resp. y vervangt: y y x x x y y x y x x x y .
Als men deze rij van rechts af doorloopt, zijn de bijdragen van de verschillende y-waarden, gesommeerd, gelijk aan U: 0 + 3 + 4 + 4 + 7 + 7 = 25.

Men kan U bepalen zoals voor deze beide voorbeelden aangegeven. Ter contrôle kan men nog gebruik maken van de formule (welker gebruik iets meer rekenwerk vraagt):

$$U = mn + \frac{m(m+1)}{2} - T.$$

Hierin is n = het aantal waarnemingen van x, m het aantal waarnemingen van y, terwijl men T vindt door de rij van gerangschikte x- en y-waarden van rangnummers te voorzien (van de kleinste af) en de rangnummers van de m y-waarnemingen te sommeren.

Voorbeeld. 1)

$$\left.\begin{array}{lcccccccc} & x & x & x & y & y & x & y & y \\ \text{rnr (rangnummers)} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right\}$$

Rangnummers van y zijn: 4/5/7/8

$T = 4 + 5 + 7 + 8 = 24$; $U = 4.4 + \frac{4.5}{2} - 24 = 26 - 24 = 2.$

$$\left.\begin{array}{lccccccccccccc} 2) & y & y & x & x & x & y & y & x & y & x & x & x & y \\ \text{rnr} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{array}\right\}$$

$T = 1 + 2 + 6 + 7 + 9 + 13 = 38$;

$U = 6.7 + \frac{6(6+1)}{2} - 38 = 63 - 38 = 25.$

Opm. Als alle m waarden van y rechts liggen van alle n waarden van x:

$$\underbrace{x\ldots x}_{n}\ \underbrace{y\ldots y}_{m},$$

levert geen y een bijdrage tot U; U = 0.
Als alle m waarden van y links liggen van alle n waarden van x:

$$\underbrace{y\ldots y}_{m}\ \underbrace{x\ldots x}_{n},$$

levert elk van de m waarden van y een bijdrage n tot U; U = mn.
Dus U kan waarden aannemen van   tot en met mn.

Het zal uit de laatste opmerking duidelijk zijn, op welk idee de toets van Mann en Whitney gebaseerd is. Als we n.l. uitgaan van het geval, dat alle y-waarden links liggen van (dus kleiner zijn dan) alle x-waarden, dan is zoals we zagen U zo groot mogelijk, n.l. gelijk aan mn. Als we dan de y-waarden geleidelijk groter laten worden, doorlopen we een reeksn gevallen, waarbij de y- en x-waarden dooreengemengd zijn, terwijl U kleiner wordt. Aan het einde van dit proces liggen alle y-waarden rechts van (zijn alle y-waarden groter dan) alle x-waarden en U is gelijk aan 0.

§3. Resultaten van Mann en Whitney.

A Om nu de in §1, C, punt 2, bedoelde kans te kunnen berekenen hebben we het volgende nodig.
Stel, dat de twee steekproeven (n waarden van x, m waarden van

y) uit eenzelfde collectie genomen zijn. Men heeft dan een zekere kans om $U = 0$ te vinden.

Opm. 1. Als men alle mogelijke rangschikkingen van n x-waarden en m y-waarden beschouwt en hieruit de rangschikkingen met $U=0$ afzondert, dan is de verhouding van dit laatstgenoemde aantal tot het eerste de kans op $U = 0$. Men geeft deze kans aan met het symbool $P[U = 0]$, waarin de P komt van probability.

Men heeft ook een zekere kans om $U = 1$ te vinden (symbool: $P[U = 1]$), idem voor $U = 2$ (symbool: $P[U = 2]$),..., tot en met $U = mn$. Men zegt: U heeft een zekere waarschijnlijkheidsverdeling; zie fig. 1 waar horizontaal U is afgezet en verticaal de kans P op de desbetreffende U*); deze figuur is symmetrisch ten opzichte van $U = \frac{mn}{2}$; het gearceerde oppervlak links van $U = s$ — een maat voor de kans, dat U één van de waarden van 0 tot en met s aanneemt, (symbool $P[U \leqq s]$) — is gelijk aan het gearceerde oppervlak rechts van $U = (mn-s)$ — een maat voor $P[U \geqq (mn-s)]$ —.

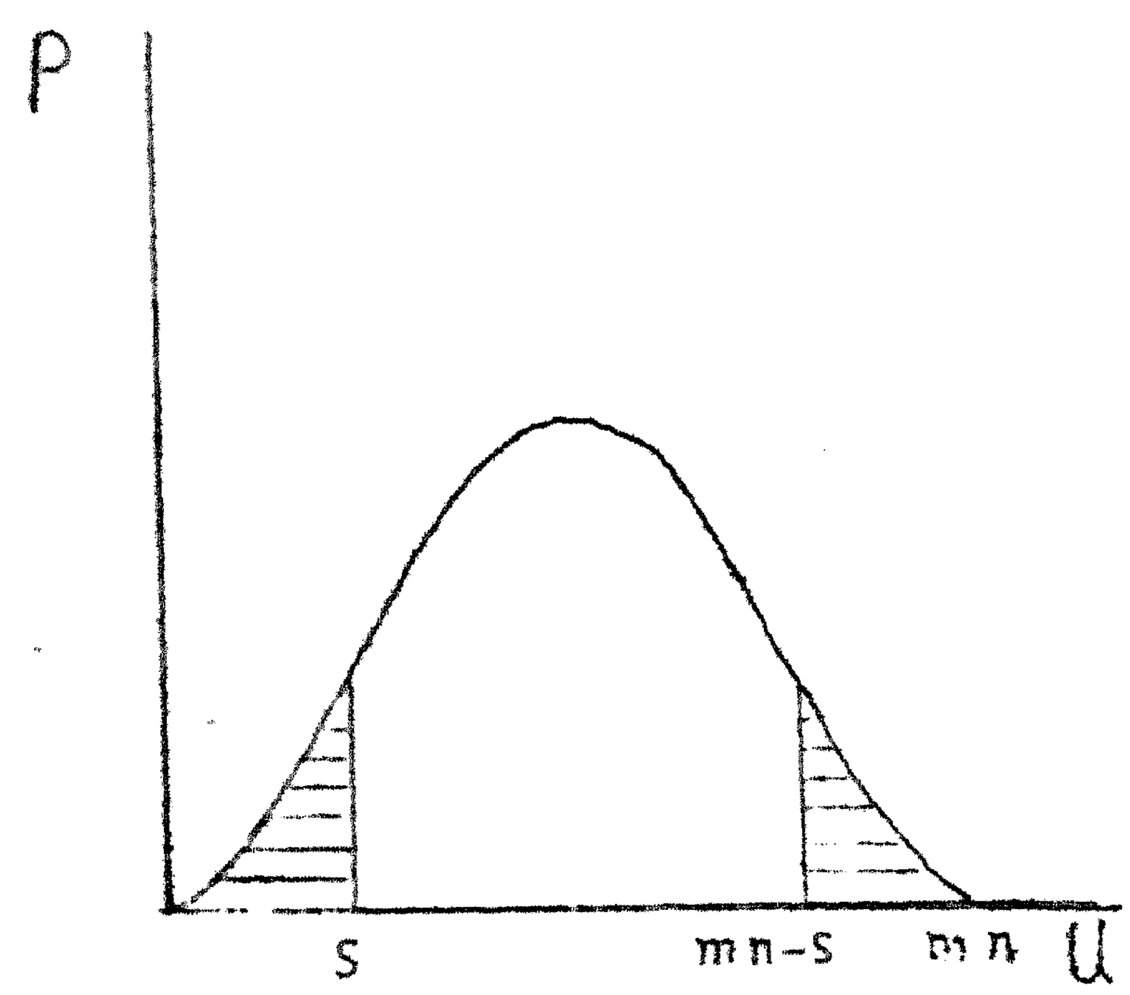


fig 1

Om de toets van Mann en Whitney uit te voeren (vgl. § 1, C, 2, en § 5) moet men gebruik maken van de kans, dat U één van de waarden 0 tot en met s (s geheel) aanneemt, of, korter geschreven, van de kans $P[U \leqq s]$; tevens van de kans, dat $U = mn$, of $= mn-1$, ... of $= mn-s$ is, dus, korter geschreven, van de kans $P[U \geqq mn-s]$

We wijzen er nog eens op, dat de gearceerde oppervlakken in fig. 1 maten zijn voor deze beide kansen. Blijkbaar geldt: $P[U \geqq mn-s] = P[U \leqq s]$ en: $P[U \leqq s$ òf $U \geqq mn-s] = 2 \times P[U \leqq s] = 2 \times P[U \geqq mn-s]$. Voorts bewezen Mann en Whitney, dat m en n verwisselbaar zijn d.w.z.: als voor 5 x-waarden en 3 y-waarden $P[U \leqq s]$ een bepaalde waarde heeft, dan heeft voor 3 x-waarden en 5 y-waarden $P[U \leqq s]$ dezelfde waarde.

Opm. 2. Daar het zeker is, dat U één van de waarden van 0 tot en met mn aanneemt, geldt $P[U \leqq mn] = 1$.

---

* In elk punt U (U neemt slechts gehele waarden aan) is een ordinaat opgericht ter lengte van de bijbehorende P. Terwille van de overzichtelijkheid verbonden we de toppen der ordinaten door een vloeiende kromme, al heeft deze kromme strikt genomen geen exacte betekenis.

B Mann en Whitney hebben $P[U \leq s]$ exact berekend voor elke $m \leq 8$ en elke $n \leq 8$ en voor iedere (gehele) $s \leq \frac{mn}{2}$. In de bijgevoegde tabel I is getabelleerd de kans $P[U \leq s]$ voor (gehele) $s \leq \frac{mn}{2}$ en $m \leq 10$, $n \leq 10$, die door de rekenafdeling van het Mathematisch Centrum berekend is.

Opm. 3. Als men de kans $P[U \geq v]$ wil bepalen, als $v > \frac{mn}{2}$ is, maakt men gebruik van: $P[U \geq v] = P[U \leq mn-v]$.

Voorbeelden. We geven enige voorbeelden van het gebruik van tabel I.

$n=4$, $m=3$; $P[U \leq 2] = 0{,}1143$

$P[U \geq 10] =$ (vgl. Opm.3)$= P[U \leq 4.3-10] = P[U \leq 2]$
$= 0{,}1143$

$P[U \leq 2$ òf $U \geq 10] = 2 \times P[U \leq 2] = 2 \times 0{,}1143 =$
$0{,}2286$

$P[U \geq 9] = P[U \leq 4.3-9] = P[U \leq 3] = 0{,}2000$

$n=9$, $m=5$; $P[U \leq 9] = 0{,}0415$

$P[U \geq 37] =$ (vgl. opm.3)$= P[U \leq 9.5-37] =$
$= P[U \leq 45-37] = P[U \leq 8] = 0{,}0300$

$n=5$, $m=9$; $P[U \leq 9]$ heeft nu volgens de laatste regel boven opm. 2 dezelfde waarde als voor $n=9$, $m=5$. Dus is $P[U \leq 9] = 0{,}0415$.

C Voor m of $n > 10$ make men gebruik van het feit, dat U dan bij benadering verdeeld is als een normale variabele met gemiddelde $\mu = \frac{mn}{2}$ en spreiding $\sigma = \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}$, zoals Mann en Whitney aangetoond hebben.

Zij $s < \frac{mn}{2}$. Men bepaalt dan, als m of $n > 10$ is, $P[U \leq s]$ als volgt. Geef de waarde van $(\frac{mn}{2} - s - \frac{1}{2})$ aan met d. Dan is $P[U \leq s]$ bij benadering gelijk aan de overschrijdingskans van $\frac{d}{\sigma}$ bij een normale verdeling met gemiddelde 0 en spreiding 1 (deze overschrijdingskans $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{d}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx$). Deze overschrijdingskans vindt men in tabel 2. Als $s < \frac{mn}{2}$, is $P[U \geq s] = 0{,}5$; hoe groot die kans precies is, is niet van belang voor de uitvoering der toets.

Zij $s > \frac{mn}{2}$. Men bepaalt dan, als m of $n > 10$ is, $P[U \geq s]$ als volgt. Geef de waarde van $(s - \frac{mn}{2} - \frac{1}{2})$ aan met d, Dan is $P[U \geq s]$ bij benadering gelijk aan de overschrijdingskans van $\frac{d}{\sigma}$ enz., zie boven. Als $s > \frac{mn}{2}$, is $P[U \leq s] = 0{,}5$; hoe groot die kans precies is, is niet van belang voor de uitvoering der toets.

In het voorgaande is telkens de term $(-\frac{1}{2})$ toegevoegd als correctie, omdat de discrete U-verdeling benaderd is door een continue verdeling (zgn. "continuiteitscorrectie").

<u>Opm. 4</u>. De waarden in de tabellen zijn kansen (waarschijnlijkheden) en als zodanig getallen tussen 0 en 1. Als men uitkomsten in percenten zou wensen, zou men de uit de tabellen gevonden waarden met 100 moeten vermenigvuldigen. Vergelijk opm. 3 onder §1, <u>C</u>, <u>3</u>.

<u>Voorbeelden</u>. We geven enige voorbeelden van het onder <u>C</u> besprokene, vergelijk tabel 2.

n=9, m=11; gevraagd $P[U \leqq 25]$

$$\frac{mn}{2} = 49,5;\ 25 < 49,5;\ \text{dus } d = 49,5 - 25 - 0,5 = 24$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{11.9.21}{12}} = \frac{3}{2}\sqrt{77} = 13,1624$$

$$\frac{d}{\sigma} = 1,8(234);\ P[U \leqq 25] \approx 0,0359$$

n=16,m=18; gevraagd $P[U \geqq 200]$

$$\frac{mn}{2} = 144;\ 200 > 144;\ d = 200 - 144 - 0,5 = 55,5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{18.16.35}{12}} = \sqrt{6.4.35} = 2\sqrt{210} = 28,9828$$

$$\frac{d}{\sigma} = 1,9(149);\ P[U \geqq 200] \approx 0,0287$$

§ 4. Opmerkingen over de toepassing.

<u>A</u> <u>Grootte van de steekproeven</u>. Als men een experiment ontwerpt, verdient het aanbeveling, de omvang van de steekproef uit de x-collectie zoveel mogelijk gelijk te maken aan de omvang van de steekproef uit de y-collectie. kort gezegd: m en n zo gelijk mogelijk te maken.

<u>B</u> <u>Rangschikbaarheid</u>. De toets van Wilcoxon kan, mits x en y aan de hieronder te noemen 3 voorwaarden (zie onder <u>C</u>) voldoen, toegepast worden op alle grootheden, die men in een rij naar opklimmende grootten kan rangschikken. Dit rangschikken is mogelijk, als men aan elk onderzocht individu een getal kan toevoegen, maar soms ook, als dit laatste niet mogelijk is. Essentiëel is slechts, dat men van elke twee individuen, die in het steekproevenpaar voorkomen, kan uitmaken, welk van de twee de onderzochte eigenschap in de grootste mate bezit.

Voorts doet men, als één of meer waargenomen waarden van x gelijk zijn aan één of meer waargenomen waarden van y, het beste, die rangschikking te nemen, die de <u>kleinste</u> waarde voor U geeft, en tevens die rangschikking, die de <u>grootste</u> waarde voor U geeft, vgl. §6, opm. Is dan voor beide U-waarden de in §1, <u>C</u>, onder punt <u>2</u> aangeduide en in §5 volledig besproken kans (het getal P uit §6) kleiner dan de toegelaten onbetrouwbaarheidsdrempel ε (vgl. § 1, C, 3), dan kan men rustig de hypothese van gelijke collecties verwerpen. Als de ene kans $< \varepsilon$, de andere $> \varepsilon$ is, kan men niet veel concluderen.

C Voorwaarden. Aan drie voorwaarden moet voldaan zijn, opdat de toets van Wilcoxon kan worden toegepast. Zij volgen hieronder onder 1, 2 en 3 .

1. Onafhankelijkheid en representativiteit.

De waarnemingen van x en y moeten alle onafhankelijk zijn. Het resultaat van de ene waarneming mag niet afhangen van het resultaat van de andere. Ook moeten de steekproeven representatief zijn voor de collecties waarmee de conclusie zich bezig houdt. B.v. mag men niet, als men inzicht wenst in de resultaten van verschillende behandelingswijzen van een bepaalde ziekte, zijn patiënten uitsluitend ontlenen aan één bepaalde polikliniek, en vervolgens resultaten formuleren ten aanzien van patiënten aan die ziekte in het algemeen, daar bij het tot stand komen van de resultaten zeer wel maatschappelijke omstandigheden een rol hebben kunnen spelen, die voor de onderzochte patiënten anders kunnen zijn dan voor andere groepen van patiënten. Zo moet ook een bioloog bij bepaalde onderzoekingen (bv. systematische) rekening houden met de mogelijkheid van geographische variatie en, als hij algemene resultaten wenst, zich niet beperken tot onderzoek van individuen uit een klein gebied.

2. Continuïteit.

x en y moeten continu verdeeld zijn, d.w.z. voor elk waarde, die ze aan kunnen nemen, moet de kans, dat ze juist die waarde aannemen, nul zijn. Eén van de zeer vele voorbeelden van continu verdeelde veranderlijken zijn de lengten van wilgeblaadjes. Het quotient van het aantal wilgeblaadjes, dat een lengte heeft van precies 9,5682.... cm, gedeeld door het totale aantal wilgeblaadjes op de wereld, is immers bijna 0, (dit geldt niet, als men in deze zin 9,5682,.... vervangt door: tussen 9,5 en 9,6 cm).

Naast continu verdeelde veranderlijken heeft men ook veranderlijken, waarvoor het bovenstaande niet geldt voor sommige van hun mogelijke waarden of ook voor al hun mogelijke waarden. Veranderlijken van de laatstaangeduide soort noemt men discreet verdeeld. De toets van Mann en Whitney kan niet ongewijzigd worden toegepast op niet-continu verdeelde veranderlijken.

Een eenvoudig voorbeeld van discreet verdeelde veranderlijken zijn die variabelen, die slechts gehele waarden kunnen aannemen, zoals het aantal vinstralen in een rugvin of het aantal lucifers in een doosje.

3. Toegelaten mogelijkheden voor verschillen tussen de x- en y-collecties.

Vergelijk ook §1, B, 3. Een veel voorkomend geval, waarin men de toets zal wensen toe te passen, is, dat men wenst uit te maken, of een behandelingswijze (A) van een bepaald soort individuen andere resultaten geeft dan een behandelingswijze (B).

> Opm. 1. Het woord behandelingswijze is hier ruim op te vatten. Het kan betreffen: verschillende geneesmethoden voor patiënten lijdend aan een bepaalde ziekte, verschillende voedseldiëten voor individuen van een bepaalde diersoort, verschillende bemestingen voor individuen van een bepaalde plantenvariëteit, verschillende fabricatiemethoden voor een bepaald product, enz.
> Een verwante kwestie is, dat men wenst uit te maken, of een groeiproces veranderingen teweegbrengt bv. in de hoek tussen twee beenderen van een dier. Men vergelijkt in zulk een geval jonge dieren en volwassen dieren. "A" is dan "groeien van jong tot oud", "B" is dan "ongewijzigd laten" of ook "A" is "groeien van embryo tot volwassen" en "B" is "groeien van embryo tot jong".

De toets van Wilcoxon mag men toepassen, indien men, onafhankelijk van het waarnemingsmateriaal vervat in het beschouwde steekproevenpaar, kan zeggen, dat voor alle individuen geldt, dat B, toegepast op een individu, op dat individu een uitwerking heeft, die minstens even "goed" is als de uitwerking, die A erop zou hebben, dan wel, dat voor alle individuen geldt, dat B hoogstens even "goed" is als A. Dat wil dus zeggen, dat men, onafhankelijk van het beschouwde steekproevenpaar, zeker moet kunnen zijn, dat niet voor het ene individu B slechter is dan A, en voor het andere beter. Indien dit laatste wel mogelijk is, kan men de toets strikt genomen niet toepassen. Overigens kan men dan de bekende t-test van Student, strikt genomen, evenmin toepassen.

> Opm. 2. Veelal is het vervuld zijn van deze voorwaarde niet experimenteel na te gaan, daar men niet één individu tegelijk op twee manieren kan behandelen, maar vaak geeft de wetenschap, waar het om gaat, theoretische aanwijzingen. Zo is het in het geval, dat men een hoek tussen twee schedelbeenderen vergelijkt bij jonge en bij oude apen, biologisch niet aan te nemen, dat bij het ene dier tijdens het opgroeien die hoek groter wordt en bij het andere kleiner.

Opm. 3. De "uitwerking" van een "behandelingswijze" beoordeelt men aan de gemeten veranderlijken x en y (in het algemeen). Wanneer bij A de grootheid x en bij B de grootheid y behoort, hangt het van de door x en y gemeten maat af, of $y > x$ dan wel $y < x$, als B "beter" is dan A. Intussen is gemakkelijk uit te maken, welke van de twee mogelijkheden verwezenlijkt is.
Met het oog op § 5 onderscheide men nu de volgende gevallen:

I. Men weet, onafhankelijk van het waarnemingsmateriaal vervat in het beschouwde steekproevenpaar, dat voor alle individuen van de beschouwde collectie(s) geldt:

hetzij Iα., dat de uit een eventuele behandeling B voortvloeiende y-waarde minstens even groot zou zijn als de uit eventuele behandeling A resulterende x-waarde,

hetzij Iβ., dat de uit een eventuele behandeling B voortvloeiende y-waarde hoogstens even groot zou zijn als de uit een eventuele behandeling A resulterende x-waarde.

(Hierbij dient opgemerkt te worden, dat men zeer voorzichtig zal moeten zijn met te denken in geval Iα of Iβ te verkeren. Dit houdt nl. in, dat men, om een voorbeeld te noemen, beweert, dat een nieuw geneesmiddel in geen geval tot een slechter resultaat kan leiden dan een reeds bekend).

II. Men weet niet, of het onder Iα gebruikte "minstens" of het onder Iβ gebruikte "hoogstens" geldt, maar wèl, dat één van beide moet gelden.

In geval I moet men een zgn. éénzijdige overschrijdingskans bepalen, in geval II een tweezijdige, vgl. § 5, r. 5 · 12 of § 6, C.

§ 5. Slotphase van de uitvoering der toets.

Na de bepaling (volgens § 2) van s, de waarde, die het getal U aanneemt voor het beschouwde steekproevenpaar, verloopt de uitvoering van de toets als volgt (hierbij zijn de gevallen van § 4, C, 3, opm. 3 onderscheiden):

Iα. Men bepaalt $P[U \leq s]$ volgens § 3.--Als $s > \frac{mn}{2}$ is, is deze $P > 0{,}5$, dan is er zeker geen significantie.--

Iβ. Men bepaalt $P[U \geq s]$ volgens § 3.--Als $s < \frac{mn}{2}$ is, is deze $P > 0{,}5$, dan is er zeker geen significantie.--

II. Als $s \leq \frac{mn}{2}$ is, bepaalt men $P[U \leq s$ òf $U \geq mn-s] = 2 \times P[U \leq s]$ volgens § 3.

Als $s > \frac{mn}{2}$ is, bepaalt men $P[U \geq s$ òf $U \leq mn-s]$ $2 \times P[U \leq mn-s]$ volgens § 3.

Opm. In het vaak voorkomende geval II dient men de uitkomsten van de tabellen dus met 2 te vermenigvuldigen. Voorts herinneren we er nog eens aan, dat de tabellen de kansen geven per unum, niet per cent (vgl. § 1, C, 3, opm. 3).

De in elk dezer gevallen gevonden P-waarde (die we met α aanduiden) is dan $\leq \varepsilon$ of $> \varepsilon$; vgl. voor : § 1, C, 3. Als $\alpha > \varepsilon$ is, kan men met deze methode en uit dit steekproevenpaar niet tot

ongelijkheid van de betrokken collecties concluderen (vgl. § 1, C, 3, opm. 2). Als $\alpha \leqq \varepsilon$, kan men dit wèl, "met onbetrouwbaarheid α" (op het "level of significance α"; of ook m. onbetr. $\leqq \varepsilon$; op lev. of sign. $\leqq \varepsilon$).
In geval Iα volgt dan, dat een individu onder B een y geeft, die groter is dan de x, die het onder A geeft.
In geval Iβ moet groter hier door kleiner vervangen worden.
In geval II volgt uit een $s < \frac{mn}{2}$, dat men in de zin, die volgt op: "In geval Iα volgt" groter moet lezen, uit een $s > \frac{mn}{2}$ daarentegen, dat men kleiner moet lezen.

§ 6. Samenvatting en voorbeelden.

Nadat men zich overtuigd heeft, dat aan de in § 4 genoemde voorwaarden is voldaan, verloopt de toepassing van de toets van Wilcoxon als volgt (vergelijk vooral ook telkens de voorbeelden).

A Laten er n waarnemingen van x en m waarnemingen van y zijn.

Voorbeelden.

1. n=6, m=6;
x waarnemingen: /18,2/16,2/20,3/17,4/18,9/21,4/
y waarnemingen: /16,7/12,5/15,2/14,3/15,9/17,8/

2. n=15, m=14;
(n=15) x-waarnemingen: /141,5/142,0/143,5/147,0/148,0/
/149,5/150,5/152,0/153,0/154,5/154,5/157,0/159,5/
/160,0/164,5/
(m=14) y-waarnemingen: /147,5/150,0/150,5/151,5/152,5/
153,5/158,0/158,5/161,0/162,5/165,5/167,0/168,5/169,5/

Als de x- resp. de y-waarnemingen nog niet afzonderlijk naar opklimmende grootte zijn gerangschikt, doet men dit eerst.

Voorbeelden.

1. x//16,2/17,4/18,2/18,9/20,3/21,4/
y//12,5/14,3/15,2/15,9/16,7/17,8/

2. Hier zijn de waarnemingen reeds gerangschikt.

Vervolgens rangschikt men de x- en y-waarden in één rij naar opklimmende grootte, waarbij men de x-waarden onderstreept. Als één of meer x-waarden gelijk zijn aan één of meer y-waarden, trekt men onder die gelijke waarden een stippellijn.

Voorbeelden.

1. /12,5/14,3/15,2/15,9/$\underline{16{,}2}$/16,7/$\underline{17{,}4}$/17,8/$\underline{18{,}2}$/$\underline{18{,}9}$/
/$\underline{20{,}3}$/$\underline{21{,}4}$/

2. /141,5/142,0/143,5/147,0/147,5/148,0/149,5/150,0/
/150,5/150,5/151,5/152,0/152,5/153,0/153,5/154,5/
/154,5/157,0/158,0/158,5/159,5/160,0/161,0/162,5/
/164,5/165,5/167,0/168,5/169,5/

Daarna vervangt men de (onderstreepte) x-waarnemingen door de letter x en de (niet-onderstreepte) y-waarnemingen door de letter y.

Opm. 1. Als één of meer x-waarden gelijk zijn aan één of meer y-waarden (stippellijntjes), schrijft men zo wel die rangschikking van x en y op, waarbij de letters y zover mogelijk links staan (dan wordt de waarde s van het getal U van §1, C, 1 zo groot mogelijk), als die rangschikking, waarbij de letters y zover mogelijk rechts staan (dan wordt s zo klein mogelijk). Vergelijk §4, B, 2° alinea en voorbeeld 2 en 3.

Voorbeelden.

1. y y y y x y x y x x x x
2. a) x x x x y x x y y x y x y x y x x x y y x x y y x y y y y
   b) ----------- x y ---------------------
3. Een voorbeeld met meer gelijke waarden:

   x x x x y x x y y x y x y x y x x x y y x x y y x y y y y
   --------- x y y ----- x x x y -------------

Hierbij waren de waarden tussen de stippellijnen gelijk en evenzo die tussen de getrokken lijnen.

B Nu gaat men bepalen, hoe groot de waarde s van het getal U is voor het beschouwde steekproevenpaar. Hiertoe doorloopt men van rechts af de rij van letters x en y. Bij elke y, die men ontmoet, bepaalt men hoeveel letters x rechts ervan staan, en men telt de zo verkregen getallen op. Deze som is de waarde s, die het getal U hier heeft.

Voorbeelden.

1. $s = 4 + 5 + 6 + 6 + 6 + 6 = 4 + 5 + 4.6 = 33$
2. a) $s = 4 \times 0 + 2.1 + 2.3 + 1.6 + 1.7 + 1.8 + 2.9 + 1.11 = 58$
   b) $s = 4 \times 0 + 2.1 + 2.3 + 1.6 + 1.7 + 2.8 + 1.9 + 1.11 = 57$

Opm. 2. Men kan de uitkomst nog controleren door middel van het getal T, vgl. §2, p. 5, r. 2 tot r. 15 v. boven. In voorbeeld 1 is $T = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 = 24$ en s (de waarde, die U voor dit steekproevenpaar heeft)= $6.6 + \frac{6.7}{2} - 24 = 33$

In voorbeeld 2 a) is $T = 5 + 8 + 9 + 11 + 13 + 15 + 19 + 20 + 23 + 24 + 26 + 27 + 28 + 29 = 257$ en $s = mn + \frac{m(m+1)}{2} - T = 14.15 + \frac{14.15}{2} - 257 = 210 + 105 - 257 = 58$.
In voorbeeld 2 b) is $T = 258$, dus $s = 57$.

Opm. 3. Bij de hier gegeven samenvatting, waar geen theoretische beschouwingen worden gehouden, is het niet strikt nodig de algemeen gedefinieerde grootheid èn de waarde, die deze heeft bij een bepaald steekproevenpaar, met afzonderlijke letters (U, resp. s) aan te geven. In de theoretische beschouwingen van § 3 was dit wel noodzakelijk. Terwille van de eenheid van notatie en omdat in tabel 1 (tengevolge van § 3) de letter s is gebruikt, is het onderscheid ook in deze § 6 volgehouden.

Opm. 4. Zo men wil aanvoelen, waarom de grootheid U geschikt is om er een toets, als in § 1, A omschreven, op te baseren leze men de opm. aan het eind van § 2 en de alinea die op die opm. volgt en § 2 afsluit.

C Thans moet de in § 1, C, 2 bedoelde kans P bepaald worden. P is in de tabellen per unum uitgedrukt, vgl. § 1, C, 3, opm. 3. Het getal P kan men aanduiden als de overschrijdingskans van $U = s$, éénzijdig in de gevallen Iα en Iβ, tweezijdig in geval II (zie onder).

Om dit getal P te bepalen, moet men weten, in welk der gevallen Iα, Iβ, II van § 4, C, 3, opm. 3, men verkeert. Tevens make men onderscheid tussen het geval, dat m en n beide $\leqq 10$ en het geval, dat m en/of $n > 10$.

Zij m en n beide $\leqq 10$.

Iα. Als $s \leqq \frac{mn}{2}$, vindt men P, door in tabel 1 op te zoeken, welk getal behoort bij de onderhavige m en n en bij de gevonden s. In de tabel is steeds $m \leqq n$. Als men nl. een geval heeft, waarin m groter is dan n, verwisselt men m en n en zoekt dan P op. Heeft men dus $n = 5$; $m = 9$; $s = 3$, dan is de bijbehorende P gelijk aan de P, die behoort bij $n = 9$; $m = 5$; $s = 3$.

Als $s > \frac{mn}{2}$, is het bedoelde getal $P > 0,5$ (niet in de tabel opgenomen).

Iβ. Als $s \leqq \frac{mn}{2}$, is het bedoelde getal $P \geqq 0,5$.

Als $s > \frac{mn}{2}$, vindt men P, door in tabel 1 op te zoeken, welk getal behoort bij de onderhavige m en n en bij $(mn-s)$ (in plaats van s). Als $m > n$, geldt het onder Iα daarover opgemerkte.

Voorbeeld. 1. $n = 6$; $m = 6$; $s = 33$. Zij nog gegeven, dat men zich hier bevindt in geval Iβ.
Daar $\frac{mn}{2} = 18$ en $33 > 18$, is $s > \frac{mn}{2}$. Men vindt dus P als het getal, dat volgens tabel 1 behoort bij $n = 6$, $m = 6$ en bij $mn - s = 3$. Dit getal P is dus 0,0076.

II. Als $s \lesseqgtr \frac{mn}{2}$, vindt men P door het getal, dat volgens tabel I behoort bij de onderhavige m en n en bij de gevonden s, met 2 te vermenigvuldigen. Voor $m > n$ geldt het onder Iα daarover opgemerkte.

Als $s > \frac{mn}{2}$, vindt men P door het getal, dat volgens tabel I behoort bij de onderhavige m en n en bij $(mn-s)$, met 2 te vermenigvuldigen. Ook nu geldt voor $m > n$ weer het onder Iα opgemerkte.

Zij m en/of $n > 10$.
Als $s < \frac{mn}{2}$ is, geef dan $(\frac{mn}{2} - s - \frac{1}{2})$ aan met d.
Als $s > \frac{mn}{2}$ is, geef dan $(s - \frac{mn}{2} - \frac{1}{2})$ aan met d.
— Als $s = \frac{mn}{2}$, is, is $d = 0$ —
Geef voorts $\sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}$ aan met σ.

Iα. Als $s < \frac{mn}{2}$ is, vindt men P door in tabel 2 op te zoeken, welk getal behoort bij de gevonden waarden van $\frac{d}{\sigma}$.
Als $s > \frac{mn}{2}$ is, is $P > 0,5$ (Als $s = \frac{mn}{2}$ is, is $P = 0,5$).

Iβ. Als $s < \frac{mn}{2}$ is, is $P > 0,5$ (Als $s = \frac{mn}{2}$ is, is $P = 0,5$).
Als $s > \frac{mn}{2}$ is, vindt men P door in tabel 2 op te zoeken, welk getal behoort bij de gevonden waarde van $\frac{d}{\sigma}$.

II. Men vindt P, door het getal, dat volgens tabel 2 behoort bij de gevonden waarde van $\frac{d}{\sigma}$, met 2 te vermenigvuldigen.

Voorbeeld. 2 a) Zij gegeven, dat men hierbij niet weet, of men in geval Iα of Iβ verkeert; d.w.z. dat men in geval II van §4, C, 3, opm. 3, verkeert.
$s = 58$; $\frac{mn}{2} = 7.15 = 105$; $58 < 105$, dus $s < \frac{mn}{2}$;
$d = \frac{mn}{2} - s - \frac{1}{2} = 105 - 58 - 0,5 = 46,5$;
$\sigma = \sqrt{\frac{14.15.30}{12}} = \sqrt{7.15.5} = 5\sqrt{21} = 22,913$; $\frac{d}{\sigma} = 2,03$
$P \approx 2 \times 0,0228 = 0,0456$ (of in procenten 4,56%, vgl. § 1, C, 3, opm. 3).
2 b) $s = 57$; $d = 47,5$; $\sigma = 22,913$; $\frac{d}{\sigma} = 2,07 \approx 2,1$
$P \approx 2 \times 0,0179 = 0,0358$ (3,58%)

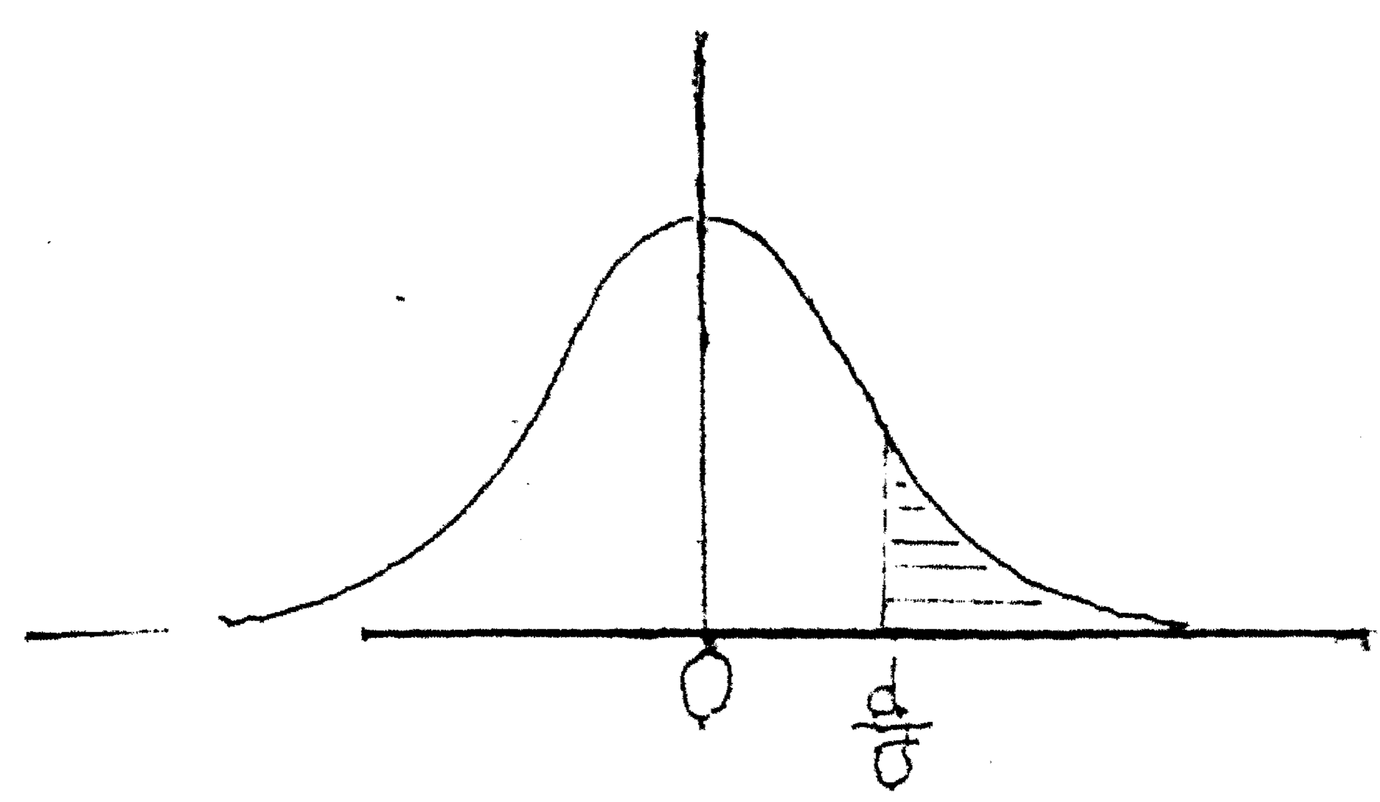
D Dit getal P vergelijken we met de volgens § 1, C, 3 vooraf gekozen ε-waarde.

Als voor α, de voor P gevonden waarde, geldt $\alpha > \varepsilon$, geldt opm. 2 van § 1, C, 3. We kunnen op grond van deze methode en dit steekproevenpaar niet komen tot verwerping van de hypothese, dat de x- en y-collecties gelijk zijn. Dit wil niet zeggen, dat de beide collecties werkelijk gelijk zijn; vgl. opm. 2 van § 1,

C, 3.
Als $\alpha \leqq \varepsilon$, zeggen we overeenkomstig §1, C, 3, opm. 5: de gevonden waarde s van U is significant met onbetrouwbaarheidsdrempel α (with level of significance α). Men concludeert dan tot verschil tussen de x- en y-collecties. Wat men dan van deze collecties kan zeggen ziet men in de laatste 6 regels van § 5.

Tabel II, éénzijdige overschrijdingskansen van de normale verdeling.

De getallen hieronder zijn overschrijdingskansen van $\frac{d}{\sigma}$, dus waarden van $P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{d}{\sigma}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$



$\frac{d}{\sigma}$	P	$\frac{d}{\sigma}$	P	$\frac{d}{\sigma}$	P
0,0	0,5000	1,1	0,1357	2,1	0,0179
0,1	0,4602	1,2	0,1151	2,2	0,0139
0,2	0,4207	1,3	0,0968	2,3	0,0107
0,3	0,3821	1,4	0,0808	2,4	0,0082
0,4	0,3446	1,5	0,0668	2,5	0,0062
0,5	0,3085	1,6	0,0548	2,6	0,0047
0,6	0,2743	1,7	0,0446	2,7	0,0035
0,7	0,2420	1,8	0,0359	2,8	0,0026
0,8	0,2119	1,9	0,0287	2,9	0,0019
0,9	0,1841	2,0	0,0228	3,0	0,0013
1,0	0,1587				

Opm. Bij het gebruik van tabel I en van tabel II kan men zich in het algemeen beperken tot 3 decimalen achter de komma (met afronding).

Gelijke waarnemingen.

Door recente onderzoekingen is de behandeling de toets van Wilcoxon met gelijke waarnemingen anders dan aangegeven is op blz. 13.

Inplaats van de twee waarden van s, verkregen door steeds in een groep "gelijken" eerst de x-waarnemingen voor de y-waarnemingen te plaatsen en daarna omgekeerd, werkt men met het gemiddelde van de aldus verkregen waarden. Men behoeft deze beide waarden niet te berekenen: bestaat de eerste groep gelijken uit n_1 x-waarnemingen en m_1 y-waarnemingen dan is de bijdrage in het ene geval 0, in het andere geval m_1n_1, gemiddeld dus $\frac{m_1n_1}{2}$. Zo ook voor de tweede groep gelijken, etc. We berekenen de waarde van s dus b.v. door in iedere groep van gelijken de x-waarnemingen voor de y-waarnemingen te plaatsen en de waarde s_1 te berekenen, die bij deze rangschikking behoort; vervolgens tellen wij voor de groepen gelijken de bijdragen $\frac{m_1n_1}{2} + \frac{m_2n_2}{2} + \ldots$ er bij op. Van de grootheid s, die men op deze manier verkrijgt is ook weer het gemiddelde $\frac{mn}{2}$, de spreiding is echter iets kleiner dan in het geval zonder gelijken nl.:

$$\sigma^2_{\text{gecorrigeerd}} = \sigma^2_{\text{ongecorrigeerd}} - m.n \frac{(t_1+1)t_1(t_1-1)+(t_2+1)t_2(t_2-1)+\ldots}{12(m+n)(m+n-1)}$$

waar t_1 de grootte van de eerste groep gelijken is (dus $t_1=m_1+n_1$), t_2 de grootte van de tweede groep gelijken enz.

In het algemeen, als de groepen gelijken klein zijn, is de correctie voor de spreiding klein; zo klein dat zij verwaarloosd kan worden. Verder is het van voordeel dat de correctie de spreiding kleiner maakt, d.w.z. als het gebruik van de ongecorrigeerde spreiding tot verwerping van de getoetste hypothese leidt, dan zal dit bij gebruik van de gecorrigeerde zeker ook het geval zijn.

Van de exacte verdeling met gelijken is weinig bekend. Indien m en n niet te klein zijn kan echter weer gebruik gemaakt worden van de normale benadering. Deze benadering is goed, indien er niet te veel gelijke waarnemingen aanwezig zijn. De benadering wordt slecht als er een zeer grote groep van gelijke waarnemingen aanwezig is.

Voorbeeld.

Als we voor x waargenomen hebben: /3/5/6/3/9/5/2/ (n=7)
en voor y : /4/5/8/7/1/5/10/7/9/ (m=9).

Dan is de rij:

/1/$\underline{2}$/$\underline{3}$/$\underline{3}$/4/$\underline{5}$/$\underline{5}$/5/5/$\underline{6}$/7/7/8/$\underline{9}$/9/10/.

Hierbij zijn de onderstreepte getallen waargenomen waarden van x, de niet onderstreepte van y.

$$s_1 = 1+1+1+2+2+4+7 = 18.$$

De bijdrage van de groepen van gelijken is: $\frac{2\times 0}{2} + \frac{2\times 2}{2} + \frac{0\times 2}{2} + $ $+ \frac{1\times 1}{2} = 2\frac{1}{2}$.

Dus

$$s = 18 + 2\tfrac{1}{2} = 20\tfrac{1}{2}.$$

$$\sigma^2_{\text{ongecorrigeerd}} = \frac{1}{12} \times 7\times 9\times 17 = 89{,}25 \qquad 89{,}25$$

$$\text{correctie} = 7\times 9 \times \frac{3\times 2\times 1+5\times 4\times 3+3\times 2\times 1+3\times 2\times 1}{12\times 16\times 15} = \underline{1{,}71} \; -$$

$$\sigma^2_{\text{gecorrigeerd}} = 87{,}54$$

Dus $\frac{d}{\sigma_{\text{gecor}}} = 1{,}12.$

Ter vergelijking $\frac{d}{\sigma'_{\text{ongecor}}} = 1{,}11.$

Voor grotere steekproeven kan men met vrucht gebruik maken van een schema zoals dit op de volgende bladzij is afgedrukt.

<u>Literatuur</u>:

J Hemelrijk, Note one Wilcoxon's two-sample test when ties are present, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 23, no. 1, Maart 1952, blz. 133-135.

Toets van Wilcoxon (a)

Toets no:

Opdracht no:
Onderzoeker:
Contrôle:
Datum:

X =
Y =

Schaal	X / Y	som aantal	Y / X	S_1	S_2
tot.				+ =	= U

$\mu =$

x_0=kleinste X =
x_1=grootste X =
y_0=kleinste Y =
y_1=grootste Y =

S_1 = product der aantallen in tweede en derde kolom.
S_2 = de helft van het product der aantallen in eerste en derde kolom.

Gelijken

t	turven
2	
3	
4	
5	

m = n =

$\sigma = \begin{cases} \text{ongecorrigeerd} \\ \text{gecorrigeerd} \end{cases}$

$\frac{|U - \mu| - \frac{1}{2}}{\sigma} = \_\_\_\_\_ =$

$\boxed{k = 0,}$

eenzijdig
tweezijdig

X > Y | Y > X

Conclusie: wel / niet significant groter dan

TABEL I. éénzijdige overschrijdingskans voor de toets van Wilcoxon [1].

n = 3

s \ m	1	2	3
0	0,250000	0,100000	0,050000
1	0,500000	0,200000	0,100000
2	0,750000	0,400000	0,200000
3		0,600000	0,350000
4			0,500000
5			0,650000

n = 4

s \ m	1	2	3	4
0	0,200000	0,066667	0,028571	0,014286
1	0,400000	0,133333	0,057143	0,028571
2	0,600000	0,266667	0,114286	0,057143
3		0,400000	0,200000	0,100000
4		0,600000	0,314286	0,171429
5			0,428571	0,242857
6			0,571429	0,342857
7				0,442857
8				0,557143

n = 5

s \ m	1	2	3	4	5
0	0,166667	0,047619	0,017857	0,007936	0,003968
1	0,333333	0,095238	0,035714	0,015873	0,007936
2	0,500000	0,190476	0,071429	0,031746	0,015873
3	0,666667	0,285714	0,125000	0,055556	0,027778
4		0,428571	0,196429	0,095238	0,047619
5		0,571429	0,285714	0,142857	0,075397
6			0,392857	0,206349	0,111111
7			0,500000	0,277778	0,154762
8			0,607143	0,365079	0,210318
9				0,452381	0,273810
10				0,547619	0,345238
11					0,420635
12					0,500000
13					0,579365

[1]) De hier gegeven kansen zijn getallen tussen 0 en 1; indien men de kansen in percenten wenst, vermenigvuldige men met 100. Als men tweezijdige overschrijdingskansen nodig heeft (cf. § 4, C, 3, opm. 3) vermenigvuldige men met 2.

TABEL I, éénzijdige overschrijdingskans.

n = 6

s \ m	1	2	3	4	5
0	0,142857	0,035714	0,011905	0,004762	0,002164
1	0,285714	0,071429	0,023810	0,009524	0,004329
2	0,428571	0,142857	0,047619	0,019048	0,008658
3	0,571428	0,214286	0,083333	0,033333	0,015152
4		0,321429	0,130952	0,057143	0,025974
5		0,428571	0,190476	0,085714	0,041126
6		0,571429	0,273810	0,128571	0,062770
7			0,357143	0,176190	0,088744
8			0,452381	0,238095	0,123376
9			0,547619	0,304762	0,164502
10				0,380952	0,214286
11				0,457142	0,268398
12				0,542857	0,331169
13					0 396104
14					0,465368
15					0,534632

n = 7

s \ m	1	2	3	4	5
0	0,125000	0,027778	0,008333	0,003030	0,001263
1	0,250000	0,055556	0,016667	0,006061	0,002525
2	0,375000	0,111111	0,033333	0,012121	0,005051
3	0,500000	0,166667	0,058333	0,021212	0,008838
4	0,625000	0,250000	0,091667	0,036364	0,015152
5		0,333333	0,133333	0,054545	0,023990
6		0,444444	0,191667	0,081818	0,036616
7		0,555556	0,258333	0,115152	0,053030
8			0,333333	0,157576	0,074495
9			0,416667	0,206061	0,101010
10			0,500000	0,263636	0,133838
11			0,583333	0,324242	0,171717
12				0,393939	0,215909
13				0,463636	0,265152
14				0,536364	0 319444
15					0,377525
16					0,438131
17					0,500000
18					0,561869

TABEL I, éénzijdige overschrijdingskans.

n = 6

s \ m	6
0	0,001082
1	0,002164
2	0,004329
3	0,007576
4	0,012987
5	0,020563
6	0,032468
7	0,046537
8	0,066017
9	0,089827
10	0,120130
11	0,154762
12	0,196970
13	0,242424
14	0,294372
15	0,349567
16	0,409091
17	0,468614
18	0,531385

n = 7

s \ m	6	7
0	0,000583	0,000291
1	0,001165	0,000583
2	0,002331	0,001166
3	0,004079	0,002040
4	0,006993	0,003497
5	0,011072	0,005536
6	0,017482	0,008741
7	0,025641	0,013112
8	0,036713	0,018939
9	0,050699	0,026515
10	0,068764	0,036422
11	0,090326	0,048660
12	0,117133	0,064103
13	0,147436	0,082459
14	0,182983	0,104312
15	0,222610	0,129662
16	0,266899	0,158800
17	0,314102	0,191434
18	0,365384	0,227856
19	0,417832	0,267483
20	0,472610	0,310023
21	0,527389	0,355187
22		0,402389
23		0,450758
24		0,500000
25		0,549242

TABEL I, éénzijdige overschrijdingskans.

n = 8

s \ m	1	2	3	4	5
0	0,111111	0,022222	0,006061	0,002020	0,000777
1	0,222222	0,044444	0,012121	0,004040	0,001554
2	0,333333	0,088889	0,024242	0,008081	0,003108
3	0,444444	0,133333	0,042424	0,014141	0,005439
4	0,555556	0,200000	0,066667	0,024242	0,009324
5		0,266667	0,096970	0,036364	0,014763
6		0,355556	0,139394	0,054545	0,022533
7		0,444444	0,187879	0,076768	0,032634
8		0,555556	0,248485	0,107071	0,046620
9			0,315152	0,141414	0,063714
10			0,387879	0,183838	0,085470
11			0,460606	0,230303	0,111111
12			0,539394	0,284848	0,142191
13				0,341414	0,177156
14				0,404040	0,217560
15				0,466667	0,251849
16				0,533333	0,310808
17					0,362082
18					0,416472
19					0,471639
20					0,528361

TABEL I, éénzijdige overschrijdingskans.

n = 8

s \ m	6	7	8
0	0,000333	0,000155	0,000078
1	0,000666	0,000311	0,000155
2	0,001332	0,000622	0,000311
3	0,002331	0,001088	0,000544
4	0,003996	0,001865	0,000932
5	0,006327	0,002953	0,001476
6	0,009990	0,004662	0,002331
7	0,014652	0,006993	0,003496
8	0,021312	0,010256	0,005206
9	0,029637	0,014452	0,007382
10	0,040626	0,020047	0,010334
11	0,053946	0,027040	0,014064
12	0,070929	0,036053	0,018959
13	0,090576	0,046931	0,024942
14	0,114219	0,060295	0,032479
15	0,141192	0,075991	0,041492
16	0,172494	0,094639	0,052448
17	0,206793	0,115928	0,065190
18	0,245421	0,140482	0,080264
19	0,286380	0,167832	0,097436
20	0,331002	0,198446	0,117249
21	0,377289	0,231702	0,139316
22	0,425907	0,267910	0,164102
23	0,474858	0,306294	0,191142
24	0,525141	0,347164	0,220901
25		0,389433	0,252680
26		0,433255	0,286869
27		0,477544	0,322688
28		0,522455	0,360450
29			0,399223
30			0,439238
31			0,479565
32			0,520435

TABEL I, éénzijdige overschrijdingskans.

n = 9

s \ m	1	2	3	4	5
0	0,100000	0,018182	0,004545	0,001399	0,000500
1	0,200000	0,036364	0,009091	0,002797	0,000999
2	0,300000	0,072727	0,018182	0,005594	0,001998
3	0,400000	0,109091	0,031818	0,009790	0,003496
4	0,500000	0,163636	0,050000	0,016783	0,005994
5	0,600000	0,218182	0,072727	0,025175	0,009490
6		0,290909	0,104545	0,037762	0,014486
7		0,363636	0,140909	0,053147	0,020979
8		0,454545	0,186364	0,074126	0,029970
9		0,545455	0,240909	0,099301	0,041458
10			0,300000	0,130070	0,055944
11			0,363636	0,165035	0,073426
12			0,431818	0,206993	0,094905
13			0,500000	0,251748	0,119880
14			0,568182	0,302098	0,148851
15				0,355244	0,181818
16				0,412587	0,218781
17				0,469930	0,259240
18				0,530070	0,303196
19					0,349650
20					0,398601
21					0,449051
22					0,500000
23					0,550949

TABEL I, éénzijdige overschrijdingskans

n = 9

s \ m	6	7	8	9
0	0,000200	0,000087	0,000041	0,000021
1	0,000400	0,000175	0,000082	0,000041
2	0,000799	0,000350	0,000164	0,000082
3	0,001399	0,000612	0,000288	0,000144
4	0,002398	0,001049	0,000494	0,000247
5	0,003796	0,001661	0,000782	0,000391
6	0,005994	0,002622	0,001234	0,000617
7	0,008791	0,003934	0,001851	0,000926
8	0,012787	0,005769	0,002756	0,001378
9	0,017982	0,008217	0,003949	0,001995
10	0,024775	0,011451	0,005553	0,002818
11	0,033167	0,015560	0,007610	0,003887
12	0,043956	0,020892	0,010325	0,005306
13	0,056743	0,027448	0,013698	0,007096
14	0,072328	0,035577	0,017976	0,009379
15	0,090509	0,045367	0,023200	0,012217
16	0,111888	0,057080	0,029618	0,015734
17	0,136064	0,070804	0,037228	0,019992
18	0,163836	0,086888	0,046360	0,025154
19	0,194206	0,105245	0,056972	0,031263
20	0,227972	0,126136	0,069395	0,038503
21	0,264335	0,149563	0,083587	0,046956
22	0,303496	0,175524	0,099794	0,056746
23	0,344455	0,203934	0,117935	0,067956
24	0,387812	0,234878	0,138297	0,080749
25	0,431968	0,268007	0,160633	0,095125
26	0,477322	0,303234	0,185191	0,111209
27	0,522677	0,340297	0,211724	0,129042
28		0,378846	0,240354	0,148663
29		0,418532	0,270712	0,170054
30		0,459091	0,302920	0,193254
31		0,500000	0,336487	0,218141
32		0,540909	0,371493	0,244714
33			0,407404	0,272851
34			0,444179	0,302406
35			0,481283	0,333237
36			0,518716	0,365220
37				0,398087
38				0,431654
39				0,465714
40				0,500000
41				0,534286

TABEL I, éénzijdige overschrijdingskans

n = 10

s \ m	1	2	3	4	5
0	0,090909	0,015152	0,003496	0,000999	0,000333
1	0,181818	0,030303	0,006993	0,001998	0,000666
2	0,272727	0,060606	0,013986	0,003996	0,001332
3	0,363636	0,090909	0,024476	0,006993	0,002331
4	0,454545	0,136364	0,038462	0,011988	0,003996
5	0,545455	0,181818	0,055944	0,017982	0,006327
6		0,242424	0,080420	0,026973	0,009657
7		0,303030	0,108392	0,037962	0,013986
8		0,378788	0,143357	0,052947	0,019980
9		0,454545	0,185315	0,070929	0,027639
10		0,545455	0,234266	0,093906	0,037629
11			0,286713	0,119880	0,049617
12			0,346154	0,151848	0,064602
13			0,405594	0,186813	0,082251
14			0,468532	0,226773	0,103230
15			0,531469	0,269730	0,127206
16				0,317682	0,154845
17				0,366633	0,185481
18				0,419580	0,219780
19				0,472527	0,256743
20				0,527472	0,297036
21					0,339327
22					0,383949
23					0,429570
24					0,476523
25					0,523476

TABEL I, éénzijdige overschrijdingskans.

n = 10

s \ m	6	7	8	9	10
0	0,000125	0,000051	0,000023	0,000011	0,000005
1	0,000250	0,000103	0,000046	0,000022	0,000011
2	0,000500	0,000206	0,000091	0,000043	0,000022
3	0,000874	0,000360	0,000160	0,000076	0,000038
4	0,001499	0,000617	0,000274	0,000130	0,000065
5	0,002373	0,000977	0,000434	0,000206	0,000103
6	0,003746	0,001542	0,000686	0,000325	0,000162
7	0,005494	0,002314	0,001028	0,000487	0,000244
8	0,007992	0,003393	0,001531	0,000725	0,000362
9	0,011239	0,004833	0,002194	0,001050	0,000525
10	0,015609	0,006787	0,003108	0,001494	0,000752
11	0,020979	0,009255	0,004273	0,002067	0,001044
12	0,027972	0,012494	0,005827	0,002836	0,001440
13	0,036339	0,016505	0,007770	0,003810	0,001943
14	0,046703	0,021544	0,010261	0,005066	0,002598
15	0,058941	0,027663	0,013323	0,006636	0,003420
16	0,073551	0,035119	0,017140	0,008606	0,004465
17	0,090285	0,043912	0,021710	0,011009	0,005748
18	0,109890	0,054401	0,027264	0,013964	0,007344
19	0,131743	0,066536	0,033800	0,017493	0,009271
20	0,156593	0,080625	0,041570	0,021737	0,011615
21	0,183816	0,096616	0,050551	0,026738	0,014402
22	0,213911	0,114767	0,060994	0,032627	0,017731
23	0,246129	0,134924	0,072855	0,039446	0,021628
24	0,281093	0,157394	0,086407	0,047360	0,026212
25	0,317682	0,181921	0,101536	0,056377	0,031506
26	0,356393	0,208659	0,118492	0,066650	0,037627
27	0,396228	0,237350	0,137140	0,078200	0,044604
28	0,437437	0,268099	0,157708	0,091157	0,052561
29	0,478896	0,300442	0,179967	0,105512	0,061502
30	0,521104	0,334533	0,204122	0,121403	0,071570
31		0,369806	0,229878	0,138756	0,082746
32		0,406262	0,257393	0,157689	0,095158
33		0,443387	0,286302	0,178116	0,108781
34		0,481129	0,316719	0,200090	0,123725
35		0,518870	0,348233	0,223484	0,139930
36			0,380913	0,248349	0,157499
37			0,414278	0,274480	0,176340
38			0,448375	0,301890	0,196524
39			0,482700	0,330360	0,217936
40			0,517300	0,359847	0,240625
41				0,390092	0,264424
42				0,421052	0,289370
43				0,452412	0,315264
44				0,484119	0,342105
45				0,515880	0,369682
46					0,397968
47					0,426714
48					0,455898
49					0,485256
50					0,514743