S P 19

# UTILITÉ D'UNE DISTRIBUTION DE PROBABILITÉS OU DISTRIBUTION DES PROBABILITÉS DES UTILITÉS

Communication de (1)

D. Van DANTZIG

Professeur à l'Université d'Amsterdam

1. En utilisant la distinction clarifiante, introduite par M. H. WOLD, entre les « probabilités vraies » (analogues avec les distances vraies), les « probabilités mesurées » et les « probabilités estimées » par un individu, les travaux de M. B. DE FINETTI, et les discussions de ce colloque, ont montré l'importance d'étudier, à côté des probabilités mesurées, (il ne sera pas nécessaire pour le moment de considérer les « probabilités vraies » ), aussi leurs estimations personnelles.

Le but principal de ma communication est de tâcher de montrer qu'il y a une relation analogue par rapport au concept d'utilité, qu'ici également il est nécessaire de considérer les préférences des individus comme des estimations personnelles d'autres quantités, que nous pouvons appeler les « utilités vraies » ou « *à posteriori* » des biens. Tout en admettant que l'étude de ces estimations individuelles, donc une *étude objective des préférences subjectives*, est une tâche très importante de l'économie, nous ne considérons pas cela comme le seul but de cette science. Il s'agit de la question de savoir si l'économiste, et en particulier l'économètre, ne veut et ne peut être qu'un

---

(1) Le texte de cette conférence a été écrit *post-factum*. J'ai utilisé l'occasion pour éclaircir quelques points sans en changer les principes. Dans le discours oral, j'avais également ajouté quelques remarques — très préliminaires — sur la possibilité de donner une définition objective de l'utilité au moyen des notions thermodynamiques d'entropie et d'énergie libre. Or, la nécessité de livrer ce texte dans un court délai, m'empêche maintenant de reproduire cette partie de ma communication. J'espère pouvoir y revenir bientôt.

observateur — comme l'astronome, l'historien, l'archéologue — ou s'il veut aussi *appliquer* sa science en agissant comme conseiller, pour l'industrie ou même pour l'Etat. C'est notre thèse que, dans le dernier cas, il lui faut un concept objectif d'utilité comme repère pour juger des « utilités subjectives », à savoir les préférences personnelles, considérées comme estimations de l'utilité objective.

Qu'il me soit permis de reprendre une comparaison que j'ai utilisée auparavant, dans une discussion analogue sur le concept subjectif de probabilité avec M. DE FINETTI, qui est parue dans le journal italien « *Statistica* » de 1941.

Comparons les estimations personnelles des utilités avec les sensations de chaleur des individus, disons, se trouvant dans une chambre. Aussi longtemps qu'il n'y a pas de thermomètre dans la chambre, leur comportement (p. e. en ouvrant ou fermant les fenêtres) dépendra de ces sensations individuelles, et parfois contradictions de la chaleur. Et le médecin serait peu sage, qui se refuserait à tenir compte des frissons de son patient. Mais que dire du médecin qui ne voudrait reconnaître que ses sensations individuelles comme la seule donnée digne de confiance sur le degré de chaleur lui-même ? Il n'utiliserait pas le thermomètre pour mesurer la fièvre de ses patients, mais il utiliserait leurs frissons — non plus pour mesurer leur fièvre, — mais pour jauger son thermomètre.

Selon la définition de VON NEUMANN-MORGENSTERN, modifiée e. a. par MM. MARSCHAK, SAVAGE, SAMUELSON, la notion d'utilité est définie au moyen de celle de probabilité. On considère l'ensemble E de tous les biens économiques x qu'on pourrait acquérir. Pour raisons de simplicité E pourra être supposé fini. D'ailleurs, on considère une distribution $\mu$ de probabilité définie sur E, $\mu$ (x) étant la probabilité d'acquérir le bien arbitraire x de E. On peut représenter $\mu$ par un vecteur dans un espace euclidien dont le nombre de dimensions est égal au nombre des biens x, $\mu$ (x) étant les composants de ce vecteur. Enfin, soit $\Delta$ l'ensemble de *toutes* ces distributions. Dès qu'on a réussi à établir un ordre complet (l'ordre de « préférence » ), dans l'ensemble $\Delta$ de toutes ces distributions de probabilités, satisfaisant à quelques conditions simples, cet ordre définit (à une transformation linéaire près) une fonction réelle U sur l'ensemble $\Delta$, telle que la valeur U ($\mu$) qu'elle prend pour une distribution arbitraire $\mu \in \Delta$ est égale à l'espérance mathématique par rapport à cette distribution $\mu$ d'une autre fonction u (x), définie sur l'ensemble E de tous les biens non-composés :

$$U(\mu) = \int u(x)\, d\mu(x) \tag{1}$$

A présent, l'on préfère considérer la fonction U ($\mu$), dite « l'utilité » de la distribution $\mu$ de probabilité plutôt que la fonction u (x), dite l'utilité du bien x. Les fonctions U et u ne dépendent pas seulement de leurs arguments $\mu$ et x respectivement, mais aussi du système, disons $\Omega$, des relations d'ordre de préférence que l'on a établi sur l'ensemble des distributions :

$$U(\mu) = U(\mu, \Omega),$$
$$u(x) = u(x, \Omega)$$

où $\mathcal{R}$ parcourt l'ensemble de tous les ordres qui sont possibles dans l'ensemble $\Delta$ des $\mu$. En effet, $\mathcal{R}$ et U (la dernière toujours à une transformation linéaire près) se déterminent bi-univoquement, puisque les relations d'ordre de préférence entre $\mu_1$ et $\mu_2$ (par rapport à $\mathcal{R}$) sont isomorphes avec celles de grandeur entre les nombres $U(\mu_1, \mathcal{R})$ et $U(\mu_2, \mathcal{R})$ (par rapport à l'ordre ordinaire des nombres réels) ; tandis que le théorème de VON NEUMANN-MORGENSTERN établit la relation inverse. D'autre part, les fonctions U et u se déterminent mutuellement. Car, $x_0$ étant un bien arbitraire et $\mu_0$ la distribution correspondant avec la certitude d'obtenir $x_0$ et aucun autre bien,

$$U(\mu_0, \mathcal{R}) = u(x_0, \mathcal{R})$$

c'est-à-dire $u(x, \mathcal{R})$ est déterminé par $U(\mu, \mathcal{R})$, tandis que (1) établit la relation inverse. C'est l'artifice si ingénieux que VON NEUMANN avait déjà introduit dans la théorie des jeux, de remplacer les relations entre les fonctions *arbitraires* u (x) par les relations correspondantes entre les fonctions *linéaires* U ($\mu$), qui permet de déterminer les fonctions numériques U et u au moyen des relations d'ordre $\mathcal{R}$ seulement.

2. Lorsque l'on veut appliquer cette théorie mathématique magnifique aux phénomènes observables, on peut donc choisir à volonté les U, les u ou les $\mathcal{R}$ pour effectuer ce que j'ai appelé « l'embrayage » (« *switching on* ») de cette théorie ; c'est-à-dire le passage des phénomènes observables à un modèle mathématique déterminé, à savoir à un système *déterminé* de U, de u ou de $\mathcal{R}$. En prenant le point de vue subjectif », assez favori aujourd'hui, c'est-à-dire en se basant sur les estimations des probabilités et le système de préférences d'un individu déterminé $\mathfrak{J}$, on remarquera que l'élément aléatoire dans la théorie n'est pas complètement épuisé par les probabilités $\mu$ (x) d'acquérir les biens x ; mais qu'il intervient encore dans l'évaluation de cette acquisition elle-même. En effet, même si les probabilités que l'on attribue à la possibilité d'acquérir x ne changent pas, son évaluation peut très bien changer et elle dépendra en général du temps. En effet, lorsqu'à un moment t, on ordonne les distributions $\mu$ (x), on ne peut pas considérer l'utilité qu'un bien x *aura*, lorsqu'on l'aura acquis, mais seulement celle que l'on *suppose* qu'il aura et celle-ci peut être très différente de celle-là. Les quantités u (x) qui figurent dans la théorie sont donc elles-mêmes les estimations, que l'individu $\mathfrak{J}$ fait, au moment t, d'autres quantités v (x), que l'on peut appeler les « utilités vraies » (ou, du moins, à postériori) et qui représentent les valeurs que l'on attribuera aux x à un moment plus tard $t_1 >$ t, où on les aura acquis (pourvu que tel soit le cas). Outre l'incertitude de l'acquisition d'un x, il y a donc aussi une incertitude du degré de satisfaction que l'on éprouvera d'une acquisition éventuelle. Celle-ci est parfois même beaucoup plus importante que celle-là ; par exemple dans le cas où l'on achète (donc obtient avec certitude) un objet, à cause d'une habile réclame qui en a été faite, et qu'après l'achat l'on se trouve déçu.

Supposons que, peut-être influencé par les affiches dans le métro de « *La vache qui rit* », je commence à rêver d'une vie champêtre, et que j'achète un billet dans une loterie agricole. Supposons que je gagne la vache, qu'est-ce que j'en ferai ? Nous connaissons l'eau forte de DAUMIER, où l'on se demande lequel des deux est le plus stupéfait : le cheval voyant le bonhomme dans son bonnet de nuit, ou celui-ci, éveillé par le bruit sur l'escalier et voyant entrer le cheval dans sa mansarde. Mais qu'aurait-il dit si c'eut été une vache au lieu d'un cheval ?

En tout cas, il est évident qu'on peut très bien s'imaginer un instant éprouver une grande satisfaction de l'acquisition d'un bien économique, en trouver ensuite l'utilité moindre et même qu'il vaille de faire des efforts pour s'en débarrasser.

Du point de vue de la théorie subjective, on devrait donc considérer l'utilité « vraie » ou à posteriori, comme une fonction *aléatoire*, et attribuer des probabilités aux différentes valeurs v (x) qu'elle pourra avoir. Alors u (x) devient l'espérance mathématique des valeurs v (x) que cette fonction prend pour les biens x.

En dénotant les quantités aléatoires par des lettres en italique, la fonction (ou le vecteur) v étant une fonction arbitraire des biens, il y aura une probabilité déterminée qu'on ait $\underline{v}$ = v (c'est-à-dire $\underline{v}$ (x) = v (x) pour chaque (x). En appelant $\rho$ ou $\rho$ (v) la fonction de distribution correspondante, on aura :

(2) $$u(x) = \int v(x)\, d\rho(v)$$

A cause de la correspondance entre les $\underline{v}$ (x) et les $\underline{V}$ ($\mu$) :

(3) $$\underline{V}(\mu) = \int \underline{v}(x)\, d\mu(x)$$

on peut identifier $\rho$ (v) avec la fonction de distribution, disons $\rho$ (V), des $\underline{V}$ (toujours en laissant hors considération l'indétermination des $\underline{v}$ par rapport à une transformation linéaire). On aura donc à côté de (2) :

(4) $$U(\mu) = \int V(\mu)\, d\rho(V)$$

On peut même généraliser les suppositions en admettant que les distributions $\mu$ et $\rho$ ne soient pas indépendantes, mais nous n'insisterons pas sur ce point.

3. Revenons au problème de l'embrayage d'un modèle déterminé. Toujours du point de vue subjectiviste, c'est la question : *quelles* valeurs numériques U ($\mu$) l'individu $\mathfrak{J}$ attribuera-t-il, au moment t, aux diverses distributions $\mu$ ? Malgré sa grande importance, le théorème de Von Neumann-Morgenstern ne peut pas résoudre ce problème pour $\mathfrak{J}$. S'il était un mathématicien parfait,ce théorème ne lui fournirait aucune aide. Il dirait : pour déterminer les U ($\mu$), je dois connaître l'ordre $\Omega$ ; mais connaître $\Omega$ est la *même* chose que connaître les U ($\mu$). Il pourra même dire que la connaissance des U ($\mu$) et des u (x) n'a pour lui aucune valeur, puisque,pour lui, le véritable problème économique est la question : quelles seront les utilités vraies v (x), donc les valeurs *à posteriori* qu'il attribuera aux x. Tant que celles-ci (ou du moins *leur* distribution de probabilité $\rho$ (v)) lui restent inconnues, il ne peut pas déterminer $\Omega$.

Si un individu, une société ou une communauté, en général un sujet économique, demande le conseil d'un économètre, afin de se décider d'une manière très réfléchie à un choix parmi quelques actions possibles, il ne lui sert à rien, si l'économètre le demande, de bien ordonner d'abord ses préférences personnelles des perspectives éventuelles et de leurs probabilités. Sachant peut-être par l'expérience cruelle que ses estimations personnelles u (x) peuvent être grossièrement fausses, M. J demande une méthode, moins dépendante de ses espérances et illusions individuelles et momentanées et de ses connaissances très restreintes, excepté peut-être dans un domaine particulier. Il veut que l'économètre lui fournisse des estimations qui se vérifieront *à posteriori*, et telles qu'il puisse les faire contrôler par un autre économètre. Et cela doit l'induire de quitter le point de vue subjectiviste.

*Car, ce qu'il veut connaître, ce n'est pas l'utilité estimée U (μ) d'une distribution μ de probabilités μ (x), mais (sinon les v (x) eux-mêmes) du moins la distribution ρ des probabilités ρ (v) des utilités vraies v (x).*

4. Or, il est beaucoup plus naturel de ne pas considérer les utilités préliminaires estimées comme données et les utilités *à posteriori* comme aléatoires, mais de renverser cette relation. En effet, très souvent le système des préférences *à posteriori* sera beaucoup plus stable que leurs estimations, de sorte qu'il peut être considéré comme un système de paramètres non-aléatoires, mais inconnus. On peut prendre les v (x) ou aussi les V (μ), liés avec eux par

$$V(\mu) = \int v(x)\, d\, \mu(x) \tag{5}$$

A cause du théorème de VON NEUMANN-MORGENSTERN, il est inconséquent de considérer v ou V ou l'ordre de préférence des V (μ) comme l'inconnu.

D'autre part, on sait que l'ordre de préférence que l'on admet à un instant t avant l'acquisition des biens est souvent soumis à des fluctuations considérables, qui sont à peu près indépendantes des valeurs *à posteriori*, mais qui dépendent de circonstances tout à fait différentes : d'une remarque d'un ami qu'on a entendu, d'une réclame qu'on a vue, d'une émotion soudaine et passagère.

On remplacera donc les u (x) et U (μ) par des fonctions U (x, t) et U (μ, t) de t ; et l'on sait que, du moins pour quelques x et quelques μ constants, ces fonctions peuvent montrer des fluctuations considérables dans le temps. D'une manière très connue, on peut aussi éliminer le temps t, en attribuant aux fonctions un caractère aléatoire, c'est-à-dire en remplaçant u et U par *u* et *U*. En appelant σ (u) et σ (U) les fonctions de distribution correspondantes, on peut alors appliquer toute la théorie de l'estimation. Par exemple, lorsqu'on a

$$V(\mu) = \int U(\mu)\, d\, \sigma(U) \tag{6}$$

*U* sera une estimation sans erreur de V ; tandis que l'absence de cette égalité montre une erreur systématique dans l'estimation.

5. Il y a un autre effet de nature aléatoire que l'on ne peut négliger qu'en première approximation. Il regarde la relation entre les estimations u (x) et les actions. Lorsque U (x, t) est une fonction soumise à grandes fluctuations dans le temps, l'action réelle à laquelle elle aboutit est de la nature d'un choix au hasard d'un moment où une fonction f (t) du temps sera

observée. Si l'on ne définit pas les $U(x, t)$ par le *comportement* d'un individu $\mathfrak{J}$, mais par ses expressions *verbales*, ou même ses réflexions intérieures, il peut très bien exister une préférence $U(x_1, t) > U(x_2, t)$, tandis que les actions correspondent avec l'ordre inverse. Par exemple, on peut avoir grand besoin du bien $x_1$, mais craindre les difficultés budgétaires accompagnant son achat. Soudainement, peut-être à cause d'un événement aléatoire, le besoin de x peut devenir tellement urgent, qu'on le réalise par l'action.

Ce phénomène ne se manifeste pas seulement chez les individus, mais aussi parmi d'autres sujets économiques. Par exemple, une firme peut savoir qu'il est nécessaire de prendre une mesure coûteuse de sécurité, et néanmoins la négliger jusqu'à ce qu'un accident sérieux l'y oblige. De même, le gouvernement d'un État peut négliger de prendre des mesures contre l'érosion du sol jusqu'à ce qu'une inondation terrible l'y force, ou aussi d'investir une somme considérable à fonds perdu pour abolir la misère dans une partie de son territoire, jusqu'à ce qu'une révolte le force aux dépenses peut-être beaucoup plus élevées qu'il n'aurait été nécessaire plus tôt. D'ailleurs, ces mesures, enfin prises, peuvent être tout à fait sans efficacité. Par exemple, les actions d'abord correspondaient à la préférence $u(x_2, t) > u(x_1, t) > u(x_3, t)$ tandis qu'on estimait déjà (disons dans la presse) $u(x_1, t) > u(x_2, t) > u(x_3, t)$, relation se réalisant par l'action à un instant $t_1 > t$. Mais on peut éprouver plus tard que l'évaluation correcte aurait exigé $u(x_3, t) > u(x_1, t) > u(x_2, t)$, c'est-à-dire on trouve $v(x_3) > v(x_1) > v(x_2)$. Dans un tel cas, l'action n'est point du tout déterminée par des estimations cohérentes des utilités et de leurs probabilités, mais par des « perturbations aléatoires », c'est-à-dire par des événements, observations et impulsions qui n'ont rien à faire avec ces utilités.

Souvent, vraiment, nous ne prenons pas des décisions : ce sont les décisions qui nous prennent.

6.(1) Tandis que depuis Daniel Bernouilli on a douté de la proportionnalité de la valeur d'un billet de loterie avec la somme monétaire à gagner, lorsque celle-ci est grande, on accepte toujours que cette valeur soit proportionnelle avec la *probabilité* du gain. Mais l'hypothèse aussi de cette proportionnalité me semble contredire la réalité économique. Et ce fait-ci pourrait bien bouleverser quelques théories récentes.

Sans posséder des données statistiques précises, je crois néanmoins que l'expérience générale et non analysée admet bien de dire que la valeur qu'on attribue à un billet de loterie dépend moins de la probabilité d'obtenir le gros lot — pourvu que cette probabilité soit visiblement positive — que : 1e de sa grandeur ; et, 2e/ de la grandeur des fluctuations quotidiennes du budget.

Je n'ai aucun doute qu'une loterie réussirait, qui, garantie par l'État, offrirait, disons, 40.000.000 billets à 10 francs le billet, pour un seul prix seulement, disons de 100.000.000 de francs, exempt de taxe. Quoique l'espérance mathématique d'un billet n'est que de frs 2,50, et que l'utilité, selon les opinions habituelles est encore beaucoup moindre, je n'hésite pas à croire

(1) La plus grande partie de cette remarque n'a été ajoutée que dans le présent texte écrit.

que, à l'exception de ceux pour qui même dix francs sont une somme se dans leur budget quotidien, et de ceux qui, sous aucun prétexte, ne j dans une loterie, chacun, presque sans exception, voudrait bien achet tels billets. Ceux pour qui les fluctuations aléatoires des revenus e dépenses excèdent cette somme suffisamment, voudraient aussi bien 100 francs pour le même billet. Et je ne vois pas qu'on puisse main qu'ils eussent tort.

Une même remarque s'applique aux assurances. Le prix qu'on pour une assurance est à peu près déterminé par : 1e la grandeur de la qu'on veut éviter ; 2e le prix auquel le marché offre une telle assur donnant une sécurité suffisante ; 3e la prime qu'on *peut* payer sans b verser son équilibre budgétaire. La probabilité exacte de la perte n'y presque aucun rôle. Il me semble donc bien douteux si l'on doit réelle s'étonner du fait, qu'il y a des gens qui achètent de l'assurance de n que des billets de loterie et si l'on peut, comme l'ont tâché MM. FRIED et SAVAGE dans leur intéressant et stimulant article, déduire quel propriétés de la courbe d'utilité de ce fait. Ces remarques ne s'appliq pas tout à fait aux joueurs au sens propre, c'est-à-dire aux gens qui risq à la bourse une partie considérable de leur richesse pour un gain incer Mais le plus souvent, ces gens-là croient à leur « veine » et à leur « fl et pour cela sous-estiment de beaucoup la probabilité de perte. D'ail si un homme achète des assurances, il arrive parfois qu'il s'assure assez l ment, et il n'est point du tout impossible qu'il augmentera artificiell la probabilité de perte — qui, pour lui, deviendra un gain. D'après cette la preuve de la non-convexité de la courbe d'utilité par MM. FRIED et SAVAGE est loin d'être incontestable.

Il faut ajouter une dernière remarque par rapport aux situations é miques de risque. On dit parfois que l'achat d'assurances et la vente d montrent une préférence de la certitude au risque, tandis que la vente d' rances et l'achat de lots montrent la préférence du risque à la certitude. aussi me semble être bien douteux. D'abord, lorsqu'on établit une lot on se soumet à un risque beaucoup plus grand — pourvu qu'on ne t pas — que lorsqu'on achète un lot. Car il est possible qu'une p partie des lots seulement sera vendu, et que cette partie contiendra la part des prix. D'ailleurs, on ne peut pas maintenir que les directeurs e actionnaires d'une compagnie d'assurances sont pour cela des gens aimar risque. Au contraire, au moyen de la loi des grands nombres et des pr suffisamment élevées, ils obtiennent une presque sécurité de gain. O pourrait pas conseiller à quelqu'un de s'assurer chez un assureur qui a une grande préférence pour le risque. L'assuré doit *exiger* que l'assu ne prenne aucun risque évitable. Les intérêts de l'assuré et de l'assu ne sont pas contraires, mais l'assureur *représente* l'intérêt de l'assuré, et là-même, il lui est nécessaire de s'efforcer d'obtenir la sécurité la plus gr possible, pour sa compagnie, *donc* pour les assurés.