STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

S 139 (M 48)

Toets tegen verloop voor een aantal kansen

A. Benard
en
Constance van Eeden

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
Amsterdam-O.

Statistische Afdeling
Rapport S 139 (M 48)
door
A.Benard
en
Constance van Eeden.

Toets tegen verloop voor een aantal kansen.[1]

Deze toets kan worden toegepast in het volgende geval: $R_i (i = 1,2,\ldots,k)$ zijn k onafhankelijke reeksen van onafhankelijke experimenten, waarbij ieder experiment één der mogelijke uitkomsten: succes of mislukking heeft. Bestaat de i^e reeks uit t_i experimenten, treedt hierbij $\underline{n}_i$ maal de uitkomst: succes op en stellen wij $\underline{m}_i = t_i - \underline{n}_i$, dan kunnen wij de resultaten als volgt samenvatten:

reeks no.	aantal malen		aantal experimenten
	succes	mislukking	
1	$\underline{n}_1$	$\underline{m}_1$	t_1
2	$\underline{n}_2$	$\underline{m}_2$	t_2
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
k	$\underline{n}_k$	$\underline{m}_k$	t_k
totaal	$\underline{n}$	$\underline{m}$	N

Hierin zijn $\underline{n}_i$ en $\underline{m}_i$ $(i = 1,2,\ldots,k)$, $\underline{n}$ en $\underline{m}$ stochastisch, terwijl t_i $(i = 1,2,\ldots,k)$ en N gegeven getallen zijn.

Is nu bij ieder experiment van de i^e reeks de kans op succes p_i (en dus de kans op mislukking $q_i = 1 - p_i$), dan luidt de hypothese H_0, die we willen toetsen:

$$H_0 \ : \ p_1 = p_2 = \ldots\ldots\ldots = p_k ,$$

terwijl de alternatieve hypothesen inhouden, dat $p_1, p_2, \ldots, p_k$ in deze volgorde een stijgend of dalend verloop vertonen.

De toets wordt nu voorwaardelijk uitgevoerd onder de voorwaarde dat $\underline{n}$ en $\underline{m}$ de bij het experiment gevonden waarden n en m aannemen.

Wij kunnen nu de N waarnemingen opvatten als n waarnemingen van een stochastische grootheid $\underline{x}$ en m van een stochastische

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

grootheid y, waarbij x en y beide een discrete verdeling bezitten en de waarden $1, 2, \ldots, k$ aannemen. In de twee steekproeven heeft x n_i maal de waarde i aangenomen, terwijl bij y deze waarde m_i maal is opgetreden.

Stellen we nu de kans dat x de waarde i aanneemt p_i' en de kans dat y deze waarde aanneemt p_i'' dan geldt, als H_0 juist is

$$p_i' = \frac{t_i}{N} \qquad\qquad p_i'' = \frac{t_i}{N}, \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, k)$$

dus:

$$p_i' = p_i'' \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, k)$$

en dit kunnen we toetsen door de toets van WILCOXON (zie memorandum S 47 (M 7)) toe te passen op de twee steekproeven van x en y. Omgekeerd geldt ook dat, als $p_i' = p_i''$ voor iedere i, de hypothese H_0 vervuld is.

Indien de kansen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ een stijgend verloop vertonen, dan zullen wij bij de waarnemingen van x weinig kleine en veel grote vinden, terwijl bij die van y veel kleine en weinig grote zullen optreden, zodat dus de twee steekproeven van x en y systematisch zullen gaan verschillen. Hieruit zien we dat de alternatieve hypothesen waartegen wij H_0 willen toetsen overeenstemmen met de alternatieven van de toets van WILCOXON, zodat dus een verloop in de p's inderdaad door toepassing van de toets van WILCOXON aangetoond zal kunnen worden.

Opmerking.

Men kan gemakkelijk bewijzen dat de bovenbeschreven toets voor de hypothese

$$H_0 \;:\; p_1 = p_2 = \ldots\ldots = p_k$$

identiek is met de door T.J.TERPSTRA gegeven toets tegen verloop voor groepen waarnemingen (zie memorandum S 73 (M 28) en de opgegeven literatuur), waarbij dan iedere reeks R_i een groep van waarnemingen is, die ieder de waarde 0 of 1 bezitten.

Literatuur.

Terpstra, T.J., The asymptotic normality and consistency of Kendall's test against trend, when ties are present in one ranking, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet., A 55 (1952).