STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

S 185 (M 72)

Schema's ter oplossing van lineaire programmeringsproblemen

J. Kriens

1956

Schema's ter oplossing van lineaire programmeringsproblemen *)

door J. Kriens

Summary

Schemes for the solution of problems in linear programming.

Expository paper about the application of the simplex method in linear programming. The method of solution is given in the form of a number of tables and computational diagrams. No proofs are given; a list of references is included.

1. Inleiding

Tal van problemen in het bedrijfsleven en elders komen neer op het bepalen van de optimale waarden van een aantal variabelen, die men in de hand heeft. Hierbij kan men b.v. denken aan een fabriek, waar verschillende typen auto's worden gefabriceerd. Wanneer er productiefactoren zijn, die voor meer dan één type een rol spelen en die slechts in beperkte mate beschikbaar zijn, dan zal de productieleider zich b.v. afvragen op welke wijze de fabriek, rekening houdende met deze bijvoorwaarden, de grootst mogelijke winst kan behalen.

Indien het mogelijk is een dergelijk probleem te gieten in een wiskundig model, waarin de functie, waarvan het extremum bepaald moet worden, lineair is en ook de bijvoorwaarden lineair zijn, dan spreekt men van een *lineair programmeringsprobleem.* G. B. Dantzig heeft hiervoor een oplossingsmethode ontwikkeld [5], welke later is uitgebreid en verbeterd door A. Charnes [2]. In het onderstaande wordt in de vorm van schema's aangegeven hoe men deze methode kan toepassen. De bewijzen vindt men o.a. in A. Charnes, W. W. Cooper en A. Henderson [2].

2. Probleemstelling

Gevraagd wordt, de extremen te bepalen van de functie

$$z_0 = f(\lambda) = \sum_{h=1}^{p} c_h \lambda_h \tag{1}$$

onder de bijvoorwaarden

$$\sum_{h=1}^{p} a_{ih}\lambda_h \leqq a_{i0} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2}$$

*) Voordracht, gehouden op de Statistische Dag 1956. Rapport S 185 (M 72) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam. De afdeling staat onder leiding van Prof. Dr. D. van Dantzig.

en

$$\lambda_h \geqq 0 \qquad (h = 1, \ldots, p). \tag{3}$$

Hierin zijn de a's en c's gegeven constanten; de getallen a_{ih} $(h > 0)$ en c_h kunnen alle reële waarden aannemen, terwijl wij van de a_{i0} onderstellen, dat ze $\geqq 0$ zijn.

Aangezien maximum en minimum op geheel analoge wijze worden verkregen, bepalen wij ons tot het geval, waarin het maximum van (1) onder de bijvoorwaarden (2) en (3) moet worden bepaald.

De ongelijkheden (2) worden door het invoeren van verschilvariabelen $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+m}$ $(= \lambda_n)$ getransformeerd in gelijkheden; λ_{p+i} is het verschil van rechter- en linkerlid van de i^e ongelijkheid van (2). Voegen wij deze variabelen met coëfficiënt nul toe aan (1), dan krijgt het probleem de volgende vorm.

Maximaliseer

$$z_0 = \sum_{h=1}^{n} c_h \lambda_h \qquad (c_{p+1} = \ldots = c_{p+m} = 0) \tag{4}$$

onder de voorwaarden

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} \lambda_h = a_{i0} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{5}$$

$$\lambda_h \geqq 0 \qquad (h = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

waarin $a_{ih} = 0$ voor $h > p$ en $i \neq h$ en $a_{ii} = 1$ voor $i > p$.

3. Rekenschema's om de optimale oplossing te bepalen

Het is niet moeilijk een stelsel waarden van de λ's te vinden, dat voldoet aan (5) en (6). Immers, het stelsel

$$\lambda_{p+i} = a_{i0} \ (i = 1, \ldots, m) \qquad \lambda_h = 0 \ (h = 1, \ldots, p) \tag{7}$$

vormt een toegelaten oplossing. Wij noemen dit de „*triviale oplossing*", omdat de oorspronkelijke variabelen $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ alle de waarde nul bezitten, waardoor ook $z_0 = 0$ is.

Wij willen nu nagaan of er een greep van λ's bestaat, die een grotere waarde van z_0 geeft en indien dit het geval blijkt te zijn, een verbeterde oplossing berekenen. Daarom construeren wij een tabel die ons hiertoe telkens opnieuw in staat stelt en waarmee wij dus stapsgewijze de optimale oplossing kunnen bepalen. Schema I bevat deze tabel voor de triviale oplossing, doch de beschrijving ervan zullen wij algemeen houden, omdat die ook geldt voor de volgende stappen.

Wij vormen nu eerst een tabel, die wij de *uitgangstabel* noemen en waarin wij de coëfficiënten uit (5) plaatsen (zie schema I). In de kolommen staan de coëfficiënten, behorende bij de boven de kolom vermelde variabele; boven de kolom van de elementen uit de rechterleden schrijven wij λ_0. De vergelijkingen (5) zijn dus direct uit de tabel af te leiden.

c	B	λ_0	λ_{p+1}	- - -	λ_{p+m}	λ_1	- - -	λ_h	- - -	λ_p
	λ_{p+1}	a_{10}	1			a_{11}	- - -	a_{1h}	- - -	a_{1p}
	λ_{p+2}	a_{20}				a_{21}	- - -	a_{2h}	- -	a_{2p}
	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	λ_{p+m}	a_{m0}			1	a_{m1}	- - -	a_{mh}	- - -	a_{mp}
$z_h - c_h$		$z_0 (=0)$				$-c_1$	- - -	$-c_h$	- - -	$-c_p$

Schema I.

De tabel wordt nu uitgebreid met twee kolommen en een rij. Links van de kolom met het hoofd λ_0 plaatsen wij een kolom met het hoofd B, waarin wij bij de uitgangstabel van boven naar beneden de variabelen $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+m}$ opnemen; links daarvan komt een kolom te staan met de c-waarden uit (4), die dezelfde indices hebben als de λ's uit de B-kolom (hier dus nullen). Aan de onderkant wordt een rij toegevoegd, waarin wij bij iedere stap de volgende getallen plaatsen:

$$z_h - c_h \qquad (h = 0, \ldots, n), \tag{8}$$

waarin z_h het vectorproduct van de getallen uit de c- en de λ_h-kolom en

$$c_0 = 0 \tag{9}$$

is. De door (8) en (9) gedefinieerde waarde van $z_0 - c_0$ is gelijk aan z_0 volgens (1). In de uitgangstabel is

$$z_h = \sum_{i=1}^{m} c_{p+i}\, a_{ih} = 0 \qquad (h = 0, \ldots, n) \tag{10}$$

en dus geldt $z_h - c_h = - c_h$. Voor de volgende schema's, die uit deze tabel gevormd worden geldt dit echter niet meer.

Er kunnen zich nu bij iedere stap drie elkaar uitsluitende gevallen voordoen:

a) Voor één of meer positieve waarden van h geldt: $z_h - c_h < 0$ en in minstens één van de betreffende kolommen bevinden zich geen positieve getallen;

b) Voor één of meer positieve waarden van h geldt: $z_h - c_h < 0$ en in al deze kolommen bevinden zich ook positieve getallen;

c) Voor alle positieve waarden van h geldt: $z_h - c_h \geqq 0$.

Verkeert men in situatie *a*), dan kan z_0 door geschikte keuze van de λ's willekeurig grote waarden aannemen, een geval, dat zich in practijkproblemen niet zal voordoen. Situatie *c*) betekent, dat de optimale oplossing is bereikt. In het geval *b*) geeft de tabel nog geen uitsluitsel over de vraag, of grotere waarden van z_0 te bereiken zijn.

Resumerende kan het volgende worden vastgesteld:

1e. De variabelen in de B-kolom bezitten de in de λ_0-kolom vermelde waarden (de triviale oplossing kan zo uit schema I worden afgelezen); de overige variabelen hebben de waarde nul. De bijbehorende waarde van z_0 kan men vinden in het laatste vakje van de λ_0-kolom.

2e. Men kan direct nagaan in welke van de situaties *a*), *b*) of *c*) men verkeert.

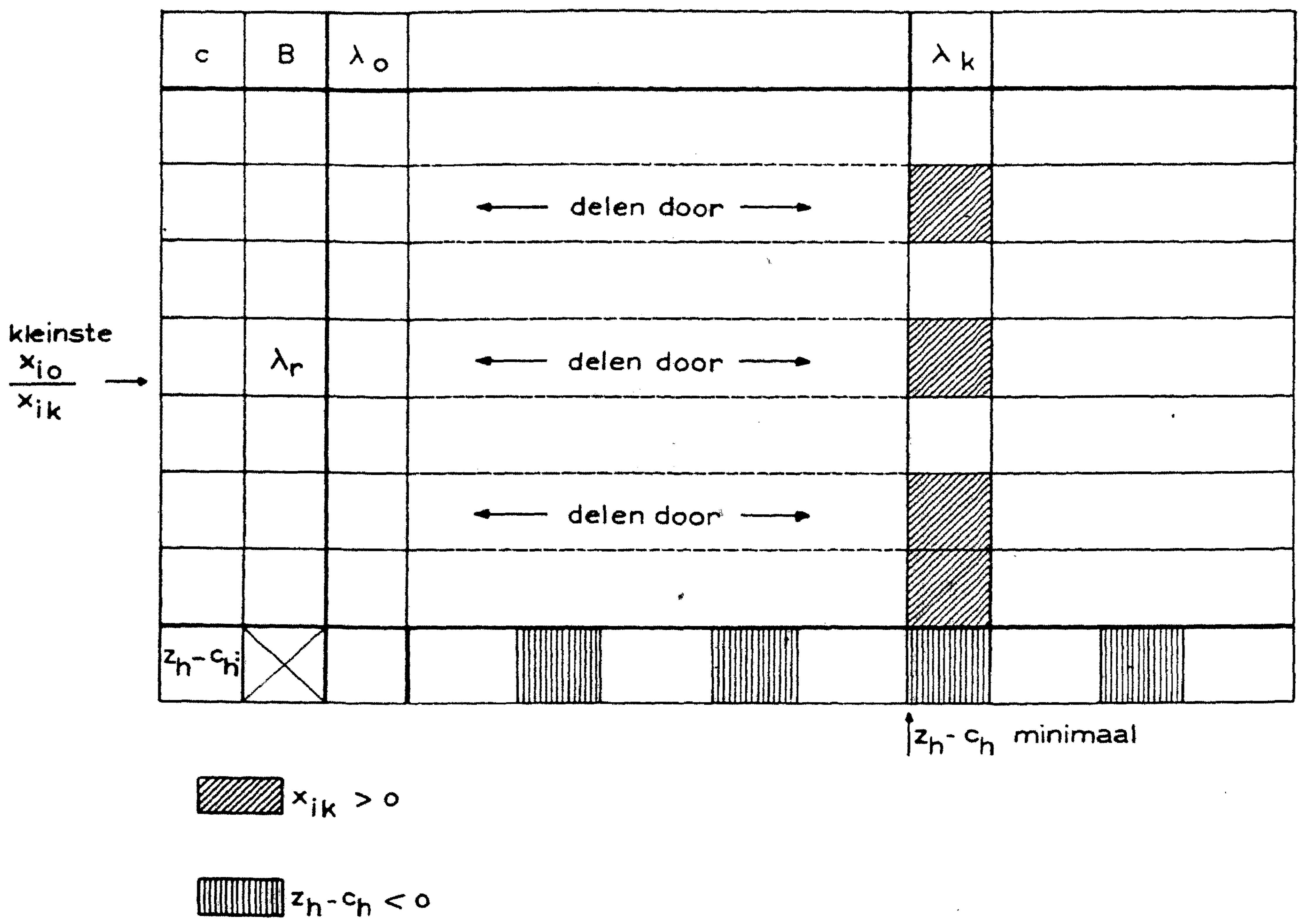
Indien situatie *b*) zich voordoet, trachten wij een greep van λ's te construeren, waarvoor z_0 een grotere waarde aanneemt. Wij geven hiertoe het element in de rij waarvoor λ_i en in de kolom waarboven λ_h staat, aan met x_{ih}. Men gaat nu als volgt te werk (zie schema II):

1) Bepaal het minimum van de getallen van $z_h - c_h$ voor $h > 0$; laat dit bereikt worden voor $h = k$ [1]);
2) Zoek de elementen uit de λ_k-kolom op, die positief zijn;
3) Bereken de quotiënten $\dfrac{x_{i0}}{x_{ik}}$ voor zover $x_{ik} > 0$ is;
4) Bepaal het minimum van deze quotiënten.

Wordt dit in een aantal rijen bereikt, dan berekent men voor deze rijen de quotiënten $\dfrac{x_{i,\,p+1}}{x_{ik}}$ en zoekt daarvan het minimum; geven ook deze geen ondubbelzinnig uitsluitsel over de plaats van het minimum, dan vergelijke men de quotiënten $\dfrac{x_{i,\,p+2}}{x_{ik}}$ voor zover de quotiënten $\dfrac{x_{i,\,p+1}}{x_{ik}}$ dezelfde waarde bezitten, enz. Men vindt dan in alle gevallen een ondubbelzinnig bepaald minimum. Stel, dat dit bereikt wordt in de rij, waarvoor staat: λ_r.

---

1) Bereiken de waarden van $z_h - c_h$ voor meer dan één index het minimum, dan kan men willekeurig één van deze kiezen.

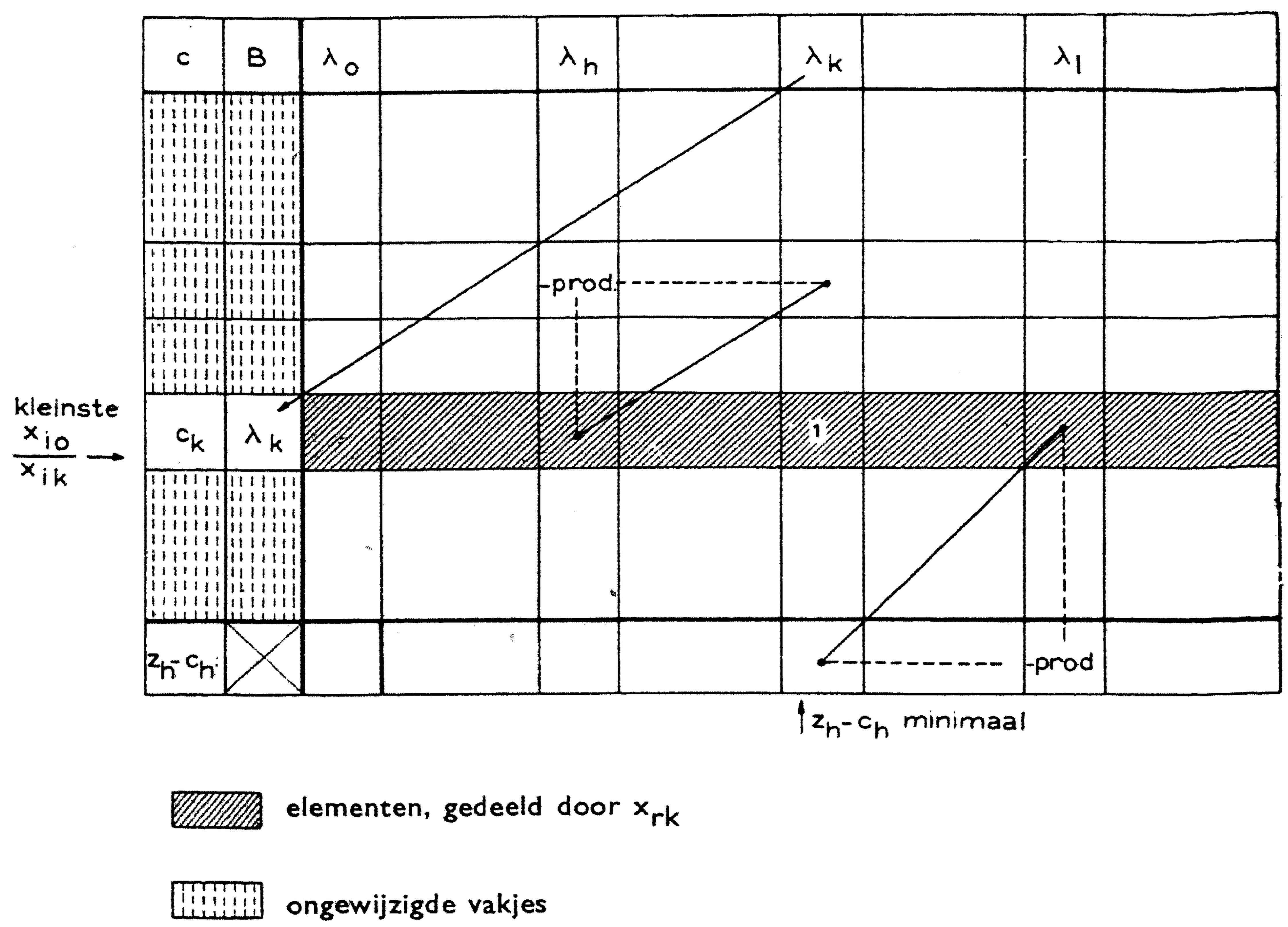


Schema II.

Er is nu in de oude tabel een bepaalde kolom en een bepaalde rij vastgelegd. Om de nieuwe tabel te vinden, passen wij de volgende bewerkingen toe (zie schema III):

1) Vervang in de c-kolom c_r door c_k;
2) Vervang in de B-kolom λ_r door λ_k;
3) Deel alle elementen uit de oude λ_r-rij door x_{rk};
4) Verminder alle andere elementen uit de kolommen $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ met de in schema III aangegeven producten (in de λ_k-kolom komen hierdoor, behalve de ingevulde 1, slechts nullen te staan);
5) De inhoud van de overige hokjes blijft ongewijzigd.

De bij deze nieuwe tabel behorende oplossing vinden wij weer door de variabelen uit de B-kolom gelijk te stellen aan de in de λ_0-kolom vermelde waarden en de overige λ's de waarde nul te geven. De laatste rij geeft aan in welke van de gevallen *a*), *b*) of *c*) men verkeert. Is dit situatie *c*), dan is het maximum bereikt en het getal in het laatste vakje van de λ_0-kolom is gelijk



Schema III.

aan de waarde van dit maximum; is dit situatie *b*), dan moet op de beschreven wijze een nieuwe tabel worden berekend.

Wij merken tenslotte, in verband met de volgende paragraaf, op, dat evenals bij de eerste tabel de getallen uit de eindtabel de coëfficiënten vormen van de variabelen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in m vergelijkingen tussen deze variabelen; deze zijn aequivalent met de oorspronkelijke vergelijkingen.

4. Het achteraf toevoegen van een voorwaarde

Wanneer men een optimale oplossing heeft berekend onder de voorwaarden (5) en daarna nog een extra voorwaarde aan de variabelen wil opleggen, dan is het niet noodzakelijk de berekening van het begin af aan opnieuw uit te voeren. Men kan nl. uitgaan van de verkregen λ-waarden en dan op de hieronder aangegeven wijze, welke gebaseerd is op de van E. M. L. Beale afkomstige oplossingsmethode voor lineaire programmeringsproblemen [1], een optimale oplossing berekenen, die aan alle $m + 1$ voorwaarden voldoet.

De variabelen, die bij de oude oplossing in de B-kolom staan, geven wij aan met $\lambda_{b_1}, \ldots, \lambda_{b_m}$, de andere met $\lambda_{l_1}, \ldots, \lambda_{l_{n-m}}$. Uit de oude tabel kan men de volgende vergelijkingen aflezen:

$$\sum_{j=1}^{n-m} x_{b_i l_j} \lambda_{l_j} + \lambda_{b_i} = x_{b_i 0}; \tag{11}$$

de variabelen $\lambda_{b_1}, \ldots, \lambda_{b_m}$ komen ieder dus slechts in één van de vergelijkingen voor.

Laat de nieuwe voorwaarde zijn:

$$\sum_{h=1}^{p} a_{m+1,h} \lambda_h \leqq a_{m+1,0}, \tag{12}$$

waarbij nu niet ondersteld wordt, dat $a_{m+1,\,0} \geqq 0$ is.

Voldoet de oude oplossing hieraan, dan is deze ook de oplossing van het nieuwe probleem. In het andere geval transformeren wij (12) in de gelijkheid

$$\sum_{h=1}^{p} a_{m+1,h} \lambda_h + \lambda_{n+1} = a_{m+1,0},$$

of, na splitsing van de variabelen λ_h in de groepen λ_{b_i} en λ_{l_j}

$$\sum_{i=1}^{m} a_{m+1,\,b_i} \lambda_{b_i} + \sum_{j=1}^{n-m} a_{m+1,\,l_j} \lambda_{l_j} + \lambda_{n+1} = a_{m+1,0}. \tag{13}$$

Lossen wij nu de λ_{b_i} op uit (11) en vullen wij ze in in (13), dan komt er:

$$\sum_{j=1}^{n-m} x_{n+1,l_j} \lambda_{l_j} + \lambda_{n+1} = x_{n+1,0}, \tag{14}$$

waarin

$$x_{n+1,l_j} = a_{m+1,l_j} - \sum_{i=1}^{m} a_{m+1,b_i} x_{b_i l_j}$$

en

$$x_{n+1,0} = a_{m+1,0} - \sum_{i=1}^{m} a_{m+1,b_i} x_{b_i 0}.$$

Aan de oude tabel voegen wij nu een rij en een kolom toe (vgl. schema IV); in de rij nemen wij op de coëfficiënten van (14), in de kolom nullen, behalve in het vakje, dat deze kolom met de nieuwe rij gemeen heeft. Uit deze tabel berekent men nu een nieuwe oplossing als volgt:

1) Bepaal de elementen uit de toegevoegde rij welke < 0 zijn; indien ze alle waarden $\geqq 0$ bezitten, is aan de voorwaarden (2) en (3) en (12) niet te voldoen, hetgeen betekent dat er geen enkele oplossing is;

	c	B	λ_0	λ_s		λ_t	λ_{n+1}
	c_{b_1}	λ_{b_1}	$x_{b_1,0}$	$x_{b_1,s}$		$x_{b_1,t}$	0
	c_{b_m}	λ_{b_m}	$x_{b_m,0}$	$x_{b_m,s}$		$x_{b_m,t}$	0
nieuwe rij →	0	λ_{n+1}	$x_{n+1,0}$	$x_{n+1,s}$		$x_{n+1,t}$	1
	$z_h - c_h$	$\times$	z_0	$z_s - c_s$		$z_t - c_t$	0

↑ nieuwe kolo

Schema IV.

2) Bereken voor welke waarde(n) van h het quotiënt $\dfrac{z_h - c_h}{x_{n+1,h}}$ $(x_{n+1,h} < 0)$ maximaal is; laat dit het geval zijn voor $h = l$ (zie ook voetnoot 1);

3) Voer de op blz. 49 gegeven bewerkingen uit, waarin $r = n + 1$ en $k = l$.

De nieuwe greep van λ's is op de reeds geschetste wijze uit de tabel af te lezen. Zijn alle getallen in de λ_0-kolom $\geqq 0$, dan is dit de optimale oplossing van het nieuwe probleem. Indien één of meer van deze getallen negatief zijn, dan wordt op één van de betrokken rijen (bij voorkeur de rij, waarin het kleinste getal staat) het procédé toegepast dat hierboven voor de toegevoegde rij is aangegeven. Hiermee gaat men door tot alle getallen in de λ_0-kolom $\geqq 0$ zijn.

Wil men achteraf één van de gestelde voorwaarden *weglaten*, dan kan men er bij de berekening van het nieuwe optimum gebruik van maken, dat reeds een oplossing, welke aan de ongelijkheden voldoet, bekend is. Dit geschiedt via een eenvoudige transformatie, nl. een verschuiving, waardoor de reeds verkregen oplossing de triviale oplossing van de getransformeerde ongelijkheden wordt. De uitwerking hiervan zullen wij hier niet beschrijven.

5. Literatuur

Behalve de theoretische artikelen over lineaire programmering in [5] en de inleiding van A. Charnes, W. W. Cooper en A. Henderson [2] zijn er een groot aantal artikelen over dit onderwerp verschenen. Zeer goede, algemene inleidingen zijn o.a. geschreven door A. Henderson en R. Schlaifer [4] en M. E. Salveson [6]. Grafische oplossingsmethoden voor problemen van kleine omvang, zijn beschreven door F. V. Waugh en G. L. Burrows [7].

Naast de hier geschetste methode, die alleen volledig beschreven is in [2], bestaan er verschillende, eenvoudigere methoden, die echter slechts gebruikt kunnen worden wanneer het probleem een speciale vorm heeft. De belangrijkste hiervan is een methode welke ontwikkeld is in verband met transportproblemen en die men kan toepassen, indien de bijvoorwaarden gelijkheden in plaats van ongelijkheden zijn en wel van de vorm:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} = r_j \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} = s_i,$$

waarbij

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} r_j,$$

met de λ_{ij} als optimaal te kiezen variabelen en de r_j en s_i als gegeven positieve constanten. Beschrijvingen van deze methode vindt men in [3] en [4].

Literatuurlijst:

[1] E. M. L. Beale, An alternative Method for Linear Programming, Proc. Cambridge Phil. Soc. **50** (1954), 513–523.

[2] A. Charnes, W. W. Cooper and A. Henderson, An Introduction to Linear Programming, John Wiley & Sons, (1953).

[3] W. W. Cooper and A. Charnes, Transportation Scheduling by Linear Programming, Proc. of the Conf. on Op. Res. in Marketing, Case Inst. of Techn. Cleveland (1953), 62–71.

[4] A. Henderson and R. Schlaifer, Mathematical Programming; better Information for better Decision making, Harvard Business Review **32** (1954), 73–100.

[5] Tj. C. Koopmans, Activity Analysis of Production and Allocation, Proc. of a Conf., John Wiley and Sons (1951); vooral de hoofdstukken XXI en XXIII.

[6] M. E. Salveson, Mathematical Methods in Management Programming, Proc. of the Conf. on Op. Res. in Prod. and Inventory Control, Case Inst. of Techn. Cleveland, (1954), 23–41.

[7] F. V. Waugh and Glenn L. Burrows, A short Cut to Linear Programming, Econometrica **23** (1955), 18–29.