Betrouwbaarheidsintervallen voor de spreiding van een normale verdeling bepaald uit het gemiddelde van een aantal steekproefbreedtes [1])

door Gerda Klerk-Grobben en Jkvr. H. D. Sandberg

Summary
Confidence regions for the standard deviation of a normally distributed variate based on the mean range of a number of samples.

The mean range of a number of small samples from normal populations with the same standard deviation σ is often used to derive point- and interval estimates of this parameter. This paper provides tables which facilitate the computation of interval estimates and considers the problem, how many samples of size 5 or 7 must be used in order to attain a given accuracy in the estimation.

Starting from

$$E\{\underline{w}_{n,m}\} = a_n\sigma$$

and

$$\sigma^2\{\underline{w}_{n,m}\} = (1/m)\, b_n^2\sigma^2,$$

tables of a_n and b_n having been published by E. S. Pearson (1932) and E. S. Pearson and H. O. Hartley (1954), the following approximations of the distribution of $\underline{w}_{n,m}$ were used:

1) *for table I and III a normal distribution with mean $a_n\sigma$ and variance $b_n^2\sigma^2/m$ (cf. A. Hald (1952)) and*
2) *for table II and IV a χ-distribution (square root of χ^2) (cf. P. B. Patnaik (1950)).*

The values of the factors A_α and B_β satisfying

$$P[A_\alpha \underline{w}_{n,m} \geqq \sigma] = 1 - \alpha \tag{1}$$

and

$$P[B_\beta\, \underline{w}_{n,m} \leqq \sigma] = 1 - \beta \tag{2}$$

are given in table I and II for

α *and* β *being* 0.05; 0.025 ; 0.01 *and* 0.005
$n = 5$ *and* 7
$m = 1, \ldots, 10, 15,$ *and* 20,

---

1) Rapport SP 43 van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam. De afdeling staat onder leiding van Prof. Dr D. van Dantzig. Deze studie kwam tot stand naar aanleiding van een vraag van het Raadgevend Bureau Berenschot.

using the formulae (4.3) and (4.5) for table I and (4.6) for table II of this paper.

The upper- and lower confidence limits for σ, which follow from the formulae (1) and (2) respectively, are denoted by:

$$\underline{s}_b = A_\alpha \, \underline{w}_{n,m} \text{ and } \underline{s}_o = B_\beta \, \underline{w}_{n,m}$$

The main purpose of this paper is to determine the number of samples of given size necessary to attain a given accuracy. For this aim values of $L_{\alpha,\beta}$ and $M_{\beta,\alpha}$ given by

$$L_{\alpha,\beta} = A_\alpha / B_\beta \text{ and } M_{\beta,\alpha} = B_\beta / A_\alpha$$

are needed; these have been tabulated in table III and IV. If

$$P[\underline{s}_b \geqq \sigma] = 1 - \alpha \quad \text{and} \quad P[\underline{s}_o \leqq \sigma] = 1 - \beta,$$

then the following relations hold

$$P[\underline{s}_b \geqq L_{\alpha,\beta}\sigma] = \beta \quad \text{and} \quad P[\underline{s}_o \leqq M_{\beta,\alpha}\sigma] = \alpha.$$

This makes it possible to determine how many samples of a given size are needed, when we make certain demands upon the confidence limits for σ; e.g. we want to attain an upper limit, $\underline{s}_b$, for σ, which is, except for a probability 0.01, larger than σ, whereas it is, except for a probability 0.05, not larger than 1.5σ. So we wish to take so many samples that the coefficient $L_{\alpha,\beta}$ for $\alpha = 0.01$ and $\beta = 0.05$ attains at most the value 1.5. Then according to table IV (fourth column) we have to take at least 10 samples of 7 observations each or at least about 15 of size 5.

The results of the normal- and χ-approximation appear to agree reasonably with each other for not too small values of m. Thus the tables might be extended for larger m, using only the normal approximation (formulae (4.3) and (4.5)), which is easier to use than the other one.

Finally the results of the described method were compared with corresponding results obtained with the analogous method based on the least-squares estimate of σ^2. Let a sample be denoted by:

$$x_{i1}, \ldots, x_{in} \; (i = 1, \ldots, m),$$

let Q be defined by:

$$\underline{Q} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\underline{x}_{ij} - \bar{\underline{x}}_i)^2$$

and s_b' and s_o' by:

$$\underline{s}_b' = \sqrt{\underline{Q}}/\chi_{1-\alpha} \text{ and } \underline{s}_o' = \sqrt{\underline{Q}}/\chi_\beta.$$

Then we have

$$P[\underline{s}_b' \geqq \sigma] = 1 - \alpha \quad ; \quad P[\underline{s}_b' \geqq L'_{\alpha,\beta}\sigma] = \beta \quad (L'_{\alpha,\beta} = \chi_\beta / \chi_{1-\alpha})$$

and

$$P[\underline{s}_o' \leqq \sigma] = 1 - \beta \quad ; \quad P[\underline{s}_o' \leqq M'_{\beta,\alpha}\sigma] = \alpha \quad (M'_{\beta,\alpha} = \chi_{1-\alpha}/\chi_{\beta}).$$

$L_{\alpha,\beta}'$ is tabulated in table V for $\alpha = \beta = 0.05$. Comparing table III or IV with table V we find that, at least for $\alpha = \beta = 0.05$; $n = 5$ or 7 and $m \leqq 10$, application of the mean range method requires at most one sample more than the method of least-squares.

According to continental usage the comma is used as decimal sign in the tables.

1. Inleiding

De beste methode om de spreiding van een normaal verdeelde stochastische grootheid met onbekende verwachtingswaarde en spreiding te schatten is die waarbij gebruik wordt gemaakt van de som van de kwadraten van de afwijkingen van een serie waarnemingen van hun gemiddelde. Bij grotere steekproeven en vooral in die gevallen waarin de waargenomen grootheden wel dezelfde spreiding maar alleen groepsgewijze dezelfde verwachting bezitten wordt deze methode echter vrij bewerkelijk. In de praktijk neemt men dan ook veelal zijn toevlucht tot een meer eenvoudige methode door gebruik te maken van de steekproefbreedte [1]), d.i. het verschil tussen de grootste en de kleinste waarnemingen van de steekproef. Hierbij moet men er rekening mee houden dat voor grotere steekproeven deze steekproefbreedte een zeer ondoeltreffende schatting van de spreiding is.

Voor de schatting van de spreiding uit de steekproefbreedte blijkt een aantal van 5 à 10 waarnemingen per steekproef het beste te zijn (zie A. Hald (1952) p. 327 of F. E. Grubbs and C. L. Weaver (1947) [2])). Een grote steekproef zal men dan ook in een aantal kleinere splitsen van ieder bv. 7 waarnemingen. Deze verdeling moet met enige zorg geschieden, bv. met behulp van een tabel van aselecte [3]) getallen. In sommige gevallen zal al op grond van de aard van de waarnemingen een bepaalde verdeling in groepen als de meest geschikte worden beschouwd (bv. wanneer grootheden met verschillende verwachtingen en gelijke spreiding worden waargenomen: in één groep mogen natuurlijk alleen waarnemingen met éénzelfde verwachting voorkomen).

Met behulp van het gemiddelde van de zo verkregen reeks van steekproefbreedtes kan een zuivere schatting voor de gezochte spreiding afgeleid worden. Dit vindt men bv. beschreven op p. 46 en 47 (behorende bij tabel 20) van E. S. Pearson and H. O. Hartley (1954).

Een methode ter afleiding van benaderde betrouwbaarheidsintervallen

---

1) Engels : range.

2) Zie de literatuurlijst aan het einde van dit artikel.

3) Engels : random numbers.

eveneens gebaseerd op deze gemiddelde breedte, is o.a. beschreven door A. H a l d (1952) p. 362 e.v. In het huidige artilkel wordt nog een tweede benaderende methode beschreven, die op een door P. B. P a t n a i k (1950) gegeven benadering berust. Voor beide methoden zijn hulptabellen berekend, die de bepaling der betrouwbaarheidsgrenzen gemakkelijk maken voor steekproeven van 5 of 7 waarnemingen.

Verder wordt de vraag behandeld, hoeveel steekproeven van deze omvang men moet nemen, om een bepaalde relatieve nauwkeurigheid te bereiken in de betrouwbaarheidsintervallen. Ook hiervoor worden tabellen gegeven.

Tenslotte worden de beschreven methodes gebaseerd op de gemiddelde steekproefbreedtes, vergeleken met overeenkomstige methodes welke uitgaan van kleinste kwadratenschattingen voor σ.

2. Notaties, definities en onderstellingen

Stochastische grootheden, dit zijn grootheden die een waarschijnlijkheidsverdeling bezitten, geven wij aan met onderstreepte letters, bv. $\underline{x}$, waarden die door een stochastische grootheid aangenomen kunnen worden geven wij soms door dezefde, niet onderstreepte, letter weer. Een stochastische grootheid $\underline{x}$ heet normaal verdeeld met verwachting μ en spreiding σ kortweg: $(N(\mu;\sigma))$ indien de kans om voor $\underline{x}$ een waarde niet groter dan x te vinden wordt gegeven door:

$$P[\underline{x} \leqq x] = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-(2\sigma^2)^{-1}(t-\mu)^2\right] dt.$$

Verwachting en spreiding van een stochastische grootheid, bv. $\underline{y}$, geven wij aan met de symbolen $E\{\underline{y}\}$ en $\sigma\{\underline{y}\}$.

Het gemiddelde van de steekproefbreedtes van m steekproeven elk bestaande uit n waarnemingen noemen wij $\underline{w}_{n,m}$. Wij onderstellen in dit artikel steeds dat de m steekproeven afkomstig zijn uit normale verdelingen met dezelfde spreiding σ (de verwachtingen mogen van steekproef tot steekproef variëren maar moeten binnen een steekproef constant zijn).

Verder zullen wij nog de grootheden ξ_α en $\chi_{\nu,\alpha}$ gebruiken, die als volgt worden gedefinieerd:

ξ_α is de waarde waarvoor geldt:

$$P[\underline{x} \geqq \xi_\alpha] = \alpha \tag{2.1}$$

wanneer $\underline{x}$ $N(0;1)$ verdeeld is en

$\chi_{\nu,\alpha}$ is die positieve waarde waarvoor geldt:

$$P[\underline{y} \geqq \chi_{\nu,\alpha}^2] = \alpha \tag{2.2}$$

wanneer y verdeeld is volgens een χ^2-verdeling met ν vrijheidsgraden.

Wij spreken van de bovengrens, $\underline{s}_b$, van een rechtséénzijdig begrensd betrouwbaarheidsgebied voor σ met onbetrouwbaarheid α, indien geldt:

$$P[\sigma \leqq \underline{s}_b] = 1 - \alpha \tag{2.3}$$

en van de ondergrens, $\underline{s}_o$, van een linkséénzijdig begrensd gebied met onbetrouwbaarheid β, indien:

$$P\,(\underline{s}_o \leqq \sigma] = 1 - \beta. \tag{2.4}$$

Deze onder- en bovengrens zijn te combineren tot een tweezijdig begrensd betrouwbaarheidsinterval, $(\underline{s}_o : \underline{s}_b)$, met onbetrouwbaarheid $\alpha + \beta$, dus:

$$P\,[\underline{s}_o \leqq \sigma \leqq \underline{s}_b] = 1 - \alpha - \beta. \tag{2.5}$$

In alle gevallen waarin wij tot nu toe over een waarschijnlijkheid (of onbetrouwbaarheid) α of β gesproken hebben, bedoelen wij hiermee een gegeven kleine waarde (bv. 0,05 of 0,01). In het volgende zullen wij in deze betekenis ook γ gebruiken.

Waar geen gevaar voor verwarring bestaat zullen wij kortheidshalve $\underline{s}_b$ en $\underline{s}_o$ de bovengrens resp. de ondergrens voor σ noemen.

3. Benaderingen van de waarschijnlijkheidsverdeling van $\underline{w}_{n,m}$

Voor de afleiding van betrouwbaarheidsgrenzen voor de spreiding uit de gemiddelde steekproefbreedte $\underline{w}_{n,m}$ zullen wij de waarschijnlijkheidsverdeling van $\underline{w}_{n,m}$ nodig hebben. Daar de exacte verdeling niet eenvoudig te berekenen is, zullen wij hiervoor een benadering moeten gebruiken. Hierbij kunnen wij twee benaderende verdelingen gebruiken: de normale verdeling, welke eenvoudig te berekenen resultaten geeft (vooral in verband met beschikbare tabellen) en de χ-verdeling (positieve wortel uit χ^2), welke volgens P. B. Patnaik (1950) een betere benadering geeft. Ter vergelijking hebben wij onze berekeningen voor het grootste deel met beide verdelingen uitgevoerd: wij vonden voor niet te kleine aantallen steekproeven (bv. $m>4$) een zeer goede overeenstemming tussen beide benaderingen. Wij geven hieronder een korte beschrijving van de twee benaderingen.

Het is gebruikelijk de verwachting en de variantie (kwadraat van de spreiding) van $\underline{w}_{n,m}$ uit te drukken in σ, de spreiding van de (normale) verdeling van de oorspronkelijke waarnemingen:

$$E\,\{\underline{w}_{n,m}\} = a_n \sigma,$$
$$\sigma^2\{\underline{w}_{n,m}\} = b_n{}^2 \sigma^2 / m.$$

De waarden van a_n en b_n zijn bekend en bv. getabelleerd in E. S. Pearson

(1932), tabel A, $n = 2\,(1)\,30\,(5)\,100$; A. Hald (1952*a*), tabel VIII en E. S. Pearson and H. O. Hartley (1954), tabael 20 en 27. Onze berekeningen zijn voor twee waarden van n (aantal waarnemingen per steekproef) uitgevoerd nl. $n = 5$ en $n = 7$: hierbij is:

$$a_5 = 2{,}32593\ ,\ b_5 = 0{,}8641,$$
$$a_7 = 2{,}70436\ ,\ b_7 = 0{,}8332.$$

Op grond van de centrale limietstelling kan nu de verdeling van $\underline{w}_{n,m}/\sigma$ benaderd worden door een *normale verdeling* met verwachting a_n en spreiding $b_n/\sqrt{m}$ (dus $N(a_n\,;\,b_n/\sqrt{m})$), zie o.a. A. Hald (1952).

P. B. Patnaik (1950) geeft in verband met beschouwingen over de momenten van de verdeling aan, dat het vermoedelijk nauwkeuriger is de verdeling van de grootheid $\sqrt{\nu}\underline{w}_{n,m}/(c_\nu\sigma)$ te benaderen met een *χ-verdeling* met ν vrijheidsgraden. De χ-verdeling volgt uit de χ^2-verdeling met hetzelfde aantal vrijheidsgraden door de positieve wortel te nemen uit de waarden die χ^2 kan aannemen. Verder wordt ν als volgt bepaald:

1e benadering: $$\nu_1 = \frac{1}{-2 + 2\sqrt{1 + 2\,b_n^{\,2}/(ma_n^{\,2})}}$$

of nauwkeuriger:

2e benadering: $$\nu_2 = \frac{1}{-2 + 2\sqrt{1 + 2\,\{b_n^{\,2}/(ma_n^{\,2}) + 1/(16\nu_1^{\,3})\}}}$$

terwijl c_ν gegeven wordt door

$$c_\nu = a_n\left(1 + \frac{1}{4\nu} + \frac{1}{32\nu^2} - \frac{5}{128\nu^3}\right).$$

In het algemeen zal dus het aantal vrijheidsgraden niet geheel zijn, zodat wij in de tabellen voor χ^2 zullen moeten interpoleren; bovendien wordt ν voor grotere m snel groter zodat al spoedig de gebruikelijke χ^2-tabellen geen uitkomst meer verschaffen. Om deze redenen is dan ook het gebruik van de normale benadering veel eenvoudiger.

In de volgende paragrafen zullen wij de afleidingen geven met behulp van de normale benadering en voor de χ-benadering alleen de eindformules, welke bij de berekening gebruikt zijn, vermelden. De afleidingen hiervan zijn volkomen analoog aan die bij de normale benadering.

4. Onder- en boven-betrouwbaarheidsgrenzen

In de vorige paragraaf zagen wij dat de verdeling van $\underline{w}_{n,m}/\sigma$ benaderd kan worden door een waarschijnlijkheidsverdeling waarvan de parameters alleen van n en m afhankelijk zijn en dus bekend zijn. Wij zullen ons nu tot de benadering door een normale verdeling beperken. Uit paragraaf 3 volgt dat de grootheid:

$$(\sqrt{m}/b_n)\,[(\underline{w}_{n,m}/\sigma) - a_n]$$

bij benadering een N (0;1)-verdeling bezit. Dus geldt [1]):

$$(4.1) \qquad P\,[(\sqrt{m}/b_n)\,[(\underline{w}_{n,m}/\sigma) - a_n] \geqq -\xi_\alpha] = 1 - \alpha,$$

ξ_α werd reeds in paragraaf 2 gedefinieerd en wegens de symmetrie van de normale verdeling is $\xi_{1-\alpha} = -\xi_\alpha$. Door (4.1) enigszins om te vormen ontstaat:

$$P\,[\underline{w}_{n,m}/(a_n - b_n\,\xi_\alpha/\sqrt{m}) \geqq \sigma] = 1 - \alpha.$$

Hieruit volgt dus dat

$$\underline{w}_{n,m}/(a_n - b_n\,\xi_\alpha/\sqrt{m})$$

de bovengrens van een *rechtséénzijdig* begrensd betrouwbaarheidsgebied voor σ is met onbetrouwbaarheid α, dus (zie (2.3)):

$$(4.2) \qquad \underline{s}_b \stackrel{def}{=} \underline{w}_{n,m}/(a_n - b_n\xi_\alpha/\sqrt{m}) = A_\alpha \underline{w}_{n,m}.$$

De factoren

$$(4.3) \qquad \boxed{A_\alpha = \frac{1}{a_n - b_n\,\xi_\alpha/\sqrt{m}}} \quad \text{(normale benadering)}$$

welke dus afhankelijk zijn van n,m en van de gekozen onbetrouwbaarheid α, hebben wij voor de gevallen $n = 5$ en $n = 7$, $m = 1\ (1)\ 10, 15, 20$ en $\alpha = 0{,}05$, $0{,}025$, $0{,}01$, $0{,}005$ berekend en opgenomen in tabel I.

Door uit te gaan van

$$P\,[(\sqrt{m}/b_n)\,[(\underline{w}_{n,m}/\sigma) - a_n] \leqq \xi_\beta] = 1 - \beta$$

vinden wij op dezelfde manier:

$$P\,[\underline{w}_{n,m}/(a_n + b_n\,\xi_\beta/\sqrt{m}) \leqq \sigma] = 1 - \beta,$$

dus

$$(4.4) \qquad \underline{s}_o \stackrel{def}{=} \underline{w}_{n,m}/(a_n + b_n\,\xi_\beta/\sqrt{m}) = B_\beta \underline{w}_{n,m}$$

---

1) Doordat wij een benadering van de waarschijnlijkheidsverdeling van $\underline{w}_{n,m}$ gebruiken, gelden alle uitspraken over waarschijnlijkheden slechts bij benadering; wij zullen dit niet steeds expliciet vermelden.

Tabel I. *Waarden van A_α en B_β volgens de benadering met een normale verdeling* [1]).

$n=5$	A_α				B_β			
m \ α of β	0,05	0,025	0,01	0,005	0,05	0,025	0,01	0,005
1	1,106	1,582	3,164	9,914	0,267	0,249	0,231	0,220
2	0,757	0,886	1,105	1,329	0,300	0,284	0,267	0,256
3	0,664	0,742	0,858	0,960	0,318	0,303	0,287	0,277
4	0,619	0,676	0,757	0,824	0,329	0,315	0,300	0,291
5	0,592	0,638	0,701	0,751	0,338	0,324	0,310	0,301
6	0,573	0,612	0,664	0,705	0,344	0,331	0,318	0,309
7	0,559	0,593	0,638	0,673	0,349	0,337	0,324	0,316
8	0,548	0,579	0,619	0,650	0,354	0,342	0,329	0,321
9	0,540	0,568	0,604	0,631	0,357	0,346	0,334	0,326
10	0,533	0,559	0,592	0,616	0,360	0,349	0,338	0,330
15	0,510	0,529	0,553	0,571	0,371	0,362	0,352	0,345
20	0,498	0,514	0,533	0,547	0,378	0,370	0,360	0,354
$n=7$ m								
1	0,750	0,933	1,305	1,789	0,245	0,231	0,215	0,206
2	0,576	0,645	0,750	0,842	0,272	0,259	0,245	0,237
3	0,523	0,568	0,631	0,682	0,286	0,274	0,262	0,254
4	0,495	0,530	0,576	0,613	0,295	0,284	0,272	0,265
5	0,478	0,507	0,544	0,573	0,301	0,291	0,280	0,273
6	0,466	0,491	0,523	0,547	0,306	0,297	0,286	0,279
7	0,457	0,479	0,507	0,528	0,310	0,301	0,291	0,284
8	0,450	0,470	0,495	0,514	0,314	0,305	0,295	0,289
9	0,445	0,463	0,486	0,503	0,316	0,308	0,298	0,292
10	0,440	0,457	0,478	0,494	0,319	0,310	0,301	0,296
15	0,425	0,438	0,454	0,465	0,327	0,320	0,312	0,307
20	0,417	0,427	0,440	0,450	0,332	0,326	0,319	0,314

[1]) Voor $\underline{s}_b = A_\alpha \underline{w}_{n,m}$ en $\underline{s}_0 = B_\beta \underline{w}_{n,m}$ geldt:

$$P[\underline{s}_b \geqq \sigma] = 1 - \alpha \quad \text{en} \quad P[\underline{s}_0 \leqq \sigma] = 1 - \beta.$$

is de ondergrens van een *linkséénzijdig* begrensd betrouwbaarheidsgebied met onbetrouwbaarheid β. De factoren

$$\boxed{B_\beta = \frac{1}{a_n + b_n \xi_\beta / \sqrt{m}}} \qquad \text{(normale benadering)} \tag{4.5}$$

zijn, voor dezelfde gevallen als bij A_α, eveneens in tabel I te vinden.

Door voor de verdeling van $\underline{w}_{n,m}/\sigma$ de χ-benadering in plaats van de normale benadering te gebruiken vinden wij analoog aan het bovenstaande voor A_α en B_β de uitdrukkingen:

$$\boxed{A_\alpha = \frac{\sqrt{\nu}}{c_\nu\ \chi_{\nu,1-\alpha}} \text{ en } B_\beta = \frac{\sqrt{\nu}}{c_\nu\ \chi_{\nu,\beta}}} \quad (\chi\text{-benadering}). \tag{4.6}$$

$\chi_{\nu,1-\alpha}$ werd reeds door (2.2) gedefinieerd en de uitdrukkingen voor ν en c_ν werden in paragraaf 3 gegeven. De volgens de χ-benadering berekende waarden voor ν, A_α en B_β zijn in tabel II opgenomen (voor dezelfde gevallen als in tabel I).

TABEL II. *Waarden van A_α en B_β volgens de χ-benadering* [1])

$n=5$		A_α				B_β			
m	α of β / ν	0,05	0,025	0,01	0,005	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,83	0,983	1,199	1,547	1,865	0,260	0,239	0,219	0,207
2	7,47	0,729	0,821	0,952	1,059	0,296	0,278	0,259	0,248
3	11,10	0,650	0,712	0,795	0,860	0,315	0,298	0,281	0,270
4	14,73	0,610	0,657	0,720	0,769	0,327	0,312	0,295	0,285
5	18,35	0,585	0,624	0,676	0,714	0,336	0,321	0,306	0,296
6	21,98	0,568	0,602	0,646	0,678	0,342	0,329	0,314	0,305
7	25,61	0,555	0,585	0,624	0,652	0,348	0,335	0,321	0,312
8	29,23	0,545	0,572	0,607	0,633	0,352	0,340	0,326	0,318
9	32,85	0,537	0,562	0,594	0,617	0,356	0,344	0,331	0,323
10	36,48	0,530	0,553	0,583	0,604	0,359	0,348	0,335	0,327
15	54,59	0,509	0,527	0,548	0,564	0,371	0,361	0,350	0,342
20	72,70	0,497	0,512	0,529	0,542	0,378	0,369	0,359	0,352
$n=7$									
m									
1	5,49	0,704	0,818	0,986	1,132	0,241	0,224	0,207	0,197
2	10,77	0,563	0,618	0,692	0,750	0,269	0,255	0,240	0,231
3	16,04	0,516	0,554	0,603	0,642	0,284	0,271	0,258	0,249
4	21,31	0,491	0,521	0,559	0,588	0,293	0,282	0,269	0,261
5	26,58	0,475	0,500	0,532	0,556	0,300	0,289	0,277	0,270
6	31,85	0,464	0,486	0,514	0,534	0,305	0,295	0,284	0,276
7	37,12	0,455	0,475	0,500	0,518	0,309	0,300	0,289	0,282
8	42,39	0,449	0,467	0,489	0,505	0,313	0,303	0,293	0,287
9	47,66	0,443	0,460	0,481	0,496	0,316	0,307	0,297	0,290
10	52,92	0,439	0,454	0,474	0,487	0,318	0,309	0,300	0,294
15	79,26	0,425	0,436	0,451	0,461	0,326	0,319	0,311	0,305

[1]) Voor $\underline{s}_b = A_\alpha \underline{w}_{n,m}$ en $\underline{s}_0 = B_\beta \underline{w}_{n,m}$ geldt:

$$P[\underline{s}_b \geqq \sigma] = 1 - \alpha \quad \text{en} \quad P[\underline{s}_0 \leqq \sigma] = 1 - \beta.$$

Als wij de overeenkomstige waarden uit tabel I en II vergelijken dan kunnen wij constateren dat de overeenstemming voor $n = 7$ iets beter is dan voor $n = 5$, beter wordt als m toeneemt en bij de kleinere onbetrouwbaarheden slechter is dan bij de grotere. Het verschil is bv. minder dan één eenheid in de tweede decimaal bij $n = 5$ voor:

$$\begin{aligned} \alpha = \beta &= 0{,}05 \text{ bij } A_\alpha \text{ vanaf } m = 4\ , \text{ bij } B_\beta \text{ vanaf } m = 1, \\ \alpha = \beta &= 0{,}025 \text{ bij } A_\alpha \text{ vanaf } m = 7, \text{ bij } B_\beta \text{ vanaf } m = 2 \\ \alpha = \beta &= 0{,}01 \text{ bij } A_\alpha \text{ vanaf } m = 10, \text{ bij } B_\beta \text{ vanaf } m = 2. \end{aligned}$$

Men kan dus voor $n \geqq 5$ en vanaf de genoemde waarden van m de grootheden A_α en B_β zonder bezwaar berekenen met (4.3) en (4.5).

5. Beschouwingen over de nauwkeurigheid der betrouwbaarheidsgrenzen

In deze paragraaf zullen wij uiteenzetten hoe wij een maat voor de nauwkeurigheid van de, volgens de vorige paragraaf bepaalde, betrouwbaarheidsgrenzen kunnen vinden. Stel nl. dat wij $\underline{s}_b$ met onbetrouwbaarheid α bepalen, dus:

$$P\,[\underline{s}_b \geqq \sigma] = 1 - \alpha. \tag{5.1}$$

Wij kunnen ons nu afvragen hoeveel $\underline{s}_b$, uitgedrukt in σ, behoudens een gegeven kleine waarschijnlijkheid β, hoogstens zal bedragen, m.a.w. wij vragen naar de waarde van de factor $L_{\alpha,\beta}$ waarvoor geldt:

$$P\,[\underline{s}_b \geqq L_{\alpha,\beta}\,\sigma] = \beta. \tag{5.2}$$

Voor (5.2) kunnen wij schrijven:

$$P\,[\underline{s}_b \leqq L_{\alpha,\beta}\,\sigma] = 1 - \beta$$

of:

$$P\,[\underline{s}_b/L_{\alpha,\beta} \leqq \sigma] = 1 - \beta. \tag{5.3}$$

Wanneer wij (5.3) vergelijken met (2.4) is het duidelijk dat

$$\underline{s}_b/L_{\alpha,\beta} = A_\alpha \underline{w}_{n,m}/L_{\alpha,\beta} \quad \text{(zie ook (4.2))}$$

een betrouwbaarheidsondergrens voor σ is met onbetrouwbaarheid β. Hetzelfde geldt voor $\underline{s}_o = B_\beta \underline{w}_{n,m}$ (zie (4.4)). Daar ze beide gelijk zijn aan $\underline{w}_{n,m}$ vermenigvuldigd met een constante, zullen zij gelijk aan elkaar moeten zijn:

$$A_\alpha \underline{w}_{n,m}/L_{\alpha,\beta} = B_\beta\, \underline{w}_{n,m}.$$

Hieruit volgt:

$$(5.4) \qquad \boxed{L_{\alpha,\beta} = A_\alpha / B_\beta}\ .$$

Wij hebben dus nu gevonden dat de bovengrens $\underline{s}_b = A_\alpha\, \underline{w}_{n,m}$ behoudens een kans α, groter dan σ en, behoudens een kans β, niet groter dan $L_{\alpha,\beta}\,\sigma$ zal zijn. De waarde van de factor $L_{\alpha,\beta}$ kan dus (als de kansen α en β de bij Tabel I gebruikte waarden bezitten) direct door deling uit tabel I (eventueel tabel II) worden afgeleid. Voor de waarden van m en n die opgenomen zijn in tabel I en II en de combinaties $\alpha = 0{,}05$ en $\beta = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}01$ en $\beta = 0{,}05$ of $\alpha = 0{,}01$ en $\beta = 0{,}01$ hebben wij de bijbehorende waarden van $L_{\alpha,\beta}$ berekend en in tabel III (normale benadering) resp. tabel IV (χ-benadering) opgenomen.

TABEL III. *Waarden van $L_{\alpha,\beta}$ en $M_{\beta,\alpha}$ volgens de benadering met een normale verdeling* [1]).

$n=5$	$L_{\alpha,\beta} = A_\alpha/B_\beta$			$M_{\beta,\alpha} = B_\beta/A_\alpha$		
m	$\frac{A_{0,05}}{B_{0,05}}$	$\frac{A_{0,01}}{B_{0,05}}$	$\frac{A_{0,01}}{B_{0,01}}$	$\frac{B_{0,05}}{A_{0,05}}$	$\frac{B_{0,01}}{A_{0,05}}$	$\frac{B_{0,01}}{A_{0,01}}$
1	4,143	11,858	13,720	0,241	0,209	0,073
2	2,522	3,682	4,142	0,397	0,352	0,241
3	2,090	2,700	2,991	0,478	0,432	0,334
4	1,880	2,299	2,522	0,532	0,485	0,397
5	1,752	2,075	2,260	0,571	0,524	0,443
6	1,665	1,931	2,090	0,601	0,555	0,478
7	1,601	1,828	1,970	0,625	0,580	0,508
8	1,551	1,751	1,880	0,645	0,600	0,532
9	1,512	1,691	1,809	0,662	0,618	0,553
10	1,479	1,642	1,752	0,676	0,634	0,571
15	1,375	1,490	1,574	0,727	0,689	0,635
20	1,317	1,409	1,479	0,760	0,724	0,676
$n=7$ m						
1	3,055	5,317	6,058	0,327	0,287	0,165
2	2,117	2,754	3,055	0,472	0,426	0,327
3	1,827	2,205	2,411	0,547	0,500	0,415
4	1,679	1,953	1,117	0,596	0,550	0,472
5	1,586	1,805	1,943	0,630	0,586	0,515
6	1,522	1,706	1,827	0,657	0,614	0,547
7	1,474	1,634	1,743	0,678	0,636	0,574
8	1,437	1,579	1,679	0,696	0,655	0,596
9	1,407	1,536	1,628	0,711	0,671	0,614
10	1,382	1,500	1,586	0,724	0,685	0,630
15	1,301	1,388	1,454	0,769	0,733	0,688
20	1,256	1,326	1,382	0,796	0,764	0,724

[1]) Is $L_{\alpha,\beta} = A_\alpha/B_\beta$ en $\underline{s}_b = A_\alpha \underline{w}_{n,m}$ dan is $P[\underline{s}_b \geqq \sigma] = 1 - \alpha$ en $P[\underline{s}_b \geqq L_{\alpha,\beta}\,\sigma] = \beta$.
Is $M_{\beta,\alpha} = B_\beta/A_\alpha$ en $\underline{s}_0 = B_\beta \underline{w}_{n,m}$ dan is $P[\underline{s}_0 \leqq \sigma] = 1 - \beta$ en $P[\underline{s}_0 \leqq M_{\beta,\alpha}\,\sigma] = \alpha$.

TABEL IV. *Waarden van $L_{\alpha,\beta}$ en $M_{\beta,\alpha}$ volgens de χ-benadering* [1]).

$n=5$		$L_{\alpha,\beta} = A_\alpha/B_\beta$			$M_{\beta,\alpha} = B_\beta/A_\alpha$		
m	ν	$\frac{A_{0,05}}{B_{0,05}}$	$\frac{A_{0,01}}{B_{0,05}}$	$\frac{A_{0,01}}{B_{0,01}}$	$\frac{B_{0,05}}{A_{0,05}}$	$\frac{B_{0,01}}{A_{0,05}}$	$\frac{B_{0,01}}{A_{0,01}}$
1	3,83	3,784	5,951	7,059	0,264	0,223	0,142
2	7,47	2,463	3,216	3,673	0,406	0,355	0,272
3	11,10	2,066	2,526	2,831	0,484	0,432	0,353
4	14,73	1,866	2,203	2,439	0,536	0,484	0,410
5	18,35	1,744	2,013	2,209	0,574	0,523	0,453
6	21,98	1,659	1,886	2,055	0,603	0,553	0,487
7	25,61	1,596	1,794	1,944	0,627	0,578	0,514
8	29,23	1,548	1,724	1,860	0,646	0,599	0,538
9	32,85	1,509	1,668	1,794	0,663	0,617	0,558
10	36,48	1,477	1,623	1,739	0,677	0,632	0,575
15	54,59	1,373	1,480	1,579	0,728	0,687	0,638
20	72,70	1,316	1,402	1,476	0,760	0,722	0,678
$n=7$							
m							
1	5,49	2,926	4,098	4,759	0,342	0,294	0,210
2	10,77	2,091	2,567	2,880	0,478	0,426	0,347
3	16,04	1,816	2,125	2,344	0,551	0,499	0,427
4	21,31	1,672	1,906	2,080	0,598	0,548	0,481
5	26,58	1,582	1,773	1,919	0,632	0,584	0,521
6	31,85	1,518	1,682	1,811	0,659	0,612	0,552
7	37,12	1,472	1,616	1,731	0,680	0,634	0,578
8	42,39	1,435	1,564	1,669	0,697	0,653	0,599
9	47,66	1,405	1,523	1,620	0,712	0,669	0,617
10	52,92	1,380	1,489	1,580	0,724	0,683	0,633
15	79,26	1,300	1,382	1,451	0,769	0,732	0,689

[1]) Is $L_{\alpha,\beta} = A_\alpha/B_\beta$ en $\underline{s}_b = A_\alpha \underline{w}_{n,m}$ dan is $P[\underline{s}_b \geqq \sigma] = 1 - \alpha$ en $P[\underline{s}_b \geqq L_{\alpha,\beta}\,\sigma] = \beta$.
Is $M_{\beta,\alpha} = B_\beta/A_\alpha$ en $\underline{s}_0 = B_\beta \underline{w}_{n,m}$ dan is $P[\underline{s}_0 \leqq \sigma] = 1 - \beta$ en $P[\underline{s}_0 \leqq M_{\beta,\alpha}\,\sigma] = \alpha$.

Voor de ondergrens $\underline{s}_o$, waarvoor geldt:

$$P[\underline{s}_o \leqq \sigma] = 1 - \beta,$$

leiden wij volkomen analoog af:

$$P[\underline{s}_o \leqq M_{\beta,\alpha}\,\sigma] = \alpha.$$

waarin:

$$\boxed{M_{\beta,\alpha} = B_\beta/A_\alpha}. \tag{5.5}$$

In woorden: de ondergrens $\underline{s}_o$ is, behoudens een kans β, kleiner dan σ en, behoudens een kans α, niet kleiner dan $M_{\beta,\alpha}\sigma$. In tabel III en IV werden de waarden $M_{\beta,\alpha}$ opgenomen voor dezelfde gevallen als voor $L_{\alpha,\beta}$.

Als men met het *tweezijdig* begrensde interval voor σ werkt zal men geïnteresseerd zijn in de lengte hiervan. Wij zullen onderstellen, dat $\underline{s}_b$ met onbetrouwbaarheid α en $\underline{s}_o$ met onbetrouwbaarheid β bepaald worden, zodat het interval $(\underline{s}_o; \underline{s}_b)$ een onbetrouwbaarheid $\alpha + \beta$ zal bezitten. Daar

$$\underline{s}_b = A_\alpha \, \underline{w}_{n,m} \text{ en } \underline{s}_o = B_\beta \, \underline{w}_{n,m}$$

is zal de lengte van het interval

$$\underline{l} = (A_\alpha - B_\beta) \, \underline{w}_{n,m}$$

zijn. Vragen wij welke waarde, uitgedrukt in σ, $\underline{l}$ behoudens een kans γ niet zal overschrijden, dan kunnen wij deze als volgt afleiden. Laat C voldoen aan

$$P[\underline{l} \leqq C\sigma] = 1 - \gamma$$

of:

$$P[\underline{l}/C \leqq \sigma] = 1 - \gamma.$$

Vergelijken wij dit weer met (2.4) dan zien wij dat ook $\underline{l}/C$ een ondergrens voor σ is met onbetrouwbaarheid γ evenals $\underline{s}_o = B_\gamma \, \underline{w}_{n,m}$. Daar $\underline{l}/C = (A_\alpha - B_\beta) \, \underline{w}_{n,m}/C$ en $\underline{s}_o$ beide gelijk zijn aan $\underline{w}_{n,m}$ vermenigvuldigd met een constante, zijn ze ook onderling gelijk en dus de constantes gelijk:

$$(A_\alpha - B_\beta)/C = B_\gamma$$

of

$$C = (A_\alpha - B_\beta)/B_\gamma \tag{5.6}$$

Wij hebben dus nu gevonden dat wanneer van een betrouwbaarheidsinterval $(\underline{s}_o; \underline{s}_b)$ de ondergrens $\underline{s}_o$ met onbetrouwbaarheid β en de bovengrens $\underline{s}_b$ met onbetrouwbaarheid α bepaald zijn, dan zal de lengte van het interval behoudens een waarschijnlijkheid γ niet meer dan $(A_\alpha - B_\beta)\sigma/B_\gamma$ bedragen.

Wij merken op dat wij met behulp van dit resultaat in staat zijn om bij gegeven onbetrouwbaarheid $\alpha + \beta$ van het interval voor σ, α en β zo te kiezen, dat C zo klein mogelijk wordt. Gezien formule (5.6) is dit het geval indien $A_\alpha - B_\beta$ (bij gegeven $\alpha + \beta$) minimaal wordt (γ houden wij natuurlijk constant).

Op overeenkomstige wijze zou een minimale waarde voor l bepaald kunnen worden, d.w.z. een getal D zodanig dat

$$P[\underline{l} \leqq D\sigma] = \gamma.$$

Voor D vinden wij dan de uitdrukking

$$D = (A_\alpha - B_\beta)/A_\gamma.$$

Wij hebben geen waarden voor C en D berekend.

6. Bepaling van het aantal steekproeven nodig om een gegeven „nauwkeurigheid" te bereiken

De gewenste „graad van nauwkeurigheid" voor de betrouwbaarheidsgrenzen voor σ kan men, in verband met de vorige paragraaf, op verschillende manieren formuleren.

1. Interesseert ons speciaal de bovengrens voor σ dan zullen wij eisen dat deze $\underline{s}_b$, behoudens een gegeven kleine kans α, niet kleiner dan σ en, behoudens een andere (eventueel dezelfde) gegeven kleine kans β, niet groter dan een zeker aantal malen σ zal bedragen. Wij leggen dus nu van te voren de waarde van α, β en $L_{\alpha,\beta}$ vast en zoeken welk aantal steekproeven van een bepaalde omvang wij moeten nemen om aan deze eisen te voldoen. Wij kunnen dit voor de drie combinaties van α en β, waarvoor wij $L_{\alpha,\beta}$ berekend hebben, uit tabel III of IV aflezen. Willen wij bv. een bovengrens voor σ bepalen die, behoudens een kans 0,01, groter is dan σ en, behoudens een kans 0,05 niet groter dan 1,5 σ, dan is dus $\alpha = 0{,}01$, $\beta = 0{,}05$ en $L_{\alpha,\beta} = 1{,}5$. Uit tabel IV (χ-benadering) zien wij dan dat, als $n = 7$ is (het aantal waarnemingen per steekproef), $m \geqq 10$ moet zijn, dus dat wij minstens 10 steekproeven moeten nemen.

2. Eenzelfde eis kunnen wij aan een ondergrens voor σ opleggen. Laat er bv. geëist worden dat $\underline{s}_o$, behoudens een kans $\alpha = 0{,}01$, kleiner dan σ is en, behoudens een kans $\beta = 0{,}01$, niet kleiner dan $0{,}5\sigma$. Uit tabel IV (χ-benadering) zien wij dan, als wij $n = 5$ nemen, $m \geqq 7$ moet zijn, dus dat wij minstens 7 steekproeven moeten nemen om aan de gestelde eisen te kunnen voldoen.

3. Een andere eis welke wij aan de nauwkeurigheid van de grenzen van σ kunnen opleggen is dat de lengte van het tweezijdig begrensde interval, $(\underline{s}_o; \underline{s}_b)$, behoudens een zekere kleine kans niet meer dan een gegeven aantal malen σ mag bedragen. Daar wij geen waarden van $(A_\alpha - B_\beta)/B_\gamma$ getabelleerd hebben zullen wij hiervan geen getallenvoorbeeld geven. Deze tabellen kunnen gemakkelijk uit tabel I of II worden afgeleid.

4. Het is tenslotte ook mogelijk dat wij aan een combinatie van de boven beschreven eisen willen voldoen. Wij bepalen bv. $\underline{s}_b$ en $\underline{s}_o$ elk met onbetrouwbaarheid 0,01 en verlangen bovendien: *a*) dat $\underline{s}_b$, behoudens een kans 0,01, niet meer dan 1,7 σ zal zijn en *b*) dat $\underline{s}_o$, behoudens een kans 0,05, niet minder dan 0,6 σ zal zijn. In dit geval zal één van beide eisen *a*) of *b*) het hoogste aantal steekproeven vergen. Nemen wij dit aantal dan is aan de andere eis zeker voldaan. Is bij ons voorbeeld $n = 7$ dan moet volgens de eerste eis $m \geqq 8$ zijn en volgens de tweede $m \geqq 6$ (tabel IV). Om aan beide eisen te voldoen moeten wij dus minstens 8 steekproeven met elk 7 waarnemingen nemen.

7. Vergelijking met betrouwbaarheidsintervallen gebaseerd op een kleinste kwadratenschatting voor σ^2

De schattingen voor σ^2 die verkregen worden met behulp van de methode van de kleinste kwadraten (dit zijn in dit geval tevens de aannemelijkste schattingen[1])) bevatten meer informatie uit de steekproef dan de steekproefbreedte. Men mag dus verwachten dat op grond van de kleinste kwadratenschattingen kortere betrouwbaarheidsintervallen voor σ geconstrueerd kunnen worden. Teneinde een indruk te krijgen van het verschil tussen beide methoden hebben wij voor enkele gevallen de grootheden, die voor een vergelijking van beide methoden nodig zijn, berekend. Wij gebruiken hierbij wel de indeling in kleine steekproeven, daar wij de mogelijkheid open gelaten hebben, dat de steekproeven uit populaties met verschillende gemiddelden zouden komen. De steekproeven zijn dus

$$\begin{array}{l} x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n} \\ x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \\ x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn} \end{array}$$

waarbij een waarneming x_{ij} uit een $N(\mu_i; \sigma)$-verdeling afkomstig is.
Noemen wij

$$\underline{Q} \stackrel{def}{=} \sum_i \sum_j (\underline{x}_{ij} - \bar{\underline{x}}_i)^2$$

dan is $\underline{Q}/\{m(n-1)\}$ de zuivere kleinste kwadratenschatting voor σ^2 en dan bezit $\underline{Q}/\sigma^2$ een χ^2-verdeling met $m(n-1)$ vrijheidsgraden. Hieruit volgt dat:

$$P[\underline{Q}/\sigma^2 \geqq \chi_{1-\alpha}{}^2] = 1 - \alpha$$

of

$$P[\underline{Q}/\chi_{1-\alpha}{}^2 \geqq \sigma^2] = 1 - \alpha.$$

Vergelijken wij dit weer met de in (2.3) gegeven definitie van een bovengrens voor σ dan zien wij dat de bovengrens nu door $\sqrt{\underline{Q}}/\chi_{1-\alpha}$ gegeven wordt. Ter onderscheiding met de bovengrens afgeleid uit de steekproefbreedte zullen wij deze nu met $\underline{s}_b'$ aangeven, dus:

$$\underline{s}_b' \stackrel{def}{=} \sqrt{\underline{Q}}/\chi_{1-\alpha}.$$

Evenzo leiden wij af

$$\underline{s}_o' \stackrel{def}{=} \sqrt{\underline{Q}}/\chi_\beta.$$

1) Engels: maximum likelihood estimates.

Op precies dezelfde wijze, als in paragraaf 5 geschiedde vinden wij nu voor de grootheden $L_{\alpha,\beta}'$ en $M_{\beta,\alpha}'$, waarvoor geldt:

$$P\,[\underline{s}_b' \geqq L_{\alpha,\beta}'\,\sigma] = \beta$$

en

$$P\,[\underline{s}_o' \leqq M_{\beta,\alpha}'\,\sigma] = \alpha$$

dat

$$L_{\alpha,\beta}' = \chi_\beta/\chi_{1-\alpha} \text{ en } M_{\beta,\alpha}' = \chi_{1-\alpha}/\chi_\beta$$

is.

TABEL V. *Vergelijking tussen* $L_{\alpha,\beta}'$ en $L_{\alpha,\beta}$ *afkomstig van de tabellen III en IV voor* $\alpha = \beta = 0{,}05$ (zie tekst).

m	$n = 5$				$n = 7$			
	$m(n\text{-}1)$	$L_{0,05;\,0,05}'$	$L_{0,05;\,0,05}$ Tabel III	$L_{0,05;\,0,05}$ Tabel IV	$m(n\text{-}1)$	$L_{0,05;\,0,05}'$	$L_{0,05;\,0,05}$ Tabel III	$L_{0,05;\,0,05}$ Tabel IV
1	4	3,653	4,143	3,784	6	2,775	3,055	2,926
2	8	2,382	2,522	2,463	12	2,006	2,117	2,091
3	12	2,006	2,090	2,066	18	1,753	1,827	1,816
4	16	1,817	1,880	1,866	24	1,622	1,679	1,672
5	20	1,702	1,752	1,744	30	1,539	1,586	1,582
6	24	1,622	1,665	1,659	36	1,480	1,522	1,518
7	28	1,563	1,601	1,596	42	1,438	1,474	1,472
8	32	1,516	1,551	1,548	48	1,404	1,437	1,435
9	36	1,480	1,512	1,509	54	1,376	1,407	1,405
10	40	1,450	1,479	1,477	60	1,353	1,382	1,380
15	60	1,353	1,375	1,373	90	1,280	1,301	1,300
20	80	1,299	1,317	1,316	—	—	—	—

In tabel V zijn, bij $n = 5$ en $n = 7$ en voor $\alpha = \beta = 0{,}05$ waarden van $L_{\alpha,\beta}'$ met de bijbehorende waarden van $L_{\alpha,\beta}$ uit de steekproefbreedte (afkomstig uit tabel III en IV) opgenomen. Uit deze tabel zien wij dat inderdaad de $L_{\alpha,\beta}$-waarde groter zijn dan de overeenkomstige $L_{\alpha,\beta}'$-waarden, dat wil dus zeggen dat de betrouwbaarheidsgrenzen voor σ berekend uit de gemiddelde steekproefbreedte in de regel verder uit elkaar zullen liggen dan die welke berusten op de kleinste kwadratenschatting. Bovendien blijkt, althans voor $m < 10$, geen enkele m te bestaan waarbij $L_{0,05}'{}_{;\,0,05}$ kleiner is dan $L_{0,05;\,0,05}$ bij $m + 1$. Gebruiken wij nu deze L'-waarden om te bepalen hoeveel steekproeven nodig zijn om te bereiken dat $\underline{s}_b'$, behoudens een zekere waarschijnlijkheid, niet meer dan een gegeven aantal malen σ zal bedragen, dan volgt uit het voorgaande, dat wij bij gebruik van de steekproefbreedte hoogstens één steekproef meer nodig hebben, om aan de de gestelde eisen te voldoen, dan wanneer wij kleinste kwadratenschattingen gebruiken (althans voor $m < 10$ en $\alpha = \beta = 0{,}05$).

Literatuur

[1] P. B. Patnaik, (1950), The use of the mean range as an estimate of variance in statistical tests. Biometrika, **37** (1950), pp. 78-87.

[2] A. Hald, (1952), Statistical Theory with engineering applications. London, Chapman & Hall Ltd., 1952.

[3] A. Hald, (1952*a*), Statistical tables and formulas. By A. Hald, (1952).

[4] E. S. Pearson, (1932), The percentage limits for the distribution of range in samples from a normal population ($n \leqq 100$). Biometrika, **24** (1932), pp. 404-417.

[5] E. S. Pearson and H. O. Hartley, (1954), Biometrika tables for Statistians I. Cambridge, University Press, 1954.

[6] F. E. Grubbs and C. L. Weaver, (1947), The best unbiased estimate of population standard deviation based on group ranges. Journ. Am. Stat. Ass., **42** (1947), pp. 224-241.

0226 NL