SA

stichting

mathematisch

centrum

AFDELING MATHEMATISCHE STATISTIEK SN 2/70 OKTOBER

M.C.A. VAN ZUYLEN

ASYMPTOTIC RELATIVE EFFICIENCY (A.R.E.) OFWEL PITMAN-EFFICIENCY

SA

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

INHOUD. pag.

Hoofdstuk I. (Inleiding)

1 Relatieve doeltreffendheid en A.R.E. 2

Hoofdstuk II.

1 Asymptotische relatieve doeltreffendheid (A.R.E.) 10

2 A.R.E. en de afgeleiden van de onderscheidings- vermogen als functie van θ 20

3 De interpretatie van de waarde van m 27

4 Het maximumverlies aan onderscheidingsvermogens en de A.R.E. 31

5 Niet-normale gevallen 35

6 Voorbeelden 36

7 De relatie van Pitman's asymptotische relatieve doeltreffendheid van twee toetsen en de correlatie-coëfficiënt van hun toetsingsgrootheden 40

Hoofdstuk III. (Appendix) Een verfijnde Pitman-doeltreffendheid

1 Het begrip doeltreffendheid (rel.) 50

2 Edgeworth benadering van de Mann-Whitney stochastische grootheid 52

3 Relatieve doeltreffendheid t.o.v. de standaard-normale toets 56

4 Relatieve doeltreffendheid t.o.v. de t-toets 59

Literatuur 61

Hoofstuk I

§ 1 Relatieve doeltreffendheid en A.R.E.

Wanneer er meer dan een aanpak bestaat van een bepaald statistisch model dan is het nuttig om vergelijkingen te kunnen treffen.
We zullen willen weten welke aanpak de "beste" is, in een nader te definiëren zin. Dit probleem verschijnt bijvoorbeeld als we twee verdelingsvrije toetsen ter beschikking hebben om dezelfde nulhypothese H_0 te toetsen. Een hulpmiddel ter vergelijking van die twee toetsen is de relatieve doeltreffendheid.
Het is een relatieve grootheid die het onderscheidingsvermogen van een toets met dat van een andere vergelijkt.
Als "andere" wordt vaak een standaardvergelijkingstoets genomen, onder die condities vaak de meest onderscheidende.

def.: We zeggen dat de relatieve doeltreffendheid van een toets A t.o.v. een tweede toets B is e, als we bedoelen dat toets A, gebaseerd op n_1 waarnemingen "equivalent" is aan toets B, gebaseerd op $n_2 = e.n_1$ waarnemingen.
De vraag is nu natuurlijk: "Wat verstaan we onder equivalent"?

Def. van Pitman:

Als we twee toetsen A en B hebben van eenzelfde hypothese H_0, eenzelfde onbetrouwbaarheidsdrempel α en eenzelfde onderscheidingsvermogen t.o.v. eenzelfde alternatief, toets A vereist n_1 waarnemingen en toets B vereist n_2 waarnemingen, beide toetsen zijn eenzijdig of beide tweezijdig, dan is de relatieve doeltreffendheid van toets A

t.o.v. toets B : $\quad e = e_{1,2} = \dfrac{n_2}{n_1}$

Deze definitie geeft onmiddellijk aanleiding tot enige moeilijkheden.
In het algemeen hangt e af van 3 argumenten n.l. α, θ, n_2

$$\text{dus } e = e(\alpha, \theta, n_2)$$

waarbij α = onbetrouwbaarheidsdrempel v/d toetsen

θ = de parameter die de alternatieve hypothese karakteriseert

n_2 = het aantal waarnemingen bij een vast onderscheidingsvermogen van de "efficiente" toets (de toets waarmee we vergelijken).

De vergelijking van de twee toetsen vereist een ontwikkeling van deze uitdrukking als functie van die drie argumenten.
In werkelijkheid is het voor kleine n_1 en n_2 zo dat het onderscheidingsvermogen van de eerste toets niet <u>precies</u> gelijk is te krijgen aan het onderscheidingsvermogen van de tweede toets.
Interpolatie zal dus noodzakelijk zijn.
Hodges en Lehmann hebben aangetoond dat een speciale interpolatiemethode aanzienlijke invloed kan hebben op de waarde van e. Deze moeilijkheid is klein als n groot is.
In het algemeen is de ontwikkeling van e als functie van zijn drie argumenten erg ingewikkeld, te ingewikkeld.
Toch is het zeer gewenst om een maat te vinden waarmee we twee toetsen A en B kunnen vergelijken.
Het kan in de praktijk bijv. zo zijn dat we twee toetsen hebben die we kunnen toepassen, A en B, waarbij A slechts weinig meer onderscheidend is, slechts weinig beter, dan toets B, terwijl toets B rekenkundig veel simpeler is toe te passen.
We zullen dan toch toets B willen prefereren.
We zullen nu een ruw beeld geven van wat de Pitman-doeltreffendheid is, een wiskundig nauwkeurige definitie van dit begrip volgt in het volgende hoofdstuk.
Bij de besturdering van e als functie van zijn drie argumenten θ, n_2, α kunnen we natuurlijk een of twee argumenten constant houden en de anderen laten naderen tot een passende limiet.
Het is vaak redelijk en mathematisch gezien ook het eenvoudigste het asymptotische geval $n_2 \to \infty$ te beschouwen. In de verdere tekst zullen we n_2 vervangen door n.
Om niet 2 toetsen te beschouwen met onderscheidngsvermogen praktisch 1, zoals het geval is bij asymptotisch onderscheidende toetsen tegen en <u>vast</u> alternatief, (bij deze toetsen geldt n.l. per def. dat het onderscheidingsvermogen $\beta \to 1$ als $n \to \infty$), bekijken we alternatieven $\theta = \theta_n$ met $\theta_n \to \theta_0$ als $n \to \infty$.

<u>Opm.</u>: As. onderscheidend is hetzelfde als consistent. Als we het alternatief vast zouden houden bij consistente toetsen

zouden we vaak krijgen $\lim\limits_{n_2\to\infty} \frac{n_2}{n_1} = 1$. Dit resultaat zou onbruikbaar zijn.

Dat dit niet altijd het geval behoeft te zijn zien we aan het volgende voorbeeld (1.1). Dit in tegenstelling tot wat in enige boeken vermeld staat.

Vb(1.1) Stel we willen toetsen $H_0 : \mu = \mu_0$

tegen $H_1 : \mu = \mu_1 \qquad (\mu_1 > \mu_0)$

op grond van de steekproef $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{2n}$ uit een normale (μ,σ^2) verdeling waarbij μ de verwachting is van de normale verdeling, terwijl de variantie σ^2 bekend is.

We gebruiken als toetsingsgrootheden

$$\underline{t}_1^{(n)} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \underline{x}_i$$ (gemiddelde van alle waarnemingen)

$$\underline{t}_2^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i$$ (gemiddelde van de eerste n waarnemingen)

Zij $\beta_i^{(n)}$ het onderscheidingsvermogen van toets i bij 2n waarnemingen.

Bewering: $\beta_1^{(n)} = \beta_2^{(2n)}$

Bewijs: $\underline{t}_1^{(n)}$ heeft dezelfde verdeling als $\underline{t}_2^{(2n)}$

In dit geval geldt dus $\lim\limits_{n_2\to\infty} \frac{n_2}{n_1} = 1/2 \neq 1$

We beschouwen dus $e = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \theta\to\theta_0}} e(\alpha, \theta, n)$

In vele gevallen blijkt dat deze e niet afhangt van α.

Via deze limiet komen we dan tot een meer algemene en in zekere zin gestandaardiseerde maat voor relatieve doeltreffendheid, de zogenaamde "asymptotic relative efficiency" ofwel Pitman doeltreffendheid.

Ook de def. van A.R.E. brengt moeilijkheden met zich mee voor de toepassing. De A.R.E. van 2 toetsen heeft wel het voordeel dat zij niet zo afhankelijk is van allerlei toetscondities zoals $e(\alpha, \theta, n)$ dat was, maar zij heeft het grote nadeel dat zij in feite onrealistisch is t.o.v. de experimentele praktijk.
A.R.E.'s representeren n.l. de relatieve doeltreffendheid van de toets onder voorwaarde dat de steekproefomvang oneindig is en dat de alternatieve hypothese essentieel dezelfde is als de nulhypothese.
Duidelijk is het precies onder die omstandigheden als waarin zij gedefinieerd is dat de A.R.E. het minste praktische nut heeft.
Tenslotte, $n \neq \infty$ en niemand is geinteresseerd in een onderscheidingsvermogen om een H_0-hypothese te verwerpen ten gunste van de alternatieve hypothese H_1 die slechts ontzettend weinig verschilt van H_0.
Men kan zeggen dat de relatieve doeltreffendheid niet voldoende algemeen is, maar realistisch, terwijl de A.R.E. wel algemeen is maar niet realistisch.
Men kan zich afvragen, hoe representatief is nu de A.R.E. in situaties dat n niet groot is en/of het alternatief niet vlak bij de nul-hypothese ligt.
In de loop van de volgende paragrafen zal hierop een antwoord worden gegeven waaruit zal blijken dat de A.R.E. voor de vergelijking van 2 toetsen in het algemeen toch een nuttiger grootheid zal zijn dan de relatieve doeltreffendheid.
Nog een andere mogelijkheid om 2 toetsen met elkaar te vergelijken is een beschouwing van de respectievelijke onderscheidingsvermogens als functie van θ(het alternatief) van asymptotisch onderscheidende toetsen voor $n \to \infty$.
Bijv. Wald (1941) definieerde een asymptotisch meest onderscheidende toets als een toets waarvan het onderscheidingsvermogen niet kan worden verbeterd voor $n \to \infty$, d.w.z. asymptotisch U.M.P.
We zullen nu eerst een nauwkeurige definitie geven van een toets die asymptotisch U.M.P. is, waarna een voorbeeld (1.2) zal volgen, afkomstig van Lehmann (1949), waaruit blijkt dat een dergelijke toets in feite aanzienlijk minder kan zijn dan zo'n andere as. U.M.P. toets, zelfs asymptotisch.

Opm.: Het begrip "asymptotisch U.M.P." is geen wezenlijk alternatief voor as. efficiency omdat slechts sommige toetsen as. U.M.P. zijn.

We definieren allereerst een U.M.P. toets:

Stel we willen toetsen $H : \theta \in \Omega_H$

tegen het alternatief $K : \theta \in \Omega_K$ met als onbetrouwbaarheidsdrempel α, waarbij $\Omega_H \cup \Omega_K = \Omega$ = de parameterruimte.

De uitslag van de toets, of we de nul-hypothese zullen verwerpen of niet, is gebaseerd op de waarde van een stochastische variabele $\underline{X}$, waarvan we dus weten dat de verdelingsfunctie P_θ behoort tot een zekere klasse $\mathcal{P} = \{ P_\theta \mid \theta \in \Omega \}$.

We nemen aan dat als we θ kennen, we ook weten of de nulhypothese juist is of niet.

Voor iedere waarneming x, verwerpen we met een zekere kans, die van x afhangt n.l. $\phi(x)$ (x is vaak een waarnemingsvector).

Deze functie ϕ karakteriseert de toets (de kritische functie).

De kans op verwerpen is : $E_\theta\ \phi(\underline{X}) = \int \phi(x)\ dP_\theta(x)\ ,\quad \theta \in \Omega$

We weten dus $0 \leq \phi(x) \leq 1$. In de kritische zône Z geldt $\phi = 1$.

Def.: ϕ is U.M.P. (H, K, α)

als voor iedere toets ψ met $E_\theta\ \psi(X) \leq \alpha \quad \forall\ \theta \in \Omega_H$

geldt : $\beta_\phi(\theta) = E_\theta\ \phi(X) \geq E_\theta\ \psi(X) = \beta_\psi(\theta) \quad \forall\ \theta \in \Omega_K$

We zeggen: ϕ is uniform meest onderscheidend.

We definiëren vervolgens wat een asymptotisch U.M.P. toets is.

Def.: Een rij toetsen $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ heet asymptotisch U.M.P. (H, K, α)

als voor iedere rij $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ met $E_\theta\ \phi_n(x) \leq \alpha$ voor $\theta \in \Omega_H$,

geldt dat :
$$\limsup_{n\to\infty} \left\{ \sup_{\theta\in\Omega_K} \left(E_\theta\ \phi_n(x) - E_\theta\ \psi_n(x)\right) \right\} \leq 0$$

Vb(1.2) Beschouw het probleem dat we van een normale verdeling de verwachting toetsen bij een bekende variantie, die we 1 veronderstellen. We toetsen $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen het een-zijdige alternatief $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$.

Het steekproefgemiddelde zij $\bar{\underline{x}}$; de waarnemingen zijn $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$. Bekend is dat een U.M.P. toets van H_0 tegen H_1 wordt gegeven door de kritieke zône $\bar{\underline{x}} \geq \theta_0 + \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}$ (zie Lehmann) en dat het onderscheidingsvermogen is : $P_1 = G\{\Delta.\sqrt{n} - \lambda_\alpha\} = 1 - G\{\lambda_\alpha - \Delta\sqrt{n}\}$, (1.1)
waarbij $\Delta = \theta_1 - \theta_0$, G de normale (0,1) verdelingsfunctie, α de onbetrouwbaarheidsdrempel is, en λ_α door α bepaald wordt ($\alpha = \int_{\lambda_\alpha}^{\infty} g(x)dx$).

$$\text{Dus} \quad G(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \quad , \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

We construeren nu een 2-zijdige toets met onbetrouwbaarheid α, waarin we H_θ verwerpen als $\bar{\underline{x}} \geq \theta_0 + \lambda_{\alpha_1} / n^{1/2}$ of $\bar{\underline{x}} \leq \theta_0 - \lambda_{\alpha_2} / n^{1/2}$ waarbij λ_{α_1} en λ_{α_2} functies zijn van n zódat $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$

Het onderscheidingsvermogen van de 2e toets is:

$$P_2 = G\{\Delta\sqrt{n} - \lambda_{\alpha_1}\} + G\{-\Delta\sqrt{n} - \lambda_{\alpha_2}\} \tag{1.2}$$

Daar G altijd positief of 0 is volgt:

$$P_2 > G\{\Delta\sqrt{n} - \lambda_{\alpha_1}\} = 1 - G\{\lambda_{\alpha_1} - \Delta\sqrt{n}\} \tag{1.3}$$

Daar de eerste toets UMP was hebben we:

$$G\{\lambda_{\alpha_1} - \Delta\sqrt{n}\} - G\{\lambda_\alpha - \Delta\sqrt{n}\} > P_1 - P_2 \geq 0 \tag{1.4}$$

Gemakkelijk kan men inzien dat het verschil tussen G(x) en G(y) voor vaste (x - y) maximaal is als x en y symmetrisch om 0 liggen, dus als x = -y

$$\Rightarrow G\{1/2(x-y)\} - G\{-1/2(x-y)\} \geq G(x) - G(y) \tag{1.5}$$

Als we (1.5) gebruiken voor (1.4) dan: ($x = \lambda_{\alpha_1} - \Delta\sqrt{n}$, $y = \lambda_\alpha - \Delta\sqrt{n}$)

$$G\{1/2(\lambda_{\alpha_1} - \lambda_\alpha)\} - G\{-1/2(\lambda_{\alpha_1} - \lambda_\alpha)\} \geq P_1 - P_2 \geq 0 \tag{1.6}$$

Als we dus kiezen λ_{α_1} voor iedere n zo dat $\lim_{n\to\infty} \lambda_{\alpha_1} = \lambda_\alpha$ (1.7)

dan gaat het linkerlid van (1.6) naar 0 $\Rightarrow (P_1-P_2) \to 0$ als $n \to \infty$ uniform in Δ.

De twee-zijdige toets is dus asymptotisch U.M.P.
Beschouw nu het quotient van de kansen op fouten van de 2e soort van de toetsen.
Uit (1.1) en (1.2) volgt:

$$\frac{1 - P_2}{1 - P_1} = \frac{G\{\lambda_{\alpha_1} - \Delta\sqrt{n}\} - G\{-\lambda_{\alpha_2} - \Delta\sqrt{n}\}}{G\{\lambda_\alpha - \Delta\sqrt{n}\}} \tag{1.8}$$

Als $\sqrt{n} \to \infty$ dan gaan teller en noemer naar 0.
We gebruiken de regel van l'Hôpital (differentieren naar $n^{1/2}$) ;

$$\lim_{n^{1/2}\to\infty} \frac{1 - P_2}{1 - P_1} = \lim_{n^{1/2}\to\infty} \frac{(\lambda'_{\alpha_1} - \Delta)g\{\lambda_{\alpha_1} - \Delta\sqrt{n}\}}{-\Delta\, g\{\lambda_\alpha - \Delta\sqrt{n}\}} + \frac{(\lambda'_{\alpha_2} + \Delta)g\{-\lambda_{\alpha_2} - \Delta\sqrt{n}\}}{-\Delta\, g\{\lambda_\alpha - \Delta\sqrt{n}\}} \tag{1.9}$$

$$\stackrel{\text{not}}{=} \lim_{n^{1/2}\to\infty} (B + A)$$, waarbij g de normale (0,1) dichtheid is.

Uit (1.7) volgt dat $\lambda_{\alpha_2} \to \infty$ als $n \to \infty$ en daarom gaat A naar 0 als $n^{1/2} \to \infty$.
Uit (1.7) volgt dat ook $B \to \infty$ als

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\lambda'_{\alpha_1}\, g\{\lambda_{\alpha_1} - \Delta\sqrt{n}\}}{g\{\lambda_\alpha - \Delta\sqrt{n}\}} = \lim_{n\to\infty} -\lambda'_{\alpha_1} \frac{\exp\{-1/2(\lambda_{\alpha_1} - \Delta\sqrt{n})^2\}}{\exp\{-1/2(\lambda_\alpha - \Delta\sqrt{n})^2\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\lambda'_{\alpha_1} \exp\{-1/2(\lambda^2_{\alpha_1} - \lambda^2_\alpha) + \Delta\sqrt{n}(\lambda_{\alpha_1} - \lambda_\alpha)\} = \infty \tag{1.10}$$

$$\stackrel{\text{not}}{=} \lim_{n\to\infty} -\lambda'_{\alpha_1} \exp\{C + \Delta\sqrt{n}(\lambda_{\alpha_1} - \lambda_\alpha)\} \qquad \text{waarbij } C = -1/2(\lambda^2_{\alpha_1} - \lambda^2_\alpha).$$

Uit (1.7) volgt dat $C \to 0$ als $n \to \infty$

Als we stellen $\lambda_{\alpha_1} = \lambda_\alpha + n^{-\delta}$, $0 < \delta < 1/2$

dan is (1.7) vervuld en (1.10) $\to \infty$ als $n \to \infty$.

Conclusie:

Ofschoon beide toetsen asymptotisch U.M.P. zijn, gaat het quotient van de kansen op fouten van de 2e soort $\to \infty$ als $n \to \infty$.

Het is daarom duidelijk dat het kriterium "asymptotisch U.M.P." niet erg selectief is.

Hoofdstuk II

§ 1 Asymptotisch relatieve doeltreffendheid (A.R.E.)

Zoals we in het vorige hoofdstuk hebben gezien, is het gewenst om een nuttige asymptotische maat te vinden voor toetsdoeltreffendheid bij alternatieve $\theta_n \to \theta_0$ als $n \to \infty$. Hierbij is dus:

θ_n : de parameter die de alternatieve hypothese karakteriseert.
θ_0 : de parameter die de nul-hypothese karakteriseert.

Dit type alternatief werd voor het eerst ingevoerd door Pitman (1948).
Laat $\underline{t}_1$ en $\underline{t}_2$ twee toetsingsgrootheden zijn (asymptotisch onderscheidend voor de hypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen het eenzijdige alternatief $H_1 : \theta > \theta_0$ en $\underline{t}_i = f_i(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)$ voor $i = 1,2$ ($\underline{t}_i$ is dus een functie van de waarnemingen).
We zullen aannemen dat $\underline{t}_1$ en $\underline{t}_2$ asymptotisch normaal verdeelde (D) stochastische grootheden zijn ($\forall\theta$). Later zal blijken dat deze voorwaarde (D) voor de opbouw van de theorie niet essentieel is.
In het volgende zullen we bij het opschrijven van breuken zonder meer veronderstellen dat de noemers ongelijk zijn aan 0 en dat de afgeleiden die we opschrijven bestaan.
We zullen de volgende afkortingen gebruiken:

$$\left.\begin{aligned} E(\underline{t}_i|\theta) &= E_i(\theta) \\ \operatorname{var}(\underline{t}_i|\theta) &= \sigma_i^2(\theta) \\ \frac{\partial^r}{\partial\theta^r} E_i(\theta) &= E_i^{(r)}(\theta) \\ \frac{\partial^r}{\partial\theta^r} \sigma_i(\theta) &= \sigma_i^{(r)}(\theta) \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l} i = 1,2 \\ \theta\in\Omega, \text{ waarbij } \Omega \text{ de parameter} \\ \text{ruimte is.} \end{array}$$

Zij α de onbetrouwbaarheidsdrempel van de toetsen. We nemen n groot.
We nemen bovendien aan dat: $\sigma_i(\theta) \neq 0$ voor $i = 1,2$ en $\forall\theta\in\Omega$.

Opm: We schrijven $f(n) \sim g(n)$ $(n \to \infty)$ als $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, waarbij $f(n)$ en $g(n)$ reëelwaardige functies zijn op de natuurlijke getallen.

We zeggen $f(n)$ en $g(n)$ zijn asymptotisch equivalent.
We beperken ons tot toetsen met kritieke zône Z_i, die gegeven worden door: $\underline{t}_i > E_i(\theta_0) + \lambda_\alpha \sigma_i(\theta_0)$ $\quad (i = 1,2)$.
Het teken van $\underline{t}_i$ kan eventueel veranderd worden indien noodzakelijk om een dergelijke vorm te verkrijgen;
λ_α wordt vastgelegd door de relatie $G(-\lambda_\alpha) = \alpha$, waarbij G de gestandaardiseerde normale verdelingsfunctie is.
We hebben dus:

$$P(\underbrace{\frac{\underline{t}_i - E_i(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)}}_{N(0,1)} \geq \lambda_\alpha | H_0) = \alpha \qquad (i = 1,2)$$

Het onderscheidingsvermogen van $\underline{t}_i$ voor n groot wordt:

$$P_i(\theta) = P(\frac{\underline{t}_i - E_i(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} \geq \lambda_\alpha | H_1) = P(\underline{t}_i \geq E_i(\theta_0) + \lambda_\alpha \sigma_i(\theta_0) | H_1)$$

$$= P(\underbrace{\frac{\underline{t}_i - E_i(\theta)}{\sigma_i(\theta)}}_{N(0,1)} \geq \frac{E_i(\theta_0) + \lambda_\alpha \sigma_i(\theta_0) - E_i(\theta)}{\sigma_i(\theta)} \mid \theta > \theta_0) =$$

$$= G(-(\frac{E_i(\theta_0) + \lambda_\alpha \sigma_i(\theta_0) - E_i(\theta)}{\sigma_i(\theta)})) =$$

$$= G\{(E_i(\theta) - E_i(\theta_0) - \lambda_\alpha \sigma_i(\theta_0) / \sigma_i(\theta)\} \quad \text{waarbij } \theta > \theta_0.$$

Het argument van G noemen we $\mu_i(\theta, \lambda_\alpha)$ zodat

$$\frac{E_i(\theta) - E_i(\theta_0) - \lambda_\alpha \sigma_i(\theta_0)}{\sigma_i(\theta)} = \mu_i(\theta, \lambda_\alpha) \qquad (2.0)$$

$$P_i(\theta) = G\{\mu_i(\theta, \lambda_\alpha)\} \quad \text{voor } i = 1,2 \quad (\theta > \theta_0)$$

<u>Opm</u>: Zij f reëelwaardige functie op $[a,b]$. Onder voorwaarden o.a. f is $n \times$ differentieerbaar (zie Analyse I) geldt de Stelling van Taylor:

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

waarbij $a < \xi < b$.

Stel nu dat de eerste (n-1) afgeleiden van f in het punt a allen 0 zijn, dan geldt dus:

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \qquad \text{met } a < \xi < b.$$

We zullen ons in het volgende voorlopig beperken tot één vaste toets zodat we de index i tijdelijk weg kunnen laten.
De ontwikkeling van de functie $E(\theta)$ om het punt $\theta = \theta_0$ is als volgt (Taylor):

$$E(\theta) - E(\theta_0) = E^{(m)}(\theta^*).\frac{(\theta-\theta_0)^m}{m!}$$

waarbij $\theta_0 < \theta^* < \theta$ en m wordt gedefinieerd door:

$$\begin{cases} E^{(r)}(\theta_0) = 0 & \text{voor } r = 1,2,\ldots,m-1 \\ E^{(m)}(\theta_0) \neq 0 & \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

We hebben ons beperkt tot consistente toetsen, het onderscheidingsvermogen $P(\theta) = G\{\mu(\theta,\lambda_\alpha)\}$ met $\theta > \theta_0$, gaat dus naar 1 als $n \to \infty$, voor alle $\theta > \theta_0$, θ vast.
Hoe kunnen we nu $\theta = \theta_n$ zo naar θ_0 laten naderen dat het onderscheidingsvermogen $P(\theta)$ niet nadert naar 1 en niet naar 0 als $n \to \infty$?
Dan zal moeten gelden dat $\lim_{n\to\infty} \mu(\theta_n,\lambda_\alpha)$ eindig is.
In het vervolg zal blijken (zie (2.4a)) dat het geval $\lim_{n\to\infty} G\{\mu(\theta_n,\lambda_\alpha)\} = 0$ of 1 niet interessant is aangezien hieruit bij gelijkstelling in de limiet van de beide onderscheidingsvermogens van de twee toetsen die we gebruiken, geen relatie zou volgen voor het quotient van het benodigde aantal waarnemingen.
We herhalen:

$$\mu(\theta_n,\lambda_\alpha) = \frac{E(\theta_n) - E(\theta_0) - \lambda_\alpha\sigma(\theta_0)}{\sigma(\theta_n)} .$$

Toepassing stelling van Taylor geeft:

$$\mu(\theta_n,\lambda_\alpha) = \frac{E^{(m)}(\theta^*)(\theta_n-\theta_0)^m}{\sigma(\theta_n)\, m!} - \lambda_\alpha \frac{\sigma(\theta_0)}{\sigma(\theta_n)} \qquad (\theta_0 < \theta^* < \theta_n).$$

Een eis die nu zeer voor de hand ligt, die ongeveer neerkomt op continuïteit van de verwachting en standaardafwijking als functie van θ in het punt θ_0, en die we nu stellen is de volgende:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E^{(m)}(\theta^*)}{E^{(m)}(\theta_0)} = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(\theta_n)}{\sigma(\theta_0)} = 1 \ .$$

Als nu aan deze eis voldaan is dan heeft $\mu(\theta,\lambda_\alpha)$ een eindige limiet voor $n \to \infty$ als $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{E^{(m)}(\theta_0)(\theta_n-\theta_0)^m}{\sigma(\theta_0)}$ eindig is.

Het geval dat er uit deze limiet 0 komt is ook niet van belang vanwege dezelfde reden als waarom we $\lim\limits_{n\to\infty} G\{\mu(\theta_n,\lambda_\alpha)\} = 0$ hebben uitgesloten.

We hebben gezien dat we moeten beschouwen het geval dat $\theta_n \to \theta_0$ als $n \to \infty$.

Om er voor te zorgen dat $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\theta_n,\lambda_\alpha) \neq \infty,-\infty,0$ moet dus gelden dat de snelheid waarmee $(\theta-\theta_0)^m$ naar θ gaat als $n \to \infty$, dezelfde is als de snelheid waarmee $1/\dfrac{E^{(m)}(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)}$ naar 0 gaat als $n \to \infty$.

In de praktijk hebben we vaak (zie Vb. 2.1) dat

$$R \overset{\text{def}}{=} \frac{E^{(m)}(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} \sim c.n^\beta \qquad (n \to \infty)$$

voor zekere constanten β en c.

Het is nu duidelijk hoe we de rij alternatieven θ_n moeten definiëren:

$$\theta_n = \theta_0 + \frac{k}{n^{\beta/m}} \qquad \begin{array}{l} n = 1,2,\ldots \\ k > 0, \text{ want } \theta_n > \theta_0 \ . \end{array}$$

We stellen nu $\beta/m = \delta$.

De volgende stelling ligt nu voor de hand:

<u>Stelling</u>: Zij 1) $R \overset{\text{def}}{=} \dfrac{E^{(m)}(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} \sim cn^{m\delta} \qquad (n \to \infty) \qquad (2.1) = B$

voor zekere c,δ

m wordt bepaald door (A)

2) $\theta_n = \theta_0 + \frac{k}{n^\delta}$, k willekeurig, > 0 (2.2)
n is de steekproefomvang in de beschouwde toetsingsituatie.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{E^{(m)}(\theta^*)}{E^{(m)}(\theta_0)} = 1$ en $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sigma(\theta_n)}{\sigma(\theta_0)} = 1$ (2.3) = C

voor $\theta_0 < \theta^* < \theta_n$, θ^* bepaald door (A).

Dan geldt: $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\theta_n,\lambda_\alpha) = \frac{ck^m}{m!} - \lambda_\alpha$.

Bewijs:

Volgens (2.1) hebben we $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{E^{(m)}(\theta_0)}{\sigma(\theta_0).c.n^{m\delta}} = 1$;

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\theta_n,\lambda_\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{E(\theta_n) - E(\theta_0) - \lambda_\alpha \sigma(\theta_0)}{\sigma(\theta_n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{E(\theta_n) - E(\theta_0)}{\sigma(\theta_n)} - \lim_{n\to\infty} \lambda_\alpha \frac{\sigma(\theta_0)}{\sigma(\theta_n)} =$$

$$\overset{(2.3)}{=} \lim_{n\to\infty} E^{(m)}(\theta^*).\frac{(\theta_n-\theta_0)^m}{m!} \cdot \frac{1}{\sigma(\theta_n)} - \lambda_\alpha \overset{(2.2)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{E^{(m)}(\theta^*).(\frac{k}{n^\delta})^m}{\sigma(\theta_n)\ m!} - \lambda_\alpha$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{E^m(\theta^*)}{E^{(m)}(\theta_0)} \cdot \frac{E^{(m)}(\theta_0)}{m!} \cdot (\frac{k}{n^\delta})^m \cdot \frac{\sigma(\theta_0)}{\sigma(\theta_n)} \cdot \frac{1}{\sigma(\theta_0)} - \lambda_\alpha$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{E^{(m)}(\theta^*)}{E^{(m)}(\theta_0)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{E^{(m)}(\theta_0)}{\sigma(\theta_0).c.n^{m\delta}}}_{\to 1} \cdot cn^{m\delta} \cdot \frac{1}{m!} \cdot (\frac{k}{n^\delta})^m \cdot \underbrace{\frac{\sigma(\theta_0)}{\sigma(\theta_n)}}_{\to 1} - \lambda_\alpha$$

$$= \frac{c\ k^m}{m!} - \lambda_\alpha \qquad \text{q.e.d.}$$

We zien dat het niet voldoende is in (2.3) slechts te eisen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E^{(m)}(\theta_n)}{E^{(m)}(\theta_0)} = 1.$$

Asymptotisch is het onderscheidingsvermogen dan dus

$$G\left(\frac{c.k^m}{m!} - \lambda_\alpha\right) \tag{2.4}$$

We beschouwen nu twee rijen van toetsen $\underline{t}_{1,n_1(\nu)}$, $\underline{t}_{2,n_2(\nu)}$ $(\nu=1,2,\ldots)$ en nemen aan dat voor beide rijen aan de voorwaarden van de stelling voldaan is.

Ook moet gelden: $\lim_{\nu\to\infty} n_1(\nu) = \infty$

$$\lim_{\nu\to\infty} n_2(\nu) = \infty$$

We hebben nu te maken met een R_i, k_i, m_i, δ_i enz. $(i = 1,2)$.
Als nu de twee rijen van toetsen in de limiet $(\nu \to \infty)$ eenzelfde onderscheidingsvermogen moeten hebben tegen dezelfde rij van alternatieven voor vaste α, dan moet volgens de stelling dus gelden:

$$G\left(\frac{c_1\, k_1^{m_1}}{m_1!} - \lambda_\alpha\right) = G\left(\frac{c_2\, k_2^{m_2}}{m_2!} - \lambda_\alpha\right) \tag{2.4a}$$

G is (N(0,1) verdelingsfunctie, strikt stijgend dus:

$$\frac{c_1\, k_1^{m_1}}{m_1!} - \lambda_\alpha = \frac{c_2\, k_2^{m_2}}{m_2!} - \lambda_\alpha .$$

Hieruit volgt:

$$\frac{c_2}{c_1} \cdot k_2^{m_2} \frac{m_1!}{m_2!} = k_1^{m_1} \tag{2.5}$$

Volgens (2.2) moet bovendien gelden:

$$\theta_0 + \frac{k_1}{(n_1(\nu))^{\delta_1}} = \theta_0 + \frac{k_2}{(n_2(\nu))^{\delta_2}} \quad \text{voor } \nu = 1,2,\ldots$$

Hieruit volgt: $k_1 = \dfrac{k_2}{(n_2(\nu))^{\delta_2}} \cdot (n_1(\nu))^{\delta_1} \qquad (\nu = 1,2,\ldots) \quad (2.6)$

Als we nu (2.6) substitueren in (2.5) dan:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{(n_1(\nu))^{\delta_1}}{(n_2(\nu))^{\delta_2}} = \left(\frac{c_2}{c_1}\,\frac{m_1!}{m_2!}\,k_2^{m_2-m_1}\right)^{1/m_1} \tag{2.7}$$

Nu geldt: $k_1 > 0$, $k_2 > 0 \overset{(2.7)}{\Rightarrow} \dfrac{(n_1(\nu))^{\delta_1}}{(n_2(\nu))^{\delta_2}}$ is een positieve konstante,

zeg A.

Hieruit volgt dat $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{n_1(\nu)}{n_2(\nu)} = B > 0$ als $\delta_1 = \delta_2$ met $B = A^{1/\delta}$ = konstant.

Als $\delta_1 > \delta_2$ dan $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{n_1(\nu)}{n_2(\nu)} = 0$.

Als $\delta_1 < \delta_2$ dan $\lim\limits_{\nu\to\infty} \dfrac{n_1(\nu)}{n_2(\nu)} = \infty$.

We <u>definiëren</u> nu de <u>asymptotische relatieve doeltreffendheid</u> ofwel A.R.E. ofwel Pitman-efficiency van $\underline{t}_{1,n_1(\nu)}$ t.o.v. $\underline{t}_{2,n_2(\nu)}$ als:
(toets A t.o.v. toets B)

$$A_{2,1} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{n_1(\nu)}{n_2(\nu)} \quad (= B \text{ als } \delta_1 = \delta_2)\ .$$

We hebben $A_{2,1} = 0$ als $\delta_1 > \delta_2$.
Als we dus twee toetsen vergelijken volgens het kriterium van de A.R.E, dan kijken we eerst naar de waarden van δ_i $(i = 1,2)$; als $\delta_1 < \delta_2$ dan is de A.R.E. van de toets t.o.v. de andere 0.
We mogen ons dus vervolgens beperken tot het geval dat $\delta_1 = \delta_2 = \delta$.
Uit (2.7) volgt nu direkt:

$$A_{2,1} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\nu\to\infty} \frac{n_1(\nu)}{n_2(\nu)} = \left(\frac{c_2}{c_1}\,\frac{m_1!}{m_2!}\,k_2^{m_2-m_1}\right)^{1/m_1\delta} \tag{2.8}$$

Als nu bovendien $m_1 = m_2 = m$ dan $A_{2,1} = \left(\dfrac{c_2}{c_1}\right)^{1/m\delta}$.

Wanneer we (2.1) gebruiken en ν vervangen door n dan:

$$A_{2,1} = \lim_{n\to\infty} \{\frac{E_2^{(m)}(\theta_0)/\sigma_2(\theta_0)}{E_1^{(m)}(\theta_0)/\sigma_1(\theta_0)}\}^{1/m\delta} \tag{2.9}$$

In vele gevallen is deze limiet vrij eenvoudig te berekenen.
In de meeste gevallen geldt $\delta = 1/2$, $m = 1$.
Er schijnt geen enkel geval te bestaan met $m > 2$.
Uit formule (2.8) zien we dat als $\delta_1 = \delta_2$, maar $m_1 \neq m_2$, dan is $A_{2,1}$ onbepaald, want de uitdrukking hangt dan af van de willekeurig gekozen konstante k_2.
Als we H_0 willen toetsen tegen het twee-zijdige alternatief H_1: $\theta \neq \theta_0$ dan blijven de resultaten onaangetast als we "gelijke" kritieke zône's gebruiken van de vorm: $\underline{t}_i > E(\theta_0) + \lambda_{\alpha/2} .\sigma(\theta_0)$ of $\underline{t}_i < E(\theta_0) - \lambda_{\alpha/2}.\sigma(\theta_0)$.
Tenslotte, het asymptotische onderscheidingsvermogen wordt dan vervangen door $Q_i(\theta) = G\{\mu_i(\theta,\lambda_{\alpha/2})\} + 1 - G\{\mu_i(\theta,-\lambda_{\alpha/2})\}$ (i = 1,2).

Bewijs:

$$Q_i(\theta) = P(\frac{\underline{t}_i - E(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} > \lambda_{\alpha/2} \vee \frac{\underline{t}_i - E_i(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} < -\lambda_{\alpha/2} | H_1)$$

$$= P(\frac{\underline{t}_i - E(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} > \lambda_{\alpha/2} | H_1) + P(\frac{\underline{t}_i - E(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} < -\lambda_{\alpha/2} | H_1)$$

$$= G\{\mu_i(\theta,\lambda_{\alpha/2})\} + 1 - G\{\mu_i(\theta,-\lambda_{\alpha/2})\} \text{ als } \theta > \theta_0, \text{ q.e.d.}$$

Hieruit volgt dat $Q_1(\theta_n) = Q_2(\theta_n)$ tegen het alternatief $\theta_n = \theta_0 + \frac{k_i}{n^{\delta_i}}$ waarbij k_i nu niet meer groter dan 0 behoeft te zijn, $k_i \neq 0$, als (2.5) en (2.6) gelden zoals tevoren. (i = 1,2)
Konijn (1956) geeft een meer algemene behandeling van 2-zijdige toetsen ("gelijke" delen niet noodzakelijk).
Kort samengevat kunnen we nu zeggen dat als $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ en $m_1 = m_2 = m$ en als aan de regulariteitscondities is voldaan dan:

$$A_{2,1} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{E_2^{(m)}(\theta_0)/\sigma_2(\theta_0)}{E_1^{(m)}(\theta_0)/\sigma_1(\theta_0)}\right\}^{1/m\delta} = \lim_{n\to\infty} \frac{(E_2^{(m)}(\theta_0)/\sigma_2(\theta_0))^{1/m\delta}}{(E_1^{(m)}(\theta_0)/\sigma_1(\theta_0))^{1/m\delta}} .$$

Oorspronkelijk noemde Pitman $(E_i^{(m)}(\theta_0)/\sigma_i(\theta_0))^{1/m\delta}$ de "efficacy" ook wel lokale efficiency van de i^{de} toets bij het toetsen van de hypothese H_0: $\theta = \theta_0$.

De <u>Stelling van Pitman</u> luidde dan ook:

> De asymptotische relatieve doeltreffendheid van 2 toetsen die voldoen aan A, B, C en D met $\delta = \delta_1 = \delta_2$ en $m_1 = m_2 = m$ wordt gegeven door de limiet voor $n \to \infty$ van het quotient van de "efficacies" van de 2 toetsen.

<u>Opm</u>: De grootheid relatieve doeltreffendheid vindt zijn analogen in de schattingstheorie.
Hier neemt men dan de variantie van de schatter als kriterium en definieert men weer de A.R.E. als $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{n_2(\nu)}{n_1(\nu)}$.
Asymptotisch geldt vaak dat de doeltreffendheid van schatter A t.o.v. schatter B gelijk is aan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sigma_{2n}^2}{\sigma_{1n}^2}$

dus $\quad e = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sigma_{2n}^2}{\sigma_{1n}^2} \qquad$ (zie Kendall II, pag. 20).

<u>Vb</u>. 2.1

Stel we willen toetsen H_0: $\theta = \theta_0$ tegen het alternatief H_1: $\theta > \theta_0$ op grond van de waarnemingen $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ uit een normale verdeling met verwachting θ en bekend veronderstelde variantie θ^2. De onbetrouwbaarheidsdrempel zij α.

We kunnen als toetsingsgrootheid gebruiken het steekproefgemiddelde $\bar{\underline{x}}$, maar ook de steekproefmediaan $\tilde{\underline{x}}$. Zowel $\bar{\underline{x}}$ als $\tilde{\underline{x}}$ zijn asymptotisch normaal verdeeld. Bekend is dat er een toets bestaat met als toetsingsgrootheid $\bar{\underline{x}}$ die UMP(H_0, H_1, α) is.

We weten dat $E(\bar{\underline{x}}) = \theta$ en $\sigma^2(\bar{\underline{x}}|\theta) = \sigma^2/n$.

Bovendien weten we dat $\tilde{\underline{x}}$ een asymptotische rake schatter is van θ met $E(\tilde{\underline{x}}) = \theta$ en $\sigma^2(\tilde{\underline{x}}|\theta) \sim \frac{\pi\sigma^2}{2n} \quad (n \to \infty)$.

Hieruit volgt: $E'(\theta_0) = 1$ voor beide toetsen zodat $m_1 = m_2 = 1$.
We moeten nu nog nagaan hoe groot δ_1 en δ_2 zijn.
Voor $n \to \infty$ moet gelden:

$$R_i = \frac{E_i^{(m_i)}(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} \sim c_i\, n^{m_i \delta_i}$$

dus: $$R_1 = 1\Big/\left(\frac{\pi\sigma^2}{2n}\right)^{1/2} \sim c_1.n^{1/2} \quad (n \to \infty) \Rightarrow \delta_1 = 1/2$$

ook: $$R_2 = 1\Big/\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \sim c_2.n^{1/2} \quad (n \to \infty) \qquad \Rightarrow \delta_2 = 1/2\,.$$

Gemakkelijk kunnen we nagaan dat aan alle voorwaarden voor de Stelling van Pitman is voldaan.

Tenslotte: $$\lim_{n\to\infty} \frac{E_i'(\theta^*)}{E_i'(\theta_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1 \qquad (i = 1,2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_1(\theta)}{\sigma_1(\theta_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2/n}{\sigma^2/n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_2(\theta)}{\sigma_2(\theta_0)} = 1 \text{ (analoog)}$$

Als we nu de formule toepassen vinden we:

$$A_{\underset{\sim}{\underline{x}},\underline{\bar{x}}} = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{(\pi\sigma^2/2n)^{1/2}} : \frac{1}{(\sigma^2/n)^{1/2}}\right\}^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2n}}{\sigma\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{\pi})^2} = \frac{2}{\pi}$$

§ 2 A.R.E. en de afgeleiden van de onderscheidingsvermogens als functie van θ

De aard van de rij van alternatieve hypothesen ($\theta_n = \theta_0 + \frac{k_i}{n^{\delta_i}}$) waarbij $\theta_n \to \theta_0$ als $n \to \infty$, maakt het duidelijk dat de A.R.E. op de een of andere manier verband houdt met het gedrag van de onderscheidingsvermogens als functie van θ, in de buurt van θ_0, van de toetsen die worden vergeleken.
We zullen in deze paragraaf laten zien dat onder zekere condities de A.R.E. een eenvoudige functie is van het quotient van de afgeleiden naar θ van de onderscheidingsvermogens in het punt θ_0.
We behandelen eerst het geval van het eenzijdige alternatief H_1 en nemen weer aan dat alle noemers van breuken die opgeschreven worden ongelijk zijn aan nul.
We hebben gezien dat asymptotisch de onderschedingsvermogens $P_i(\theta)$ $(i = 1,2)$ worden gegeven door:

$$P_i(\theta) = G\{\left[E_i(\theta) - (E_i(\theta_0) + \lambda_\alpha\, \sigma_i(\theta_0)\right] / \sigma_i(\theta) \overset{\text{not}}{=\!=} G\{\mu_i(\theta,\lambda_\alpha)\}$$

We differentieeren naar θ:

$P_i'(\theta) = g\{\mu_i\}.\ \mu_i'(\theta,\lambda_\alpha)$ waarbij g de dichtheid is van de normale $(0,1)$ verdeling, (2.9a)

en

$$\mu_i'(\theta,\lambda_\alpha) = \frac{d}{d\theta}.\{\left[E_i(\theta) - (E_i(\theta_0) + \lambda_\alpha\, \sigma_i(\theta_0))\right] / \sigma_i(\theta)\}$$

$$= \frac{d}{d\theta}\left\{\frac{E_i(\theta)}{\sigma_i(\theta)} - \frac{E_i(\theta_0) + \lambda_\alpha\, \sigma_i(\theta_0)}{\sigma_i(\theta)}\right\}$$

$$= \frac{\sigma_i(\theta).\ E_i'(\theta) - E_i(\theta)\sigma_i'(\theta)}{\sigma_i^2(\theta)} - \left(\frac{\sigma_i(\theta).\ 0 - \sigma_i'(\theta)\ (E_i(\theta_0) + \lambda_\alpha\, \sigma_i(\theta_0))}{\sigma_i^2(\theta)}\right) =$$

$$= \frac{E_i'(\theta)}{\sigma_i(\theta)} - \frac{\sigma_i'(\theta)}{\sigma_i^2(\theta)}\,(\ E_i(\theta) - E_i(\theta_0) - \lambda_\alpha\, \sigma_i(\theta_0)).$$

Bedenk $\frac{d}{d\theta} E_i(\theta_0) = 0$, $\frac{d}{d\theta} \sigma_i(\theta_0) = 0$.

We nemen vervolgens aan,(zie 2.3)),dat geldt voor $\theta = \theta_n = \theta_0 + \frac{k_i}{n^{\delta_i}}$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E_i^{(m_i)}(\theta)}{E_i^{(m_i)}(\theta_0)} = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_i(\theta)}{\sigma_i(\theta_0)} = 1 \quad (i = 1,2), k_i > 0.$$

Vervolgens eisen we bovendien dat voor $\theta = \theta_n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_i'(\theta)}{\sigma_i'(\theta_0)} = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{E_i(\theta)}{E_i(\theta_0)} = 1, \text{met als gevolg:}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(E_i(\theta) - E_i(\theta_0)\right) = 0.$$

Voor het alternatief θ geldt dus weer $\theta = \theta_0 + \frac{k_i}{n^{\delta_i}}$, $(k_i > 0)$, $i = 1,2$.

Nu geldt voor $n \to \infty$:

$$\mu_i'(\theta,\lambda_\alpha) = \frac{E_i'(\theta)}{\sigma_i(\theta)} - \frac{\sigma_i'(\theta)}{\sigma_i^2(\theta)} (E_i(\theta) - E_i(\theta_0) - \lambda_\alpha\, \sigma_i(\theta_0))$$

$$= \underbrace{\frac{E_i'(\theta)}{E_i'(\theta_0)}}_{\to 1} \cdot \frac{E_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} \cdot \underbrace{\frac{\sigma_i(\theta_0)}{\sigma_i(\theta)}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{\sigma_i'(\theta)}{\sigma_i'(\theta_0)}}_{\to 1} \cdot \frac{\sigma_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sigma_i(\theta_0)}{\sigma_i(\theta)}\right)}_{\to 1} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sigma_i(\theta_0)} \left(\underbrace{E_i(\theta) - E_i(\theta_0)}_{\to 0} - \lambda_\alpha \frac{\sigma_i(\theta_0).\sigma_i(\theta)}{\underbrace{\sigma_i(\theta)}_{\to 1}} \right)$$

$$\sim \frac{E_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} + \frac{\sigma_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} \cdot \lambda_\alpha \qquad \begin{matrix}(i = 1,2)\\ (n \to \infty)\end{matrix}$$

Zodat als $m_1 = m_2 = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ en als $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_i'(\theta_0)}{E_i'(\theta_0)} = 0$ (2.10)

We krijgen in θ_0 als $n \to \infty$:

$$\mu_i'(\theta_0,\lambda_\alpha) = \frac{E_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} + \frac{\sigma_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} \cdot \lambda_\alpha = \frac{E_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} + \frac{\sigma_i'(\theta_0)}{E_i'(\theta_0)} \cdot \frac{E_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} \cdot \lambda_\alpha =$$

$$= \frac{E_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} \left(1 + \underbrace{\frac{\sigma_i'(\theta_0)}{E_i'(\theta_0)}}_{\to 0} \cdot \lambda_\alpha \right) \sim \frac{E_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} \quad \text{als } n \to \infty \qquad (2.11)$$

We hadden voor n groot: $P_i(\theta) = G\{\mu_i(\theta,\lambda_\alpha)\}$ waarbij $G(-\lambda_\alpha) = \alpha$

In θ_0 : $P_i(\theta_0) = G\{\mu_i(\theta_0,\lambda_\alpha)\}$ waarbij $G(-\lambda_\alpha) = \alpha$ $\qquad (i = 1,2)$

We weten dat de onbetrouwbaarheidsdrempel van de i^{de} toets

α is voor $i = 1,2 \to P_i(\theta_0) = \alpha$ voor $i = 1,2$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{dus : } P_i(\theta_0) = \alpha = G\{\mu_i(\theta_0,\lambda_\alpha)\} = G(-\lambda_\alpha) \\ G \text{ is } N(0,1) \text{ verd. fu.; deze is strikt stijgend} \end{array}\right\} \to$$

$$\to \ \mu_i(\theta_0,\lambda_\alpha) = -\lambda_\alpha \to g\{\mu_i(\theta_0,\lambda_\alpha)\} = g(-\lambda_\alpha) \qquad (2.12)$$

voor $i = 1,2$, met g is normale $(0,1)$ dichtheid.

(2.9a) wordt nu als we substitueren (2.11) en (2.12) :

$$P_i'(\theta_0) = g\{\mu_i\} \cdot \mu_i'(\theta_0,\lambda_\alpha) \sim g(-\lambda_\alpha) \frac{E_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} \quad \text{als } n \to \infty \qquad (i = 1,2)$$

We hadden: $m_1 = m_2 = 1$

Bovendien weten we uit §1 :

$$A_{2,1} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{E_2'(\theta_0)/\sigma_2(\theta_0)}{E_1'(\theta_0)/\sigma_1(\theta_0)} \right\}^{1/m\delta} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{E_2'(\theta_0)/\sigma_2(\theta_0)}{E_1'(\theta_0)/\sigma_1(\theta_0)} \right\}^{1/\delta}$$

We krijgen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_2'(\theta_0)}{P_1'(\theta_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{g(-\lambda_\alpha)E_2'(\theta_0)/\sigma_2(\theta_0)}{g(-\lambda_\alpha)E_1'(\theta_0)/\sigma_1(\theta_0)} = (A_{2,1})^\delta \qquad m_1 = m_2 = 1 \quad (2.12a)$$

<u>Conclusie</u>: Het asymptotische quotient van de eerste afgeleiden van de onderscheidingsvermogens als functie van θ in het punt θ_0 is eenvoudig de A.R.E. tot de macht δ (vaak 1/2).

Onder genoemde condities, zie i.h.b. (2.10), geldt dus als we dit quotient als kriterium gebruiken voor asymptotisch relatieve doeltreffendheid van toetsen, dan krijgen we precies dezelfde resultaten als bij gebruik van de A.R.E. Dit kriterium werd onder de naam "asymptotisch lokale doeltreffendheid" voorgesteld door Blomqvist (1950).

We behandelen nu het geval dat $\delta_1 = \delta_2$, $m_1 = m_2$ en $m_1 = m_2$ en $m_i > 1 \rightarrow$
$\rightarrow E_i'(\theta_0) = 0$.
We hadden: $P_i'(\theta) = g\{\mu_i\}\mu_i'(\theta,\lambda_\alpha)$ $(i = 1,2)$, (n groot)
Hieruit vinden we door te differentieren naar θ m.b.v. de kettingregel:

$$P_i''(\theta) = \frac{d\, g\{\mu_i\}}{d\theta} \cdot \mu_i'(\theta,\lambda_\alpha) + g(\mu_i)\mu_i''(\theta,\lambda_\alpha) =$$

$$= \frac{d\, g\{\mu_i\}}{d\mu_i} \cdot \frac{d\mu_i}{d\theta} \cdot \mu_i'(\theta,\lambda_\alpha) + g(\mu_i)\mu_i''(\theta,\lambda_\alpha) =$$

$$= \frac{d\, g\{\mu_i\}}{d\mu_i} \left[u_i'(\theta,\lambda_\alpha) \right]^2 + g(\mu_i)\mu_i''(\theta,\lambda_\alpha) \qquad (2.13)$$

We hadden bovendien reeds dat:

$$\mu_i'(\theta,\lambda_\alpha) = \frac{E_i'(\theta)}{\sigma_i(\theta)} - \frac{\sigma_i'(\theta)}{\sigma_i^2(\theta)} (E_i(\theta) - E_i(\theta_0) - \lambda_\alpha\, \sigma_i(\theta_0)) \rightarrow$$

$$\rightarrow \mu_i''(\theta,\lambda_\alpha) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{E_i'(\theta)}{\sigma_i(\theta)} - \frac{\sigma_i'(\theta)}{\sigma_i^2(\theta)} (E_i(\theta) - E_i(\theta_0) - \lambda_\alpha\, \sigma_i(\theta_0))\right) =$$

$$= \frac{\sigma_i(\theta)\, E_i''(\theta) - E_i'(\theta)\sigma_i'(\theta)}{\sigma_i^2(\theta)} -$$

$$- \frac{\sigma_i^2(\theta)\{\sigma_i''(\theta)(E_i(\theta) - E_i(\theta_0) - \lambda_\alpha\, \sigma_i(\theta_0)) + \sigma_i'(\theta)\, E_i'(\theta)\}}{\sigma_i^4(\theta)} -$$

$$- \frac{(\sigma_i^2(\theta))'\,(E_i(\theta) - E_i(\theta_0) - \lambda_\alpha\, \sigma_i(\theta_0)\, .\, \sigma_i'(\theta)}{\sigma_i^4(\theta)} =$$

$$= \frac{E_i''(\theta)}{\sigma_i(\theta)} - \frac{2E_i'(\theta).\sigma_i'(\theta)}{\sigma_i^2(\theta)} -$$

$$- (E_i(\theta) - E_i(\theta_0) - \lambda_\alpha\, \sigma_i(\theta_0)) \left[\frac{\sigma_i''(\theta)}{\sigma_i^2(\theta)} - \frac{2(\sigma_i'(\theta))^2}{\sigma_i^3(\theta)} \right] \qquad (i = 1,2)$$

<u>want</u> $(\sigma_i^2(\theta))' = (\sigma_i(\theta).\sigma_i(\theta))' = \sigma_i'(\theta).\sigma_i(\theta) + \sigma_i(\theta).\sigma_i'(\theta) = 2\sigma_i(\theta)\sigma_i'(\theta).$

Als we nu het volgende aannemen voor $\theta = \theta_n$:

1) $m_i = 2 \quad (i = 1,2)$

2) (2.3) met θ^* vervangen door θ_n

3) $\lim_{n\to\infty} E_i'(\theta) = E_i'(\theta_0) = 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_i'(\theta)}{\sigma_i'(\theta_0)} = 1$; $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_i''(\theta)}{\sigma_i''(\theta_0)} = 1$; $\lim_{n\to\infty} \frac{E_i(\theta)}{E_i(\theta_0)} = 1$

dan volgt analoog aan de afleiding van $\lim_{n\to\infty} \mu_i'(\theta,\lambda_\alpha)$ dat

$$\mu_i''(\theta_0,\lambda_\alpha) \sim \frac{E_i''(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} + \lambda_\alpha \left[\frac{\sigma_i''(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} - 2\left(\frac{\sigma_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)}\right)^2 \right] \qquad (n \to \infty) \qquad (2.13a)$$

We nemen voorts nog aan dat (i.p.v. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_i'(\theta_0)}{E_i'(\theta_0)} = 0$) :

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_i''(\theta_0)}{E_i''(\theta_0)} = 0$ en $\lim_{n\to\infty} \frac{(\sigma_i'(\theta_0))^2}{\sigma_i(\theta_0).E_i''(\theta_0)} = 0$ (2.13b)

Als $n \to \infty$ dan : $\mu_i''(\theta_0,\lambda_\alpha) \sim \frac{E_i''(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} + \lambda_\alpha\left(\frac{\sigma_i''(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} - 2\left(\frac{\sigma_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)}\right)^2\right) =$

$$= \frac{E_i''(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} + \lambda_\alpha\left\{\frac{\sigma_i''(\theta_0)}{E_i''(\theta_0)} \cdot \frac{E_i''(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} - 2\,\frac{(\sigma'_i(\theta_0))^2}{\sigma_i(\theta_0).E_i''(\theta_0)} \cdot \frac{E_i''(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)}\right\}$$

$$= \frac{E_i''(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} + \lambda_\alpha\, \frac{E_i''(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} \left(\underbrace{\frac{\sigma_i''(\theta_0)}{E_i''(\theta_0)}}_{\to 0} - 2\, \underbrace{\frac{(\sigma_i'(\theta_0))^2}{\sigma_i(\theta_0).E_i''(\theta_0)}}_{\to 0} \right)$$

dus : $\mu_i''(\theta_0,\lambda_\alpha) \sim E_i''(\theta_0) / \sigma_i(\theta_0) \quad (n \to \infty) \quad ,(i = 1,2)$ (2.14)

We weten bovendien dat $\dfrac{\partial g(\mu_i)}{\partial \mu_i} = - \mu_i \; g(\mu_i)$

want voor de normale (0,1) dichtheid geldt:

$$g(x) = e^{-(1/2)x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \to g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (-x) \cdot e^{-(1/2)x^2} = -x.g(x)$$

We hadden bovendien reeds afgeleid:

$$\begin{cases} \mu_i'(\theta,\lambda_\alpha) \sim \dfrac{E_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} + \dfrac{\sigma_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} \cdot \lambda_\alpha \;\; (n \to \infty) & ,(\text{zie } (2.11)) \\ \\ g\{\mu_i(\theta_0,\lambda_\alpha)\} = g\{-\lambda_\alpha\} & ,(\text{zie}(2.12)) \end{cases}$$

Substitutie van deze twee gegevens én (2.14) in (2.13) geeft:

$$P_i''(\theta_0) \sim g\{-\lambda_\alpha\} \cdot \left\{ \lambda_\alpha \left[\frac{E_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} + \frac{\sigma_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} \lambda_\alpha \right]^2 + \frac{E_i''(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} \right\} \begin{matrix} (i=1,2) \\ (n \to \infty) \end{matrix} \quad (2.14a)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Beschouwen we nu het geval } m_1 = m_2 = 2 \to E_i'(\theta_0) = 0 \\ \text{We hadden verondersteld dat } \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sigma_i'(\theta_0))^2}{\sigma_i(\theta_0).E_i''(\theta_0)} = 0 \end{array}\right\} \quad (*)$$

dan volgt uit (2.14a) en (*) :

$$\left.\begin{array}{l} P_i''(\theta_0) \sim g(-\lambda_\alpha) \cdot E_i''(\theta_0) / \sigma_i(\theta_0) \quad \begin{matrix} (n \to \infty) \\ (i=1,2) \end{matrix} \\ \\ \text{We hadden reeds } \underset{(m_1=m_2=2)}{A_{2,1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left\{ \dfrac{E_2^{(2)}(\theta_0)/\sigma_2(\theta_0)}{E_1^{(2)}(\theta_0)/\sigma_1(\theta_0)} \right\}^{1/2\delta} \end{array}\right\} \to$$

$$\to \lim_{n\to\infty} \frac{P_2''(\theta_0)}{P_1''(\theta_0)} = (A_{2,1})^{2\delta} \quad (2.14b)$$

<u>Conclusie</u>: (als we het geval $m = 1$ en $m = 2$ samen nemen)
Het asymptotische quotient van de m^{de} afgeleiden naar θ van de onderscheidingsvermogens is onder een aantal regulariteitscondities gelijk aan de A.R.E. tot de macht $m\delta$.

Samenvattend kunnen we, als we het geval $m = 1$ en $m = 2$ tegelijk beschouwen, in plaats van al die speciale regulariteitscondities ook de sterkere eisen stellen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} = 0 \;, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_i''(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} = 0 \text{ én } (2.1) \qquad (i = 1,2) \tag{2.15}$$

De vorige veronderstellingen, te weten (2.10), (2.13b), (2.11) en (2.14) volgen dan hieruit.

§ 3 De interpretatie van de waarde van m

We bespreken nu de algemene voorwaarden waaronder m de waarde 1 of 2 zal aannemen.
Beschouw weer het asymptotische onderscheidingsvermogen tegen een eenzijdig alternatief $H_1 : \theta > \theta_0$, $(H_0 : \theta = \theta_0)$:

$$P_i(\theta) = G\{\left[E_{i1} - (E_{i0} + \lambda_\alpha D_{i0})\right] / D_{i1}\}$$

Voor de eenvoud laten we in deze paragraaf de i uit de notatie weg.
We gaan er vanuit dat de veronderstellingen uit de vorige paragrafen vervuld zijn.
Als $\theta \to \theta_0$ en $\sigma(\theta) \to \sigma(\theta_0)$ (zie aanname in §1, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(\theta)}{\sigma(\theta_0)} = 1$) voor $n \to \infty$,
dan : $P(\theta) \sim G\{ \frac{E_1 - E_0}{\sigma(\theta_0)} - \lambda_\alpha\}$ $(n \to \infty)$
We zien:

$P(\theta)$ is asymptotisch een monotoon stijgende fu. van $(E_1 - E_0)$ want G is een strikt stijgende $N(0,1)$ verdelingsfunctie en $\sigma(\theta_0) > 0$.
Bovendien gold: $P'(\theta_0) \sim g\{-\lambda_\alpha\}E'(\theta_0)/\sigma(\theta_0)$ $(n \to \infty)$ (2.16)

Als nu $(E_1 - E_0)$ een niet dalende functie is van $\theta - \theta_0$, en $E'(\theta_0)$ bestaat, dan geldt $E'(\theta_0) \neq 0 \to m = 1$ en wegens (2.16) $P'(\theta_0) \neq 0$.
Als aan de andere kant $(E_1 - E_0)$ een even functie is van $(\theta - \theta_0)$, en een stijgende functie van $|\theta - \theta_0|$ en $E'(\theta_0)$ bestaat dan geldt $E'(\theta_0) = 0 \to m > 1$. Gewoonlijk is in dit geval m dan 2.
Bovendien geldt volgens benadering (2.16) :

$$E'(\theta_0) = 0 \to P'(\theta_0) = 0 \qquad (n \to \infty)$$

Nu zijn we op een punt gekomen waarop we kunnen inzien dat de A.R.E. niet nuttig is om toetsen met verschillende waarden van m (in de praktijk $m_1 = 1$, $m_2 = 2$) met elkaar te vergelijken.
We vergelijken dan n.l. toetsen met elkaar waarbij de respectievelijke as. onderscheidingsvermogens als functie van θ, zich in

het punt θ_0 essentieel anders gedragen. De ene heeft een minimum in θ_0, de andere niet. De onbepaaldheid v.d. A.R.E. is in dit geval niet te verwonderen. Vb(2.2) is een geval waarbij we toch een goede maat vinden bij $m_1 \neq m_2$, dankzij het feit dat $\delta_1 \neq \delta_2$.

Vb(2.2) Beschouw het probleem dat we willen toetsen $H_0 : \theta = \theta_0$ voor een normale verdeling met verwachting θ en variantie 1.
Het paar een-zijdige toetsen gebaseerd op het steekproefgemiddelde $\bar{\underline{x}}$ zijn U.M.P., de kritieke zône Z res. rechts en links gekozen al naar gelang $H_1 : \theta > 0$ of $\theta < 0$ (Steekproef $\underline{x}_1, \ldots\ldots, \underline{x}_n$).
Uit Vb.(2.1) weten we $\delta = 1/2$ en $m = 1$ voor de toetsingsgrootheid $\bar{\underline{x}}$.

We kunnen ook de toetsingsgrootheid $\underline{S} = \sum_{i=1}^{n} (\underline{x}_i - \theta_0)^2$ gebruiken.
$\underline{S}$ heeft een niet-centrale chi-kwadraat verdeling met n vrijheidsgraden en niet-centraliteitsparameter $n(\theta-\theta_0)^2$

Bekend is : $E(\underline{S}|\theta) = n\{1 + (\theta-\theta_0)^2\}$

$\quad$ var $(\underline{S}|\theta_0) = 2n$

Bovendien is $\underline{S}$ asymptotisch normaal verdeeld.

We vinden : $E'(\theta) = \frac{d}{d\theta} E(\underline{S}|\theta) = \frac{d}{d\theta} n\{1 + (\theta-\theta_0)^2\} = 2n(\theta-\theta_0) \rightarrow E'(\theta_0) = 0$

$$E''(\theta_0) = \frac{d}{d\theta} 2n(\theta-\theta_0) = 2n \rightarrow E''(\theta_0) = 2n \rightarrow \underline{\underline{m = 2}}$$

$$R_2 = \frac{E''(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} = \frac{2n}{(2n)^{1/2}} = (2n)^{1/2} \underset{(n\to\infty)}{\sim} C\, n^{2\delta} \rightarrow \delta_2 = 1/4$$

Voor $\bar{\underline{x}}$ gold $\delta_1 = 1/2 \neq 1/4 \rightarrow$ De A.R.E. van $\underline{S}$ t.o.v. $\bar{\underline{x}}$ is 0. $(\delta_1 \neq \delta_2)$

We keren nu terug tot het geval van het <u>twee-zijdige</u> alternatief $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Het onderscheidingsvermogen van de "Gelijke delen" toets is asymptotisch : $Q(\theta) = G\{\mu(\theta, \lambda_{\alpha/2})\} + 1 - G\{\mu(\theta, -\lambda_{\alpha/2})\}$

waarbij $\mu(\theta, \lambda_{\alpha/2})$ zoals eerder gedef.

De afgeleide in θ_0:

$$Q'(\theta_0) = P'(\theta_0,\lambda_{\alpha/2}) - P'(\theta_0,-\lambda_{\alpha/2}) \text{ waarbij (zie(2.16))}$$

$$P'(\theta_0) \sim g(-\lambda_{\alpha/2})\, E'(\theta_0)/_{\sigma(\theta_0)} \qquad (n \to \infty),$$

<u>als</u> tenminste voldaan is aan de bekende voorwaarden: (2.10) of (2.15) en $m = 1$.

Daar $g(-\lambda_\alpha)$ een even functie is van λ_α volgt dan onmiddellijk dat asymptotisch geldt: $Q'(\theta_0) \sim 0$, d.w.z. de helling van het onderscheidingsvermogen in θ_0 is asymptotisch 0.

De tweede afgeleide van het onderscheidingsvermogen is:

$$Q''(\theta_0) = P''(\theta_0,\lambda_{\alpha/2}) - P''(\theta_0,-\lambda_{\alpha/2}) \qquad (2.17)$$

We hebben $P''(\theta)$ reeds uitgerekend in (2.14a) waarbij $m = 2$.

Deze uitdrukking (2.14a) is ook in orde bij $m_i = 1$ als we de eerste voorwaarde van (2.15) versterken tot $\dfrac{\sigma'(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} = o\,(n^{-\delta}) \quad (n \to \infty) \qquad (2.18)$

Wegens $R = E^{(m_i)}(\theta_0)/_{\sigma(\theta_0)} \sim c\, n^{m\delta}$ mag de 2e term in het rechterlid van (2.13a) weer verwaarloosd worden en we krijgen (2.14a) terug.

(2.14a), Substitueren in (2.17) geeft:

$$Q''(\theta_0) \sim 2\lambda_{\alpha/2}\; g\,\{-\lambda_{\alpha/2}\}\left\{\left(\frac{E'(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)}\right)^2 + \left(\frac{\sigma'(\theta_0)}{\sigma(\theta_0)} \cdot \lambda_{\alpha/2}\right)^2\right\} \quad (n \to \infty)$$

Als we nu weer gebruik maken van (2.18) dan:

$$\left.\begin{aligned} &Q_i''(\theta_0) \sim 2\lambda_{\alpha/2}\; g\,\{-\lambda_{\alpha/2}\}\left(\frac{E_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)}\right)^2 \qquad (n \to \infty) \\ &\text{We hadden } A_{2,1} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{E_2^{(m)}(\theta_0)/\sigma_2(\theta_0)}{E_1^{(m)}(\theta_0)/\sigma_1(\theta_0)}\right\}^{1/m\delta} \end{aligned}\right\} \to$$

$$\to \quad \frac{Q_2''(\theta_0)}{Q_1''(\theta_0)} = A_{2,1}^{2\delta} \quad .$$

<u>Conclusie</u>: Voor m = 1 is het asymptotische quotient van de 2^e afgeleiden van de onderschedingsvermogens, als functie van θ in θ_0, van twee-zijdige toetsen precies gelijk aan (2.14b) voor eenzijdige toetsen als m = 2 en precies het kwadraat van het eenzijdige toetsingsresultaat voor m = 1 in (2.12a).

<u>Vb(2.3)</u> Aansluitend op Vb(2.1) zien we dat beide toetsingsgrootheden, $\underline{\bar{x}}$ en $\underline{\tilde{x}}$, hadden een $\delta = 1/2$ en m = 1 en dat gold $E'(\theta_0) = 1$.
Daar de variantie van iedere stochastische grootheid ($\underline{\bar{x}}$ en $\underline{\tilde{x}}$) onafhankelijk is van θ, tenminste asymptotisch, zien we gemakkelijk in dat aan de regulariteitsvoorwaarden om (2.12a) te kunnen toepassen is voldaan (bijv. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sigma_i'(\theta_0)}{E_i'(\theta_0)} = 0$ en $\frac{\sigma_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)} = o\,(n^{-\delta_i})(n \to \infty)$.
Voor eenzijdige toetsen geldt dan:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P'_{\underline{\tilde{x}}}(\theta_0)}{P'_{\underline{\bar{x}}}(\theta_0)} = A^{1/2}_{\underline{\tilde{x}},\underline{\bar{x}}} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}$$

terwijl voor tweezijdige toetsen volgt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{Q''_{\underline{\tilde{x}}}(\theta_0)}{Q''_{\underline{\bar{x}}}(\theta_0)} = \frac{2}{\pi}$.

§ 4 Het maximum verlies aan onderscheidingsvermogen en de A.R.E.

Ofschoon de A.R.E. van toetsen wezenlijk de eigenschappen weerspiegelt van het asymptotische onderscheidingsvermogen in de buurt van θ_0, (lokaal), verschaft het toch wel enige informatie over het asymptotische onderscheidingsvermogen als geheel als functie van θ, dus globaal, tenminste voor het geval waartoe wij ons nu beperken n.l. $m = 1$.
Het as. onderscheidingsvermogen $P_i(\theta)$ van een eenzijdige toets is $G\{\mu_i(\theta,\lambda_\alpha)\}$, waarbij

$$\mu_i(\theta,\lambda_\alpha) = \left[E_i(\theta_i^*)\frac{(\theta-\theta_0)}{1} - \lambda_\alpha\sigma_i(\theta_0)\right]\Big/\sigma_i(\theta) \qquad \text{met } \theta_0 < \theta_i^* < \theta.$$

Als we weer aannemen dat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{E_i'(\theta_i)}{E_i'(\theta_0)} = 1$

én $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sigma_i(\theta)}{\sigma_i(\theta_0)} = 1$ $\Bigg\}$ $\forall\theta\in\Omega$,

dan kunnen we analoog als bij de afleiding van (2.4) zien dat

$$\mu_i(\theta,\lambda_\alpha) \sim \frac{E_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)}(\theta-\theta_0) - \lambda_\alpha \qquad (n\to\infty) \tag{2.19}$$

We nemen nu n groot, maar vast en merken op dat θ niet van n afhangt in dit verband.
We zien uit (2.19) dat asymptotisch $\mu_i(\theta)$ <u>lineair</u> is in θ.
Als we schrijven $R_i = \dfrac{E_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)}$, dan kunnen we het verschil tussen twee zulke onderscheidingsvermogens als volgt aangeven:

$$d(\theta) = P_2(\theta) - P_1(\theta) = G\{(\theta-\theta_0)R_2-\lambda_\alpha\}-G\{(\theta-\theta_0)R_2.\frac{R_1}{R_2} - \lambda_\alpha\} \tag{2.20}$$

Zonder beperking der algemeenheid kunnen we stellen $R_2 > R_1$.
Beschouw nu het gedrag van $d(\theta)$ als functie van θ.
Als $\theta = \theta_0$ dan $d = 0$, ook als $\theta \to \infty$ dan P_1 en $P_2 \to 1$ ($G(\infty) = 1$) en dus $d \to 0$.

De maximum waarde van $d(\theta)$ hangt alleen af van het quotient R_1/R_2 want ofschoon R_2 in het rechterlid van (2.20) voorkomt, is het altijd de coëfficient van $(\theta-\theta_0)$.

$0 \leq \theta - \theta_0 < \infty \Rightarrow 0 \leq R_2(\theta - \theta_0) < \infty$, onafhankelijk van de waarde van R_2.

We schrijven daarom $\Delta = R_2(\theta - \theta_0)$.

We krijgen uit (2.20) : $d(\Delta) = G\{\Delta - \lambda_\alpha\} - G\{\Delta \frac{R_1}{R_2} - \lambda_\alpha\}$ (2.21)

De eerste afgeleide naar Δ is:

$d'(\Delta) = g\{\Delta - \lambda_\alpha\} - \frac{R_1}{R_2} g\{\Delta \frac{R_1}{R_2} - \lambda_\alpha\}$, g is de normale (0,1) dichtheid.

Als $d'(\Delta) = 0$:

$$g\{\Delta - \lambda_\alpha\} - \frac{R_1}{R_2} g\{\Delta \frac{R_1}{R_2} - \lambda_\alpha\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{g\{\Delta - \lambda_\alpha\}}{g\{\Delta \frac{R_1}{R_2} - \lambda_\alpha\}} = \exp\{-1/2(\Delta - \lambda_\alpha)^2 + 1/2(\Delta \frac{R_1}{R_2} - \lambda_\alpha)^2\}$$

dus: $$\frac{R_1}{R_2} = \exp\{-1/2\, \Delta^2(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}) + \lambda_\alpha \Delta(1 - \frac{R_1}{R_2})\} \quad ; \qquad (2.22)$$

(2.22) is een kwadratische vergelijking in Δ, met als enige positieve wortel:

$$\Delta = \frac{\lambda_\alpha + \{\lambda_\alpha^2 + 2\left(\dfrac{1 + \frac{R_1}{R_2}}{1 - \frac{R_1}{R_2}}\right) \log \frac{R_2}{R_1}\}^{1/2}}{1 + \frac{R_1}{R_2}} , \qquad (2.23)$$

(2.23) is de waarde van Δ waarvoor (2.21) een maximum aanneemt.

<u>Vb(2.4)</u> Neem $\alpha = 0.05 \Rightarrow \lambda_\alpha = 1.645$ en neem $R_1/R_2 = 0.5$ dan vinden we uit (2.23) voor Δ :

$$\Delta = \frac{1.645 + \{(1.645)^2 + 6 \log 2\}^{1/2}}{1.5} = 2.85 .$$

Als we nu de tabellen voor de normale verdeling gebruiken dan geeft (2.21):

$$P_2 = G\{2.85 - 1.64\} = G(1.21) = 0.89$$

$$P_1 = G\{1.42 - 1.64\} = G\{- 0.22\} = 0.41.$$

Cox en Stuart (1955) gaven de waarde van P_2 en P_1 in de punten van het maximum verschil, verkregen uit de hier beschouwde methode voor een reeks waarden van α en R_1/R_2.

Opm. $R_1:R_2$ is juist het quotient der "efficacies" tot de macht $m\delta$, zoals gedefinieerd in §1 van hoofdstuk II.

Het resultaat van dit onderzoek geven we in de volgende tabel:

α \ R_1/R_2	0.10		0.05		0.01		0.001	
	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2
0.9	67	73	63	71	49	60	54	67
0.8	61	74	56	72	49	71	43	72
0.7	59	80	51	77	42	77	39	83
0.6	54	84	47	84	39	86	29	87
0.5	48	88	41	89	30	90	20	93
0.3	35	96	27	96	14	97	7	99

Het blijkt dat als afneemt bij vast R_1/R_2, het maximum verschil tussen de asymptotische onderscheidingsvermogens toeneemt. Door α klein genoeg te nemen kunnen we in feite willekeurig dicht bij 1 komen.

Bij vast α neemt het maximale verschil toe als R_1/R_2 afneemt.

De consequentie voor de praktijk (uit de tabel te zien) is dat als $R_1/R_2 \geq 0.9$, dan is het globale verlies aan as. onderscheidingsvermogen niet groter dan:

$$\left.\begin{array}{lll} 0.08 & \text{als} & \alpha = 0.05 \\ 0.11 & \text{als} & \alpha = 0.01 \\ 0.13 & \text{als} & \alpha = 0.001 \end{array}\right\} \qquad (2.24)$$

We hadden : $P_i'(\theta_0) \sim g(-\lambda_\alpha) \cdot \dfrac{E_i'(\theta_0)}{\sigma_i(\theta_0)}$ $(n \to \infty)$ (zie §2)

Volgens de definitie van R_1 en R_2 en (2.14b) geldt nu als $m = 1$:

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{1/\delta} = A_{1,2} \Rightarrow \text{A.R.E.} \leq (0.9)^\delta\text{, dan is (2.24) juist.}$$

§ 5 Niet-normale gevallen

Vanaf het begin in §1 hebben wij ons beperkt tot asymptotisch normaal verdeelde toetsingsgrootheden.
Als we echter de afleiding van de A.R.E. nagaan, dan zien we dat we nergens specifiek gebruik hebben gemaakt van deze aanname (D).
Het enige wat vereist wordt is dat de beide toetsingsgrootheden $\underline{t}_1$ en $\underline{t}_2$ asymptotisch dezelfde verdelingsfunctie G hebben en dat G strikt stijgend is.
Een belangrijke limietverdeling anders dan de normale verdeling, waarop we de theorie kunnen toepassen is de niet-centrale χ^2-verdeling.
Veronderstel dat we voor het toetsen van de hypothese $H_0 : \theta = \theta_0$ twee toetsingsgrootheden $\underline{t}_1$ en $\underline{t}_2$ hebben met zo'n limietverdeling, met ν_i (onafhankelijk van θ) vrijheidsgraden en niet-centraliteits-parameters $\lambda_i(\theta)$ met $\lambda_i(\theta_0) = 0$, zodat de χ^2-verdelingen centraal zijn als H_0 juist is. $(i = 1,2)$.
We hebben :

$$E_{i1} = \nu_i + \lambda_i(\theta)$$

$$D^2_{i0} = 2\nu_i$$

Alle resultaten die we hebben afgeleid blijven gelden (eenzijdig toetsen).
In het bijzonder als $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ en $m_1 = m_2 = m$

$$\text{dan} \quad A_{2,1} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\lambda_2^{(m)}(\theta_0)/\nu_2^{\;1/2}}{\lambda_1^{(m)}(\theta_0)/\nu_1^{\;1/2}} \right\}^{1/m\delta}$$

__Opm.__ Gegeven G, dan kan de kritieke zône voor eenzijdig toetsen ($H_0 : \theta = \theta_0$) altijd in de vorm Z, zoals gedefinieerd in hoofdstuk II, §1, geschreven worden, waarbij λ_α meer algemeen geïnterpreteerd wordt als een factor waarmee we de standaardafwijking onder de nulhypothese moeten vermenigvuldigen om aan de gewenste onbetrouwbaarheid α te komen.

§ 6 Voorbeelden

Vb(2.5) Steekproef van paren:

We beschouwen de tekentoets om de hypothese te toetsen dat twee populaties waaruit we paren waarnemingen hebben getrokken gelijk zijn, tegen het alternatief dat zij niet gelijk zijn.

Laat populatie A een dichtheid hebben $f_1(u) = f(u)$, met $f(u)$ een willekeurige dichtheid, terwijl populatie B een dichtheid heeft $f_2(u) = f(u-\theta)$.

We willen nu de A.R.E. van de tekentoets uitrekenen t.o.v. de t-toets (Student) voor het toetsen van de hypothese $\theta = \theta_0 = 0$, waarbij beide toetsen gebaseerd zijn op de verschillen $\underline{x}_i = \underline{z}_i - \underline{y}_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$ van paren waarnemingen $\underline{y}_i$ en $\underline{z}_i$ uit A, respectievelijk B. (Het alternatief is $H_1 : \theta \neq 0$).

De tekentoets is gebaseerd op, zeg het aantal $I_{1,n}$ van positieve waarden onder de $\underline{x}_i$'s. We vinden $\psi_{i,n}(\theta) = np, \sigma^2_{1,n}(\theta) = np(1-p)$, (binomiaal n,p) waar $p = p(\theta)$, is de kans dat een $\underline{y}$-waarneming kleiner is dan de corresponderende $\underline{z}$-waarneming.

Dus $p(\theta) = P(\underline{y} \leq \underline{z}) = \int_{\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} f(y)dy\, f(z-\theta)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{u+\theta} f(y)dy\, f(u)du$

$$\Rightarrow \left.\frac{dp(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \int_{-\infty} f^2(u)du. \qquad \text{Bovendien } p(0) = 1/2;\ \theta_0 = 0.$$

$$R^2_{1,n}(0) = \left(\frac{\psi'_{1,n}(\theta_0)}{\sigma_{1,n}(\theta_0)}\right)^2 = \left(\frac{(n\,p(\theta))'/_{\theta=\theta_0}}{n\,p(1-p)/_{\theta=\theta_0}}\right)^2 = \frac{n^2\left[\int f^2(u)du\right]^2}{n/4} =$$

$$= 4n\left[\int f^2(u)du\right]^2$$

Asymptotisch is de $\underline{t}$-toets equivalent aan de toets gebaseerd op de toetsingsgrootheid $\underline{T}_{2,n} = \bar{\underline{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\underline{z}_i - \underline{y}_i)$. Zie Wittig [1].

We vinden : $\psi_{2,n}(\theta) = E\,\underline{\bar{x}} = \theta$; $\sigma^2_{2,n}(\theta) = \frac{2\sigma^2}{n} \Rightarrow R^2_{2,n}(0) = \frac{1}{2\sigma^2/n} = n/2\sigma^2$

(waarbij σ^2 de variantie is die correspondeert met $f(u)$).

$$\text{Dus : } e = \lim_{n\to\infty} \frac{R^2_{1,n}(0)}{R^2_{2,n}(0)} = 8\sigma^2\left[\int f^2(u)du\right]^2.$$

Opm. Ga na dat aan de voorwaarden om de stelling van Pitman toe te kunnen passen is voldaan.

Vb(2.6)

Stel:

We hebben waarnemingen $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$.

De waarnemingen komen uit een populatie met continue dichtheid f en variantie σ^2. We willen de H_0-hypothese toetsen dat de populatiemediaan θ een speciale waarde θ_0 aanneemt, tegen het alternatief dat $\theta \neq \theta_0$.

Wat is nu de A.R.E. van de tekentoets t.o.v. de $\underline{t}$-toets?

De tekentoets is gebaseerd op, zeg het aantal $\underline{T}_{1,n}$ van positieve waarden onder de $\underline{z}_i$'s, waarbij $\underline{z}_i = \underline{x}_i - \theta_0$. We hebben $\psi_{1,n}(\theta) = np$, $\sigma^2_{1,n} = np(1-p)$ waarbij $p = p(\theta)$, de kans is dat $\underline{z}_i > 0$:

$p(\theta) = P(\underline{z} > 0) = P(\underline{x} - \theta > 0) = P(\underline{x} > \theta) = 1 - F(\theta)$.

$\Rightarrow p'(\theta)\Big]_{\theta=\theta_0} = f(\theta_0)$. Bovendien $p(\theta_0) = 1/2$, (θ_0 was de mediaan onder H_0)

$$R^2_{1,n}(\theta_0) = \left(\frac{\psi'_{1,n}(\theta_0)}{\sigma_{1,n}(\theta_0)}\right)^2 = \frac{n^2 f^2(\theta_0)}{n/4} = 4\,n\,f^2(\theta_0).$$

Asymptotisch is de $\underline{t}$-toets equivalent aan de toets gebaseerd op de toetsingsgrootheid $\underline{T}_{2,n} = \underline{\bar{z}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\underline{x}_i)$, (Zie Wittig [1]).

We vinden $\psi_{2,n}(\theta) = E\,\underline{\bar{z}} = \theta$; $\sigma^2_{2,n}(\theta) = \frac{\sigma^2}{n}$

$$\Rightarrow R^2_{2,n}(0) = \frac{1}{\sigma^2/n} = n/\sigma^2 ,$$

$$\text{Dus } e = \lim_{n\to\infty} \frac{R^2_{1,n}(\theta_0)}{R^2_{2,n}(\theta_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n\,f^2(\theta_0)}{n/\sigma^2} = 4\,\sigma^2\,f^2(\theta_0).$$

In geval van de normale verdeling (θ,σ^2):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-1/2\left(\frac{x-\theta_0}{\sigma}\right)^2} \Rightarrow f(\theta_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \Rightarrow f^2(\theta_0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}$$

$$\Rightarrow e = 4\sigma^2 \cdot \frac{1}{2\pi\sigma^2} = \frac{2}{\pi}$$

Vb(2.7) 2-Steekproeven toets:

We beschouwen 2 onafhankelijke steekproeven: $\underline{x}_1,\ldots\ldots,\underline{x}_m$ en $\underline{y}_1,\ldots\ldots,\underline{y}_n$.

Dichtheden van populaties zijn $f(x)$ en $f(x-\theta)$, alleen verschillend in de lokatieparameter θ, beide varianties zijn σ^2.

We willen toetsen $H_0 : \theta = \theta_0$ tegen $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

Beschouw de A.R.E. van de toets van Wilcoxon m.b.t. de $\underline{t}$-toets.

Voor de toets van Wilcoxon geldt: $\psi_{1,n,m}(\theta) = n.m.p(\theta)$

$$\sigma^2_{1,n,m}(\theta) = \frac{n.m.}{12}(n+m+1)$$

$$p(\theta) = p(\underline{x} < \underline{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(u)du. \text{ (zie vb(2.5))}$$

Asymptotisch is de $\underline{t}$-toets equivalent aan de toets gebaseerd op de toetsingsgrootheid $\underline{T}_{2,n} = \bar{\underline{x}} - \bar{\underline{y}} \Rightarrow \mathrm{var}(\underline{T}_{2,n}) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}$; $\psi_{2,n}(\theta) = \theta$.

$$\text{Dus: } e = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \frac{R^2_{1,n}(\theta_0)}{R^2_{2,n}(\theta_0)} = \lim_{n,m\to\infty} \frac{(mn)^2\left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(u)du\right)^2}{\frac{nm}{12}(n+m+1)} : \frac{1}{\frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n}} =$$

$$= 12\sigma^2\left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(u)du\right)^2.$$

In geval van twee normale populaties met gelijke varianties vinden we analoog als in Vb(2.6):

$$e = \frac{3}{\pi}$$

Opm. Deze toepassing is erg formeel opgeschreven. In de stelling van Pitman zelf, zoals in het voorgaande beschreven, komen geen vier aantallen (n_1,n_2,m_1,m_2) voor, maar slechts twee (n_1 en n_2). De stelling kan toch worden toegepast als we analoog werken met $n_1(\nu)$, $n_2(\nu)$, $m_1(\nu)$, $m_2(\nu)$ met $\lim\limits_{\nu\to\infty} n_1(\nu) = \lim\limits_{\nu\to\infty} n_2(\nu) =$

$= \lim\limits_{\nu\to\infty} m_1(\nu) = \lim\limits_{\nu\to\infty} m_2(\nu) = \infty$.

§ 7 De relatie tussen Pitman's asymptotische relatieve doeltreffendheid van twee toetsen en de correlatiecoëfficiënt van hun toetsingsgrootheden.

In deze paragraaf bestuderen we het verband tussen de A.R.E. van twee toetsen: $e(T',T)$ en de correlatiecoëfficient van de resp. toetsingsgrootheden $\underline{t}'$ en $\underline{t}$. $\underline{t}'$ en $\underline{t}$ zijn gebaseerd op n waarnemingen $\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n$. We zullen aantonen dat onder zekere regulariteitsvoorwaarden geldt:

$$e(T',T) = \lim_{n\to\infty} \rho^2(\underline{t}',t) \ ,$$

waarbij $\underline{t}$ en t' de resp. toetsingsgrootheden zijn van toets T en T' en T de "beste" toets is in een nader te definiëren zin.
We beperken ons tot het geval $m = 1$, $\delta = 1/2$, eenzijdig toetsen.
We herhalen in het kort de Stelling van Pitman:
Laat T_n een toets zijn voor de hypothese H_0: $\theta = \theta_0$ tegen H_1: $\theta > \theta_0$, gebaseerd op n waarnemingen, zij $\underline{t}_n$ de toetsingsgrootheid en zij

$$\psi_n(\theta) \equiv E(\underline{t}_n|\theta) \quad , \quad \sigma_n^2(\theta) \equiv \sigma^2(\underline{t}_n|\theta) \ .$$

Laat θ_n een rij van alternatieven zijn zodat $\theta_n = \theta_0 + k/n^{1/2}$ $(n=1,2,\dots)$ $(k > 0$, willekeurig, eindige constante onafhankelijk van n).
Stel dat de volgende voorwaarden zijn vervuld:

A: $\exists\, \varepsilon > 0$, zodat voor $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0+\varepsilon$, $\psi_n'(\theta)$ bestaat.

B: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\psi_n'(\theta_n)\big/\psi_n'(\theta_0)\right) = 1$

C: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sigma_n(\theta_n)\big/\sigma_n(\theta_0)\right) = 1$

D: $c \equiv \lim\limits_{n\to\infty}\left(\psi_n'(\theta_0)\big/n^{1/2}\sigma_n(\theta_0)\right)$ bestaat.

E: $[\underline{t}_n-\psi_n(\theta_n)]\big/\sigma_n(\theta_n)$ is asymptotisch normaal verdeeld $\forall \theta_n$ $(n = 1,2,\dots)$.

Opm: Deze voorwaarden zijn die welke noodzakelijk zijn om de stelling toe te passen.

Pitman bewees:

1) Asymptotisch is het onderscheidingsvermogen van T_n gelijk aan

$$\phi(u_\alpha - kc) \text{ waar } \phi(u) = (2\pi)^{-1/2} \int_u^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

(zie (2.4) met m =1, δ = 1/2).

2) Als T_n en T'_n twee toetsingsgrootheden zijn die voldoen aan de bovenstaande voorwaarden (A,...,E) met c > 0 en c' > 0 dan geldt: De asymptotische relatieve doeltreffendheid e(T',T) van T'_n m.b.t. T_n is:

$$e(T',T) = (c'/c)^2 \quad \text{(zie (2.8) met } m_i = 1,\ \delta_i = 1/2\ (i = 1,2))$$

Def: Laat Q de klasse zijn van alle toetsen van H_0 die voldoen aan de voorwaarden A ... E, en veronderstel dat Q een toets bevat, zeg T_{n0}, zodat:

1) voor iedere gegeven α en k heeft geen andere toets in Q asymptotisch een groter onderscheidingsvermogen dan T_{n0}; dan $c_0 \geq c$, $\forall T_n \in Q$.

2) $c_0 > 0$. (2.25)

Def: Een toets T_{n0} die voldoet aan (2.25) heet de beste toets in Q.

Stelling: Als Q een beste toets bevat T_{n0} en $T_n \in Q$ met

1) De simultane verdeling van $[\underline{t}_n - \psi_n(\theta_n)]/\sigma_n(\theta_n)$ en $[\underline{t}_{n0} - \psi_{n0}(\theta_n)]/\sigma_{n0}(\theta_n)$ gaat naar een twee-dim. normale verdeling $\forall\, \theta_n$ als $n \to \infty$.

2) $\lim_{n\to\infty} \rho(\underline{t}_n, \underline{t}_{n0} | \theta_0) = \lim_{n\to\infty} \rho(\underline{t}_n, \underline{t}_{n0} | \theta_n) = \rho$ (zeg).

3) c > 0,

dan geldt: $\boxed{e(T,T_0) = \rho^2}$

Bewijs: Beschouw de toets $T_n(\lambda)$ gebaseerd op de toetsingsgrootheid

$$\underline{t}_n(\lambda) = \lambda\left[\underline{t}_{n0}/\sigma_{n0}(\theta_0)\right] + (1-\lambda)\left[\underline{t}_n/\sigma_n(\theta_0)\right]$$

waarbij λ een constante is onafhankelijk van n.

Allereerst bewijzen we: $T_n \in Q \quad \forall\lambda$.

ad A: geg: $\exists\varepsilon > 0$ zodat $\psi'_{n0}(\theta)$ bestaat voor $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0+\varepsilon$

: $\exists\varepsilon' > 0$ zodat $\psi'_n(\theta)$ bestaat voor $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0+\varepsilon'$

$$\psi_{n\lambda}(\theta) \equiv E(\underline{t}_n(\lambda)|\theta) = E\{\lambda[(\underline{t}_{n0}|\theta)/\sigma_{n0}(\theta_0)] + (1-\lambda)[(\underline{t}_n|\theta)/\sigma_n(\theta_0)]\} =$$

$$= \frac{\lambda}{\sigma_{n0}(\theta_0)}\psi(t_{n0}|\theta) + \frac{1-\lambda}{\sigma_n(\theta_0)}\psi(\underline{t}_n|\theta) .$$

Neem $\delta = \min(\varepsilon,\varepsilon')$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\sigma_{n0}(\theta_0)}\psi'_{n0}(\theta) + \frac{1-\lambda}{\sigma_n(\theta_0)}\psi'_n(\theta) \text{ bestaat voor } \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0+\delta$$

ofwel $\psi'_{n,\lambda}(\theta)$ bestaat voor $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0+\delta$, q.e.d.

ad B: geg: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\psi'_n(\theta_n)/\psi'(\theta_0)\right) \equiv \lim\limits_{n\to\infty} f_n = 1$

en : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\psi'_{n0}(\theta_n)/\psi'_{n0}(\theta_0)\right) \equiv \lim\limits_{n\to\infty} g_n = 1.$

Te bewijzen: $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\lambda}{\sigma_{n0}(\theta_0)}\psi'_{n0}(\theta_n) + \frac{(1-\lambda)}{\sigma_n(\theta_0)}\psi'_n(\theta_n)}{\frac{\lambda}{\sigma_{n0}(\theta_0)}\psi'_{n0}(\theta_0) + \frac{1-\lambda}{\sigma_n(\theta_0)}\psi'_n(\theta_0)} = 1$$

ofwel: $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\lambda}{\sigma_{n0}(\theta_0)}\frac{\psi'_{n0}(\theta_0)}{n^{1/2}}\cdot\frac{\psi'_{n0}(\theta_n)}{\psi'_{n0}(\theta_0)} + \frac{1-\lambda}{\sigma_n(\theta_0)}\frac{\psi'_n(\theta_0)}{n^{1/2}}\cdot\frac{\psi'_n(\theta_n)}{\psi'_n(\theta_0)}}{\frac{\lambda}{\sigma_{n0}(\theta_0)}\frac{\psi'_{n0}(\theta_0)}{n^{1/2}} + \frac{1-\lambda}{\sigma_n(\theta_0)}\frac{\psi'_n(\theta_0)}{n^{1/2}}} \overset{?}{=} 1 .$$

Stel $\quad A_n \equiv \dfrac{\lambda}{\sigma_{n0}(\theta_0)}\,\psi'_{n0}(\theta_0)$; $B_n \equiv \dfrac{1-\lambda}{\sigma_n(\theta_0)}\,\psi'_n(\theta_0)$.

Dan nog te bewijzen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(A_n/n^{1/2}\right).f_n + \left(B_n/n^{1/2}\right) g_n}{A_n/n^{1/2} + B_n/n^{1/2}} = 1$$

Uit D weten we $\lim\limits_{n\to\infty} A_n/n^{1/2} = c_0$; $\lim\limits_{n\to\infty} B_n/n^{1/2} = c$,

$$\text{dus:} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(A_n/n^{1/2}\right).f_n + \left(B_n/n^{1/2}\right) g_n}{\left(A_n/n^{1/2}\right) + \left(B_n/n^{1/2}\right)} = \frac{\lambda c_0 + (1-\lambda)c}{\lambda c_0 + (1-\lambda)c} = 1 \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>ad C</u>: geg: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sigma_n(\theta_n)/\sigma_n(\theta_0)\right) = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sigma_{n0}(\theta_n)/\sigma_{n0}(\theta_0)\right) = 1$

$$\sigma^2_{n,\lambda}(\theta) \equiv \sigma^2(\underline{t}_{n,\lambda}|\theta) = \text{var}\{\lambda(\underline{t}_{n0}|\theta)/\sigma_{n0}(\theta_0) + (1-\lambda)(\underline{t}_n|\theta)/\sigma_n(\theta_0)\}$$

$$= \frac{\lambda^2}{\sigma^2_{n0}(\theta_0)} \,.\, \sigma^2_{n0}(\theta) + \frac{(1-\lambda)^2}{\sigma^2_n(\theta_0)}\,\sigma^2_n(\theta) + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{\sigma_{n0}(\theta_0)\sigma_n(\theta_0)}\cdot\text{cov}(\underline{t}_{n0},\underline{t}_n|\theta) \,;$$

te bewijzen: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sigma_{n\lambda}(\theta_n)/\sigma_{n\lambda}(\theta_0)\right) \overset{?}{=} 1.$

$$\text{Vooraf: } \lim_{n\to\infty} \frac{\text{cov}(\underline{t}_{n0},\underline{t}_n|\theta)}{\sigma_{n0}(\theta_0).\sigma_n(\theta_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{cov}(\underline{t}_{n0},\underline{t}_n|\theta)}{\sigma_{n0}(\theta).\sigma_n(\theta)} \,.\, \frac{\sigma_{n0}(\theta).\sigma_n(\theta)}{\sigma_{n0}(\theta_0)\sigma_n(\theta_0)} = \rho.1 = \rho.$$

Bewijs:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{\lambda^2}{\sigma^2_{n0}(\theta_0)}\,\sigma^2_{n0}(\theta_n)+\frac{(1-\lambda)^2}{\sigma^2_n(\theta_0)}\,.\,\sigma^2_n(\theta_n)+\frac{2\lambda(1-\lambda)}{1}\,.\,\rho(\underline{t}_{n0},\underline{t}_n|\theta_n)}{\frac{\lambda^2}{\sigma^2_{n0}(\theta_0)}\,.\,\sigma^2_{n0}(\theta_0)+\frac{(1-\lambda)^2}{\sigma^2_n(\theta_0)}\,.\,\sigma^2_n(\theta_0)+2\lambda(1-\lambda)\,\rho(\underline{t}_{n0},\underline{t}_n|\theta_0)}\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{\frac{\lambda^2+(1-\lambda)^2+2\lambda(1-\lambda)\rho}{\lambda^2+(1-\lambda)^2+2\lambda(1-\lambda)\rho}\right\}^{1/2}=1^{1/2}=1\qquad\text{q.e.d.}$$

ad D: geg: $\lim_{n\to\infty}\psi'_{n0}(\theta_0)\Big/n^{1/2}\sigma_{n0}(\theta_0)=c_0$; $\lim_{n\to\infty}\psi'_n(\theta_0)\Big/n^{1/2}\sigma_n(\theta_0)=c$

Te bewijzen: $\lim_{n\to\infty}\left(\psi'_{n\lambda}(\theta_0)\Big/n^{1/2}\sigma_{n,\lambda}(\theta_0)\right)$ bestaat.

Bewijs:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\lambda}{\sigma_{n0}(\theta_0)}\,\psi'_{n0}(\theta_0)+\frac{(1-\lambda)}{\sigma_n(\theta_0)}\,\psi'_n(\theta_0)}{n^{1/2}\,\{\frac{\lambda^2}{\sigma^2_{n0}(\theta_0)}\,.\,\sigma^2_{n0}(\theta_0)+\frac{(1-\lambda)^2}{\sigma^2_n(\theta_0)}\,.\,\sigma^2_n(\theta_0)+2\lambda(1-\lambda)\rho(\underline{t}_{n0},\underline{t}_n|\theta_0)\}^{1/2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\lambda}{\sigma_{n0}(\theta_0)}\,\frac{\psi'_{n0}(\theta_0)}{n^{1/2}}+\frac{1-\lambda}{\sigma_n(\theta_0)}\,\frac{\psi'_n(\theta_0)}{n^{1/2}}}{\{\lambda^2+(1-\lambda)^2+2\lambda(1-\lambda)\rho(\underline{t}_{n0},\underline{t}_n|\theta_0)\}^{1/2}}=\frac{\lambda c_0+(1-\lambda)c}{(\lambda^2+(1-\lambda)^2+2\lambda(1-\lambda)\rho)^{1/2}}$$

dus $\lim_{n\to\infty}\left(\psi'_{n,\lambda}(\theta_0)\Big/n^{1/2}\sigma_{n,\lambda}(\theta_0)\right)$ bestaat en is gelijk aan een uitdrukking in c_0 en c $(\forall\lambda)$

$$\therefore\ c(\lambda)=\lambda c_0+(1-\lambda)c\Big/[\lambda^2+(1-\lambda)^2+2\lambda(1-\lambda)\rho]^{1/2}\quad\forall\lambda.\qquad(2.26)$$

ad E: $[\underline{t}_{n,\lambda} - \psi_{n,\lambda}(\theta_n)] / \sigma_{n,\lambda}(\theta_n) =$

$$= \frac{\lambda\left[\underline{t}_{n0}/\sigma_{n0}(\theta_0)\right] + (1-\lambda)\left[\underline{t}_n/\sigma_n(\theta_0)\right] - \frac{\lambda}{\sigma_{n0}(\theta_0)}.\psi_{n0}(\theta_n) - \frac{(1-\lambda)}{\sigma_n(\theta_0)}.\psi_n(\theta_n)}{\frac{\lambda}{\sigma_{n0}(\theta_0)}\cdot\sigma_{n0}(\theta_n) + \frac{1-\lambda}{\sigma_n(\theta_0)}\cdot\sigma_n(\theta_n)}$$

Uit C weten we dat de noemer gaat naar $(\lambda+1-\lambda) = 1$ als $n \to \infty$.
De teller is gelijk aan:

$$\lambda\left(\frac{\underline{t}_{n0} - \psi_{n0}(\theta_n)}{\sigma_{n0}(\theta_0)}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{\underline{t}_n - \psi_n(\theta_n)}{\sigma_n(\theta_0)}\right)$$

$$= \lambda\left(\frac{\underline{t}_{n0} - \psi_{n0}(\theta_n)}{\sigma_{n0}(\theta_n).\frac{\sigma_{n0}(\theta_0)}{\sigma_{n0}(\theta_n)}}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{\underline{t}_n - \psi_n(\theta_n)}{\sigma_n(\theta_n).\frac{\sigma_n(\theta_0)}{\sigma_n(\theta_n)}}\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sigma_{n0}(\theta_0)}{\sigma_{n0}(\theta_n)} = 1$,dus asymptotisch is deze stochastische grootheid de convolutie van 2 normale grootheden, dus weer normaal verdeeld. $\forall\theta_n$.

Hiermede is bewezen dat $T_n \in Q$ $(\forall\lambda)$.

Bovendien: $\left.\begin{array}{l} T_n(\lambda)\in Q, \forall\lambda \\ T_{n0} \text{ is een beste toets in } Q \end{array}\right\} \Rightarrow c(\lambda) \leq c_0, \forall\lambda$

Ofwel wegens (2.26): $\frac{\lambda c_0 + (1-\lambda)c}{(\lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)\rho)^{1/2}} \leq c_0 , \forall\lambda$

$$\Rightarrow \lambda^2c_0^2+(1-\lambda)^2c^2+2\lambda(1-\lambda)c_0c \leq c_0\lambda^2+(1-\lambda)^2c_0^2+2\lambda\rho c_0^2(1-\lambda) \ ,\forall\lambda$$

$$\forall\lambda: \lambda^2c_0^2+c^2+\lambda^2c^2-2\lambda c+2\lambda c_0c-2\lambda^2c_0c-c_0^2\lambda^2-c_0^2+2\lambda c_0^2-\lambda^2c_0^2-2\lambda\rho c_0^2+2\lambda^2\rho c_0^2$$

$$\forall\lambda: \lambda^2\underbrace{[c^2-c_0^2-2c_0(c-\rho c_0)]}_{A} - 2\lambda\underbrace{[c^2-c_0^2-c_0(c-\rho c_0)]}_{B} + \underbrace{c^2-c_0^2}_{C} \leq 0$$

$$A\lambda^2 + C - 2\lambda B \leq 0 \ ,\forall\lambda.$$

D.w.z. $D \leq 0 \Rightarrow 4B^2 - 4AC \leq 0 \Rightarrow B^2 - AC \leq 0$

ofwel $[c^2-c_0^2-c_0(c-\rho c_0)]^2 - (c^2-c_0^2)[c^2-c_0^2-2c_0(c-\rho c_0)] \leq 0 \quad ,\forall\lambda.$

Als we stellen $c^2 - c_0^2 = A'$, $c_0(c-\rho c_0) = B'$,

dan $(A'-B')^2 - A'(A'-2B') \leq 0 \quad \forall\lambda$

$$(A')^2 - 2A'B' + (B')^2 - (A')^2 + 2A'B' \leq 0 \quad \forall\lambda$$

$$(B')^2 \leq 0, \forall\lambda \Rightarrow c_0^2(c-\rho c_0)^2 \leq 0 \quad \forall\lambda$$

c_0 was positief $\Rightarrow c - \rho c_0 = 0 \Rightarrow \rho = c/c_0$.

Daar $c > 0$ en $c_0 > 0$ volgt $\rho = c/c_0 = [e(T,T_0)]^{1/2}$ q.e.d.

Vb (2.8) Het toetsen van de hypothese dat de verwachting van een symmetrische verdeling 0 is.

Laat $\underline{x}$ een stoch. var. zijn met een continue symmetrische verdeling $F(\underline{x}|\theta)$ met verwachting θ en laat $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$ een steekproef zijn uit deze verdeling. Zij $\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_n$ de geordende absolute waarden van de waarnemingen. Voor $i = 1,2,\ldots,n$ definiëren we

$$\underline{v}_i \begin{cases} = 1 & \text{als } \underline{u}_i \text{ correspondeert met een positieve waarneming.} \\ = -1 & \text{als } \underline{u}_i \text{ correspondeert met een negatieve waarneming.} \end{cases}$$

Beschouw de toets voor H_0: $\theta = 0$ tegen H_1: $\theta \neq \theta_0$ gebaseerd op de toetsingsgrootheid van de vorm: $\underline{t}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{v}_i$ waar, voor (2.27)
$i = 1,2,\ldots,n$, de gewichten a_i gegeven functies zijn van i en van n. Voorbeelden van toetsingsgrootheden zijn:

1) De tekentoets met $a_i = 1$ voor $i = 1,2,\ldots,n$.

2) De toets van Wilcoxon met $a_i = i$ voor $i = 1,2,\ldots,n$.

3) Een toets gebaseerd op $\underline{t}_n$ met gewichten a_i die voldoen aan:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a_i} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{i}{n+1} \quad (i = 1,2,\ldots,n) .$$

Als $\psi(\alpha)$ wordt gedefinieerd door $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\psi(\alpha)} e^{\frac{x^2}{2}} dx$

dan volgt hier: $a_i = \psi[(n+1+i)/(2n+2)]$ $(i = 1,2,\dots,n)$.

Bewijs:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{a_i} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a_i} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

We weten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi} \xrightarrow{\text{even functie}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

dus:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{a_i} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a_i} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

$$= -1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\psi(n+1+i/2n+2)} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -1 + 2\left(\frac{n+1+i}{2n+2}\right) =$$

$$= -1 + \frac{n+1+i}{n+1} = \frac{i}{n+1} \qquad (n = 1,2,\dots),\ \text{q.e.d.}$$

We zullen deze toets v.d. waarden's toets voor één steekproef noemen. Een andere toets voor de hypothese H_0 is gebaseerd op het steekproef-gemiddelde $\underline{\bar{x}}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underline{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underline{u}_i\underline{v}_i$

De correlatiecoefficient onder H_0 van twee toetsingsgrootheden van de vorm (2.27) met gewichten a_i en a_i' $(i = 1,2,\dots,n)$ berekenen we als volgt:

$$E\,\underline{t}_n = E\sum_{i=1}^{n} a_i\underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} a_i\,E\,\underline{v}_i = 0 \text{ want } E\underline{v}_i = 0 \text{ (onder } H_0)$$

$$\Rightarrow \rho(\underline{t}_n, \underline{t}_n' \mid H_0) = \frac{E(\underline{t}_n \cdot \underline{t}_n')}{\sigma(\underline{t}_n)\sigma(\underline{t}_n')} \qquad (\text{onder } H_0)$$

$$E(\underline{t}_n,\underline{t}'_n \mid H_0) = E \sum_{i,j} a_i\underline{v}_i a'_j\underline{v}'_j = \sum_{i,j} a_i a'_j \, E\underline{v}_i\underline{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i a'_i (\underline{v}_i,\underline{v}_j \text{ o.o. als } i \neq j).$$

$$\mathrm{var}(\underline{t}_n) = \mathrm{var}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\underline{v}_i\Big) = E\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\underline{v}_i\Big)^2 \overset{\text{o.o.}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, E\underline{v}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$$\text{want } E\underline{v}_i^2 = 1.1/2 + 1.1/2 = 1.$$

$$\Rightarrow \rho(\underline{t}_n,\underline{t}'_n \mid H_0) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i a'_i \Bigg/ \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} a_i'^2\right]^{1/2} \right) \qquad (2.28)$$

Analoog is de correlatiecoefficient onder H_0 van de stochastische grootheid van de vorm (2.27) en $\bar{\underline{x}}_n$:

$$\rho(\underline{t}_n,\bar{\underline{x}}_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i E\underline{u}_i \Bigg/ \sigma\left[n \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{1/2} \right) \qquad (2.29)$$

Stel nu dat $\underline{X}$ een normale verdeling heeft met verwachting θ en variantie 1.
Een beste toets is in dit geval de toets gebaseerd op de verwachting en v.d. Waerden's toets voor een steekproef.
We kunnen nagaan dat aan de voorwaarden om de stelling toe te kunnen passen is voldaan.
De asymptotische relatieve doeltreffendheid van de teken-toets m.b.t. deze beste toets kan nu gevonden worden uit (2.28) met $a_i = 1$ en

$$a'_i = \psi[(n+1+i)/(2n+2)] \qquad (i = 1,2,\ldots\ldots,n)$$

óf uit (2.29) met $a_i = 1$, $\sigma = 1$ en $\underline{u}_i$ de i^{de} orde statistische grootheid van de absolute waarde van $\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_n$.

Uit (2.28) vinden we:

$$e = \rho^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \psi(\frac{n+1+i}{2n+2})\right)^2}{n \sum_{i=1}^{n} \{ \psi(\frac{n+1+i}{2n+2})\}^2} \overset{*}{=} \frac{\left(\int_0^1 \psi\ (\frac{y+1}{2})dy\right)^2}{\int_0^1 \{\psi\ (\frac{y+1}{2})\}^2\ dy} = \frac{2}{\pi} \quad (2.30)$$

Uit (2.29) vinden we:

$$e = \rho^2 = \lim_{n\to\infty} n^{-1}(\sum_{i=1}^{n} E\underline{u}_i)^2 = \lim_{n\to\infty} (n^{-1} \sum_{i=1}^{n} E|\underline{x}_i|)^2 = (E|X|)^2 = \frac{2}{\pi} \quad (2.31)$$

Voor de toets van Wilcoxon kunnen we de asymptotische relatieve doeltreffendheid m.b.t. een beste toets vinden uit (2.28) met $a_i = i$, $a_i' = \psi[(n+1+i)/(2n+2)]$ (t.o.v. v.d. Waerden's toets voor een steekproef)

$$e = \rho^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} i\psi(\frac{n+1+i}{2n+2})\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} i^2 \sum_{i=1}^{n} \{\psi(\frac{n+1+i}{2n+2})\}^2} = 3\frac{\left(\int_0^1 y\psi\ (\frac{y+1}{2})dy\right)^2}{\int_0^1 \{\psi(\frac{y+1}{2})\}^2\ dy} = \frac{3}{\pi} \quad (2.32)$$

($*$): De overgangen van de sommen op integralen kunnen we inzien m.b.v. de Riemann-integratietheorie ($n\to\infty$).

De A.R.E. van de tekentoets m.b.t. de toets van Wilcoxon volgt uit (2.30) en (2.32) : e = 2/3 (productregel)

Deze A.R.E. is <u>niet</u> het kwadraat van de correlatiecoefficient. ($n\to\infty$) Voor de correlatiecoefficient vinden we, ($n\to\infty$),

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} i \Big/ (n \sum_{i=1}^{n} i^2)^{1/2} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hoofdstuk III APPENDIX

Een verfijnde Pitman-doeltreffendheid

Asymptotische expressies worden in dit hoofdstuk gegeven t.w. termen van de orde $1/n^2$ voor de relatieve doeltreffendheid van de toets van Wilcoxon t.o.v. de standaard normale toets en de toets van Student, voor alternatieven die dicht bij de nulhypothese liggen.
De eerste term van de ontwikkeling is de A.R.E., de overblijvende termen zijn correcties voor eindige steekproefomvang n.
Waarden van de relatieve doeltreffendheid worden gegeven voor eindige steekproefomvang in het geval van normale verdelingen en vergelijkingen van de A.R.E. met de exacte waarde van de relatieve doeltreffendheid voor eindige n worden gemaakt.
In het algemeen wordt getoond dat de toets van Wilcoxon lokaal voor matige steekproefomvang bijna net zo goed is als asymptotisch ($n\to\infty$).

§ 1 Het begrip doeltreffendheid (rel.)

Laat $\underline{X}_1,\underline{X}_2,\dots\dots,\underline{X}_m$ en $\underline{Y}_1,\dots\dots,\underline{Y}_n$ onafhankelijk en identiek verdeelde stochastische grootheden zijn met continue verdelingsfunctie resp. $F(x)$ en $G(x) = F(x-\theta)$.
Zij $p_{m,n}(\theta)$ en $\beta_{m,n}(\theta)$ het onderscheidingsvermogen van twee toetsen van de hypothese $\theta = 0$ tegen $\theta > 0$, bij dezelfde α.
Dan is de relatieve doeltreffendheid van de eerste toets t.o.v. de tweede (voor gegeven waarden van θ,α,m,n) : $e(\theta,\alpha,m,n) = \frac{n^*}{n}$, (3.1)
waarbij n^* (niet noodzakelijk geheel) wordt

$$\text{gedefinieerd door } p_{m,n}(\theta) = \beta_{m^*,n^*}(\theta),\ (m/n = m^*/n^*) \qquad (3.2)$$

Neem aan dat de eerste afgeleiden van de onderscheidingsvermogens continu zijn in $\theta = 0$ met waarden $p'_{m,n}(0)$ en $\beta'_{m,n}(0)$. (3.3)

In de buurt van de nulhypothese wordt voorwaarde (3.2) gereduceerd tot

$$p'_{m,n}(0) = \beta'_{m^*,n^*}(0) \qquad (m/n = m^*/_{n^*}) \tag{3.4}$$

want: $$p_{m,n}(\theta) = \beta_{m^*,n^*}(\theta) \Rightarrow \frac{p_{m,n}(\theta) - \alpha}{\theta} = \frac{\beta_{m^*,n^*}(\theta) - \alpha}{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p_{m,n}(\theta) - p_{m,n}(0)}{\theta} = \frac{\beta_{m^*,n^*}(\theta) - \beta_{m^*,n^*}(0)}{\theta} .$$

Als $\theta \to 0$: $p'_{m,n}(0) = \beta'_{m^*,n^*}(0)$ of wel (3.4)

Deze gelijkheid kan vaak worden uitgedrukt in een asymptotische ontwikkeling.
We zullen een benadering van de relatieve doeltreffendheid ontwikkelen in termen van (3.4) voor de eenzijdige toets van Wilcoxon, gebruikmakend van de Edgeworth ontwikkeling t.m. termen van de orde $1/n^2$ (relatief t.o.v. de standaard-normale toets en de t-toets).
Deze ontwikkeling geeft een goede benadering van de verdeling onder de nulhypothese van de toetsingsgrootheid van Wilcoxon (deze toetsingsgrootheid is asymptotisch normaal verdeeld).
De toepasbaarheid in ons probleem wordt voor een groot deel bevestigd door de vergelijking met de exacte waarden.
Of de Edgeworth-ontwikkeling een geldige ontwikkeling is, is een open vraag, die echter van ondergeschikt belang is als het er om gaat benaderende waarden te vinden voor de doeltreffendheid.

Opm. Literatuur hierover: H. Cramer [2]
Mathematical Methods of Statistics.

§ 2 Edgeworth benadering van de Mann-Whitney stochastische grootheid

De toetsingsgrootheid van Mann-Whitney $\underline{U}$ voor de toets van Wilcoxon is:

$$\underline{U} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \phi(\underline{x}_i, \underline{y}_j) \ , \ \phi(\underline{x},\underline{y}) = 1(0) \text{ als } \underline{x} > \underline{y} (\underline{x} \leq \underline{y}) \tag{3.5}$$

De eerste vier momenten van $\underline{U}$ onder de nulhypothese $\theta = 0$ zijn (zie Ann. of Math. Stat., vol. 26 (1955), pag. 301-312):

$$\begin{aligned} &(E\underline{U})^0 = \xi^0 = mn/2 \ , \ (\mathrm{Var}\ \underline{U})^0 = \mu_2^0 = \frac{mn(m+n+1)}{12} \ , \\ &\mu_3^0 = 0 \ , \ \mu_4^0 = [\frac{mn(m+n+1)}{240}][5(m^2n+nm^2) - 2(m^2+n^2) + 3mn - 2(m+n)]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Algemene uitdrukkingen voor de eerste vier momenten worden gegeven door R.M. Sundrum, waaruit de volgende formules voor de afgeleiden in het punt $\theta = 0$ kunnen worden afgeleid:

$$\begin{aligned} \mu_1'(0) &\equiv \bar{\xi} = -mnA \ , \\ \mu_2'(0) &\equiv \tilde{\mu}_2 = mn(m-n)(2B-A), \\ \mu_3'(0) &\equiv \tilde{\mu}_3 = 1/2(Am^2n^2) + (-A/2 + 3B-3C)(-4m^2n^2+m^3n+mn^3+m^2n+mn^2), \\ \mu_4'(0) &\equiv \tilde{\mu}_4 = (-A/2 + B)(m^4n^2-m^2n^4)+(2B-6C+4D)(m^4n-mn^4) + \\ &+ (5A/2-27B+66C-44D)(m^3n^2-m^2n^3)+(-A+12B-30C+20D)(m^3n-mn^3), \end{aligned} \tag{3.7}$$

waarbij de volgende afkortingen zijn gebruikt:

$$A = \int f^2dx \ , \ B = \int Ff^2dx \ , \ C = \int F^2f^2dx \ , \ D = \int F^3f^2dx. \tag{3.8}$$

In het bijzondere geval dat de verdeling symmetrisch is, $(F(x) + F(-x) = 1)$

$$\text{dan } 2B = A \ , \ 4D = -A + 6C \ , \tag{3.9}$$

zodat (3.7) vereenvoudigd kan worden tot:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= -mnA, \\ \tilde{\mu}_2 &= 0, \\ \tilde{\mu}_4 &= 0, \\ \tilde{\mu}_3 &= \frac{Am^2n^2}{2} + (A-3C)(-4m^2n^2+m^3n+mn^3+m^2n+mn^2). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Lehmann, onder andere, bewees dat $\underline{U}$ asymptotisch normaal is. Het onderscheidingsvermogen van deze toets kunnen we m.b.v. de Edgeworth ontwikkeling t.m. termen van de orde $1/n^2$ benaderen (zie Cramer [2]),(continuiteitscorrectie is 1/2).

Dan geldt:

$$p_\theta(\underline{U} < u|m,n) = \Phi(x)+e_2\phi^{(2)}(x)+e_3\phi^{(3)}(x)+e_5\phi^{5}(x)+\hat{e}\hat{\phi}(x)+0(n^{-2}) \qquad (3.11)$$

voor vaste x,

waarbij $x = (u+1/2-E\underline{U})/(\mu_2)^{1/2}$, Φ is normale (0,1) verd.fu., (3.12)
ϕ is de normale (0,1) dichtheid,
$\phi^{(\nu)}(x) = (-1)^\nu H_\nu(x)\phi(x)$ waarbij $H_\nu(x)$ het Hermite polynoom is van de ν^{de} graad. $(\nu = 1,2,\ldots)$

De Edgeworth coëfficienten zijn:

$$e_2 = -\frac{1}{3!}\frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \tilde{e}_2(\theta) + 0(\theta^2), \qquad e_2^0 = 0,$$

$$e_3 = \frac{1}{4!}\left(\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3\right) = e_3^0 + \tilde{e}_3(\theta) + 0(\theta^2), \quad e_3^0 = \frac{1}{4!}\left(\frac{\mu_4^0}{(\mu_2^0)^2} - 3\right), \qquad (3.13)$$

$$e_5 = \frac{10}{6!}\frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0(\theta^2) \qquad e_5^0 = \tilde{e}_5 = 0$$

(De coefficienten zijn functies van θ, er is een Taylor-ontwikkeling toegepast om $\theta = 0$).
De Edgeworth coefficienten zijn van de orde $n^{-1/2}$, n^{-1} en n^{-1} resp.

en $\hat{e}\,\hat{\phi}(x)$ symboliseert de termen van orde: $0(n^{-\frac{3}{2}})$.
In ons probleem echter is x niet een vaste constante, daar de onbetrouwbaarheid α gegeven is en de lokatieparameter $\theta \to 0$.
Preciezer : Aan de ene kant zijn u en α verbonden door (3.11) voor $\theta = 0$ door

$$P_0(\underline{U} \leq u|m,n) = \Phi(x_0) + e_3^0\, \phi^{(3)}(x_0) + O(n^{-2}) = \alpha, \tag{3.14}$$

(e_2^0 en $e_5^!$ zijn beide 0),

waarbij x_0 de genormaliseerde waarde van u is voor $\theta = 0$, die kan worden verkregen als functie van α door (3.14) asymptotisch op te lossen met gebruik van $e_3^0 = O(n^{-1})$.

$$\text{Dus } x_0 = \frac{u+1/2-mn/2}{(mn(m+n+1)/12)^{1/2}} = \Phi^{-1}(\alpha) - e_3^0\,[3\Phi^{-1}(\alpha)-\{\Phi^{-1}(\alpha)\}^3] + O(n^{-2}) \tag{3.15}$$

Aan de andere kant, x en x_0 zijn verbonden door (3.12), dit kan als volgt geschreven worden: $x = x_0 + x_1(\theta) + O(\theta^2)$ (3.16)

$$x'(\theta) = \frac{d}{d\theta}\, x(\theta) = \frac{d}{d\theta}\, \frac{u+1/2-E\underline{U}}{\mu_2^{1/2}} = \frac{\mu_2^{1/2}(-E\underline{U})'-(u+1/2-E\underline{U})\frac{1}{2}\,\mu_2^{-1/2}.\mu_2'}{\mu_2}$$

$$= -\frac{(E\underline{U})'}{\mu_2^{1/2}} - \frac{u+1/2-E\underline{U}}{2\mu_2^{\frac{3}{2}}}.\mu_2'.$$

$$\overset{(3.7)}{\rightarrow}\quad x'(0) = \frac{mnA}{(\mu_2^0)^{1/2}} - \frac{x_0}{2}\,\frac{\tilde{\mu}_2}{\mu_2^0} \quad \text{waarbij } x'(0) \overset{\text{def}}{=} x_1 = O(n^{1/2}).$$

We maken nu gebruik van het feit dat zowel de normaliseerde variabele x en de Edgeworth coëfficiënten van θ afhangen.
We differentiëren (3.11) naar θ (in θ = 0).

$$\left\{\frac{d}{d\theta}\,(\Phi(x) + e_2\,\phi^2(x) + e_3\,\phi^3(x) + e_5\,\phi^5(x) + \hat{e}\,\hat{\Phi}(x) + O(n^{-2}))\right\}\Bigg|_{\theta=0} = p'(0)$$

$$\overset{(3.13)}{=} \quad x_1\phi(x_0) + e_3^0 x_1\phi^{(4)}(x_0) + \tilde{e}_2\phi^{(2)}(x_0) + \tilde{e}_3\phi^{(3)}(x_0) + O(n^{-3/2}).$$

(De rest is nog $O(n^{-3/2})$ daar $\hat{e}\,\hat{\Phi}(x)$ verdwijnt voor θ = 0) (3.17)

M.b.v. (3.6), (3.15) en (3.16) vinden we:

$$p'(0) = \phi(\Phi^{-1}(\alpha)) \Big[\left(\frac{12mn}{m+n+1}\right)^{1/2} A - \frac{\tilde{\mu}_2}{2\mu_2^0} \Phi^{-1}(\alpha) -$$

$$- (\tilde{e}_2 - 3\left(\frac{12mn}{n+m+1}\right)^{1/2} Ae_3^0)(1 - \{\Phi^{-1}(\alpha)\}^2) +$$

$$+ \frac{\tilde{\mu}_2}{\mu_2^0} e_3^0 \{\Phi^{-1}(\alpha)\}^3 + \tilde{e}_3(3\Phi^{-1}(\alpha) - \{\Phi^{-1}(\alpha)\}^3) \Big] + 0(n^{-3/2}) \qquad (3.18)$$

In het bijzonder, voor symmetrische verdelingen $\tilde{\mu}_2 = \tilde{e}_3 = 0$ wordt (3.18) vereenvoudigd tot:

$$p'(0) = \phi(\Phi^{-1}(\alpha))\left(\frac{12mn}{m+n+1}\right)^{1/2} .A[1 + K_{mnAC}(1-\{\Phi^{-1}(\alpha)\}^2) + 0(n^{-2})] \qquad (3.19)$$

met $$K_{mnAC} = \frac{[mn+2(1-3(C/A))(-4mn+m^2+n^2+m+n)-0.15(m^2+n^2+mn+m+n)]}{mn(m+n+1)} .$$

§ 3 Relatieve doeltreffendheid t.o.v. de standaardnormale toets

Laat $\underline{X}_i$ en $\underline{Y}_i$ normaal verdeeld zijn met bekende variantie σ^2

$(N(\mu,\sigma^2)$ en $N(\mu+\theta,\sigma^2))$.

Dan is $\left[\dfrac{\bar{\underline{Y}}-\bar{\underline{X}}}{\sigma}\cdot\left(\dfrac{mn}{m+n}\right)^{1/2}\right]$ $N\left(\left(\dfrac{\theta}{\sigma}\right)\left(\dfrac{mn}{m+n}\right)^{1/2},1\right)$ verdeeld.

Contrôle: $E\underline{\bar{Y}}=\mu+\theta$, $E\underline{\bar{X}}=\mu \Rightarrow E\left(\dfrac{\bar{\underline{Y}}-\bar{\underline{X}}}{\sigma}\left(\dfrac{mn}{m+n}\right)^{1/2}\right)=\dfrac{\theta}{\sigma}\left(\dfrac{mn}{m+n}\right)^{1/2}$

$$\left.\begin{aligned}\sigma^2(\bar{\underline{Y}}) &= \frac{\sigma^2}{n}\\ \sigma^2(\bar{\underline{X}}) &= \frac{\sigma^2}{m}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{(o.o.)}: \operatorname{var}(\bar{\underline{Y}}-\bar{\underline{X}})=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m}$$

$$\Rightarrow \operatorname{var}\frac{\bar{\underline{Y}}-\bar{\underline{X}}}{\sigma}\left(\frac{mn}{m+n}\right)^{1/2}=\frac{\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m}}{\sigma^2}\cdot\left(\frac{mn}{m+n}\right)=1, \text{ q.e.d}$$

Het onderscheidingsvermogen van de standaardnormale toets, kort weg $\underline{\bar{x}}$-toets is $\beta(\theta)$

We berekenen $\beta(\theta)$: Def: $\underline{Z}=\dfrac{\bar{\underline{Y}}-\bar{\underline{X}}}{\sigma}\left(\dfrac{mn}{m+n}\right)^{1/2}$.

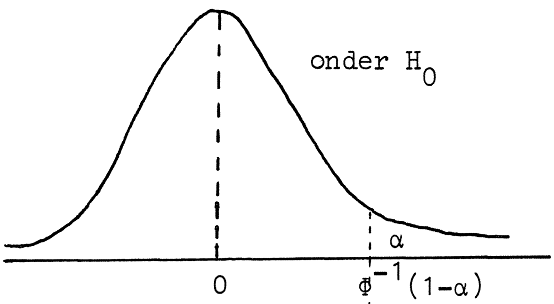
Stel $\dfrac{\theta}{\sigma}\cdot\left(\dfrac{mn}{m+n}\right)^{1/2}=\mu$.

De hypothese H_0 was: $\theta=0$; H_1 : $\theta>0$.

We kunnen ook toetsen H_0 : $\mu=0$ tegen H_1 : $\mu>0$.

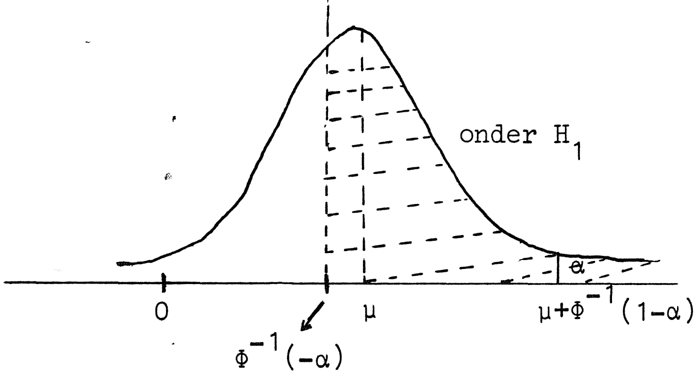
Onder de nulhypothese geldt: $\underline{Z}$ is $N(0,1)$ verdeeld.

Onder H_1 : $\underline{Z}$ is $N(\mu,1)$ verdeeld $(\mu>0)$.



Het kritieke gebied nemen we rechts in de staart der verdeling.

De onbetrouwbaarheid α bepaalt het punt $\Phi^{-1}(1-\alpha)$.



$\beta(\theta) \overset{\text{def}}{=} P\{\underline{Z} \in \text{kritieke geb.}|H_1)$

$= P(\underline{Z}>\Phi^{-1}(1-\alpha)|H_1)$

$= P(\underline{u}>\Phi^{-1}(1-\alpha)-\mu)$, waarbij $\underline{u}\in N(0,1)$

$\overset{\text{sym}}{=} \Phi(\mu-\Phi^{-1}(1-\alpha))$

Nu geldt dat:

$$\beta(\theta) = \Phi((\theta/\sigma)\,(\frac{mn}{m+n})^{1/2} - \phi^{-1}\,(1-\alpha)) .$$

Uit de figuur is duidelijk dat geldt:

$$\beta(\theta) = \alpha + \int_{\Phi^{-1}(1-\alpha)}^{\mu+\Phi^{-1}(1-\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}\, dx$$

Vanwege symmetrie geldt $\Phi^{-1}(1-\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha)$.

Deze laatste integraal kunnen we benaderen (via subst. $x-\mu = y$), waarna we krijgen:

$$\beta(\theta) = \alpha + (\theta/\sigma)\,(\frac{mn}{m+n})^{1/2}\,\phi(\Phi^{-1}(\alpha)) + O(\theta^2) ,$$

$$\Rightarrow \beta'(0) = \frac{1}{\sigma}\,(\frac{mn}{m+n})^{1/2}\,\phi(\Phi^{-1}(\alpha)) ;$$

als we m en n door resp. m^* en n^* vervangen dan lossen we nu (3.4) op voor n^*/n in termen van n en m.

Stel $\frac{n^*}{n} = b \Rightarrow n^* = nb$; $\frac{m}{n} = \frac{m^*}{n^*} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{m^*}{nb} \Rightarrow m^* = mb$.

We moeten nu b oplossen uit (3.4):

$$\beta'(0) = \frac{1}{\sigma}\,(\frac{m^* n^*}{m^*+n^*})^{1/2}\,\phi(\Phi^{-1}(\alpha)) = \frac{1}{\sigma}\,(\frac{mbnb}{mb+nb})^{1/2}\,.\,\phi(\Phi^{-1}(\alpha)) =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\,(\frac{nm}{n+m})^{1/2}\,.\,b^{1/2}\,.\,\phi(\Phi^{-1}(\alpha)) .$$

M.b.v. (3.19): uit $\beta'(0) = p'(0)$, ofwel $\frac{1}{\sigma}\,(\frac{nm}{n+m})^{1/2}.b^{1/2}.\phi(\Phi^{-1}(\alpha)) = p'(0)$

$$\Rightarrow b^{1/2} = \frac{\sigma p'(0)}{(\frac{nm}{n+m})^{1/2}.\phi(\Phi^{-1}(\alpha))} \Rightarrow b = (\frac{1}{m} + \frac{1}{n})\,\sigma^2(\frac{p'(0)}{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))})^2$$

dus

$$e_{\underline{w},\underline{x}} = (1/m + 1/n)\,\sigma^2(\frac{p'(0)}{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))})^2 ,$$

ofwel:

$$e_{\underline{w},\underline{\bar{x}}} = 12\sigma^2\left(\int f^2(x)dx\right)^2 . \left[1-\frac{1}{m+n+1} \quad +2K_{mnAC}(1-\{\Phi^{-1}(\alpha)\}^2+O(n^{-2})\right] ,$$

waarbij: $A = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0.282095$, $1-3C/A = 0.087733$.

Voor kleine m en n, kunnen de exacte waarden van p'(0) berekend worden, zodat we vergelijkingen kunnen treffen (Zie H. Witting [3]).

§4 Relatieve doeltreffendheid t.o.v. de t-toets.

Een meer realistische vergelijking dan in §3 is de vergelijking met de $\underline{t}$-toets, die geschikt is voor onbekende, maar gemeenschappelijke variantie.

Laten we ons beperken tot normale verdelingen.

Als we de dichtheid $t_\delta(x)$ van de niet-centrale $\underline{t}$-verdeling ontwikkelen t.o.v. de niet-centraliteitsparameter $\delta = (\theta/\sigma).(\frac{mn}{m+n})^{1/2}$, dan kan men nagaan dat de afgeleide van het onderscheidingsvermogen, $\beta(\theta) = \int_C^\infty t_\delta(x)\,dx$ in $\theta = 0$ gegeven wordt door:

$$\beta'(0) = \frac{1}{\sigma}\,(\frac{mn}{m+n})^{1/2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(1 + \frac{C^2}{m+n-2})^{-\frac{m+n-2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sigma}\,(\frac{mn}{m+n})^{1/2}\,\phi(C)\,(1 + \frac{C^4}{4(m+n-2)} + 0(n^{-2})).$$

We kunnen C asymptotisch bepalen uit α door ontwikkeling van de centrale $\underline{t}$-verdeling met $f = m+n-2$ vrijheidsgraden voor grote waarden van f:

$$\alpha = \int_C^\infty t_0(x)\,dx = 1 - \Phi\left[C(\frac{m+n-4}{m+n-2})^{1/2}\right] -$$

$$- \frac{1}{4(m+n-6)}\,\phi^{(3)}\left[C(\frac{m+n-4}{m+n-2})^{1/2}\right] + 0(n^{-2})\ .$$

Als we C oplossen:

$$C = (\frac{m+n-2}{m+n-4})^{1/2}\,\Phi^{-1}(1-\alpha) + (\frac{1}{4(m+n-6)})\,(3\Phi^{-1}(\alpha) - \{\Phi^{-1}(\alpha)\}^3) + 0(n^{-2}).$$

Daarom asymptotisch:

$$\beta'(0) = \frac{1}{\sigma}\,(\frac{mn}{m+n})^{1/2}\,\phi(\Phi^{-1}(\alpha))\left[1 - (\frac{1}{4(m+n-2)})\,\{\Phi^{-1}(\alpha)\}^2 + 0(n^{-2})\right]\ .$$

Als we (3.4) oplossen dan:

$$e_{\underline{w},\underline{t}} = e_{\underline{w},\underline{\bar{x}}}\,(1 + \frac{\{\Phi^{-1}(\alpha)\}^2}{24(m+n-2)\sigma^2(\int f^2(x)dx)^2} + 0(n^{-2}))\ .$$

We zien uit de formules hoe de relatieve doeltreffendheid afhangt van α, m en n.

Opm: Een analoog geheel kan men opzetten voor de doeltreffendheid van de twee-zijdige toets van Wilcoxon.
Bovendien kan men een analoge beschouwing houden voor de tekentoets i.p.v. de toets van Wilcoxon, (zie H. Witting [3]).

Tabellen die hierover bekend zijn ($\underline{w}$ ~ Wilcoxon; $\underline{v}$ ~ tekentoets):

1°) Vergelijking van de doeltreffendheid-waarden t.o.v. de $\underline{\bar{x}}$-toets en de $\underline{t}$-toets bij normale verdeling:

	m = n = 4		m = n = 5		m = 6, n = 4	
α	0.0571	0.0286	0.0278	0.0159	0.0333	0.0190
$e_{\underline{v},\underline{\bar{x}}}$	0.7840	0.7222	0.7697	0.7304	0.7787	0.7403
$e_{\underline{v},\underline{t}}$	0.9772	0.9825	0.9774	0.9775	0.9705	0.9749
$e_{\underline{w},\underline{\bar{x}}}$	0.7817	0.7311	0.7713	0.7369	0.7803	0.7455
$e_{\underline{w},\underline{t}}$	0.9518	0.9620	0.9563	0.9593	0.9521	0.9553

2°) Doeltreffendheid-waarden $e_{\underline{w},\underline{t}}$ voor verschillende m en n en α weer bij normale verdeling:

α	m=n=10	m=n=20	m=n=40	m=10 n=20	m=10 n=40	m=20 n=40
0.100	0.9404	0.9466	0.9505	0.9437	0.9466	0.9488
0.050	0.9469	0.9498	0.9521	0.9471	0.9468	0.9505
0.010	0.9578	0.9566	0.9558	0.9531	0.9461	0.9542
0.005	0.9602	0.9591	0.9573	0.9546	0.9452	0.9556

De auteur is dank verschuldigd aan de heer R. Helmers voor de vele suggesties betreffende de A.R.E. en aan Mevr. S. Hillebrand voor het zorgvuldige typewerk.

LITERATUUR

1 Witting, H.
Selected Statistical Papers
European Meeting 1968
Mathematisch Centrum, Amsterdam.

2 Cramér, H.
Mathematical Methods of Statistics, 221-232.

3 Witting, H.
Annals of Mathematical Statistics 31 (1960), 405-414.

4 Kendall, G. en Stuart, A.
The advanced theory of statistics, 262-277.

5 Noether, G.E.
Statistica Neerlandica, 63-73.

6 Noether, G.E.
Ann. Math. Stat. 26 (1955), 64-68.

7 Noether, G.E.
Elements of Nonparametric Statistics, 84-97.

8 Bradley, J.V.
Distribution-free Statistical Tests, 56-62.

9 Lehmann, E.L.
Testing Statistical Hypotheses.

10 Hájek, J. en Sidák, Ph.D.
Theory of Rank Tests, 267-275.