STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

S 47 (M 12)

De χ^2-toets voor aanpassing

MATHEMATISCH CENTRUM
2de Boerhaavestraat 49
A M S T E R D A M O.
Statistische Afdeling
S47 (M12)

De χ^2- toets voor aanpassing [1]

De χ^2- toets voor aanpassing dient voor het toetsen van de hypothese $\mathcal{H}_0$, dat een stelsel waarden $x_1, x_2, ---, x_n$ een steekproef is uit een continue waarschijnlijkheidsverdeling met verdelingsdichtheid $f(x)$. Hierbij wordt een grootheid χ^2 waarvan de verdelingsfunctie bekend is, als toetsingsgrootheid gebruikt.

De verdelingsfunctie van χ^2 wordt nog nader gekarakteriseerd door een grootheid ν welke het aantal vrijheidsgraden van χ^2 aangeeft. De grootte van χ^2 en het getal ν worden op de volgende wijze bepaald:

Wanneer $f(x)$ de onderstelde verdelingsdichtheid is (fig.1)

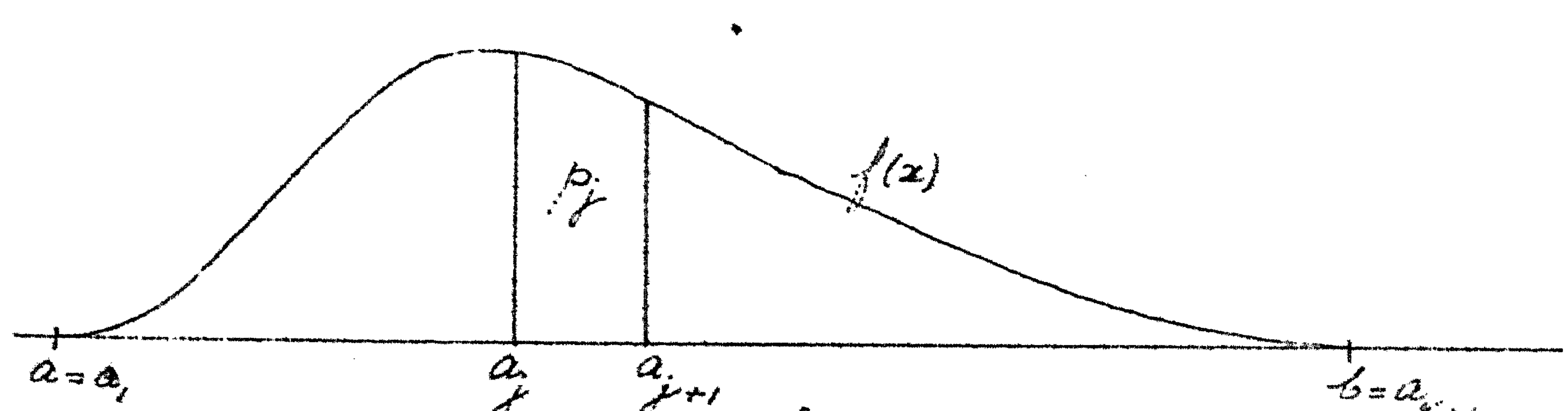

fig.1

wordt het interval $[a, b]$ in k stukken verdeeld, zodanig dat boven ieder interval $[a_j, a_{j+1}]$ een oppervlak p_j ligt $(j = 1, \ldots, k)$ Daar het gehele oppervlak onder de kromme de totale waarschijnlijkheidsmassa voorstelt, dus gelijk aan 1 is, geldt de betrekking $p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_k = 1$

Bestaat nu de steekproef uit n waarnemingen $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ dan zal men onder de hypothese $\mathcal{H}_0$ in het algemeen <u>verwachten</u>, dat ongeveer np_j van de n steekproef-waarnemingen in het interval $[a_j, a_{j+1}]$ komen te liggen. Is het <u>werkelijke</u> aantal waarnemingen uit de steekproef, dat in het interval $[a_j, a_{j+1}]$ valt n_j (dus n_1 waarden in $[a_1, a_2]$ etc.) dan wordt χ^2 als volgt gedefinieerd:

$$\chi^2 = \frac{(n_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(n_2 - np_2)^2}{np_2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$$

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

Deze χ^2 is een maat voor de afwijking van de werkelijke verdelingsdichtheid van $\underline{x}$ van de ondersteld verdelingsdichtheid $f(x)$. Is de werkelijke verdelingsdichtheid van $\underline{x}$ inderdaad gelijk aan $f(x)$ zoals volgens $\mathcal{H}_0$ ondersteld wordt, dan zal χ^2 in het algemeen klein zijn; is de verdelingsdichtheid echter verschillend van $f(x)$, dan worden grote waarden van χ^2 waarschijnlijker dan het geval is, als $\mathcal{H}_0$ juist is. De kritieke zône voor deze toets geeft men daarom de gedaante $\chi^2 > \chi_0^2$, waarbij χ_0^2 correspondeert met een onbetrouwbaarheidsdrempel α en uit tabellen voor de χ^2-verdeling opgezocht kan worden, waarbij rekening gehouden moet worden met het in de tabellen aangegeven:
Aantal vrijheidsgraden ν. Dit getal wordt als volgt bepaald: zijn er l parameters van $f(x)$ (b.v. het gemiddelde, de spreiding e.d.) uit de steekproef bepaald, dan is $\nu = k-l-1$, waarin k het aantal intervallen $[a_j, a_{j+1}]$ (zie boven) is. Is $f(x)$ van tevoren geheel gespecificeerd, dan is dus $\nu = k-1$.
Voorbeelden: bij toetsing op bovenstaande wijze van de hypothese, dat de steekproef $x_1, \ldots, x_n$ uit een normale verdeling ("verdeling van Gauss") afkomstig is, worden gemiddelde en spreiding van de steekproef gebruikt om $f(x)$ te bepalen. Door gemiddelde en spreiding is de normale verdeling geheel bepaald. Dan is dus $\nu = k-3$. Wenst men echter de hypothese te toetsen, dat de steekproef afkomstig is uit een volledig gegeven normale verdeling, waarbij dus gemiddelde en spreiding ook gegeven zijn, dan behoeven deze parameters niet uit de steekproef geschat te worden en is $\nu = k-1$.
Opm. In de practijk worden de getallen $p_1, p_2, \ldots p_k$ meestal even groot gekozen, dus alle gelijk $\frac{1}{k}$. Het aantal delen k laat men bovendien nog afhangen van het aantal waarnemingen, waaruit de steekproef bestaat. De benadering, die bij het toepassen van de χ^2-toets gebruikt wordt, is alleen dan behoorlijk indien het aantal k zodanig gekozen wordt, dat het verwachte aantal waarden in de intervallen $[a_j, a_{j+1}]$ d.i. np_j niet al te klein is, b.v. $\geqq 10$.

Litteratuur:

M.G.Kendall, The advanced Theory of Statistics
London 1947, Deel I hfdst. 12.