STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

S 73 (M 28)

Een parametervrije toets tegen trend voor groepen waarnemingen.

T.J. Terpstra.

1952

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A M S T E R D A M - O.

Statistische Afdeling.
S 73 (M 28)

Een parametervrije toets tegen trend voor groepen waarnemingen[1)]

door T.J. Terpstra.

Januari 1952.

Wij beschouwen het geval, dat h onafhankelijke steekproeven van h stochastische grootheden gegeven zijn:

$x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n_1}$ van de grootheid $\underline{x}_1$,

$x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,n_2}$ " " " $\underline{x}_2$,

. . . .

$x_{h,1}, x_{h,2}, \ldots, x_{h,n_h}$ " " " $\underline{x}_h$.

De uitgebreidheden van de steekproeven zijn dus $n_1, n_2, \ldots, n_h$ en de eerste index van de waarneming $x_{i,j}$ geeft aan uit welke steekproef deze waarneming afkomstig is, terwijl de tweede index het nummer der waarneming binnen die steekproef aangeeft.

De hypothese H_o, die wij wensen te toetsen luidt, dat al deze waarnemingen van dezelfde stochastische grootheid afkomstig zijn. Anders uitgedrukt: H_o houdt in, dat de stochastische grootheden $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_h$ onderling onafhankelijk verdeeld zijn en alle dezelfde waarschijnlijkheidsverdeling bezitten.

De alternatieve hypothese, waartegen wij H_o wensen te toetsen, is, dat de rij grootheden $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_h$ een (stijgende of dalende) trend vertonen. Een precieze definitie van "trend" zullen wij hier niet geven. Grofweg komt een stijgende trend hierop neer, dat van twee waarnemingen, één van $\underline{x}_i$ en één van de meer naar rechts in de rij voorkomende grootheid $\underline{x}_j$ (dus $j > i$), de laatste meer kans heeft om groter te zijn dan de eerste, dan andersom. Dit behoeft, strikt genomen , niet voor iedere i en j met $i < j$ te gelden, maar slechts voor het merendeel van dergelijke paren, maar daar gaan wij nu niet nader op in. Een analoge definitie geldt voor dalende trend.

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

De toetsingsgrootheid T wordt nu als volgt gedefiniëerd: Tel het aantal waarnemingen uit de 2^e, 3^e, ..., h^e steekproef, dat kleiner is dan $x_{1,1}$ (bij gelijkheid tellen wij $\frac{1}{2}$ in plaats van 1) en noem dit aantal $v_{1,1}$. Voer dezelfde telling uit voor $x_{1,2}$, $x_{1,3}$, ..., x_{1,n_1} en noem de gevonden aantallen $v_{1,2}$, ..., v_{1,n_1}. Noem de som van deze aantallen V_1:

$$V_1 = v_{1,1} + v_{1,2} + \dots + v_{1,n_1}.$$

Tel vervolgens het aantal waarnemingen uit de 3^e, 4^e, ..., h^e steekproef, dat kleiner is dan $x_{2,1}$ (weer $\frac{1}{2}$ tellen bij gelijkheid) en noem dit $v_{2,1}$; analoog $v_{2,2}$, ..., v_{2,m_2} en noem

$$V_2 = v_{2,1} + \dots + v_{2,n_2}.$$

Bij deze tweede stap wordt dus de eerste steekproef buiten beschouwing gelaten. Bij de derde stap laten wij de eerste twee steekproeven buiten beschouwing en bepalen

$$V_3 = v_{3,1} + \dots + v_{3,n_3}$$

op analoge wijze. Dit wordt voortgezet tot en met

$$V_{h-1} = v_{h-1,1} + \dots + v_{h-1,n_{h-1}},$$

die uit de laatste twee steekproeven wordt bepaald. De toetsingsgrootheid is nu

$$T = V_1 + V_2 + \dots + V_{h-1}.$$

Deze grootheid kan dus kortweg gedefiniëerd worden als het aantal paren $(x_{i,a}, x_{j,b})$ met $i < j$ en a en b willekeurig[2), waarvoor $x_{i,a} > x_{j,b}$ is, vermeerderd met de helft van die paren, waarvoor $x_{i,a} = x_{j,b}$ is.

Het is duidelijk, dat T vooral grote waarden zal aannemen, indien er een dalende en kleine, indien er een stijgende trend is. Beschouwen wij de verzameling van alle bij het experiment mogelijke uitkomsten, dan bezit $\underline{T}$ op deze verzameling een waarschijnlijkheidsverdeling (vandaar de onderstreping van de letter T). Indien de hypothese H_o, inhoudende, dat alle waarnemingen van dezelfde stochastische grootheid afkomstig zijn, juist is, geldt voor deze waarschijnlijkheidsverdeling het volgende:

1. $\underline{T}$ is bij benadering normaal verdeeld.
2. Het gemiddelde van deze verdeling is:

2) Met uiteraard $1 \leq i < h$, $1 < j \leq h$, $1 \leq a \leq n_i$ en $1 \leq b \leq n_j$.

$$\mu = E(\underline{T}|H_o) = \tfrac{1}{4}\,(N^2 - \sum_{i=1}^{h} n_i^{\,2})$$

en de spreidingskwadraat is

$$\sigma^2 = \sigma^2(\underline{T}|H_o) = \frac{1}{72}\left\{N(N+1)(2N+1) - \sum_{i=1}^{h} n_i(n_i+1)(2n_i+1)\right\}$$

met

$$N = \sum_{i=1}^{h} n_i .$$

De (tweezijdige) toets bestaat nu daarin, dat men H_o verwerpt, indien de gevonden waarde T van $\underline{T}$ te sterk van μ afwijkt, d.w.z. als

$$\frac{T-\mu}{\sigma} > \xi_\alpha \quad , \qquad 3)$$

waarin α de onbetrouwbaarheidsdrempel is en ξ_α volgt uit

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\alpha ,$$

en in een tabel van de normale verdeling kan worden opgezocht.

De (tweezijdige) overschrijdingskans k, behorende bij T, is gedefiniëerd als

$$k = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\left|\frac{T-\mu}{\sigma}\right|}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \qquad 3)$$

en kan dus ook in een tabel van de normale verdeling worden gevonden. Bij éénzijdige toetsing wordt α door 2α vervangen, resp. k gehalveerd.

Opmerkingen.

1. De boven voor σ^2 gegeven formule geldt eigenlijk alleen, indien er geen gelijke waarnemingen zijn. Als er wel gelijke waarnemingen zijn, kan σ^2 op de volgende wijze gecorrigeerd worden. Beschouw alle waarnemingen tezamen; zijn er k groepen van gelijke waarnemingen onder, die resp. $m_1, m_2, \ldots, m_k$ elementen

3) Deze formules berusten op de normale benadering van de verdeling van $\underline{T}$, als H_o vervuld is. De exacte verdeling van $\underline{T}$ onder H_o is slechts voor enkele gevallen ($h = 2$ en $n_i \leq 10$, of $n_i = 1$ voor $i = 1, \ldots, h$ en $h \leq 40$) bekend.

bevatten, dan wordt de reeds berekende σ^2 verminderd met het volgende bedrag:

$$^{1)}\quad \frac{1}{72}\sum_{j=1}^{k} m_j\,(m_j-1)(2m_j+5)\ +$$
$$-\ \frac{1}{36N(N-1)(N-2)}\left\{\sum_{i=1}^{h} n_i(n_i-1)(n_i-2)\right\}\left\{\sum_{j=1}^{k} m_j(m_j-1)(m_j-2)\right\}+$$
$$-\ \frac{1}{8N(N-1)}\left\{\sum_{i=1}^{h} n_i(n_i-1)\right\}\cdot\left\{\sum_{j=1}^{k} m_j(m_j-1)\right\}\ .$$

Deze correctie is steeds negatief en is, als de m_j niet te groot zijn, in het algemeen klein, zodat het dan van weinig belang is de berekening uit te voeren.

2. Strikt genomen is de geldigheid van de toets alleen bewezen voor het geval, dat er geen gelijke waarnemingen zijn. Zijn er wel gelijken, dan is het n.l. niet bekend, of de normale benadering nog goed is.

3. De toets is een toepassing van Kendall's theorie over de rangcorrelatiecoëfficiënt τ en kan anderzijds beschouwd worden als een generalisatie van Wilcoxon's toets voor het probleem van twee steekproeven.

1) Deze formule kan geschreven worden met behulp van combinaties. Daar er tafels bestaan van combinaties is deze schrijfwijze waarschijnlijk iets eenvoudiger:

Verminder de σ^2_{kz} met:

$$\frac{1}{6}\left[1-\frac{\sum_{i=1}^{h}\binom{n_i}{3}}{\binom{N}{3}}\right]\cdot\sum_{j=1}^{k}\binom{m_j}{3}-\frac{1}{4}\left[1-\frac{\sum_{i=1}^{h}\binom{n_i}{2}}{\binom{N}{2}}\right]\cdot\sum_{j=1}^{k}\binom{m_j}{2}.$$

Litt.:

T.J. Terpstra: The asymptotic Normality and Consistency of Kendall's Test against Trend, when Ties are present in one ranking.

Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet. A 55, Indag. Math. 14 (1952), pp 327-333