STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

S 53 (M 21)

Enige definities uit de schattingstheorie

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m - O.
Statistische Afdeling
S 53 (M 21)

Enige definities uit de schattingstheorie.[1]

1. Inleiding.

Een veel voorkomend probleem in de statistiek is het schatten van één of meer onbekende parameters (b.v. het gemiddelde of de spreiding) van een overigens bekende waarschijnlijkheidsverdeling W, indien een aantal waarnemingen gegeven zijn. Men schat de onbekende parameter dan door een functie van de waarnemingen. Zijn $x_1,\ldots,x_n$ de waarnemingen en zijn deze onderling onafhankelijk dan kan men b.v. het gemiddelde van de waarschijnlijkheidsverdeling W schatten door de grootheid

$$(1) \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ,$$

dus door het gemiddelde van de waarnemingen. Een dergelijke schatting geeft in het algemeen niet de werkelijke waarde van de gezochte parameter, maar een daarbij in de buurt liggende waarde. Men heeft steeds de keus tussen een aantal verschillende functies van $x_1,\ldots,x_n$ als schattingen voor dezelfde onbekende parameter. Zo kan men b.v. als schatting voor het gemiddelde van de waarschijnlijkheidsverdeling ook nemen de functie

$$(2) \qquad \bar{x}^* = \frac{2}{n(n+1)}(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i.x_i ,$$

Men kiest nu uit deze mogelijkheden naar aanleiding van de eigenschappen, die de verschillende schattingen bezitten. Daartoe denkt men zich het experiment vele malen herhaald, d.w.z. men onderstelt, dat vele reeksen van onderling onafhankelijke waarnemingen $x_1,\ldots,x_n$ zijn verricht en berekent voor ieder van deze reeksen de verschillende schattingen. Van ieder dezer schattingen verkrijgt men zodoende een groot aantal waarden, waaruit men eigenschappen omtrent de nauwkeurigheid der verschillende schattingen kan afleiden. In mathematische formulering komt dit daarop neer, dat men ieder

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

der waarnemingen $x_1,\dots,x_n$ beschouwt als een stochastische grootheid[1], die verdeeld is volgens de waarschijnlijkheidsverdeling W, waarvan de onbekende parameter geschat moet worden. Deze stochastische grootheden $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$ zijn, indien de waarnemingen onafhankelijk zijn, bovendien onafhankelijk verdeeld, alle volgens deze zelfde waarschijnlijkheidsverdeling W. Wij beperken ons tot de schatting van één onbekende parameter van W, die wij met θ angeven en laten het geval van de gezamenlijke schatting van verschillende parameters buiten beschouwing.

De schatting van θ uit n waarnemingen $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$ geven we aan met

(3) $$\underline{u}_n = u_n(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n)$$

daar $\underline{u}_n$ een functie van $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$ is en dus zelf ook een waarschijnlijkheidsverdeling bezit.

De definities van enkele eigenschappen uit de schattingstheorie geven wij eerst in populaire vorm en vervolgens (in § 3) in streng mathematische vorm.

2. Definities (populair).

A. Een schatting[2] $\underline{u}_n$ van een parameter θ heet zuiver[2], indien het gemiddelde van de waarschijnlijkheidsverdeling van $\underline{u}_n$ gelijk aan θ is.

Voorbeelden: De door (1) en (2) gegeven schattingen van het gemiddelde van de waarschijnlijkheidsverdeling W zijn beide zuivere schattingen. De schatting

(4) $$\underline{s}'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\underline{x}_i - \underline{\bar{x}})^2$$

waarin $\underline{x}$ het door (1) gegeven gemiddelde der waarnemingen voorstelt, is een zuivere schatting van de variantie (het spreidingskwadraat) van W.

B. Een schatting $\underline{u}_n$ van θ heet asymptotisch zuiver[3], indien het gemiddelde van de waarschijnlijkheidsverdeling van $\underline{u}_n$ voor $n \to \infty$ tot θ nadert.

---

1) Een stochastische grootheid is een grootheid, die een waarschijnlijkheidsverdeling bezit; wij geven een dergelijke grootheid aan door onderstreepte letter, terwijl niet onderstreepte letters gewone algebraïsche grootheden of door stochastische grootheden aangenomen waarden voorstellen.

2) Engels: "estimate" resp. "unbiased". De vertaling der termen is van Prof. Dr D. van Dantzig; zie de litteratuurverwijzing aan het einde van dit memorandum.

3) Engels: "asymptotically unbiased".

Voorbeeld:

(5) $$\underline{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\underline{x}_i - \underline{\bar{x}})^2$$

is een voor eindige n onzuivere, maar asymptotisch zuivere, schatting van de variantie van W.

C. Een schatting u_n van θ heet bruikbaar[1], indien men, door het verrichten van een voldoende groot aantal waarnemingen kan zorgen dat, op een willekeurig kleine gegeven waarschijnlijkheid na, het verschil tussen de gevonden waarde van u_n en de gezochte waarde θ kleiner is dan een willekeurig klein gegeven getal. Anders uitgedrukt: indien men, op een willekeurig kleine waarschijnlijkheid na, iedere gewenste nauwkeurigheid kan bereiken door n voldoende groot te kiezen.

Voorbeeld: Vrijwel alle gebruikelijke schattingen zijn bruikbaar. De door (1) gegeven schatting van het gemiddelde van W gaat b.v. in een niet bruikbare schatting over, indien wij de factor $\frac{1}{n}$ vervangen door $\frac{1}{2n}$. Bij een toenemend aantal waarnemingen zal dan de schatting vrijwel zeker vlak bij de helft van het gemiddelde terecht komen.

D. Een schatting u_n van θ heet de doeltreffendste[2] schatting van θ indien zij zuiver is en bovendien van alle zuivere schattingen de kleinste spreiding bezit.

Voorbeeld: De door (1) gegeven schatting van het gemiddelde van W is, als W een normale waarschijnlijkheidsverdeling is, de doeltreffendste schatting van het gemiddelde.

E. Een schatting u_n van θ heet een asymptotisch meest doeltreffende[3], indien zij bruikbaar is en onder alle bruikbare schattingen voor $n \to \infty$ de kleinste spreiding bezit.

Voorbeeld: de schatting (5) is evenals (4) een asymptotisch meest doeltreffende schatting van de variantie van W, indien W een normale waarschijnlijkheidsverdeling is. Daarentegen voldoet (4) wel, maar (5) niet aan de definitie D.

---

1) Engels: "consistent".

2) Engels: "most efficient estimate". Deze naam wordt ook vaak gegeven aan de onder E genoemde schattingen.

3) Engels: "asymptotically most efficient estimate". Vgl. ook voetnoot 2) van deze pagina.

F. Een schatting u_n van θ heet de aannemelijkste schatting[1] van θ, indien de waarschijnlijkheid, of bij continue W de waarschijnlijkheidsdichtheid van het gevonden resultaat (d.i. van de gevonden waarnemingen $x_1, \ldots, x_n$) maximaal wordt bij substitutie van u_n voor θ.

Voorbeeld: Indien onder n worpen met een munt a maal kruis voorkomt, is a/n de aannemelijkste schatting van de kans op kruis.

Opmerking: In de volgende paragraaf worden deze definities gepreciseerd en nog een enkele verdere definitie toegevoegd. Verder worden enkele eigenschappen vermeld.

3. Precisering van de definities.

Zij $F(x/\theta)$ de verdelingsfunctie en $f(x/\theta)$, indien deze bestaat, de waarschijnlijkheidsdichtheid van de waarschijnlijkheidsverdeling W met de onbekende parameter θ.

Zij verder

(6) $$\mathcal{E}_\theta \varphi(\underline{x}) = \int_0^1 \varphi(x)\, dF(x|\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x|\theta)\, dx$$

Dan is:

A. $\underline{u}_n$ een zuivere schatting van θ, indien geldt:

(7) $$\mathcal{E}_\theta \underline{u}_n = \theta$$

B. $\underline{u}_n$ een asymptotisch zuivere schatting van θ, indien geldt;

(8) $$\lim_{n \to \infty} \mathcal{E}_\theta \underline{u}_n = \theta$$

C. $\underline{u}_n$ een bruikbare schatting van θ, indien voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt:

(9) $$\lim_{n \to \infty} P[|\underline{u}_n - \theta| > \varepsilon] = 0$$

D. $\underline{u}_n$ de doeltreffendeste schatting van θ, indien u_n aan (7) voldoet en

(10) $$\sigma_\theta(\underline{u}_n) \leqq \sigma_\theta(\underline{v}_n)$$ 2)

is voor iedere v_n, waarvoor (7) geldt.

E. $\underline{u}_n$ een asymptotisch doeltreffendste schatting van θ, indien $\underline{u}_n$ aan (9) voldoet, terwijl voor iedere $\underline{v}_n$, die aan (9) voldoet geldt:

---

1) Engels: "maximum likelihood estimate". Dit begrip is afkomstig uit de theorie der aannemelijkste schattingen van R.A.Fisher.

2) $$\sigma_\theta\{\psi(\underline{x})\} = \left[\mathcal{E}_\theta\{\psi(\underline{x}) - \mathcal{E}_\theta \psi(x)\}^2\right]^{1/2}.$$

(11) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_\theta(u_n)}{\sigma_\theta(v_n)} \leq 1.$$

D', E'. Men noemt u_n doeltreffender resp. asymptotisch doeltreffender dan v_n als schatting van θ, indien (10) resp. (11) geldt met het kleiner-teken.

Men noemt de grootheid:

(12) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_\theta^2(u_n)}{\sigma_\theta^2(v_n)}$$

de asymptotische doeltreffendheid[1] van v_n, indien u_n een asymptotisch meest doeltreffende schatting van θ is.

F. De aannemelijkheid[2] van het stelsel waarnemingen $x_1,\ldots,x_n$ wordt gedefinieerd door

(13) $$\mathfrak{L} = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i|\theta)$$

of, indien W een discontinue waarschijnlijkheidsverdeling is, door:

(14) $$\mathfrak{L}^* = \sum_{i=1}^{n} \ln P[\underline{x}_i = x_i|\theta]$$

$\mathfrak{L}$ en $\mathfrak{L}^*$ worden in de theorie der aannemelijkste schattingen beschouwd als functies van θ en de aannemelijkste schatting u_n van θ, bij gegeven $x_1,\ldots,x_n$, wordt gedefinieerd als die waarde van θ, waarvoor $\mathfrak{L}$ resp. $\mathfrak{L}^*$ een absoluut maximum bezitten.

Enkele eigenschappen.

Een bruikbare schatting is altijd asymptotisch zuiver.

Een zuivere schatting is bruikbaar, indien geldt:

(15) $$\lim_{n\to\infty} \sigma_\theta(u_n) = 0$$ [3]

Onder vrij algemene voorwaarden geldt, dat de aannemelijkste schatting bruikbaar en asymptotisch meest doeltreffend is. Eén van de voorwaarden, waaronder deze stelling bewezen is, is, dat W een continue waarschijnlijkheidsverdeling is.

Litteratuur: D.van Dantzig, Kadercursus Mathematische Statistiek, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1946-1950, Hoofdstuk 4.

---

1) Engels: "efficiency"; ook in het Nederlands laat men de toevoeging "asymptotisch" meestal weg.

2) Engels: "likelihood function" of "likelihood".

3) Deze voorwaarde is voldoende, maar niet noodzakelijk.