MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig
Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 160(M 57)

Schattingsmethoden voor overlevingskansen.

II Schattingsmethode volgens LESLIE en CHITTY voor een willekeurig aantal waarnemingsreeksen.

door

Gerda Klerk-Grobben

1954

1. Inleiding.[1)]

De in dit memorandum beschreven schattingsmethoden zijn afkomstig van P.H. LESLIE en D. CHITTY: "The estimation of population parameters from data obtained by means of the capture-recapture method I.Maximum likelihood equations for estimating the death-rate." Biometrika, 38 (1951), p. 269-292.

Voor de opbouw van het waarnemingsmateriaal en een beschrijving van de gebruikte grootheden verwijzen wij naar het eerste memorandum in deze serie S 160(M 54). Hierin definiëerden wij:

$r_{j_1 j_2 \cdots j_k ; i}$ $\overset{def}{=}$ het aantal in jaar i gevangen dieren dat ook in de jaren $j_1, \ldots, j_k$ gevangen werd

en

$\rho_{j_1 \cdots\cdots j_k ; i}$ $\overset{def}{=}$ de verwachting van het aantal dieren, dat in jaar i in de populatie aanwezig is, van de dieren die in de jaren $j_1, \ldots\ldots, j_k$ gevangen werden.

De schema's I en II uit dat memorandum zullen wij opnieuw geven, nu voor 4 opeenvolgende jaren.

Schema I. Specificatie van de aantallen gevangen dieren in 4 opeenvolgende jaren.

jaar	0	1	2	3
aantal eerste vangsten	u_0	u_1	u_2	u_3
aantal herhaalde vangsten		r_{01}	r_{02} r_{12} r_{012}	r_{03} r_{13} r_{23} r_{013} r_{023} r_{123} r_{0123}
totaal aantal herh. vangsten		s_1	s_2	s_3
totale vangst	$R_0 = u_0$	$R_1 = u_1 + s_1$	$R_2 = u_2 + s_2$	$R_3 = u_3 + s_3$

1) Dit memorandum is slechts bedoeld als oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

<u>Schema II</u> Verwachtingen van de aantallen één of meer keren gevangen dieren in de populatie in 4 opeenvolgende jaren.

Jaar	0	1	2	3
verwachtingen		$\rho_{0;1} = \theta u_0$	$\rho_{0;2} = \theta^2 u_0 - \theta \tau_{01}$ $\rho_{1;2} = \theta u_1$ $\rho_{01;2} = \theta \tau_{01}$	$\rho_{0;3} = \theta^3 u_0 - \theta^2 \tau_{01} - \theta \tau_{02}$ $\rho_{1;3} = \theta^2 u_1 - \theta \tau_{12}$ $\rho_{2;3} = \theta u_2$ $\rho_{01;3} = \theta^2 \tau_{01} - \theta \tau_{012}$ $\rho_{02;3} = \theta \tau_{02}$ $\rho_{12;3} = \theta \tau_{12}$ $\rho_{012;3} = \theta \tau_{012}$
totaal		θu_0	$\theta^2 u_0 + \theta u_1$	$\theta^3 u_0 + \theta^2 u_1 + \theta u_2$

Bij uitbreiding tot meer jaren wordt het aantal mogelijke grootheden $\tau_{j_1 \cdots j_k i}$ snel groter (in jaar i zijn er $2^i - 1$ verschillende grootheden mogelijk). Ter bekorting van het verzamelen van de waarnemingen en vooral van de berekeningen stellen LESLIE en CHITTY verschillende samenvoegingen van de waarnemingen voor. Eén hiervan, die, gemeten naar de schatting van de variantie van de maximum likelihood schatting voor de overlevingskans θ, even goed is als de volledige specificatie, zal ook in dit memorandum worden behandeld. Bij deze verkorte specificatie worden de gevangen dieren uitsluitend gerubriceerd volgens het laatste jaar dat ze eerder werden gevangen. Deze aantallen noemen wij m_{ji}, dus:

$$m_{ji} \overset{\text{def}}{=} \text{het aantal van de in jaar } i \text{ gevangen dieren, die voor het laatst in jaar } j \text{ gevangen waren.}$$

Dus b.v.

$$m_{13} = \tau_{13} + \tau_{013} .$$

In Schema III wordt een overzicht van de waarnemingen uit 4 opeenvolgende jaren gegeven volgens deze verkorte specificatie, terwijl Schema IV de verwachtingen geeft van de corresponderende verwachtingen in de populatie: $\mu_{j;i}$.

<u>Schema III.</u> De aantallen gevangen dieren, gerubriceerd volgens het voorlaatste jaar dat ze gevangen werden, in 4 opeenvolgende jaren.

jaar	0	1	2	3
aantal eerste vangsten	u_0	u_1	u_2	u_3
aantal herhaalde vangsten		m_{01}	m_{02} m_{12}	m_{03} m_{13} m_{23}
totaal aantal herh. vangsten		s_1	s_2	s_3
totale vangst	R_0	R_1	R_2	R_3

<u>Schema IV.</u> Verwachtingen van de aantallen een of meer jaren geleden voor het laatst gevangen dieren in de populatie in 4 opeenvolgende jaren.

jaar	0	1	2	3
verwachtingen		$\mu_{0;1} = \theta u_0$	$\mu_{0;2} = \theta^2 u_0 - \theta m_{01}$ $\mu_{1;2} = \theta R_1$	$\mu_{0;3} = \theta^3 u_0 - \theta^2 m_{01} - \theta m_{02}$ $\mu_{1;3} = \theta^2 u_1 - \theta m_{12}$ $\mu_{2;3} = \theta R_2$
totaal		θu_0	$\theta^2 u_0 + \theta u_1$	$\theta^3 u_0 + \theta^2 u_1 + \theta u_2$

De methoden van LESLIE en CHITTY zijn gebaseerd op de <u>onderstellingen</u> 1), 2) en 3b) genoemd in het vorige memorandum (M 54), nl.

1) de overlevingskans, θ, is in ieder jaar dezelfde en voor ieder dier gelijk,

2) er verdwijnen geen dieren door emigratie en

3b) de vangkans is per jaar voor ieder dier gelijk (g_i), maar mag van jaar tot jaar variëren.

2. <u>Schattingsmethode volgens LESLIE en CHITTY.</u>

In memorandum S 160 (M 54) werd reeds het principe van de methode van LESLIE en CHITTY uiteengezet. Dit principe is: nemen wij aan dat inderdaad elk jaar de verschillende aantallen <u>in de populatie</u> gelijk zijn aan hun verwachtingen, gegeven in Schema IV en IV, dan zullen de in een jaar i te vangen aantallen een voorwaardelijke multinomiale waarschijnlijkheidsverdeling bezitten met als kansen de verwachtingen gedeeld door het totaal van de verwachtingen in dat jaar (zie Schema II en IV) en onder voorwaarde $\underline{s}_i = s_i$ en alle in de vorige jaren gevangen aantallen.

Bij de volledig gespecificeerde waarnemingen vinden wij zo: voor jaar $i=2$ (dit was geval 2) uit memorandum M 54):

$$P_2 = P\left[\underline{r}_{012} = r_{012},\ \underline{r}_{02} = r_{02},\ \underline{r}_{12} = r_{12} \,\middle|\, \underline{s}_2 = s_2 ;\ \underline{u}_0 = u_0,\ \underline{u}_1 = u_1,\ \underline{r}_{01} = r_{01}\right] =$$

$$= \frac{s_2\,!}{r_{02}!\,r_{12}!\,r_{012}!} \left(\frac{\theta^2 u_0 - \theta r_{01}}{\theta^2 u_0 + \theta u_1}\right)^{r_{02}} \left(\frac{\theta u_1}{\theta^2 u_0 + \theta u_1}\right)^{r_{12}} \left(\frac{\theta r_{01}}{\theta^2 u_0 + \theta u_1}\right)^{r_{012}} = C_2\, \frac{(\theta u_0 - r_{01})^{r_{02}}}{(\theta u_0 + u_1)^{s_2}},$$

voor jaar $i=3$:

$$P_3 = C_3\, \frac{(\theta^2 u_0 - \theta r_{01} - r_{02})^{r_{03}} (\theta u_1 - r_{12})^{r_{13}} (\theta r_{01} - r_{012})^{r_{013}}}{(\theta^2 u_0 + \theta u_1 + u_2)^{s_3}},$$

enz. voor latere jaren; voor jaar 1 geldt $P_1 = 1$. De constanten C_2, C_3 enz. zijn onafhankelijk van θ.

Daar deze waarschijnlijkheden steeds berekend worden onder voorwaarde van alle in de vorige jaren gevonden aantallen zijn ze voor de verschillende jaren onderling onafhankelijk. De voorwaardelijke waarschijnlijkheid voor de jaren 1 tot en met t tezamen is dus het product van de kansen P_i, dus $\prod_{i=1}^{t} P_i$.

De enige onbekende in deze uitdrukking is de overlevingskans θ.

De meest aannemelijke schatting $\hat{\theta}$ voor θ is nu die waarde van θ welke $\prod P_i$ maximaal maakt, of, wat op hetzelfde neerkomt, $L \overset{\text{def.}}{=} \ln \prod_{i=1}^{t} P_i$ maximaal maakt. Voor $\hat{\theta}$ geldt dus:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \theta}\right]_{\theta=\hat{\theta}} = \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln P_i\right]_{\theta=\hat{\theta}} = 0 .$$

Uitsluitend om bij de berekeningen meer regelmatige formules te verkrijgen, wordt deze vergelijking nog met $\hat{\theta}$ vermenigvuldigd, zodat $\hat{\theta}$ moet worden opgelost uit:

$$\hat{\theta}\left[\frac{\partial L}{\partial \theta}\right]_{\theta=\hat{\theta}} = 0 .$$

Wij zullen de optredende vergelijking voor $t=4$ (dus voor de jaren 1 tot en met 4) zo opschrijven, dat hieruit de generalisatie tot meer jaren duidelijk zal zijn:

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad \hat{\theta}\left[\frac{\partial L}{\partial \theta}\right]_{\theta=\hat{\theta}} = {} & \frac{\hat{\theta}^3 u_0}{\hat{\theta}^3 u_0 - \hat{\theta}^2 \tau_{01}}\,\tau_{02} + \frac{2\hat{\theta}^3 u_0 - \hat{\theta}^2 \tau_{01}}{\hat{\theta}^3 u_0 - \hat{\theta}^2 \tau_{01} - \hat{\theta}\tau_{02}}\,\tau_{03} + \frac{3\hat{\theta}^3 u_0 - 2\hat{\theta}^2 \tau_{01} - \hat{\theta}\tau_{02}}{\hat{\theta}^3 u_0 - \hat{\theta}^2 \tau_{01} - \hat{\theta}\tau_{02} - \tau_{03}}\,\tau_{04} + \\
& + \frac{\hat{\theta}^2 u_1}{\hat{\theta}^2 u_1 - \hat{\theta}\tau_{12}}\,\tau_{13} + \frac{2\hat{\theta}^2 u_1 - \hat{\theta}\tau_{12}}{\hat{\theta}^2 u_1 - \hat{\theta}\tau_{12} - \tau_{13}}\,\tau_{14} + \\
& + \frac{\hat{\theta} u_2}{\hat{\theta} u_2 - \tau_{23}}\,\tau_{24} + \\
& + \frac{\hat{\theta}^2 \tau_{01}}{\hat{\theta}^2 \tau_{01} - \hat{\theta}\tau_{012}}\,\tau_{013} + \frac{2\hat{\theta}^2 \tau_{01} - \hat{\theta}\tau_{012}}{\hat{\theta}^2 \tau_{01} - \hat{\theta}\tau_{012} - \tau_{013}}\,\tau_{014} + \\
& + \frac{\hat{\theta}\tau_{12}}{\hat{\theta}\tau_{12} - \tau_{123}}\,\tau_{124} + \\
& + \frac{\hat{\theta}\tau_{02}}{\hat{\theta}\tau_{02} - \tau_{023}}\,\tau_{024} + \\
& + \frac{\hat{\theta}\tau_{012}}{\hat{\theta}\tau_{012} - \tau_{0123}}\,\tau_{0124} + \\
& - \left[\frac{\hat{\theta}^3 u_0}{\hat{\theta}^3 u_0 + \hat{\theta}^2 u_1}\,s_2 + \frac{2\hat{\theta}^3 u_0 + \hat{\theta}^2 u_1}{\hat{\theta}^3 u_0 + \hat{\theta}^2 u_1 + \hat{\theta} u_2}\,s_3 + \frac{3\hat{\theta}^3 u_0 + 2\hat{\theta}^2 u_1 + \hat{\theta} u_2}{\hat{\theta}^3 u_0 + \hat{\theta}^2 u_1 + \hat{\theta} u_2 + u_3}\,s_4\right] = 0
\end{aligned}
$$

Het is niet mogelijk bij een willekeurig aantal jaren een expliciete formule voor $\hat{\theta}$ af te leiden (voor 3 jaren zie: $\hat{\theta}_2$ uit S 160 (M 54)). Wij passen daarom een iteratieproces toe waarbij wij voor enkele gekozen waarden van θ de waarde van $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ berekenen en uit deze uitkomsten door interpolatie de waarde van θ, die $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ zou opleveren, benaderen. Bij een goede keuze zal het in de regel voldoende zijn twee waarden van θ te gebruiken en tussen deze twee lineair te interpoleren. Geeft $\theta = \theta_1$ de waarde $\left[\frac{\partial L}{\partial \theta}\right]_{\theta=\theta_1} = u_1$ en $\theta = \theta_2$ de waarde u_2, dan is bij lineaire interpolatie:

$$
(2)\qquad \hat{\theta}_5 = \theta_1 + \frac{u_1}{u_1 - u_2}\left(\theta_2 - \theta_1\right)
$$

(wij noemen deze schatting $\hat{\theta}_5$ in aansluiting op memorandum S 160 (M 54) waar wij de afgeleide schattingen met $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_4$ aanduidden).

De nauwkeurigste benadering van de meest aannemelijke schatting zullen wij krijgen indien θ_1 en θ_2 dicht bij elkaar liggen en u_1 en u_2 verschillend van teken zijn.

Voor wij overgaan tot de bespreking van een eenvoudig schema voor de berekening van $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ zullen wij eerst ook bij de verkorte specificatie van de waarnemingen de vergelijking voor de meest aannemelijke schatting geven.
De afleiding hiervan is volkomen analoog aan die bij de volledige specificatie. Met behulp van de schema's III en IV vinden wij, dat voor de meest aannemelijke schatting $\hat{\theta}$ moet gelden:

$$
\begin{aligned}
\hat{\theta}\left[\frac{\partial L}{\partial \theta}\right]_{\theta=\hat{\theta}} = {} & \frac{\hat{\theta}^3 R_0}{\hat{\theta}^3 R_0 - \hat{\theta}^2 m_{01}} m_{02} + \frac{2\hat{\theta}^3 R_0 - \hat{\theta}^2 m_{01}}{\hat{\theta}^3 R_0 - \hat{\theta}^2 m_{01} - \hat{\theta} m_{02}} m_{03} + \frac{3\hat{\theta}^3 R_0 - \hat{\theta}^2 m_{01} - \hat{\theta} m_{02}}{\hat{\theta}^3 R_0 - \hat{\theta}^2 m_{01} - \hat{\theta} m_{02} - m_{03}} m_{04} + \\
& + \frac{\hat{\theta}^2 R_1}{\hat{\theta}^2 R_1 - \hat{\theta} m_{12}} m_{13} + \frac{2\hat{\theta}^2 R_1 - \hat{\theta} m_{12}}{\hat{\theta}^2 R_1 - \hat{\theta} m_{12} - m_{13}} m_{14} + \\
& + \frac{\hat{\theta} R_2}{\hat{\theta} R_2 - m_{23}} m_{24} + \\
& - \left[\frac{\hat{\theta}^3 R_0}{\hat{\theta}^3 R_0 + \hat{\theta}^2 u_1} s_2 + \frac{2\hat{\theta}^3 R_0 + \hat{\theta}^2 u_1}{\hat{\theta}^3 R_0 + \hat{\theta}^2 u_1 + \hat{\theta} u_2} s_3 + \frac{3\hat{\theta}^3 R_0 + 2\hat{\theta}^2 u_1 + \hat{\theta} u_2}{\hat{\theta}^3 R_0 + \hat{\theta}^2 u_1 + \hat{\theta} u_2 + u_3} s_4\right]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

De benadering, $\hat{\theta}_6$, voor de meest aannemelijke schatting voor θ kan ook hier weer door interpolatie tussen twee gekozen waarden gevonden worden volgens formule (2).

3. Rekenschema's ter berekening van $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ voor gegeven waarde van θ.

De berekeningen nodig voor de bepaling van $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ bij een gegeven waarde van θ kunnen steeds voor een gehele regel uit formule (1) of (3) tegelijk worden uitgevoerd.
Het rekenschema voor één regel bestaat uit zes kolommen, waarvan dan de laatste kolom de termen uit de betreffende regel van formule (1) of (3) bevat. De voorschriften voor de berekeningen hebben wij in 4 gedeelten gesplitst (A,B,C en D). De voorschriften voor het vullen van deze kolommen zijn voor de laatste regel van (1) of (3) in deel C en voor elk der overige regels in deel A ondergebracht. In deel B zijn de voorschriften vermeld om te zorgen dat alle regels een beurt krijgen; onder D staat dan

tenslotte de einduitkomst: $\frac{\partial L}{\partial \theta}$.
Wij zullen nu eerst de rekenvoorschriften laten volgen zowel voor de volledige als voor de verkorte specificatie van de waarnemingen. Hierbij moeten wij nog vermelden, dat wij terwille van de overzichtelijkheid de letters $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_t$ gebruikt hebben voor de grootheden $u_0, u_1, \ldots, u_t$ dus: $\tau_0 = u_0$; $\tau_1 = u_1$; ......; $\tau_t = u_t$.
(Deze treden op bij voorschrift 1) als $k = 1$)

Voorschriften voor het berekenen van $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ bij gegeven waarde van θ uit volledig gespecificeerde waarnemingen uit de jaren 0 tot en met t.

A. 1) Schrijf bij een zekere combinatie $j_1, \ldots, j_k$ van de getallen $0, 1, 2, \ldots, t-2$ met $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ in kolom 1 onder elkaar op de aantallen: $\tau_{j_1 j_2 \ldots j_k}$; $\tau_{j_1 j_2 \ldots j_k (j_k+1)}$; ....; $\tau_{j_1 \ldots j_k (t-1)}$.

2) Vermenigvuldig deze aantallen van beneden naar boven met respectievelijk: 1; θ; θ^2; .... enz. (kolom 2).

3) Vorm kolom 3 uit kolom 2 door van boven naar beneden op te schrijven: 1e regel kolom 2; 1e-2e regel kolom 2; 1e-2e-3e regel kolom 2;......enz.

4) Vorm kolom 4 uit kolom 3 door van boven naar beneden op te schrijven: 0; 1e regel kolom 3; 1e+2e regel kolom 3; 1e+2e+3e regel kolom 3;.......enz.

5) Vorm kolom 5 door de getallen uit kolom 4 te delen door de getallen ernaast uit kolom 3.

6) Vorm kolom 6 door de getallen uit kolom 5 van boven naar beneden te vermenigvuldigen met respectievelijk:
1 ; $\tau_{j_1 \ldots j_k (j_k+2)}$; $\tau_{j_1 \ldots j_k (j_k+3)}$; ....; $\tau_{j_1 \ldots j_k t}$,
dus met de aantallen uit de 1e kolom die één regel lager staan (het eerste getal wordt 0!).

B. 7) De bewerkingen uit deel A moeten toegepast worden op alle mogelijke combinaties $j_1 \ldots j_k$ met $j_1 < \ldots < j_k$ van de getallen $0, 1, 2, \ldots, t-2$ waarbij k alle getallen van 1 tot $t-1$ doorloopt.

8) Het totaal van alle zo verkregen kolommen 6 noemen wij T_1.

C. 9) Schrijf nu onder elkaar in kolom 1 de aantallen $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{t-1}$.

10) Als 2)

11) Kolom 3 luidt van <u>boven naar beneden</u>: 1e regel kolom 2; 1e+2e regel kolom 2; 1e+2e+3e regel kolom 2.....enz.

12) Als 4).

13) Als 5).

14) Kolom 6 ontstaat nu uit kolom 5 door de getallen van <u>boven naar beneden</u> te vermenigvuldigen met resp.:1 ; $1 ; s_2 ; s_3 ; \ldots\ldots s_t$ (het eerste getal wordt weer 0).

15) Het totaal van deze kolom 6 noemen wij T_2.

D. 16) $u_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{T_1 - T_2}{\theta}$.

<u>Voorschriften voor het berekenen van $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ bij gegeven waarde van θ bij verkort gespecificeerde waarnemingen uit de jaren 0 tot en met t.</u>

A. 1) Schrijf in kolom 1 de aantallen R_j ; $m_{j(j+1)}$; $m_{j(j+2)}$; .... ; $m_{j(t-1)}$.

2) Vermenigvuldig deze aantallen van <u>beneden naar boven</u> met resp. 1 , θ , θ^2 , ...enz. (kolom 2)

3) Kolom 3 luidt van <u>boven naar beneden</u>: 1e regel kolom 2; 1e-2e regel kolom 2; 1e-2e-3e regel kolom 2;......enz.

4) Kolom 4 is van <u>boven naar beneden</u>: 0 ; 1e regel kolom 3; 1e+2e regel kolom 3; 1e+2e+3e regel kolom 3;.......enz.

5) In kolom 5 staan de overeenkomstige getallen uit kolom 4 gedeeld door die uit kolom 3.

6) Vermenigvuldig de getallen uit kolom 5 van <u>boven naar beneden</u> resp. met: 1; $m_{j(j+2)}$; $m_{j(j+3)}$; ..... ; m_{jt} (kolom 6) (eerste getal wordt 0).

B. 7) De bewerkingen uit A moeten worden uitgevoerd voor $j = 0, 1, \ldots\ldots, t-2$.

8) Het totaal van alle zo verkregen kolommen 6 noemen wij T_1.

C. 9) Kolom 1) luidt: u_0 ; u_1 ; u_2 , ... , u_{t-1}.

10) Als 2).

11) Kolom 3 luidt: 1e regel kolom 2; 1e+2e regel kolom 2; 1e+2e+3e regel kolom 2;......enz.

12) Als 4).

13) Als 5).

14) Vermenigvuldig kolom 5 van boven naar beneden met resp.: $1 ; s_2 ; s_3 ; \ldots\ldots ; s_t$ (kolom 6, eerste getal is 0);

15) Het totaal van deze kolom 6 noemen wij T_2.

D. 16) $u_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{T_1 - T_2}{\theta}$.

Deze voorschriften zullen duidelijk zijn wanneer men ze vergelijkt met Voorbeeld II, waarin wij het rekenschema voor $t=4$ bij verkort gespecificeerde waarnemingen hebben opgesteld. In dit voorbeeld zien wij dat T_1 de som van de positieve termen uit (2) is en T_2 de som van de negatieve.
In voorbeeld I zijn de berekeningen uitgevoerd voor verkort gespecificeerde waarnemingen uit 5 opeenvolgende jaren. (Deze waarnemingen zijn ontleend aan onderzoekingen omtrent de overlevingskansen van de vleermuizensoort Rhinolophus hipposideros uit mergelgroeven van Zuid Limburg door J.W. Sluiter, P.F. van Heerdt en J. Bezem in de jaren 1950-51-52-53-54.

Voorbeeld I. Berekening van een schatting voor de overlevingskans bij verkort gespecificeerde waarnemingen uit 5 opeenvolgende jaren.

Waarnemingen:

jaar	0	1	2	3	4
eerste vangsten	$u_0 = 94$	$u_1 = 116$	$u_2 = 65$	$u_3 = 105$	$u_4 = 55$
herhaalde vangsten.		$m_{01} = 8$	$m_{02} = 3$ $m_{12} = 10$	$m_{03} = 0$ $m_{13} = 4$ $m_{23} = 12$	$m_{04} = 0$ $m_{14} = 2$ $m_{24} = 1$ $m_{34} = 7$
totaal aant. herh. vangsten	0	$s_1 = 8$	$s_2 = 13$	$s_3 = 16$	$s_4 = 10$
totale vangst	$R_0 = 94$	$R_1 = 124$	$R_2 = 78$	$R_3 = 121$	$R_4 = 65$

Berekeningen:

θ = 0,4	1	2	3	4	5	6
R_0 =	94(x0,064) 8(x0,16) 3(x0,4) 0(x1)	6,016 1,28 1,2 0	6,016 4,736 3,536 3,536	0 6,016 10,752 14,288	0 (x1) 1,270(x3) 3,041(x0) 4,041(x0)	0 3,810 0 0
R_1 =	124(x0,16) 10(x0,4) 4(x1)	19,84 4 4	19,84 15,84 11,84	0 19,84 35,68	0 1,2525(x4) 3,0135(x2)	0 5,010 6,027
R_2 =	98(x0,4) 12(x1)	39,2 12	39,2 27,2	0 39,2	0 1,441(x1)	0 1,441
					T_1 =	16,288
u_0 =	94(x0,064) 116(x0,16) 85(x0,4) 105(x1)	6,016 18,56 34,-- 105,--	6,016 24,576 58,576 163,576	0 6,016 30,592 89,168	0 0,2448(x13) 0,5223(x16) 0,5451(x10)	0 3,182 8,357 5,451
θ = 0,37			$u_{0,4} = \frac{T_1 - T_2}{0,4}$ =	$\boxed{-1,755}$	T_2 =	16,990
R_0 =	94(x0,05065) 8(x0,1369) 3(x0,37) 0(x1)	4,761 1,095 1,110 0	4,761 3,666 2,556	0 4,761	0 1,2987(x3) (x0) (x0)	0 3,896 0 0
R_1 =	124(x0,1369) 10(x0,37) 4(x1)	16,976 3,700 4,000	16,976 13,276 9,276	0 16,976 30,252	1,2787(x4) 3,2613(x2)	0 5,115 6,523
R_2 =	98(x0,37) 12(x1)	36,26 12,---	36,26 24,26	0 36,26	0 1,4946(x1)	0 1,495
					T_1 =	17,029
u_0 =	94(x0,05065) 116(x0,1369) 85(x0,37) 105(x1)	4,761 15,88 31,45 105,---	4,761 20,641 52,091 157,091	0 4,761 25,402 77,493	0 0,2307(x13) 0,4876(x16) 0,4933(x10)	0 2,999 7,802 4,933
				$u_{0,37}$ = $\boxed{3,500}$	T_2 =	15,734

$$\hat{\theta}_6 = 0,37 + \frac{3,50}{5,255}\,0,03 = \underline{\underline{0,39}}$$

<u>Voorbeeld II</u> Rekenschema voor de berekening van $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ bij verkort gespecificeerde waarnemingen uit 5 opeenvolgende jaren.

1	2	3	4	5	6
R_0	$\theta^3 R_0$	$\theta^3 R_0$	0	0	0
m_{01}	$\theta^2 m_{01}$	$\theta^3 R_0 - \theta^2 m_{01}$	$\theta^3 R_0$	$\frac{\theta^3 R_0}{\theta^3 R_0 - \theta^2 m_{01}}$	$\frac{\theta^3 R_0}{\theta^3 R_0 - \theta^2 m_{01}} \; m_{02}$
m_{02}	θm_{02}	$\theta^3 R_0 - \theta^2 m_{01} - \theta m_{02}$	$2\theta^3 R_0 - \theta^2 m_{01}$	$\frac{2\theta^3 R_0 - \theta^2 m_{01}}{\theta^3 R_0 - \theta^2 m_{01} - \theta m_{02}}$	$\frac{2\theta^3 R_0 - \theta^2 m_{01}}{\theta^3 R_0 - \theta^2 m_{01} - \theta m_{02}} \; m_{03}$
m_{03}	m_{03}	$\theta^3 R_0 - \theta^2 m_{01} - \theta m_{02} - m_{03}$	$3\theta^3 R_0 - 2\theta^2 m_{01} - \theta m_{02}$	$\frac{3\theta^3 R_0 - 2\theta^2 m_{01} - \theta m_{02}}{\theta^3 R_0 - \theta^2 m_{01} - \theta m_{02} - m_{03}}$	$\frac{3\theta^3 R_0 - 2\theta^2 m_{01} - \theta m_{02}}{\theta^3 R_0 - \theta^2 m_{01} - \theta m_{02} - m_{03}} \; m_{04}$
R_1	$\theta^2 R_1$	$\theta^2 R_1$	0	0	0
m_{12}	θm_{12}	$\theta^2 R_1 - \theta m_{12}$	$\theta^2 R_1$	$\frac{\theta^2 R_1}{\theta^2 R_1 - \theta m_{12}}$	$\frac{\theta^2 R_1}{\theta^2 R_1 - \theta m_{12}} \; m_{13}$
m_{13}	m_{13}	$\theta^2 R_1 - \theta m_{12} - m_{13}$	$2\theta^2 R_1 - \theta m_{12}$	$\frac{2\theta^2 R_1 - \theta m_{12}}{\theta^2 R_1 - \theta m_{12} - m_{13}}$	$\frac{2\theta^2 R_1 - \theta m_{12}}{\theta^2 R_1 - \theta m_{12} - m_{13}} \; m_{14}$
R_2	θR_2	θR_2	0	0	0
m_{23}	m_{23}	$\theta R_2 - m_{23}$	θR_2	$\frac{\theta R_2}{\theta R_2 - m_{23}}$	$\frac{\theta R_2}{\theta R_2 - m_{23}} \; m_{24}$
				+	T_1
u_0	$\theta^3 u_0$	$\theta^3 u_0$	0	0	0
u_1	$\theta^2 u_1$	$\theta^3 u_0 + \theta^2 u_1$	$\theta^3 u_0$	$\frac{\theta^2 u_0}{\theta^3 u_0 + \theta^2 u_1}$	$\frac{\theta^3 u_0}{\theta^3 u_0 + \theta^2 u_1} \; S_2$
u_2	θu_2	$\theta^3 u_0 + \theta^2 u_1 + \theta u_2$	$2\theta^3 u_0 + \theta^2 u_1$	$\frac{2\theta^3 u_0 + \theta^2 u_1}{\theta^3 u_0 + \theta^2 u_1 + \theta u_2}$	$\frac{2\theta^3 u_0 + \theta^2 u_1}{\theta^3 u_0 + \theta^2 u_1 + \theta u_2} \; S_3$
u_3	u_3	$\theta^3 u_0 + \theta^2 u_1 + \theta u_2 + u_3$	$3\theta^3 u_0 + 2\theta^2 u_1 + \theta u_2$	$\frac{3\theta^3 u_0 + 2\theta^2 u_1 + \theta u_2}{\theta^3 u_0 + \theta^2 u_1 + \theta u_2 + u_3}$	$\frac{3\theta^3 u_0 + 2\theta^2 u_1 - \theta u_2}{\theta^3 u_0 + \theta^2 u_1 + \theta u_2 + u_3} \; S_4$
				+	T_2

$$u_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{T_1 - T_2}{\theta}.$$

3. Opmerkingen.

1) Keuze van θ_1 en θ_2. In vele gevallen zal reeds een vermoeden bestaan over de groottte van de overlevingskans. Is dit niet het geval, dan kan een voorlopige schatting θ_1 gevonden worden door één van de methoden uit het vorige memorandum S 160 (M 54) toe te passen op de jaren 0, 1 en 2. Verder is, omdat wij een maximum van L bepalen, de functie $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ in de buurt van θ_1 een dalende functie van θ. Vinden wij dus bij θ_1 : $u_1 > 0$ dan moet $\theta_2 > \theta_1$ gekozen worden, is daarentegen bij θ_1 : $u_1 < 0$ dan kiezen wij $\theta_2 < \theta_1$. Het is voor een goede benadering van de meest aannemelijke schatting wel van belang dat θ_1 en θ_2 niet te ver van elkaar liggen, en u_1 en u_2 verschillend teken hebben.

2) De variantie van een meest aannemelijke schatting is (asymptotisch voor grote steekproeven) gelijk aan $1/\mathcal{E}\{-\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}\}$. Op grond hiervan kunnen wij als (ruwe) benadering van de variantie van boven afgeleide schatting van θ gebruiken:

$$s_{\hat{\theta}}^2 = \frac{\theta_2 - \theta_1}{u_1 - u_2} \qquad \text{en dus voor de spreiding} \qquad s_{\hat{\theta}} = \sqrt{\frac{\theta_2 - \theta_1}{u_1 - u_2}}\,.$$

Deze schatting van de spreiding heeft echter niet veel betekenis daar immers in werkelijkheid de aantallen dieren in de populatie niet precies gelijk zullen zijn aan hun verwachting (grootheden ρ en μ uit de schema's II en IV), zodat wij mogen verwachten dat de spreiding van de schatting groter zal zijn dan wij boven afleidden.