STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

SM 76 ar

De symmetrietoets van Wilcoxon.

A. Benard, C. van Eeden, C.L. Ruemke.

1957

Receptuur

De symmetrietoets van Wilcoxon

(*Wilcoxon's test for symmetry*)

Van de symmetrietoets van Wilcoxon kan men gebruik maken wanneer men wil onderzoeken, of een reeks waarnemingen symmetrisch ten opzichte van nul verdeeld is. Eerst wordt een voorbeeld gegeven van het soort vraagstukken, waarbij dit probleem zich voordoet.

Om na te gaan of bij konijnen het aantal bloedplaatjes per mm^3 wordt beïnvloed door toediening van een bepaald geneesmiddel (reserpine) is dit aantal bij twaalf konijnen onmiddellijk vóór en vier uur na toediening daarvan bepaald. De verschillen tussen de uitkomsten van de tweede en de eerste telling bedroegen: +38, +17, —36, +44, +35, +11, +20, —1, —7, +9, —4, +40.

Ook indien het geneesmiddel het aantal bloedplaatjes niet beïnvloedt zal men o.a. ten gevolge van de onnauwkeurigheid van de bepaling bij de tweede bepaling slechts zelden precies dezelfde uitkomst verkrijgen als bij de eerste; nu eens zal een tweede bepaling hoger uitvallen dan de eerste en dan weer eens lager. Het laat zich echter aanzien, dat de verschillen in dit geval symmetrisch rond nul verdeeld liggen: er zullen zowel grotere als kleinere positieve en negatieve verschillen worden gevonden.

Als reserpine de aantallen wél beïnvloedt en deze bijvoorbeeld in het algemeen vergroot, kan soms toch nog bij een tweede bepaling een lager aantal bloedplaatjes gevonden worden dan bij de eerste. Speciaal zal dit kunnen voorkomen wanneer de invloed van het geneesmiddel niet bijzonder groot is in verhouding tot de nauwkeurigheid van de bepaling. In het algemeen zullen nu echter meer positieve verschillen gevonden worden dan negatieve, terwijl onder de positieve bovendien grotere waarden voor zullen komen dan onder de negatieve: de symmetrie rond het nulpunt is verdwenen. Men zal daarom gaarne bij het onderzoek naar de invloed van het geneesmiddel willen nagaan, of de veronderstelling, dat er symmetrie bestaat, op grond van de beschikbare waarnemingen verworpen kan worden.

In het algemeen kan men met behulp van de symmetrietoets van Wilcoxon de hypothese H_0 toetsen, dat een aantal onderling onafhankelijke grootheden $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_m$ alle symmetrisch ten opzichte van nul verdeeld zijn. Over de vorm van de waarschijnlijkheidsverdelingen van $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_m$ behoeft niets verondersteld te worden en deze verdelingen mogen ook verschillend zijn. De toets berust op één waarneming van ieder der grootheden, dus op m waarnemingen $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Deze waarnemingen worden bijvoorbeeld gevormd door de bovengenoemde verschillen tussen de gevonden aantallen bloedplaatjes vóór en na de toediening van de behandeling.

De bij de symmetrietoets van W i l c o x o n behorende toetsingsgrootheid wordt als volgt gedefiniëerd:

1) De waarnemingen, die gelijk aan nul zijn, worden buiten beschouwing gelaten.

2) De overblijvende n waarnemingen rangschikt men naar opklimmende grootte van hun absolute waarde.

3) De absolute waarden der waarnemingen worden vervangen door hun rangnummers (naar opklimmende grootte).

4) De waarde T van de toetsingsgrootheid $\underline{T}$ is gelijk aan de som van de rangnummers, die bij de positieve waarnemingen behoren, verminderd met de som van de rangnummers behorende bij de negatieve waarnemingen.

De waarschijnlijkheidsverdeling van de toetsingsgrootheid $\underline{T}$ kan berekend worden voor het geval, dat de hypothese H_0 juist is, die dus inhoudt, dat de grootheden $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_m$ alle symmetrisch ten opzichte van nul verdeeld zijn. Deze verdeling van $\underline{T}$ is symmetrisch.

In het algemeen zal $\underline{T}$ waarden aannemen in de buurt van nul, indien de hypothese H_0 juist is. Als de verdelingen $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_m$ overwegend asymmetrisch naar rechts (ten opzichte van nul) zijn, dan zullen er in het algemeen veel positieve waarnemingen voorkomen en deze zullen in absolute waarde groter zijn dan de negatieve. De grootheid $\underline{T}$ neemt dan een positieve waarde aan. In het algemeen verkrijgt men een negatieve waarde voor $\underline{T}$ als de verdelingen van $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_m$ overwegend asymmetrisch naar links zijn. Zo bestaat de tweezijdige kritieke zone voor de symmetrietoets van W i l c o x o n uit grote waarden van de absolute waarde van $\underline{T}$.

Als men H_0 verwerpt, trekt men de conclusie, dat de verdelingen van $\underline{z}_1, \underline{z}_2, \ldots, \underline{z}_m$ in het algemeen asymmetrisch zijn ten opzichte van nul, en wel asymmetrisch naar rechts, indien T positief is en asymmetrisch naar links bij een negatieve waarde van T.

Tabel 2 bevat voor $n = 4(1)25$ de kritieke waarden T_α van T, die bij de boven de betreffende kolom aangegeven tweezijdige onbetrouwbaarheidsdrempel α behoren; dat zijn dus de kleinste waarden van $|T|$ die in de bij α behorende kritieke zones liggen.

Bij tweezijdige toetsen verwerpt men H_0 dus als $|T| \geqq T_\alpha$.

Voor het in de inleiding gegeven voorbeeld is de berekening van T in Tabel 1 uitgevoerd. In kolom A staan de gegevens gerangschikt naar de opklimmende grootte van hun absolute waarde; in kolom B vindt men de rangnummers met de hun toekomende tekens.

Tabel 1. Berekening van T

A	B
— 1	— 1
— 4	— 2
— 7	— 3
9	4
11	5
17	6
20	7
35	8
—36	— 9
38	10
40	11
44	12

$T = 63 - 15 = 48.$

De voor de toetsingsgrootheid gevonden waarde 48 blijkt volgens tabel 2 kleiner te zijn dan de bij $\alpha = 0{,}05$ behorende kritieke waarde. De symmetriehypothese kan in dit geval dus niet verworpen worden.

Voor grotere waarden van n kan men gebruik maken van het feit, dat $\underline{T}$ bij benadering normaal verdeeld is met 0 als theoretisch gemiddelde (verwachting) en met als spreiding, indien er geen gelijken [1]) optreden:

$$\sigma = \sqrt{\tfrac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1)}.$$

Om de tweezijdige overschrijdingskans te vinden berekent men dan

$$u = \frac{|\,T\,| - 1}{\sigma}$$

en zoekt de hierbij behorende overschrijdingskans in een tabel voor de normale verdeling op. De term —1 in de teller is de z.g. continuïteitscorrectie.

Opmerkingen

(1). Tabel 2 bevat de kritieke waarden voor tweezijdige toetsing. Men vindt hierin de kritieke waarden voor rechtseenzijdige toetsing door de

---

[1]) Wanneer twee of meer waarnemingen dezelfde absolute waarde hebben spreekt men van gelijken. Aan gelijken wordt als rangnummer het gemiddelde toegekend van de rangnummers, die zij gekregen zouden hebben, als zij ongelijk waren. Als er gelijken voorkomen, wordt de variantie van $\underline{T}$ kleiner dan de overeenkomstige variantie zonder gelijken. Dit betekent, dat indien wij de spreiding berekenen alsof er geen gelijken onder de waarnemingen zijn, wij een te grote spreiding vinden, en dus — bij toetsing — een te grote overschrijdingskans. Is deze laatste $\leqq \alpha$, dan wordt H_0 reeds verworpen en de exacte berekening der variantie kan in dat geval achterwege blijven, omdat deze tot dezelfde conclusie leidt.

Tabel 2. Kritieke waarden van T voor n = 4 (1) 25 en α = 0,01; 0,02; 0,05 en 0,10 (tweezijdig) [1]

n \ α	0,01	0,02	0,05	0,10
4	—	—	—	—
5	—	—	—	15
6	—	—	21	17
7	—	28	24	22
8	36	34	30	26
9	43	39	35	29
10	49	45	39	35
11	56	52	46	40
12	64	60	52	44
13	73	67	57	49
14	81	75	63	55
15	90	82	70	60
16	98	90	78	66
17	107	99	85	71
18	117	107	91	77
19	126	116	98	84
20	136	124	106	90
21	151	135	115	97
22	161	145	123	103
23	172	154	130	110
24	182	164	140	118
25	193	175	147	125

boven de kolommen aangegeven onbetrouwbaarheidsdrempels te halveren. Voor linkseenzijdige toetsing geldt hetzelfde, doch men dient dan bovendien deze waarden van een minteken te voorzien. In het laatste geval is de kritieke waarde de grootste waarde van de toetsingsgrootheid, die nog in de kritieke zone gelegen is.

Bij rechts- (resp. links-) eenzijdige toetsing met onbetrouwbaarheidsdrempel α verwerpt men H_0 dus als $T \geqq T_{2\alpha}$ (resp. $T \leqq -T_{2\alpha}$).

(2). Men is wel eens geneigd bij de reeksen waarnemingen, waarop een symmetrietoets behoort te worden toegepast, eerst te toetsen met de tekentoets. De bijzonder gemakkelijke wijze waarop deze kan worden uitgevoerd maakt dit zeer aantrekkelijk. Alleen in die gevallen, waarin de tekentoets niet tot verwerping van de gestelde hypothese leidt past men dan nog een

---

[1] „—" betekent dat voor de betreffende waarde van n voor geen enkele waarde van T de tweezijdige overschrijdingskans $\leqq \alpha$ is. Voor $n = 4$ (1) 20 zijn de exacte waarden opgegeven; de overige zijn gevonden met behulp van de normale benadering.

symmetrietoets toe. Bij deze „gecombineerde" wijze van toetsen is de onbetrouwbaarheid echter niet onaanzienlijk groter dan bij toepassing van elk der toetsen alleen bij een bepaalde onbetrouwbaarheidsdrempel.

In [1] zijn kritieke waarden gegeven, waarmee men bij een dergelijke gecombineerde toetsing bij verschillende waarden van α en n rekening moet houden.

(3). Een uitgebreide tabellenverzameling vindt men in [1]. Hierin zijn voor $n \leqq 20$ de exacte overschrijdingskansen voor alle mogelijke waarden van $\underline{T}$ opgenomen en de bij enkele onbetrouwbaarheidsdrempels behorende kritieke waarden voor $n \leqq 100$.

Ook de varianties voor $21 \leqq n \leqq 100$ vindt men hier en tevens de berekeningswijze voor de correctie van de variantie in verband met het voorkomen van gelijken. Bewijzen vindt men in [2].

Literatuur

[1] Benard, A. en van Eeden, Constance Handleiding voor de symmetrietoets van Wilcoxon, Rapport S 208 (M 76) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam.

[2] van Eeden, Constance and Benard, A. General theorems on Wilcoxon's test for symmetry, Rapport S 209 (VP 10) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam.

[3] Wilcoxon, F., Individual comparisons by ranking methods, Biometrics 1 (1945) 80-82. [1])

[4] Wilcoxon, F., Some rapid approximate statistical procedures, American Cyanamid Company, Agricultural Chemicals Division, New York, 1947.

A. B., C. v. E., Chr. L. R.

---

[1]) Dit artikel bevat een aantal fouten, die in [4] verbeterd zijn.