S 168 (M68)

Sequente toets voor het gemiddelde van een normale verdeling met gegeven spreiding, of voor het verschil der gemiddelden van twee normale verdelingen, waarvan de spreidingen gelijk zijn

Stichting Mathematisch Centrum
Statistische Afdeling
1955

MATHEMATICSCH CENTRUM,
2e Boerhaavestraat 49,
Amsterdam - C.

Statistische Afdeling
S 168 (M 68)

Sequente toets voor het gemiddelde van een normale verdeling met gegeven spreiding, of voor het verschil der gemiddelden van twee normale verdelingen, waarvan de spreidingen gelijk zijn.[1]

Wij beschouwen een stochastische variabele $\underline{x}$[2], die een normale verdeling bezit met gemiddelde μ en spreiding σ. Men wil voor gegeven waarde μ_0 de hypothese $\mu \leqq \mu_0$ toetsen tegen $\mu > \mu_0$. Bij de hier te behandelen sequente methode verricht men waarnemingen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ van $\underline{x}$. Na iedere waarneming wordt nagegaan of de som van de gevonden waarden van $\underline{x}$ tussen twee nader aan te geven grenzen ligt of niet. Zodra de som één van deze grenzen overschrijdt, is het experiment beëindigd en kan de hypothese $\mu \leqq \mu_0$ worden aanvaard of verworpen.

De hier te behandelen methode is ook van toepassing op het volgende geval: de stochastische variabelen $\underline{u}$ en $\underline{v}$ hebben normale verdelingen met gemiddelden $\mathcal{E}\underline{u} = \mu'$ en $\mathcal{E}\underline{v} = \mu''$ en dezelfde gegeven spreiding σ'; men wenst voor een gegeven waarde μ_0 de hypothese $\mu' - \mu'' \leqq \mu_0$ te toetsen tegen de hypothese $\mu' - \mu'' > \mu_0$. Men verricht nu paren waarnemingen: (u_1, v_1), (u_2, v_2), enz. van $\underline{u}$ en $\underline{v}$. Indien men nu $\underline{x} = \underline{u} - \underline{v}$, $x_i = u_i - v_i$, $\mu = \mu' - \mu''$ en $\sigma = \sigma'\sqrt{2}$ stelt, is dit geval herleid tot het voorafgaande.

Het is niet mogelijk om een sequente toets te construeren, waarbij men slechts een kleine kans heeft om $\mu \leqq \mu_0$ te verwerpen voor iedere waarde van μ die iets kleiner is dan μ_0, en tevens een kleine kans om $\mu \leqq \mu_0$ te aanvaarden voor iedere waarde van μ die iets groter is dan μ_0. Wel kan men bereiken, dat behoudens een kleine kans, hoogstens α, $\mu \leqq \mu_0$ aanvaard wordt als $\mu \leqq \mu_1 < \mu_0$ is en behoudens een kleine kans, hoogstens β, $\mu \leqq \mu_0$ verworpen wordt als $\mu \geqq \mu_2 > \mu_0$ is; de waarden van μ_1, μ_2, α en β moeten door de onderzoeker vooraf vastgesteld worden.

---

1) Dit memorandum is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

2) Stochastische grootheden worden door onderstreepte letters aangeduid.

De toets kan dan als volgt uitgevoerd worden.

Bereken:

$$a = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$$

$$b_1 = \frac{\sigma^2}{\mu_2 - \mu_1} \ln \frac{\beta}{1-\alpha}$$

$$b_2 = \frac{\sigma^2}{\mu_2 - \mu_1} \ln \frac{1-\beta}{\alpha}$$

Teken in een rechthoekig coördinatenstelsel met de assen y en x de evenwijdige rechten :

$$L_1 : \quad y = ax + b_1$$

$$L_2 : \quad y = ax + b_2$$

Men zet nu hierin de waarneming x_1 uit in het punt: $x = 1$, $y = x_1$

Ligt dit punt onder of op L_1, dan aanvaardt men $\mu \leqq \mu_0$; ligt het boven of op L_2 , dan verwerpt men $\mu \leqq \mu_0$; ligt het tussen de beide lijnen, dan verricht men een tweede waarneming x_2 en bepaalt dan het punt: $x = 2$, $y = x_1 + x_2$

Ligt dit punt onder of op L_1 , dan aanvaardt men $\mu \leqq \mu_0$; ligt het boven of op L_2 , dan verwerpt men $\mu \leqq \mu_0$; ligt het tussen beide lijnen dan verricht men een derde waarneming enz.

De toets eindigt bij de n de waarneming, als $x = n$, $y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ het eerst punt is het punt, dat <u>niet</u> tussen de lijnen L_1 en L_2 ligt. Men kan bewijzen, dat dit steeds na een eindig aantal waarnemingen het geval zal zijn.

Literatuur:

A. Wald, Sequential Analysis (1947) chapter 7.

Statistical Research Group, Columbia University (1945), Sequential Analysis of statistical data, Section 4. (Hierin vindt men een aantal voor de toepassing nuttige tabellen).