STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK

Memorandum M 86 (S 359)

Verdelingsvrije tolerantie-gebieden in de vorm van intervallen

door

J. Oosterhoff

januari 1966

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

1. Inleiding

Zij $\underline{x} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k)$ een k-dimensionale stochastische vector. We zullen steeds onderstellen, dat de verdelingsfunctie van $\underline{x}$ continu is.

In vele praktische problemen zou men graag k intervallen

$$(t_{11}, t_{12}), (t_{21}, t_{22}), \ldots, (t_{k1}, t_{k2}) \tag{1}$$

willen construeren zodanig, dat bij een gegeven getal p tussen 0 en 1

$$P(t_{11} < \underline{x}_1 < t_{12} \text{ én } t_{21} < \underline{x}_2 < t_{22} \text{ én } \ldots \text{ én } t_{k1} < \underline{x}_k < t_{k2}) \geq p \tag{2}$$

is, of in kortere notatie

$$P(\underline{x} \in T) \geq p, \tag{3}$$

waarin T het k-dimensionale interval (1) voorstelt. Dit houdt dus in, dat minstens een fractie p van de massa van de kansverdeling van $\underline{x}$ binnen het gebied T ligt.

Is de kansverdeling van $\underline{x}$ bekend, dan kunnen dergelijke gebieden T, die aan (3) voldoen, in principe inderdaad geconstrueerd worden. Gewoonlijk is deze kansverdeling onbekend, doch beschikt men over een steekproef van onderling onafhankelijke vectoren

$$\underline{x}^{(1)} = (\underline{x}_{1,1}, \underline{x}_{1,2}, \ldots, \underline{x}_{1,k})$$
$$\underline{x}^{(2)} = (\underline{x}_{2,1}, \underline{x}_{2,2}, \ldots, \underline{x}_{2,k})$$
$$\vdots$$
$$\underline{x}^{(n)} = (\underline{x}_{n,1}, \underline{x}_{n,2}, \ldots, \underline{x}_{n,k}),$$

alle met dezelfde verdeling als $\underline{x}$. Het is duidelijk, dat uit een dergelijke steekproef de onbekende kansverdeling van $\underline{x}$ nooit exact bepaald kan worden. Dit heeft tot gevolg, dat men op grond van de steekproef nooit intervallen (1) kan construeren, die altijd aan de eis (2) voldoen.

Men kan echter wel een <u>tolerantie-gebied</u> $\underline{T}$ in de vorm van k intervallen (1) bepalen. Dit is een stochastisch gebied, want de grenzen $\underline{t}_{ij}$ hangen af van de steekproef-vectoren. Zij α een gegeven getal tussen 0 en 1. Dan is de interpretatie van een dergelijk tolerantie-gebied als volgt:

> "Men trekt een steekproef van omvang n en bepaalt op grond van deze steekproef op nader aan te geven wijze een tolerantie-gebied $\underline{T}$. De bewering, dat minstens een fractie p van de massa van de kansverdeling van $\underline{x}$ binnen het gebied $\underline{T}$ ligt, is juist in een fractie $1-\alpha$ van de gevallen, dat men dit gehele experiment uitvoert".

Men heeft dus steeds een kans α, dat het geconstrueerde tolerantie-gebied niet aan de eisen voldoet: in deze gevallen zal minder dan 100p% van de massa van de kansverdeling van $\underline{x}$ overdekt worden door $\underline{T}$. Men noemt α de onbetrouwbaarheid van het tolerantie-gebied.

We merken op, dat deze tolerantie-gebieden verdelingsvrij zijn: van de simultane kansverdeling van de stochastische vector $\underline{x}$ wordt alleen ondersteld, dat de verdelingsfunctie continu is! Deze onderstelling impliceert, dat de waarden van $\underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}, \ldots, \underline{x}^{(n)}$ componentsgewijs met kans 1 verschillend zijn. Is aan deze onderstelling niet voldaan, zodat gelijke waarnemingen met positieve kans in de steekproef kunnen optreden, dan is de in § 2 beschreven constructiemethode niet correct. Een veel gecompliceerder techniek is dan noodzakelijk. Afronding der meetresultaten in de steekproef verdient dan ook geen aanbeveling!

2. De constructie van een tolerantie-gebied T

Bij de gekozen onbetrouwbaarheid α en steekproefomvang n leest men in de bijgevoegde tabel het aantal "blokken" m af, dat correspondeert met de gewenste fractie p van de massa van de kansverdeling van $\underline{x}$, die behoudens kans α binnen $\underline{T}$ dient te liggen. Vervolgens kiest men naar eigen inzicht 2k gehele niet-negatieve getallen

$$w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}, \ldots, w_{k1}, w_{k2}$$

met de eigenschap, dat de som van deze w's juist m is.

De waargenomen steekproef-vectoren ordent men componentsgewijs van laag naar hoog:

$$x_{(1),1},\ x_{(2),1},\ \ldots,\ x_{(n),1} \quad \text{(geordende eerste componenten)}$$

$$x_{(1),2},\ x_{(2),2},\ \ldots,\ x_{(n),2} \quad \text{(geordende tweede componenten)}$$

$$\vdots$$

$$x_{(1),k},\ x_{(2),k},\ \ldots,\ x_{(n),k} \quad \text{(geordende k-de componenten).}$$

Dan is

t_{11} het w_{11}-de getal in de rij eerste componenten, van onder af geteld

t_{12} het w_{12}-de getal in de rij eerste componenten, van boven af geteld.

Uit de overige component-rijen laat men nu die waarden weg, die corresponderen met waarden $\leq t_{11}$ dan wel $\geq t_{12}$ van de eerste component.

Dan is

t_{21} het w_{21}-de getal in de rij resterende tweede componenten, van onder af geteld

t_{22} het w_{22}-de getal in de rij resterende tweede componenten, van boven af geteld.

Uit de overige component-rijen laat men nu ook die waarden weg, die corresponderen met waarden $\leq t_{21}$ dan wel $\geq t_{22}$ van de tweede component. Op analoge wijze bepaalt men dan t_{31} en t_{32} uit de rij resterende derde componenten. Dit proces zet men voort, tot men t_{k1} en t_{k2} gevonden heeft.

Bij vaste α, n en p is het tolerantie-gebied T nog niet éénduidig bepaald; dit blijkt reeds uit het feit, dat men de w's op verschillende manieren kan kiezen.

Bij bovenstaande constructie maken we de volgende opmerkingen.

(i) De intervallen (t_{11},t_{12}), ..., (t_{k1},t_{k2}) kunnen iets anders uitvallen, als men de componenten in een andere volgorde doorloopt. Immers, elke keer dat men een interval voor een bepaalde component heeft geconstrueerd, laat men een aantal waarden weg uit elk der overgebleven component-rijen.

Is men eenmaal aan de laatste component toe, dan is uit de rij k-de componenten reeds een aantal waarden weggelaten, waaronder wellicht enige zeer grote of zeer kleine. Het interval (t_{k1}, t_{k2}) kan dus nu wat smaller uitvallen dan wanneer men was gestart met de k-de component i.p.v. met de eerste component. Gewoonlijk legt men van te voren de volgorde vast, waarin men de componenten zal doorlopen. Dit is niet strikt noodzakelijk, want het is geoorloofd de keuze van elke volgende component te laten afhangen van de reeds weggelaten steekproef-vectoren (doch niét van de nog resterende steekproef-vectoren!).

(ii) Het is geoorloofd voor één of meer der w's de waarde nul te kiezen. Kiest men bijv. $w_{i1} = 0$, dan is de ondergrens t_{i1} van het interval (t_{i1}, t_{i2}) gelijk aan $-\infty$ (of algemener aan de kleinste waarde, die de i-de component van $\underline{x}$ kán aannemen): dit interval heeft dan dus een éénzijdig karakter, daar alleen de bovengrens niet-triviaal is. Kiest men $w_{i2} = 0$, dan is de bovengrens t_{i2} gelijk aan ∞ (of algemener aan de grootste waarde, die de i-de component van $\underline{x}$ kán aannemen): het interval heeft dan wederom een éénzijdig karakter, daar alleen de ondergrens niet-triviaal is.

(iii) Wenst men voor een speciale component $\underline{x}_i$ het bijbehorend interval (t_{i1}, t_{i2}) zo smal mogelijk te maken, dan staan er twee wegen open om dit doel te bereiken. In de eerste plaats kan men, zoals in (i) reeds is opgemerkt, bij de constructie van T het interval (t_{i1}, t_{i2}) het laatste bepalen. In de tweede plaats kan men de getallen w_{i1} en w_{i2} zo groot mogelijk kiezen. Steeds moet echter $w_{i1} + w_{i2} \leq m$ zijn, terwijl de keuze van relatief grote waarden van w_{i1} en w_{i2} met zich meebrengt, dat de overige w's relatief klein worden (immers de som van alle w's moet gelijk aan m zijn) en de overige intervallen dus wijder worden. Is een bovengrens (resp. ondergrens) van meer belang dan een ondergrens (resp. bovengrens), dan zal men w_{i2} (resp. w_{i1}) groter kiezen dan w_{i1} (resp. w_{i2}).

(iv) In sommige situaties kan het voorkomen, dat men van de waarde van een component van een of meer der steekproef-vectoren alleen weet, dat deze groter is dan een bekend getal. In het in §3 te bespreken voorbeeld zullen we een dergelijk geval aantreffen. Bij de bepaling van een tolerantie-gebied is het dan het veiligst deze waarde op ∞ te stellen. Het is dan natuurlijk mogelijk, dat de bovengrens van een interval ook de "waarde ∞" zal krijgen: het interval heeft dan een éénzijdig karakter.

(v) Naarmate de steekproefomvang n groter is, is ook m groter bij dezelfde α en p. Dit houdt in, dat men bij een grotere steekproefomvang meer mogelijkheden tot het berekenen van tolerantie-gebieden tot zijn beschikking heeft. Zie ook het voorbeeld in §3.

Bij bovenstaande constructie zijn we er van uitgegaan, dat $k > 1$ is. Als $k = 1$, dan bestaat het tolerantie-gebied uit één enkel interval (t_1^*, t_2^*), dat men dan een tolerantie-interval noemt. Men kiest nu gehele niet-negatieve getallen w_1^* en w_2^* met de eigenschap $w_1^* + w_2^* = m$, en de grenzen t_1^* en t_2^* van het interval volgen uit de eerste stap van de hierboven beschreven constructie-methode.

3. Een voorbeeld

We lichten de constructie van een tolerantie-gebied toe aan de hand van een aan de praktijk ontleend voorbeeld.

In een fabriek worden grote partijen stroomonderbrekers gefabriceerd. Wordt een stroomonderbreker bij in gebruik neming te hoog belast, dan verbreekt deze de stroom na een zeker tijdsverloop. Dit tijdsverloop zullen we de schakeltijd noemen; een stroomonderbreker zullen we met schakelaar aanduiden. De schakeltijd is afhankelijk van de belasting (bij hogere belasting kortere schakeltijd) en variëert bovendien van schakelaar tot schakelaar.

Men beschouwt k ($k > 1$) verschillende belastingen $s_1, s_2, \ldots, s_k$. De k schakeltijden (alle > 0) hebben bij deze k belastingen een simultane kansverdeling, die onbekend is, doch waarvan ondersteld mag worden, dat ze een continue verdelingsfunctie bezit.

Uit een partij zijn aselect n schakelaars getrokken en achtereenvolgens aan de k belastingen onderworpen, waarbij de schakeltijden genoteerd werden.

Gevraagd wordt bij gegeven onbetrouwbaarheid α en steekproefomvang n een tolerantie-gebied $\underline{T}$ te construeren, zodat (behoudens kans α) voor minstens 100p% van de partij (p gegeven)

bij belasting s_1 de schakeltijd tussen $\underline{t}_{11}$ en $\underline{t}_{12}$ ligt

bij belasting s_2 de schakeltijd tussen $\underline{t}_{21}$ en $\underline{t}_{22}$ ligt

.

.

bij belasting s_k de schakeltijd tussen $\underline{t}_{k1}$ en $\underline{t}_{k2}$ ligt.

Hiermee krijgt de fabrikant (of zijn afnemer) een goed inzicht in de eigenschappen van de partij schakelaars bij verschillende belastingen.

Teneinde de omvang van dit voorbeeld enigszins te beperken zullen we aannemen, dat de steekproefomvang n = 20 en de schakeltijden zijn gemeten bij drie belastingen s_1, s_2 en s_3. Daar n = 20 niet in de bijgevoegde tabel voorkomt, geven we hier een klein tabelletje voor n = 20.

α \ aantal blokken m	1	2	3	4	5	6	7	8
.05	.861	.784	.717	.656	.599	.544	.492	.442
.01	.794	.711	.642	.579	.522	.468	.417	.369

In deze tabel zijn de fracties p van de partij vermeld, die aan de gestelde eisen zullen voldoen (behoudens kans α).

Men kiest α = 0.05 en p = 0.5. Dan volgt uit de tabel: m = 6 (m = 7 valt misschien ook nog te overwegen). Als men elk interval van evenveel belang acht, dan kunnen we $w_{11} = w_{12} = w_{21} = w_{22} = w_{31} = w_{32} = 1$ kiezen.

De (fictieve) meetresultaten in de steekproef zijn (van elke schakelaar zijn achtereenvolgens de schakeltijden bij s_1, s_2, s_3 vermeld, in seconden):

(11.8;9.3;9.5), (28.6;14.7;12.1), (17.9;15.1;11.3), (14.1;10.0;8.2), (20.8;17.1;15.3), (19.1;15.0;10.1), (10.8;10.6;7.4), (15.4;12.0;9.6), (16.4;14.9;11.5), (15.3;15.7;13.2), (23.6;21.5;24.1), (22.3;16.9;12.5), (11.2;9.8;9.2), (19.9;14.0;11.2), (∞ ;36.5;20.3), (17.8;13.3;10.4), (12.5;10.9;8.8), (15.7;12.9;10.3), (22.7;18.1;14.3), (19.5;14.6;11.1). Bij het meten van de schakeltijd wachtte men slechts 5 minuten af, of verbreking van de stroom optrad; in één geval (15-de steekproef-vector) had bij belasting s_1 na 5 minuten nog geen stroomverbreking plaats gevonden en werd de schakeltijd op ∞ gesteld (zie opmerking (iv) in §2).

Men ordent de schakeltijden nu voor elke belasting afzonderlijk:

s_1: 10.8;11.2;11.8;12.5;14.1;15.3;15.4;15.7;16.4;17.8;17.9;19.1;19.5; 19.9;20.8;22.3;22.7;23.6;28.6;∞

s_2: 9.3;9.8;10.0;10.6;10.9;12.0;12.9;13.3;14.0;14.6;14.7;14.9;15.0; 15.1;15.7;16.9;17.1;18.1;21.5;36.5;

s_3: 7.4;8.2;8.8;9.2;9.5;9.6;10.1;10.3;10.4;11.1;11.2;11.3;11.5;12.1; 12.5;13.2;14.3;15.3;20.3;24.1.

Gaat men nu bij de constructie van het tolerantie-gebied T als in §2 beschreven te werk, in de volgorde s_1, s_2, s_3, dan vindt men:

$(t_{11},t_{12}) = (10.8,\infty)$; $(t_{21},t_{22}) = (9.3,21.5)$; $(t_{31},t_{32}) = (8.2,15.3)$.

Had men echter de volgorde s_3, s_2, s_1 gekozen, dan zou men gevonden hebben:

$(t_{11},t_{12}) = (11.2,28.6)$; $(t_{21},t_{22}) = (9.3,36.5)$;$(t_{31},t_{32})=(7.4,24.1)$.

Hieruit blijkt duidelijk, dat men bij s_1 (resp. s_3) het smalste interval krijgt, als men bij de constructie eindigt met s_1 (resp. s_3), ook al laat men de w's ongewijzigd.

Had men $\alpha = 0.01$ gekozen, dan volgt uit de tabel (bij p = 0.5) m = 5, zodat minstens één w gelijk aan nul gekozen moet worden en bij minstens één interval dus een ondergrens 0 of een bovengrens ∞ optreedt. Kiest men p = 0.75, dan is (bij $\alpha = 0.05$) m = 2, zodat men dan slechts òf aan één interval een ondergrens $>$ 0 en een bovengrens $< \infty$ kan toekennen (mits de betrokken grootste waarneming eindig is) òf twee éénzijdige intervallen kan bepalen. Kiest men $p = 0.9$ (bij $\alpha = 0.01$ of 0.05), dan is het zelfs onmogelijk één enkele onder- of bovengrens aan te geven.

Is men in het bijzonder geïnteresseerd in de belasting s_2, dan kan men voor de schakeltijd bij belasting s_2 een afzonderlijk tolerantie-interval bepalen. Bij $\alpha = 0.05$ en $p = 0.5$ is $m = 6$, zodat men $w_1^* = w_2^* = 3$ kan kiezen, hetgeen leidt tot $(t_1^*, t_2^*) = (10.0, 18.1)$. Wil men vooral de bovengrens zo klein mogelijk maken, dan is $w_1^* = 1$ en $w_2^* = 5$ misschien een betere keuze; het tolerantie-interval heeft dan de gedaante $(9.3, 16.9)$. Kiest men echter $p = 0.95$ (en $\alpha = 0.05$), dan is het niet mogelijk een tolerantie-interval te bepalen, omdat de steekproefomvang te klein is. Bij een steekproefomvang van 100 of groter zou dit wel mogelijk zijn geweest (zie bijgevoegde tabel).

Opmerking: Het is denkbaar, dat zich soms een iets andere situatie voordoet. Een afnemer van schakelaars stipuleert bij een aantal belastingen boven- en ondergrenzen voor de schakeltijd en vraagt, welke fractie van de aan hem te leveren partij tenminste aan deze eisen zal voldoen (met onbetrouwbaarheid α). Deze vraag is niet met behulp van tolerantie-gebieden te beantwoorden. Dit probleem is echter wel tot een ander bekend standaard-probleem terug te brengen. Men dient dan na te gaan hoeveel van de n schakelaars uit de steekproef aan de door de afnemer gestelde eisen voldoen; zij dit aantal z. Noem de kans, dat een aselect uit de partij gekozen schakelaar aan de eisen voldoet P. Het antwoord op de gestelde vraag wordt dan verkregen door uit de gevonden z een betrouwbaarheids-ondergrens voor de kans P te bepalen (met onbetrouwbaarheid α).

4. Theoretische achtergrond; tabellen

De constructie van een tolerantie-gebied berust op de volgende eigenschap. Zij $F(x)$ de k-dimensionale (continue) verdelingsfunctie van de stochastische vector $\underline{x}$.

Zij $\underline{T}_m$ een tolerantie-gebied, dat met onbetrouwbaarheid α tenminste een fractie p van de massa van de kansverdeling van $\underline{x}$ overdekt, berekend uit n steekproef-vectoren, en dat onstaat door weglating van m blokken. Dan is dus

$$P\left(\int_{\underline{T}_m} dF \geq p\right) = 1-\alpha \tag{4}$$

Noemen we $\underline{U}_m = \int_{\underline{T}_m} dF$,

dan kan men bewijzen (zie b.v. [6] of [8]), dat $\underline{U}_m$ een beta-verdeling heeft met parameters n-m+1 en m, zodat

$$P(\underline{U}_m \geq p) = 1 - \frac{n!}{(n-m)!(m-1)!} \int_0^p u^{n-m}(1-u)^{m-1}du$$

$$= 1 - I_p(n-m+1,m), \tag{5}$$

waarin $I_p(n-m+1,m)$ de "incomplete beta-function ratio" voorstelt.

Wenst men dus bij gegeven n, α en m de fractie p te bepalen, dan dient men de onvolledige beta-functie te inverteren (naar p). Als n-m+1 en m beide $\leq$ 40 zijn, dan kan men gebruik maken van de tabellen van HARTER [3], waarin percentielen van de beta-verdeling getabelleerd zijn (voor α = .0001;.0005;.001;.005;.01;.025;.05;.1(.1).5). Zo is het tabelletje in §3 met behulp hiervan berekend. Meestal is echter n-m+1 > 40 en dan zijn geen gepubliceerde tabellen bruikbaar. Door WISE [9] zijn echter zeer goede benaderingen voor de inverse van het onvolledige beta-functie quotiënt opgesteld. Deze hebben de volgende gedaante.

Beschouw $I_p(a,b) = \alpha$ (in ons geval a = n-m+1, b = m). Zij

$$N = a + \frac{1}{2} b - \frac{1}{2}$$

$$y_0 = \frac{1}{2} \chi^2_{2b}(\alpha),$$

waarin $\chi^2_{2b}(\alpha)$ het bovenste α-punt van de chi-kwadraat verdeling met 2b vrijheidsgraden voorstelt.

Dan is een eerste benadering voor p:

$$p_1 = \exp\left\{-\frac{y_0}{N}\left[1 + \frac{1}{24N^2}(b-1)(b+1+y_0)\right]\right\}; \qquad (6)$$

de relatieve fout in deze benadering is van de orde N^{-5}.
Een betere benadering van p is

$$p_2 = p_1 \exp\left\{-\frac{y_0(b-1)}{5760\ N^5}\left[2y_0^2(4b-y_0-8)+(b+1+y_0)(23b^2-47+10y_0(b-1))\right]\right\}; \qquad (7)$$

de relatieve fout in deze benadering is van de orde N^{-7}.

Voor niet te kleine N en $a > 3b$ is de eerste benadering p_1 reeds zeer nauwkeurig. De bijgevoegde tabel is berekend m.b.v. deze benaderingen; in geen enkel geval was het verschil tussen p_1 en p_2 meer dan één eenheid in de 5-de decimaal.

Voorts zij nog gewezen op een tabel van SOMERVILLE [5], die goede diensten kan bewijzen bij het bepalen van tolerantie-gebieden in gevallen, waarin de bijgevoegde tabel niet voorziet, bijv. voor $m > 12$. In deze tabel worden bij gegeven

steekproefomvang n = 50(5)100(10)150, 170, 200(100)1000,
onbetrouwbaarheid α = .01, .05, .1, .25, .5,
overdekkingsfractie p = .01, .05, .1, .25, .5

de maximale waarden van m opgegeven, waarbij het tolerantie-gebied nog aan de gestelde eisen voldoet.

Tenslotte kunnen ook de door MURPHY [4] gepubliceerde grafieken nog van nut zijn, waarin de overdekkingsfractie p is uitgezet tegen de steekproefomvang n. Deze grafieken zijn geconstrueerd bij

onbetrouwbaarheid α = .01, .05, .1,
aantal weggelaten blokken m = 1(1)6(2)10(5)30(10)60(20)100.

Literatuur

[1] D.A.S. Fraser, Sequentially determined statistically equivalent blocks, Ann. Math. Stat. 22 (1951), 372-381.

[2] D.A.S. Fraser, Nonparametric tolerance regions, Ann. Math. Stat. 24 (1953), 44-55.

[3] H.L. Harter, New tables of the incomplete Gamma-function ratio and of percentage points of the chi-square and Beta distributions, Aerospace Research Laboratories, United States Air Force (1963).

[4] R.B. Murphy, Non-parametric tolerance limits, Ann. Math. Stat. 19 (1948), 581-589.

[5] P.N. Somerville, Tables for obtaining non-parametric tolerance limits, Ann. Math. Stat. 29 (1958), 599-601.

[6] J.W. Tukey, Nonparametric estimation, II. Statistically equivalent blocks and tolerance regions - the continuous case, Ann. Math. Stat. 18 (1947), 529-539.

[7] J.E. Walsh, Nonparametric confidence intervals and tolerance regions, ch. 8 in Contributions to order statistics, ed. by A.E. Sarhan & B.G. Greenberg, J. Wiley, New York (1962).

[8] S.S. Wilks, Mathematical statistics, J. Wiley, New York (1962).

[9] M.E. Wise, The incomplete beta function as a contour integral and a quickly converging series for its inverse, Biometrika 37 (1950), 208-218.

Tabel ten dienste van het berekenen van tolerantie-gebieden

De ingang-gegevens van deze tabel zijn: de steekproefomvang n, de onbetrouwbaarheid α en het aantal (weg te laten) blokken m. De getabelleerde getallen zijn de fracties p van de populatie.

n	α	m =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
60	.01		.926	.894	.867	.842	.819	.796	.774	.753	.732	.712	.692	.673
	.05		.951	.923	.899	.876	.854	.833	.812	.792	.772	.753	.734	.715
70	.01		.936	.909	.885	.864	.843	.823	.804	.786	.768	.750	.733	.716
	.05		.958	.934	.913	.893	.874	.856	.838	.820	.803	.786	.770	.753
80	.01		.944	.920	.899	.880	.862	.844	.827	.811	.795	.779	.764	.749
	.05		.963	.942	.923	.906	.889	.873	.857	.842	.827	.812	.797	.783
90	.01		.950	.929	.910	.893	.876	.861	.846	.831	.817	.803	.789	.775
	.05		.967	.948	.932	.916	.901	.887	.873	.859	.845	.832	.819	.806
100	.01		.955	.935	.919	.903	.888	.874	.860	.847	.834	.821	.809	.796
	.05		.970	.953	.938	.924	.911	.898	.885	.873	.860	.848	.836	.825
110	.01		.959	.941	.926	.912	.898	.885	.873	.860	.848	.837	.825	.814
	.05		.973	.958	.944	.931	.919	.907	.895	.884	.873	.862	.851	.840
120	.01		.962	.946	.926	.919	.906	.894	.883	.872	.861	.850	.839	.829
	.05		.975	.961	.948	.937	.925	.914	.904	.893	.883	.873	.863	.853
130	.01		.965	.950	.937	.925	.913	.902	.892	.881	.871	.861	.851	.841
	.05		.977	.964	.952	.941	.931	.921	.911	.901	.892	.882	.873	.864
150	.01		.970	.957	.945	.935	.925	.915	.906	.897	.888	.879	.870	.862
	.05		.980	.969	.959	.949	.940	.931	.923	.914	.906	.898	.890	.882
170	.05		.983	.972	.963	.955	.947	.939	.932	.924	.917	.909	.902	.895
200	.05		.985	.977	.969	.962	.955	.948	.942	.935	.929	.923	.917	.911
250	.05		.988	.981	.975	.969	.964	.958	.953	.948	.943	.938	.933	.928
300	.05		.990	.984	.979	.974	.970	.965	.961	.957	.952	.948	.944	.940
350	.05		.991	.987	.982	.978	.974	.970	.966	.963	.959	.956	.952	.949
400	.05		.993	.988	.984	.981	.977	.974	.971	.967	.964	.961	.958	.955
500	.05		.994	.991	.987	.985	.982	.979	.976	.974	.971	.969	.966	.964
600	.05		.995	.992	.990	.987	.985	.983	.980	.978	.976	.974	.972	.970
1000	.05		.997	.995	.994	.992	.991	.990	.988	.987	.986	.984	.983	.982
2000	.05		.999	.998	.997	.996	.995	.995	.994	.993	.993	.992	.992	.991