De natuur als tegenspeler *)

door Prof. Dr D. van Dantzig

Summary

PLAYING AGAINST NATURE.

Human activity implies making decisions under partly unknown circumstances but backed by former experience.

Modern theories of mathematical statistics enable us in certain cases to determine among all decisions under consideration those which have the greatest chance to lead to a given end. This is achieved by considering human activity as a combined game of brains and chance, with "nature" as a fictitious opponent.

Though excessive mathematical difficulties are as a rule prohibitive for complete calculations, we nevertheless get a better idea of what the words "rational behaviour" stand for. In many cases, where a sufficient quantity of information in the form of statistical material is available, it is possible to arrive at concrete results. In particular this is the case when economic factors prevail; at the same time the statistical theory of testing hypotheses can be seen in a broader aspect.

This paper, read at the Meeting of the "Vereniging voor Statistiek" on March 6, 1925, gives an elementary exposition of some of the principles of W a l d's theory of Decision Functions and Von Neumann and Morgenstern's Theory of Games and Economic Behaviour.

Niet uitsluitend om U een overzicht te geven van een der belangrijkste statistische theorieën der laatste jaren is het, dat ik het onderwerp van deze voordracht gekozen heb, maar tevens om daarmede een posthume hulde te brengen aan een man die zich in weinige jaren tot een der belangrijkste wiskundig-statistici van onze generatie ontwikkeld had; den helaas op 13 December 1950 om het leven gekomen A b r a h a m W a l d.

Nadat hij als jongeman reeds naam had gemaakt met een belangrijk onderzoek over R. v o n M i s e s' onregelmatigheidsaxioma, heeft hij zich vooral tijdens en na de oorlog grote roem verworven door de welbekende theorie der Sequente Analyse, door hem in de V.S. — en onafhankelijk van hem in Engeland door G. A. B a r n a r d — ontworpen, alsmede door het voortreffelijke werk dat de Statistical Research Group der Columbia Universiteit te New York onder zijn leiding verrichtte. Aan de sequente analyse ligt een gedachtegang van aanzienlijk grotere draagwijdte ten grondslag, die hij aan-

*) Voordracht gehouden voor de Statistische Dag op 6 Maart 1952. Tevens bespreking van A. W a l d, Statistical Decision Functions, *Wiley and Sons, N.Y., Chapman and Hall, London 1950*, IX + 179 pag., $ 5,—.

vankelijk in een serie artikelen en later in zijn laatste boek "Statistical decision functions" [1]) heeft uiteengezet en die een consequente toepassing en voortzetting is, enerzijds van Jerzy Neyman's theorie van "inductive behaviour" en anderzijds van John von Neumann's speltheorie. Het is haar vèrstrekkende betekenis, die mij genoopt heeft te trachten een globaal overzicht te geven, ook voor niet-wiskundigen grotendeels verstaanbaar, van althans de grondbeginselen dezer niet volkomen elementaire theorie.

Kenmerkend voor de hedendaagse statistische methoden is, dat zij uitmonden in uitspraken, die weliswaar niet alle juist behoeven te zijn, maar waarvan de kans, dat zij achteraf onjuist zullen blijken, gelimiteerd is. Het is gebruikelijk, hoewel geenszins noodzakelijk, de maximaal toegelaten kans α op onjuiste einduitspraken op 5% vast te stellen, d.w.z. men laat toe dat gemiddeld 1 op 20 dezer uitspraken fout mag zijn. De maximale verhoudingsfactor, in casu 1/20 (of 5%) wordt de *onbetrouwbaarheidsdrempel* genoemd (Engels: level of significance). We zeggen in zulk een geval dat de uitspraak salva probabilitate 0.05 (d.w.z. *behoudens een waarschijnlijkheid* 0.05; afgekort spr 0.05)[2]) geldig is.

Het directe doel van een statistisch onderzoek is doorgaans tot een *voorspelling* te komen, die spr 0,05 geldt. Daartoe worden meestal tijdens het onderzoek ook een aantal uitspraken van andere aard gedaan en wel eveneens spr 0,05. Bijvoorbeeld kunnen dit zijn: hypothesetoetsingen, parameterschattingen, e.d. Het is, in het algemeen gesproken, niet juist, deze alle aan dezelfde onbetrouwbaarheidsdrempel 0,05 te onderwerpen. De juiste procedure bestaat daarin, dat men een betrouwbaarheidsgebied vaststelt, omvattende *alle* hypothesen die op grond van het gegeven waarnemingsmateriaal en de gebruikte toetsingsmethoden niet spr 0,05 verworpen kunnen worden en vervolgens de voorspelling baseert op *alle* aldus niet-verworpen hypothesen. Indien men, zoals wel gebeurt, een voorspelling baseert op een of meer willekeurig wegens hun eenvoudigheid gekozen „nulhypothesen", na geconstateerd te hebben (hetgeen zelfs niet altijd geschiedt) dat deze niet spr 0,05 verworpen kunnen worden, kan de onbetrouwbaarheid der voorspellingen willekeurig groot worden.

Om een voorbeeld te noemen: indien men van een grootheid x wéét, d.w.z. spr *nul* kan zeggen, dat zij normaal verdeeld is met bekende verwachting μ en spreiding σ, dan kan men spr 0,05 voorspellen, dat zij hoogstens 1,96 σ

[1]) Abraham Wald, Statistical decision functions, New York, J. Wiley & Sons, 1950.

[2]) Afkortingen: wh(n) = waarschijnlijkheid(-heden); whr = waarschijnlijkheidsrekening; spr α = behoudens een wh α.

van haar verwachting μ zal afwijken. Indien slechts de normaliteit en de waarde der spreiding spr α bekend is, terwijl de waarde van de verwachting uit een aannemelijkste (Engels: maximum likelihood) schatting uit voorafgaande waarnemingen verkregen is, zal men dienovereenkomstig het voorspellingsinterval moeten vergroten, d.w.z. de voorspelling voorzichtiger moeten maken, wil men de toegelaten onbetrouwbaarheidsdrempel niet overschrijden. Indien daarentegen de normaliteit niet spr o bekend is, maar b.v. met behulp van een toets voor normaliteit vastgesteld, d.w.z. niet spr 0,05 verworpen is, kan — zelfs als μ en σ ondubbelzinnig vaststaan — de onbetrouwbaarheid van de voorspelling $| x - \mu | \leqq 1{,}96\,\sigma$ niet slechts tot de som 0,10 der beide onbetrouwbaarheidsdrempels maar ook nog daarboven stijgen. Het is immers zeer wel mogelijk, dat de verdeling in werkelijkheid in het geheel niet normaal is, maar een andere bij de gebruikte toets niet-verworpene.

Een bezwaar, dat men tegen deze vorm der statistische theorieën kan inbrengen houdt in, dat op deze wijze weliswaar het *aantal* foutieve uitspraken begrensd wordt, maar dat met de *ernst* der gemaakte fouten geen rekening gehouden wordt. Indien, in ons voorbeeld, voorspeld is, dat de afwijking $y = | x - \mu | / \sigma$ van de waar te nemen grootheid van haar verwachting, gemeten met de spreiding als eenheid, hoogstens 1,96 zal zijn, dan is deze voorspelling fout als $y = 2{,}00$ blijkt te zijn, maar ook als zij $= 3{,}00$ is. Klaarblijkelijk is in het laatstgenoemde geval de fout zeer veel ernstiger dan in het eerste.

Hieraan nu in de eerste plaats komt Wald's theorie tegemoet, door de te maken fouten niet slechts te *tellen*, maar deze, naar hun ernst te *wegen*. Dit kan zeer eenvoudig geschieden, indien de ernst dezer fouten van economische aard is, dus een in geld waardeerbare *schade* veroorzaakt. Hoewel er ook wel andere gevallen zijn, waarin de „schade" ondubbelzinnig vastgesteld kan worden, houdt dit wel een sterke beperking van de toepasbaarheid van Wald's theorie in. Immers zodra men buiten het terrein der economische waarden treedt, is de vaststelling der „gewichten" waarmede de fouten gewogen worden bijna steeds met een aanzienlijke mate van willekeur verbonden. Wij zullen daarvan echter voor het ogenblik afzien en ons tot „schaden" beperken, die in geld gewaardeerd kunnen worden.

Deze gedachtegang kan algemeen gemaakt worden, los van het doen van voorspellingen. In zekere zin leidt zij dan tot een algemene theorie voor doelbewust en rationeel menselijk handelen.

We hebben hier twee woorden gebruikt; „doelbewust" en „rationeel", waarvan een zorgvuldige betekenisanalyse een uitgebreide studie zou vereisen. Een studie overigens, waartoe twee andere recente toepassingen der whr, t.w. de informatietheorie en de daarmede samenhangende uitbreiding van het entropiebegrip een belangrijke bijdrage kunnen leveren, maar waarop we heden niet willen ingaan. Voor het ogenblik willen wij er enerzijds mede volstaan op te merken, dat een doelbewuste handeling ondersteld wordt tot een bepaald doel, een bepaalde gebeurtenis of situatie dus, te leiden. Kenmerkend voor het begrip „doel" is het, dat de verschillende situaties waarin de handeling mogelijk kan resulteren verschillend *gewaardeerd* worden en wel des te lager naarmate zij verder van het als optimaal gestelde doel afwijken. Evenals te voren zullen wij verder onderstellen, dat dit verschil in waardering quantitatief kan worden vastgesteld met behulp van een waarde-eenheid, die wij gemakshalve „geldeenheid" zullen noemen. Het waardeverlies, optredende indien het gestelde optimale doel niet of niet volledig bereikt wordt, zullen wij „schade" noemen.

Men kan, in het algemeen gesproken, nooit met zekerheid voorspellen of een bepaalde handeling al dan niet tot het gestelde doel zal voeren. Dit hangt nog af van een aantal doorgaans niet volledig bekende omstandigheden. We zullen nu, anderzijds, het begrip „rationeel" daardoor karakteriseren, dat getracht wordt, een inzicht te krijgen in deze „omstandigheden" met behulp van aan de handeling voorafgaande waarnemingen, al dan niet opzettelijk met dit oogmerk verricht. Op grond van deze waarnemingen zal men dan een vermoeden opstellen omtrent de werkelijk bestaande aard dezer „omstandigheden" en die handelwijze kiezen, die, als dit vermoeden juist is, een zo groot mogelijke kans op succes biedt, zij het met inachtneming van de grootte der mogelijke schade.

Wij hebben dus met het volgende complex te maken.

1e. Het waarnemingsmateriaal;
3e. De beslissing die genomen wordt;
3e. De werkelijk bestaande omstandigheden;
4e. Het uiteindelijk verkregen resultaat.

Van belang is daarbij, dat de beslissing uitsluitend op grond van het waarnemingsmateriaal genomen kan worden, maar dat de werkelijk aanwezige omstandigheden geheel of gedeeltelijk onbekend, althans onzeker, zijn en blijven, en daarmede dus ook de resulterende situatie.

Hierop nu wordt de theorie der strategische spelen toegepast, die reeds in 1928 door J o h a n n (thans John, aanvankelijk Janoš) v o n N e u m a n n is opgesteld. Deze is niet slechts een der fraaiste en diepzinnigste maar tevens een der vruchtbaarste hedendaagse toepassingen der whr. In 1946 heeft v o n N e u m a n n, zoals bekend is, tezamen met de Weens-Amerikaanse ekonoom O s k a r M o r g e n s t e r n zijn ideeën uitgewerkt in de "Theory of games and economic behaviour".

Terwijl de klassieke whr zich slechts met toevalsspelen bezig hield en vóór

1928 slechts incidenteel door enkele auteurs gecombineerde toevals- en intellectspelen bestudeerd werden, heeft von Neumann juist deze tot object van studie gemaakt. Hoewel men daarbij aan spelen als bridge, poker en schaken kan denken, moet wel gezegd worden, dat het werkelijk doorrekenen van dergelijke spelen de wiskundige mogelijkheden verre te buiten gaat. Men zou dan ook kunnen menen, dat de theorie daarmede tot onvruchtbaarheid is gedoemd. Als men zelfs voor een betrekkelijk eenvoudig spel als bridge de berekeningen niet werkelijk kan uitvoeren, hoeveel te minder is dat dan het geval voor de uiterst gecompliceerde situaties, waarvoor ons het reële economische handelen stelt! Inderdaad. Maar wel geen ènkele wiskundige is in staat exact te berekenen beneden welke snelheid precies hij bij het omroeren van de thee in een kopje moet blijven teneinde te vermijden, dat hij zal morsen. Is daarom de hydrodynamica van onwaarde? Het belang van deze en dergelijke wiskundige theorieën is gelegen in de mogelijkheid, vereenvoudigde wiskundige modellen te bestuderen, die elk voor zich bepaalde groepen van waarneembare verschijnselen, zij het globaal, weergeven en daardoor te leren overzien, van welke aard der wijzigingen zouden moeten zijn, die tot een nauwkeuriger aanpassing aan de ervaring of tot een unificatie van verschillende aspecten zouden kunnen leiden.

Von Neumann beschouwt een spel tussen een bepaald aantal (zegge n) spelers, dat aan preciese spelregels gebonden is. Het spel bestaat uit een aantal „zetten", waarbij telkens één der spelers vrijelijk een keuze kan doen uit een aantal toegelaten mogelijkheden, en „trekkingen", waarbij met behulp van een toevalsmechanisme een *aselecte keuze* (Engels: random choice) gedaan wordt uit een bepaald aantal mogelijkheden met bepaalde voorgeschreven whn. Al deze aantallen worden eindig ondersteld.

Voorts is in de spelregels vastgelegd, welke bedragen de spelers op verschillende ogenblikken aan elkaar te betalen hebben. Elke speler wordt geacht er naar te streven, een zo groot mogelijke winst te behalen.

Een dergelijk gecompliceerd spel kan nu op de volgende wijze tot een eenvoudiger schema teruggebracht worden. Vooreerst kunnen alle betalingen tot het einde van het spel uitgesteld worden. Voorts kunnen de vele beslissingen die elk der spelers te nemen heeft door één enkele vervangen worden. Daartoe dient hij vooraf de theorie van het spel te bestuderen, alle mogelijke reeksen van situaties na te gaan, die mogelijkerwijze kunnen ontstaan en voor elk dezer gevallen zijn gedragslijn te kiezen. Met andere woorden: hij kiest eens voor al een *strategie*, een speelplan, dat hem in alle denkbare gevallen uitsluitsel geeft. (Natuurlijk gaat hier reeds de practische bruikbaarheid min of meer verloren. In werkelijkheid zal men vooraf slechts een beperkt aantal der belangrijkste mogelijkheden trachten te overzien en daarvoor zijn gedragslijn vaststellen.) Wezenlijk is, dat de strategie gekozen wordt *zonder* dat men de zetten der andere spelers en de uitkomsten der trekkingen kent. Zij bepaalt juist (en wel voor alle mogelijke situaties): *als* de spelers successievelijk die en die zetten gedaan hebben en *als* die en die trekkingsresultaten zijn verkregen, *dan* zal ik zus en zo handelen. Dit is wat tegenwoordig in het anglicistisch "planning" wordt genoemd — of genoemd zou moeten worden, als dit begrip voldoende geanalyseerd werd.

Er is dus nog slechts één betaling (aan het eind) en één vrije keuze (aan het begin) overgebleven. Blijven de trekkingen. Deze kunnen nu gevoegelijk tot één enkele trekking verenigd worden. Maar zij kan ook geheel achterwege worden gelaten. Daar immers de wh-verdeling bekend is, kan men, zodra elk der spelers zijn speelplan gekozen heeft, de winst*verwachtingen* berekenen en deze als winsten uitbetalen, aldus behoudens een te verwaarlozen kans hetzelfde resultaat verkrijgend als gemiddeld met een eindeloos herhaald spelen van het spel verkregen zou worden. Aldus is het toevalselement volledig geëlimineerd.

De situatie is nu dus de volgende. Elk der spelers kan vrijelijk een keuze doen uit een bepaald aantal voor hem geoorloofde speelplannen en wel zonder te weten welke keuzen zijn speelgenoten doen. Bij elke toegelaten combinatie van speelplannen behoort voor elk der spelers een bepaalde winst. (Als de spelers alleen elkaar betalen is de som dezer „winsten", waaronder ook negatieve, d.i. verliezen, voorkomen, nul. Men heeft dan een "zero-sum n-persons game"). Tot dit uiterst eenvoudige schema is nu (afgezien van het werkelijk doen!) het aanvankelijk zo algemene spel herleid.

Het toevalselement is geëlimineerd. Het intellectuele element is echter door de bestudering der theorie en de berekening van alle mogelijke speelplannen nog niet uitgeput. Beschouwen wij om dit in te zien een eenvoudig geval.

Stel dat er twee spelers A en B zijn, dat A de keuze heeft tussen drie speelplannen a_1, a_2 en a_3 en B tussen twee; b_1, b_2. Laat de winst voor A (= verlies voor B) voor elke speelplancombinatie de in tabel 1 aangegeven waarde hebben.

		A		
		a_1	a_2	a_3
B	b_1	—2	—1	+3
	b_2	+2	+1	—3

TABEL 1

Welke keuze zal A doen? Stel, dat B b_1 kiest, dan is a_3 voor A de gunstigste, daar hij dan 3 wint, en a_1 de ongunstigste, daar hij dan 2 verliest. Kiest B echter b_2, dan is juist a_3 de ongunstigste en a_1 de gunstigste. Wil hij dus voorzichtig spelen, dan zal hij bij elke mogelijke keuze met het ongunstigste geval rekening houden, d.i. met het maximale verlies. In de drie gevallen a_1, a_2, a_3 is dit respectievelijk —2, —1, —3. Kiest hij nu van deze drie minima het maximum, dus a_2, dan kan hij in geen geval meer dan 1 verliezen. Een dergelijke keuze wordt een *minimax strategie* genoemd. Evenzo kan B bij keuze van b_1 hoogstens 3, bij keuze van b_2 hoogstens 2 verliezen. Zijn minimax-keuze is dus b_2. Kiezen beide spelers dus de minimax strategie, dan verliest B. Hoe kan B zijn kansen verbeteren? Vooreerst kan hij proberen te *raden* welke keuze A zal doen. Als hij A's speelgewoonten goed kent, of A's psychologie weet te doorgronden kan hij, als hij goed raadt, in ieder geval tot winst komen. Anderzijds echter riskeert hij, als A de beste psycholoog is, dat deze hèm zal doorgronden en dat hij dan zeker zal verliezen. Hij kan er zich echter tegen hoeden, dat A zijn psychologie zal doorgronden. Namelijk door er voor te zorgen, dat hij zèlf niet weet, welk speelplan hij zal kiezen. In plaats van een keuze te doen tussen b_1 en b_2 gaat hij er om loten welk speelplan hij zal kiezen, waarbij hij nog de beide whn vrijelijk kan kiezen. Neemt hij beide whn $= \frac{1}{2}$, dan is zijn winstverwachting, die eerst in het ongunstigste geval —2 kon worden, plotseling voor alle gevallen tot 0 gestegen. Ook A kan aldus handelen, door met gelijke whn 1/3 een speelplan te trekken en aldus zijn minimax, dat eerst —1 bedroeg, eveneens tot 0 doen stijgen. In zijn artikel van 1928 heeft von Neumann bewezen, dat op deze wijze, t.w. doordat elke speler de *vrije* ("selecte") keuze van een speelplan vervangt door een *aselecte* ("gelote") keuze, echter met vrije keuze der whn, bij het "zero-sum 2-persons game" altijd bereikt kan worden dat de minimaxen der beide spelers op het teken na overeenstemmen indien het totale aantal mogelijkheden eindig is. Wald heeft dit resultaat uitgebreid tot een belangrijke klasse van gevallen, waarin ook oneindig vele mogelijkheden bestaan, met name als de optredende verdelingen continu zijn.

Wellicht het merkwaardigste bij dit 2-personenspel is wel het feit dat, hoewel we aanvankelijk het toevalselement volledig geëlimineerd hadden door het spelen van het spel eenvoudig achterwege te laten, we dit achteraf toch weer kunstmatig moeten invoeren (zèlfs in die gevallen waarin het aanvankelijk geheel ontbrak!), zodra er gevaar bestaat dat de tegenstander de beste psycholoog is en onze plannen kan raden.

Deze gedachtegang is het, die Wald bij zijn decisiefuncties toegepast heeft. Hij beschouwt daarbij de statisticus als één der spelers, b.v. B, in een twee-personenspel tegen een denkbeeldige tegenstander, zeggen wij „de natuur".

Wij blijven in overdrachtelijke zin de terminologie van het twee-personen-spel toepassen.

We kunnen dan zeggen, dat speler A, „de natuur" één „zet" doet, door de „omstandigheden" te bepalen, t.w. een of meer parameters, die de wh-verdeling van de waar te nemen grootheden bepalen. We zullen deze parameters gezamenlijk voorstellen door de letter θ. Deze verdeling is zijn „tegenstander", den statisticus B, natuurlijk onbekend. Deze doet nu een „zet" door te beslissen dat hij een bepaald aantal waarnemingen zal doen. Daarvoor moet hij een bepaald bedrag betalen, afhankelijk van het aantal waarnemingen, t.w. de waarnemingskosten. Op grond van deze waarnemingen kan hij òf wel een uiteindelijke decisie treffen òf wel zijn waarnemingsreeks voortzetten. In het eerste geval is het „spel" afgelopen; de „kaarten worden opengelegd", d.w.z. er wordt onderzocht in hoeverre de getroffen decisie op grond van de werkelijke omstandigheden het gewenste resultaat geeft en daarmede hoe groot de „schade" is, dus het verlies van B, doordat het gewenste doel niet geheel bereikt is. In het tweede geval geschiedt hetzelfde in een latere fase.

De toepassing van von Neumann's theorie leidt er nu toe, dat de statisticus vooraf een „speelplan", een „strategie" opstelt in de vorm van een zogenaamde decisiefunctie δ. Nemen wij eenvoudigheidshalve aan, dat slechts één waarnemingsreeks verricht wordt en dat de waarnemingsuitkomsten in het symbool x worden samengevat, dan betekent dit, dat hij vooraf nagaat, welke waarden x mogelijkerwijze kan hebben en voor elk dezer mogelijkheden vooraf zijn gedragslijn vaststelt. Hij bepaalt dus bij iedere mogelijke x, welke zijn decisie d zijn zal, d.w.z. hij bepaalt d als een functie van x, de „decisiefunctie" $\delta(x)$. Dit kan dus geschieden, vóórdat de waarnemingen gedaan worden. Zijn deze vervolgens gedaan, dan kan hij de uitkomsten daarvan eenvoudig in zijn decisiefunctie substitueren en op grond daarvan zijn beslissing bekend maken.

De vraag is nu, welke decisiefunctie hij zal kiezen. Daartoe kan hij, ook weer vooraf, de schadeverwachting berekenen die bij elke decisiefunctie δ en bij elke denkbare „zet" van zijn tegenspeler, dus bij alle waardenstelsels θ zal optreden, waarbij de kosten van het experiment mede in aanmerking worden genomen. Deze schadeverwachting wordt het „risico" genoemd en met de letter r aangeduid. Zij is dus een functie, 1e. van de „omstandigheden" θ, 2e. van de decisiefunctie δ: $r = r(\theta, \delta)$.

Als hij nu wist welke „zet" de natuur gedaan had, d.w.z. welke waarden hij voor θ moest invullen, zou hij eenvoudig δ zodanig kunnen kiezen, dat r bij die keuze minimaal werd en dat zou klaarblijkelijk de doeltreffendste handelwijze zijn. Nu hij de waarde van θ niet kent, kan hij (wederom vooraf) aannemen, dat de natuur hem „tegenzit". D.w.z. bij elke decisie zal hij met de ongunstigst denkbare omstandigheden rekening houden. Bij elke decisie δ bepaalt hij dus het maximale risico dat hij kan lopen als de omstandigheden zo ongunstig mogelijk zijn. En hij kiest dan zijn δ zodanig, dat dit risico*maximum* zo klein mogelijk is. Hij kiest dus δ zo dat

$$\max_{\theta} r(\theta, \delta)$$

minimaal is en hij verwacht dan dat de schade

$$\min_{\delta} \max_{\theta} r(\theta, \delta)$$

zal bedragen. Dit is dus de toepassing van de minimax methode op het onderhavige geval.

In vele gevallen zal het redelijk zijn, te onderstellen (en in de meeste gevallen vereenvoudigt dit de wiskundige bewerking), dat de natuur de „omstandigheden" θ niet ondubbelzinnig heeft vastgelegd, d.w.z. dat de waarnemingen onder min of meer wisselende omstandigheden gedaan worden. Dat houdt dus in, dat de natuur niet een ondubbelzinnig bepaalde, „selecte" strategie θ gekozen heeft, maar een verdeling ξ over allerlei mogelijke waarden van θ, precies als een speler die zich ertegen wil houden, „doorzien" te worden. Hoewel W a l d aan de onderstelling van het bestaan van bepaalde „a priori whn" ξ de naam van B a y e s verbindt, maakt hij natuurlijk niet de fout van L a p l a c e en verschillende latere probabilisten, te vergeten dat alle mogelijke verdelingen ξ kunnen voorkomen en willekeurig een enkele daarvan als „de ware" te aanvaarden.

In vele gevallen zal de statisticus deze situatie zelfs kunstmatig teweeg brengen door op de gegevens een bepaalde aselectering (Engels: randomization) toe te passen. In de practijk geschiedt dit meestal door gebruik te maken van „aselecte getallenrijen" (Engels: random numbers). Dit zal de speler B nopen, ook zijnerzijds een aselecte strategie te kiezen, d.w.z. zijn decisiefunctie door loting te bepalen uit alle mogelijke decisiefuncties, waarbij hij de verdelingsfunctie η daarvan nog willekeurig kan vaststellen. Zodra de twee verdelingsfuncties ξ (door „de natuur", eventueel met hulp van de statisticus) en η (door de statisticus) gekozen zijn, heeft het risico $r(\theta, \delta)$ een bepaalde verwachting R, die thans een functie $R(\xi, \eta)$ van de beide verdelingen ξ en η is. De minimaxmethode wordt thans toegepast door

$$\min_{\eta} \max_{\xi} R(\xi, \eta)$$

te bepalen, dus door wederom de maximale risicoverwachting te minimaliseren, die onder de ongunstigste „gemengde" (d.w.z. wisselende) omstandigheden kan optreden.

Overzien wij thans de mérites van deze methode, dan blijkt zij een veel grotere soepelheid te bezitten dan de toetsingstheorie alleen. In het bijzonder staat zij toe, niet slechts toetsingsproblemen maar ook voorspellingen en schattingen, zowel in de zin van „puntschattingen" door preciese waarden, als ook „intervalschattingen" door betrouwbaarheidsintervallen, onder één gezichtspunt samen te vatten.

Daarentegen evenwel zijn er twee beperkingen aan de theorie inhaerent. De eerste daarvan is, dat (evenals reeds in von Neumann's theorie) systematisch de winsten en schaden door hun *verwachtingen* vervangen worden.

Dit houdt in dat de theorie alleen toepasbaar is wanneer niet slechts het totale aantal van alle mogelijke decisies, maar reeds het aantal decisies behorende bij een bepaald probleem zeer groot is.

In de tweede plaats is het toepassingsgebied der theorie beperkt. Het is namelijk onmogelijk, haar zonder grote willekeur buiten het gebied van de ekonomische problemen toe te passen. Bij medische en biologische problemen, bijvoorbeeld, is het nauwelijks mogelijk van de verschillende soorten van „schaden", b.v. verpleegkosten voor voortzetting van een onderzoek, opoffering van proefdieren, pijn van patiënten, en verlies aan mensenlevens, een gemeenschappelijke „kosteneenheid" aan te geven. Zodra men dus buiten het strikt ekonomische terrein treedt, is met de keuze der schadefuncties een grote mate van willekeur verbonden. Zelfs binnen het ekonomische terrein is dit veelal het geval, daar het een fabrikant vaak zeer moeilijk zal vallen, zijn verlies aan "goodwill" voortkomende uit het feit, dat hij onvolwaardige producten op de markt brengt, door een preciese monetaire schadefunctie uit te drukken.

Hoewel men mag hopen, dat het gelukken zal, de theorie uit te breiden tot het geval, waarin verschillende typen van schaden uitgedrukt in verschillende soorten van eenheden in aanmerking moeten worden genomen, houdt dit vooralsnog wel in, dat de theorie vooral in wiskundig opzicht ongemeen interessant is, maar wat haar toepasbaarheid betreft toch vrijwel tot het zeer speciale gebied der ekonomie beperkt blijft.

Al treed ik daarmede enigszins buiten mijn onderwerp, toch wil ik nog iets nader ingaan op de theorie van von Neumann zelf, speciaal met betrekking tot haar uitwerking in het boek met Morgenstern.

We hebben gezien, dat bij de overgang van het zuivere toevalsspel tot het strategische strijdspel reeds bij het twee-personen-spel een wezenlijk nieuw element optrad, t.w. het kiezen van een strategie en de mogelijkheid dat deze door de tegenstander doorgrond zal worden, waartegen men zich min of meer hoeden kan, door deze niet select maar aselect (dus door loting) te kiezen.

Zodra wij tot het drie-personen-spel overgaan treedt er wederom een principiëel nieuw element op. Dit bestaat daarin, dat twee van de drie spelers een coalitie kunnen sluiten tegen de derde. Het eenvoudigste voorbeeld is het volgende: elk van de drie spelers schrijft de naam op van één der beide anderen. Als twee spelers elkaars namen hebben opgeschreven, moet de derde aan elk hunner een munteenheid betalen. Treedt dit niet op, dan betaalt niemand iets. Klaarblijkelijk kunnen twee spelers door vooraf af te spreken, op elkaar te stemmen, de derde uitplunderen.

Ook bij vier en meer spelers is deze mogelijkheid van coalitievorming een der belangrijkste verschijnselen. In het algemeen zal het zo zijn, dat een groep van spelers eerst een coalitie aangaat en dan tracht deze uit te breiden door aan een of meer der overige spelers een bepaald aanbod te doen. Hoewel het slechts in zeer speciale gevallen gelukt is de theorie volledig op te bouwen, krijgt men, juist door de exacte wiskundige doorrekening, wel een belangrijk verdiept inzicht in een aantal maatschappelijke verschijnselen, zoals monopolie- en kartelvorming in de ekonomie, organisatie van andere belangengroepen als vakverenigingen en consumentengroeperingen, maar ook in andere sociale en met name politieke verschijnselen. Als zodanig zijn in het bijzonder de vorming van partijen en andere maatschappelijke groepen van belang. Men denke daarbij ook aan het volgen van leiders en dictatoren, het Amerikaanse "boss"- en "machine"-systeem, e.d., systemen dus, waarbij een groot aantal „medespelenden" hun vrijheid van handelen min of meer vrijwillig prijsgeven en de consignes van een kleine groep van leiders volgen, door volgens hun aanwijzingen te handelen. Vandaar dat een grondige kennis van de theorie van von Neumann en Morgenstern van het grootste belang is voor het instandhouden der democratische instellingen. Immers een dergelijke theorie kan het mogelijk maken de „spelregels", in casu de nationale en internationale wetgeving, zodanig vast te stellen dat de genoemde ongewenste verschijnselen zich niet kunnen voordoen.