STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

S 73 (M 38)

Een zuivere toets voor de hypothese $\sigma = \sigma_0$ bij een steekproef uit een normale verdeling met onbekend gemiddelde.

Mathematisch Centrum
Amsterdam
Statistische Afdeling
S 73 (M 38)

Een zuivere toets voor de hypothese $\sigma = \sigma_0$ bij een steekproef uit een normale verdeling met onbekend gemiddelde [1].

Gegeven zij een steekproef $x_1, \cdots, x_N$ uit een normale collectie [2] met gemiddelde μ en spreiding σ, die beide onbekend zijn. De te toetsen hypothese H_0 is $\sigma = \sigma_0$; de alternatieve hypothesen houden in $\sigma \neq \sigma_0$.

Onder een zuivere toets voor een hypothese H_0 wordt verstaan een toets, waarbij de kans om H_0 te verwerpen minimaal is wanneer H_0 juist is.

J.W. FERTIG [1] heeft met behulp van de theorie van NEYMAN en PEARSON [2] een zuivere toets afgeleid voor het bovenbeschreven geval. Als toetsingsgrootheid wordt hierbij gebruikt (in de notatie van Fertig):

$$\underline{\tau} = \underline{v}^{\frac{N-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\underline{v}},$$

waarin

$$\underline{v} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\underline{x}_i - \underline{\bar{x}})^2}{\sigma_0^2},$$

met

$$\underline{\bar{x}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \underline{x}_i .$$

Onder alle alternatieve hypothesen, dus zowel voor $\sigma > \sigma_0$ als voor $\sigma < \sigma_0$, zullen de kleinere waarden van $\underline{\tau}$ waarschijnlijker worden dan onder $H_0 : \sigma = \sigma_0$. Bij de toetsing wordt dan ook $\underline{\tau} \leqq \tau_1$ als kritieke zône gebruikt, waarbij τ_1 voldoet aan

$$P[\underline{\tau} \leqq \tau_1 | H_0] = \alpha,$$

als α de gekozen onbetrouwbaarheidsdrempel van de toets is.

----

1) Dit momorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of naar volledige exactheid.

2) D.w.z. $x_1, \cdots, x_N$ zijn onderling onafhankelijke waarnemingen van een grootheid $\underline{x}$, die een normale verdeling bezit, dus waarvoor geldt:

$$P[\underline{x} \leq x] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-\mu)^2} du .$$

FERTIG geeft een tabel van de overschrijdingskansen[3] (benaderd) bij verschillende waarden van $\underline{\tau}$ en voor een opklimmend aantal vrijheidsgraden $n = N-1$ van 1 tot en met 50. Voor het gebruik van deze tabel is het niet nodig de waarde van $\underline{\tau}$ te berekenen, daar Fertig voor de tabel in plaats van τ de waarde van

$$\underline{k} = {}^{10}\log\left(\frac{e^{v/N-1}}{v/N-1}\right)$$

gebruikte.

Ter vereenvoudiging van de uitvoering der toets geeft Fertig een grafiekje waaruit bij een gevonden waarde van $v/N-1$ direct de bijbehorende waarde van $\underline{k}$ kan worden afgelezen.

Opmerking. NEYMAN en PEARSON [2] vermelden reeds, dat de gebruikelijke toets bij het bovenbeschreven probleem onzuiver is. Deze toets is gebaseerd op $\underline{v}$ en gebruikt een tweezijdige kritieke zône: $\underline{v} \leq v_1$ en $\underline{v} \geq v_2$, waarbij voor v_1 en v_2 geldt:

$$P[\underline{v} \leq v_1 | H_0] = P[\underline{v} \geq v_2 | H_0] = \tfrac{1}{2}\alpha,$$

wanneer we α als onbetrouwbaarheidsdrempel van de toets kiezen.

Litteratuur.

[1] J.W. Fertig, A test of a sample variance based on both tail ends of the distribution. Ann. of Math.Stat., VIII (1937), pp 193-205 (met tabel).

[2] J. Neyman, E.S. Pearson, Contributions to the theory of testing statistical hypotheses. Stat. Res. Mem., I (1936), pp 1-37 en II (1938), pp 25-57.

----

3) De overschrijdingskans bij een gevonden waarde τ van $\underline{\tau}$ is de kans dat deze of een kleinere waarde van $\underline{\tau}$ gevonden zal worden, indien H_0 juist is.