STICHTING

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

S 168 (M 61)

Een parametervrije toets tegen verloop voor groepen waarnemingen.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2e Boerhaavestraat 49,
Amsterdam-O
Statistische Afdeling
Rapport S 168 (M 61)

Een parametervrije toets tegen verloop voor groepen waarnemingen.[1]

Wij beschouwen k onderling onafhankelijke stochastische grootheden $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$. Van de grootheid $\underline{x}_i$ zijn n_i onderling onafhankelijke waarnemingen $x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i}$ gegeven $(i=1,\ldots,k)$.

De hypothese H_0 die wij willen toetsen luidt, dat $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ dezelfde waarschijnlijkheidsverdeling bezitten, terwijl de alternatieve hypothesen inhouden, dat de stochastische grootheden $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k$ een stijgend of dalend verloop vertonen, gedefinieerd door:

(1) $$\sum_{i<j}\sum \left\{ P[\underline{x}_i < \underline{x}_j] - P[\underline{x}_i > \underline{x}_j] \right\} \neq 0.$$

De toetsingsgrootheid $\underline{W}$ wordt als volgt gedefiniëerd. Stel voor $i < j$ is $\underline{U}_{i,j}$ het aantal paren waarnemingen $(\underline{x}_{i,\lambda}, \underline{x}_{j,\mu})$ met $\underline{x}_{i,\lambda} < \underline{x}_{j,\mu}$, vermeerderd met de helft van het aantal paren $(\underline{x}_{i,\lambda}, \underline{x}_{j,\mu})$ met $\underline{x}_{i,\lambda} = \underline{x}_{j,\mu}$ $(\lambda \leq n_i, \mu \leq n_j)$.[2] Stel verder

(2) $$\underline{W}_{i,j} \overset{\text{def}}{=} 2\left\{ \underline{U}_{i,j} - \mathcal{E}(\underline{U}_{i,j} \mid H_0) \right\} = 2\underline{U}_{i,j} - n_i n_j,$$

dan is

(3) $$\underline{W} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i<j}\sum \frac{\underline{W}_{i,j}}{n_i n_j}.$$ [3]

Als onder de $N = \sum_i n_i$ waarnemingen h groepen gelijke waarnemingen optreden en als $\underline{t}_\ell$ het aantal waarnemingen in de ℓ^e groep is $(\ell = 1,2,\ldots,h)$ dan geldt

(4) $$\mathcal{E}[\underline{W} \mid t_1, t_2, \ldots, t_\ell ; H_0] = 0,$$

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

2) $\underline{U}_{i,j}$ is dus de toetsingsgrootheid van de toets van WILCOXON, toegepast op de waarnemingen van $\underline{x}_i$ en $\underline{x}_j$ en $\underline{U}_{j,i} = n_i n_j - \underline{U}_{i,j}$.

3) De hier beschreven toets is een wijziging van een door T.J. TERPSTRA [4] ontwikkelde toets voor dit probleem. Hij gebruikt de toetsingsgrootheid $\underline{T} = \sum_{i<j}\sum \underline{W}_{i,j}$. Door de toetsingsgrootheid $\underline{W}$ te gebruiken bereikt men, dat de toets bruikbaar is voor een klasse van alternatieve hypothesen, die niet afhangt van de verhoudingen der steekproefgrootten (zie ook [5]).

$$(5)\left\{\begin{aligned}&\sigma^2[\underline{W}\mid t_1,t_2,\ldots,t_h;H_0]=\\&=\frac{\{N^3-\Sigma t_\ell^3-3(N^2-\Sigma t_\ell^2)\}\sum\frac{(k+1-2i)^2}{n_i}-\{2(N^3-\Sigma t_\ell^3)-3N(N^2-\Sigma t_\ell^2)\}\sum\sum_{i<j}\frac{1}{n_in_j}}{3N(N-1)(N-2)}.\end{aligned}\right.$$

Treden er geen gelijke waarnemingen op, dan is $t_\ell = 1$ voor iedere ℓ en:

$$(6) \qquad \sigma^2[\underline{W}\mid H_0] = \frac{1}{3}\left\{\sum_i \frac{(k+1-2i)^2}{n_i} + \sum_{i<j}\sum \frac{1}{n_i n_j}\right\}.$$

Als H_0 juist is, is de grootheid $\underline{W}$ voor grote waarden van N bij benadering normaal verdeeld met gemiddelde en variantie volgens (4) en (5).
Het is duidelijk, dat $\underline{W}$ in het algemeen grote positieve waarden zal aannemen als er een stijgend en grote negatieve als er een dalend verloop is; de tweezijdige kritieke zône bestaat dus uit grote waarden van $|\underline{W}|$.

Opmerkingen.
1. Als $k=2$, dus als wij twee stochastische grootheden $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$ hebben met resp. n_1 en n_2 waarnemingen, dan geldt:

$$(7) \qquad \underline{W} = \frac{2\underline{U} - n_1 n_2}{n_1 n_2},$$

waarin $\underline{U}$ de toetsingsgrootheid van de toets van WILCOXON is, toegepast op de steekproeven van $\underline{x}_1$ en $\underline{x}_2$. Uit (4) en (5) volgt:

$$\mathcal{E}[\underline{W}\mid t_1,t_2,\ldots,t_h;H_0] = 0,$$

$$\sigma^2[\underline{W}\mid t_1,t_2,\ldots,t_h;H_0] = \frac{N^3-\Sigma t_\ell^3}{3n_1n_2N(N-1)}$$.(zie memorandum S 47 (M 7))

Als er in dit geval geen gelijke waarnemingen optreden, kan men de exacte overschrijdingskans opzoeken in tabellen van de exacte verdeling van $\underline{U}$ (zie b.v. [1]).
2. Als $n_i = 1$ voor iedere i dan is

$$\underline{W} = \sum_{i<j}\sum \operatorname{sgn}(\underline{x}_j - \underline{x}_i),$$

waarin

$$\operatorname{sgn} z \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{als } z>0 \\ 0 & \text{als } z=0 \\ -1 & \text{als } z<0. \end{cases}$$

Uit (4) en (5) volgt:

$$\mathcal{E}[\underline{W} \mid t_1, t_2, \ldots, t_h ; H_0] = 0,$$

$$\sigma^2[\underline{W} \mid t_1, t_2, \ldots, t_h ; H_0] = \frac{2(N^3 - \Sigma t_\ell^3) + 3(N^2 - \Sigma t_\ell^2)}{18}$$

De toets is in dit geval identiek met de rangcorrelatie methode van KEDALL voor het geval, dat één der rijen bestaat uit de getallen $1, 2, \ldots, k$.(zie memorandum S 47 (M 13)). Treden er in dit geval geen gelijke waarnemingen op en is $k \leq 40$ dan kan men de exacte overschrijdingskans opzoeken in de tabellen van de exacte verdeling van de toetsingsgrootheid $\underline{S}$ van KENDALL (zie [2]).
Is $k \leq 10$ en $t_\ell \leq 3$ voor iedere ℓ dan kan men gebruik maken van de tabellen van de exacte verdeling van $\underline{S}$ van SILLITTO [3]

Literatuur.

[1] Van der Vaart, H.R., Gebruiksaanwijzing voor de toets van Wilcoxon, Rapport S 32 (M 4) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum.

[2] Kaarsmaker, L. en A. van Wijngaarden, Tables for use in rankcorrelation, Rapport R 73 van de Rekenafdeling van het Mathematisch Centrum.

[3] Sillitto, G.P., The distribution of Kendall's coefficient of rankcorrelation in rankings containing ties, Biometrika 34 (1947), 36-40.

[4] Terpstra, T.J., The asymptotic normality and consistency of Kendall's test against trend when ties are present in one ranking, Proc.Kon.Ned.Ak. 55 (1952).

[5] Van Eeden, C., A test for the equality of probabilities against a class of specified alternatives, including trend, Rapport S 157(VP 3) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum.