STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

S 145 (M 55)

Toets voor een generalisatie van het probleem van m rangschikkingen

A Benard en Ph. van Elteren.

MATHEMATICSCH CENTRUM,
2e Boerhaavestraat 49,
A m s t e r d a m - O.
Statistische Afdeling.
S 145(M 55)

Toets voor een generalisatie van het probleem van m rangschikkingen van A. Benard en Ph. van Elteren.[1]

1. Gegeven zijn m waarnemers, die ieder waarnemingen verrichten bij n objecten. Deze waarnemingen kunnen betrekking hebben op dezelfde, of op verschillende grootheden, doch iedere waarnemer meet slechts één grootheid. Het aantal metingen door de μ-de waarnemer verricht bij het ν-de object stellen wij voor door $k_{\mu\nu}$ ($\mu = 1, \ldots, m$; $\nu = 1, \ldots, n$). In dit memorandum wordt een verdelingsvrije methode besproken, om de hypothese H_0 te toetsen, dat alle waarnemingen door éénzelfde waarnemer verricht, beschouwd kunnen worden als een steekproef uit éénzelfde waarschijnlijkheidsverdeling, terwijl de metingen van de verschillende waarnemers onderling onafhankelijk zijn. Deze toets reageert op alternatieven, waarbij de waarnemingen door iedere waarnemer verricht, afkomstig zijn uit verschillende waarschijnlijkheidsverdelingen, corresponderend met de objecten. De gemiddelden (of andere plaatsbepalende parameters) van deze waarschijnlijkheidsverdelingen moeten bovendien een voor de verschillende objecten enigszins overeenstemmend verloop vertonen. De toets is een verdelingsvrij analogon voor de toets tegen een hoofdeffect in de variantieanalyse met twee classificaties.

Voor het geval, dat álle aantallen $k_{\mu\nu} = 1$ zijn, kan de gewone methode van m rangschikkingen (zie memorandum S47(M 14)) worden toegepast. Bij de hier te behandelen generalisatie wordt toegelaten, dat $k_{\mu\nu}$ een willekeurig positief getal of 0 is.

2. Voor de berekening van de toetsingsgrootheid gaat men als volgt te werk:

a) De waarnemingen worden, voor iedere waarnemer afzonderlijk, gerangschikt naar opklimmende grootte en voorzien van rangnummers. Als de μ -de waarnemer in totaal $k_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} k_{\mu\nu}$ waarnemingen verricht, en alle waarnemingen zijn ongelijk, dan vormen de toegekende rangnummers dus een permutatie van de getallen $1, \ldots, k_\mu$. Als t waarnemingen van één waarnemer onderling gelijk zijn, doch ongelijk aan de overige van die waarnemer, dan worden de rangnummers van die waarnemingen onderling gelijk en wel het gemid-

1) Dit memorandum dient slechts ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

delde van de rangnummers die ze gekregen zouden hebben, als ze ongelijk geweest waren, doch overigens in de rangschikking dezelfde plaats ingenomen hadden. De verkregen rangnummers duiden wij aan met $\underline{r}_{\mu\nu\kappa}$, de index μ heeft betrekking op de waarnemer (dus $\mu = 1, \ldots, m$), de index ν op het waargenomen object ($\nu = 1, \ldots, n$), de index κ onderscheidt de waarnemingen van waarnemer μ met betrekking tot object ν onderling (dus $\kappa = 1, \ldots, k_{\mu\nu}$).

b) Voor iedere μ worden de door waarnemer μ toegekende rangnummers verminderd met hun gemiddelde $\frac{1}{2}(k_\mu + 1)$. De verkregen verschillen worden gereduceerde rangnummers genoemd en aangeduid met $\underline{\tilde{r}}_{\mu\nu\kappa}$. Er geldt dus:

$$\underline{\tilde{r}}_{\mu\nu\kappa} = \underline{r}_{\mu\nu\kappa} - \frac{1}{2}(k_\mu + 1).$$

c) Men sommeert voor iedere μ en ν de reduceerde rangnummers van de waarnemingen van waarnemer μ betreffende object ν. Deze som wordt aangeduid met $\underline{\tilde{u}}_{\mu\nu}$. Er geldt dus:

$$\underline{\tilde{u}}_{\mu\nu} = \sum_{\kappa=1}^{k_{\mu\nu}} \underline{\tilde{r}}_{\mu\nu\kappa}.$$

Voor het geval dat $k_{\mu\nu} = 0$ is, wordt $\underline{\tilde{u}}_{\mu\nu} = 0$ gesteld.

d) Men sommeert nu voor iedere ν, de gevonden waarden $\underline{\tilde{u}}_{\mu\nu}$ over μ. De verkregen totalen, die kolom-totalen genoemd worden, worden aangeduid met $\underline{\tilde{u}}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$). Er geldt dus:

$$\underline{\tilde{u}}_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} \underline{\tilde{u}}_{\mu\nu}.$$

$\underline{\tilde{u}}_\nu$ is dus de som van de gereduceerde rangnummers met betrekking tot object ν.

e) Zij nu $g_{\mu t}$ het aantal groepen van t gelijke waarnemingen verricht door waarnemer μ, ($g_{\mu 1}$ dus het aantal waarnemingen gelijk aan geen der andere), dan wordt berekend voor iedere μ:

$$K_\mu = \frac{k_\mu^3 - \sum_t t^3 g_{\mu t}}{12\, k_\mu (k_\mu - 1)}.$$

De sommatie in de teller strekt zich uit over alle waarden van t, die bij waarnemer μ voorkomen.

Steeds geldt $\sum_t g_{\mu t} = k_\mu$. Als alle waarnemingen ongelijk zijn, dus als $g_{\mu t} = 0$ is voor $t > 1$, geldt:

$$K_\mu = \frac{1}{12}(k_\mu + 1).$$

f) Nu berekent men de covariantie-matrix der kolomtotalen, die dus de elementen $\sigma_{\nu\nu'} = \mathcal{E}\, \underline{\tilde{u}}_\nu \underline{\tilde{u}}_{\nu'}$ heeft: ($\nu = 1, \ldots, n$; $\nu' = 1, \ldots, n$).

Er geldt:

Er geldt:

als $\nu \neq \nu'$: $\sigma_{\nu\nu'} = - \sum_{\mu=1}^{m} k_{\mu\nu} k_{\mu\nu'} K_{\mu}$

en $\sigma_{\nu\nu} = \sum_{\mu=1}^{m} k_{\mu\nu} (k_{\mu} - k_{\mu\nu}) K_{\mu}$.

g) Men laat nu uit deze matrix de n-de rij en de n-de kolom weg.[2] De absolute waarde van de determinant van de verkregen matrix duiden wij aan met Δ. Er geldt dus:

$$\Delta = \left| \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n-1,1} & \cdots & \sigma_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \right| .$$

Het geval, dat $\Delta = 0$ is, dat zich alleen kan voordoen als een groot aantal der $k_{\mu\nu} = 0$ zijn, zullen wij hier niet beschouwen.

h) Als $\Delta > 0$ is, berekenen wij:

$$\Delta_{\underline{u}} = \left| \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1,n-1} & \underline{\tilde{u}}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n-1,1} & \cdots & \sigma_{n-1,n-1} & \underline{\tilde{u}}_{n-1} \\ \underline{\tilde{u}}_1 & \cdots & \underline{\tilde{u}}_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \right| .$$

k) Als toetsingsgrootheid wordt nu gebruikt:

$$\underline{\chi}_n^2 = \frac{\Delta_u}{\Delta} .$$

3. De toetsingsgrootheid $\underline{\chi}_n^2$ heeft onder de hypothese H_0 bij benadering een χ^2-verdeling met $n-1$ vrijheidsgraden, o.a. in de volgende gevallen:

a) Iedere waarnemer heeft een betrekkelijk groot aantal waarnemingen bij ieder object verricht en deze aantallen lopen niet te sterk uiteen.

b) De aantallen $k_{\mu\nu}$ zijn klein, n is klein in verhouding tot m, en

$$\frac{\Delta}{\prod_{\nu=1}^{n} \sigma_{\nu\nu}}$$

ligt niet te dicht bij 0.

----

2) In feite doet het er niet toe welke rij en welke kolom weggelaten wordt.

4. De berekening van Δ en $\Delta_{\underline{u}}$ is in het algemeen een omslachtig werk. Wij geven daarom een aantal bijzondere gevallen, waarbij deze berekening eenvoudiger is. Het aantal vrijheidsgraden der toetsingsgrootheid is steeds $n-1$:

a. <u>n = 3</u>
Er geldt:
$$\underline{\chi}_n^2 = \frac{\sigma_{23}\,\tilde{\underline{u}}_1^2 + \sigma_{31}\,\tilde{\underline{u}}_2^2 + \sigma_{12}\,\tilde{\underline{u}}_3^2}{\sigma_{12}\sigma_{23} + \sigma_{31}\sigma_{12} + \sigma_{23}\sigma_{31}}\,.$$

b. De aantallen $k_{\mu\nu}$ kunnen steeds geschreven worden als een product:

$$k_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu\,,$$

waarbij a_μ een constante is voor waarnemer μ en b_ν een constante voor object ν.
Er geldt dan, als $b = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu$:

$$\underline{\chi}_n^2 = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\tilde{\underline{u}}_\nu^2}{b_\nu}}{b \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^2 K_\mu}$$

met $K_\mu = \dfrac{k_\mu^3 - \sum_t t^3 g_{\mu t}}{12\,k_\mu (k_\mu - 1)}$. (zie 2. e))

In het bijzonder geldt, als alle waarnemingen ongelijk zijn:

$$\underline{\chi}_n^2 = \frac{12 \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\underline{u}}_\nu^2 / b_\nu}{b \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^2 (a_\mu b + 1)}\,.$$

c. Als in het vorige geval alle b_ν gelijk zijn, dus $b_\nu = \frac{1}{n}$ geldt:

$$\underline{\chi}_n^2 = \frac{n \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\underline{u}}_\nu^2}{b^2 \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^2 K_\mu}$$

of als er geen gelijke waarnemingen zijn:

$$\underline{\chi}_n^2 = \frac{12\, n \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\underline{u}}_\nu^2}{b^2 \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu^2 (a_\mu b + 1)}\,.$$

d. Als tenslotte alle aantallen $k_{\mu\nu}$ gelijk zijn, dus $k_{\mu\nu} = k$ voor $\mu = 1, \ldots, m$; $\nu = 1, \ldots, n$:

$$\underline{\chi}_n^2 = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \tilde{\underline{u}}_\nu^2}{n k^2 \sum_{\mu=1}^{m} K_\mu}$$

of als alle waarnemingen ongelijk zijn:

$$\chi_r^2 = \frac{12 \sum_{\nu} \tilde{u}_\nu^2}{m n h^2 (n h + 1)} .$$

e. Als alle $k_{\mu\nu} = 1$ zijn verkrijgen wij uit de laatste formule ($h = 1$):

$$\chi_r^2 = \frac{12 \sum_{\nu} \tilde{u}_\nu^2}{m n (n + 1)} .$$

Deze formule komt overeen met de formule vermeld bij de χ^2-benadering voor de methode van m rangschikkingen (zie memorandum S 47 (M 14)).

f. Als $n = 2$ geldt $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma^2$; $\tilde{u}_1^2 = \tilde{u}_2^2 = \tilde{u}^2$
en:

$$\chi_r^2 = \frac{\tilde{u}^2}{\sigma^2} .$$

$\chi_r = \frac{\tilde{u}}{\sigma}$ is dus bij benadering normaal verdeeld, met gemiddelde 0 en spreiding 1.

De toets gaat dan over in een combinatie van een aantal on afhankelijke toetsen van Wilcoxon. (verg.: Mem. S 47 (M 7) en S 102 (M 17b)).

g. Als alle $k_{\mu\nu}$ gelijk zijn aan 0 of 1, als $k_\mu = k$ voor iedere μ en als voor ieder paar objecten ν en ν' geldt:

$$\sum_{\mu=1}^{m} k_{\mu\nu} k_{\mu\nu'} = \lambda \qquad (\lambda \text{ constant}),$$

zodat alle waarnemers evenveel objecten waarnemen en alle paren objecten precies door λ waarnemers vergeleken worden, geldt :

$$\chi_r^2 = \frac{12 \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{u}_\nu^2}{n \lambda (k + 1)} .$$

mits er geen gelijke waarnemingen in het systeem voorkomen.

Literatuur:

A. Benard en Ph. van Elteren, A generalization of the method of m rankings, Proc.Kon.Ned.Ak. van Wetensch. A 56 (1953) p. 358-369, Indagationes Mathematicae 15 (1953) p. 358-369.