STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

S 168 (M 63)

Toetsen voor één of twee uitbijters bij een normale verdeling.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2e Boerhaavestraat 49,
A m s t e r d a m - O.

Statistische Afdeling
S 168 (M 63)

Toetsen voor één of twee uitbijters bij een normale verdeling.[1]

Stel wij hebben een steekproef van n waarnemingen, gerangschikt naar opklimmende grootte:

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n .$$

Wij willen de hypothese toetsen dat deze steekproef afkomstig is uit één normale verdeling, tegen het alternatief dat de grootste waarneming x_n uit een andere verdeling komt dan de andere waarnemingen. Wij gebruiken hiervoor de toetsingsgrootheid

$$T_n = \frac{x_n - \bar{x}}{s},$$

waarin $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, terwijl $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$. Deze toetsingsgrootheid is het eerst voorgesteld door E.S. PEARSON en C. CHANDRA SEKAR (1936), terwijl de exacte verdeling van T_n is afgeleid door F.E. GRUBBS (1950). Om te toetsen of de kleinste waarneming een uitbijter is, gebruikt men als toetsingsgrootheid

$$T_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{s}.$$

In tabel 1 vinden wij kritieke waarden van T_n en T_1 getabelleerd voor verschillende onbetrouwbaarheidsdrempels en meerdere waarden van n. Deze tabel is een deel van tabel IA van GRUBBS.

----

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

Tabel 1

Kritieke waarden van T_n en T_1, bij een onbetrouwbaarheidsdrempel α en omvang van de steekproef n.

n \ α	0,01	0,025	0,05	0,10
3	1,414	1,414	1,412	1,406
4	1,723	1,710	1,689	1,645
5	1,955	1,917	1,869	1,791
6	2,130	2,067	1,996	1,894
7	2,265	2,182	2,093	1,974
8	2,374	2,273	2,172	2,041
9	2,464	2,349	2,237	2,097
10	2,540	2,414	2,294	2,146
12	2,663	2,519	2,387	2,229
14	2,759	2,602	2,461	2,297
16	2,837	2,670	2,523	2,354
18	2,903	2,728	2,577	2,404
20	2,959	2,778	2,623	2,447
25	3,071	2,880	2,717	2,537

Men kan één- of tweezijdig toetsen, al naar gelang van te voren al dan niet bekend is naar welke kant uitbijters eventueel voor kunnen komen. Bij tweezijdige toetsing moeten de onbetrouwbaarheidsdrempels van de tabel met 2 worden vermenigvuldigd.

Om te toetsen of de twee grootste waarnemingen te groot zijn, nemen wij de toetsingsgrootheid

$$\frac{S^2_{n-1,n}}{S^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-2} (x_i - \bar{x}_{n-1,n})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2},$$

waarin $\bar{x}_{n-1,n} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} x_i$.

Een analoge grootheid

$$\frac{S^2_{1,2}}{S^2} = \frac{\sum_{i=3}^{n} (x_i - \bar{x}_{1,2})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2},$$

waarbij $\bar{x}_{1,2} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=3}^{n} x_i$ kan worden gebruikt om de twee kleinste waarnemingen te toetsen. Deze toetsen zijn voorgesteld door F.E. GRUBBS, die ook hiervan een tabel geeft. Enige kritieke waarden zijn in tabel 2 verzameld.

Tabel 2

Kritieke waarden van $\frac{S^2_{n-1,n}}{S^2}$ en $\frac{S^2_{1,2}}{S^2}$, bij een onbetrouwbaarheidsdrempel α en omvang van de steekproef n.

n \ α	0,01	0,025	0,05	0,10
4	0,0000	0,0002	0,0008	0,0031
5	0,0035	0,0090	0,0183	0,0376
6	0,0186	0,0349	0,0565	0,0921
7	0,0440	0,0708	0,1020	0,1479
8	0,0750	0,1101	0,1478	0,1994
9	0,1082	0,1492	0,1909	0,2454
10	0,1415	0,1865	0,2305	0,2863
12	0,2044	0,2536	0,2996	0,3552
14	0,2605	0,3112	0,3568	0,4106
16	0,3098	0,3603	0,4048	0,4562
18	0,3530	0,4025	0,4455	0,4944
20	0,3909	0,4391	0,4804	0,5269

Hier geldt weer dezelfde opmerking over één- en tweezijdige toetsing als bij tabel 1. Tabel 1 geeft rechtseenzijdige kritieke waarden, tabel 2 linkseenzijdige. Wij verwerpen de getoetste hypothese dus in het eerste geval als T_n of T_1 groter zijn dan de overeenkomstige waarde uit de tabel, terwijl in het geval wij twee uitbijters toetsen juist lage waarden van de toetsingsgrootheid worden verworpen.

Literatuur:

F.E. GRUBBS (1950), Sample criteria for testing outlying observations, Ann of Math.Stat.21(1950),pp 27-58.

E.S. PEARSON and C.CHANDRA SEKAR (1936), The efficiency of statistical tools and a criterion for the rejection of outlying observations, Biometrika,28(1936),pp 308-320.