# Enige opmerkingen over de berekening van de verwachting en de spreiding van het aantal inconsistenties in een bepaald rangcorrelatieschema *)

door *H. Kesten* en *J. Th. Runnenburg*

S u m m a r y

*Cf. summary of the preceding paper by* P h. v a n E l t e r e n *and* W. F. v a n P e y p e.

## Inleiding

Wij geven hier de principes aan van de methode, die gebruikt is om de verwachting en de spreiding van de toetsingsgrootheid $\underline{d}$ te berekenen voor het speciale schema, dat behandeld is in par. 5 van het voorafgaande artikel. Voor de berekening maken wij gebruik van formule (5.2.5):

(1) $$\underline{d} = \tfrac{1}{2}(A_{max} - \underline{A}) = \tfrac{1}{2}(227\tfrac{1}{2} - \underline{A}).$$

Hierin is $\underline{A}$ de som van de kwadraten van de gereduceerde rijtotalen van het preferentieschema dat uit het beschouwde rangnummerschema kan worden afgeleid (zie par. 5.2).

Uit (1) volgt nu:

(2) $$E\underline{d} = \tfrac{1}{2}(227\tfrac{1}{2} - E\underline{A}) \quad \text{en}$$

(3) $$\sigma^2(\underline{d}) = \tfrac{1}{4}\sigma^2(\underline{A})$$

zodat wij verwachting en spreiding van $\underline{d}$ direct kunnen vinden als wij deze voor $\underline{A}$ berekend hebben.

Per definitie is:

(4) $$\underline{A} \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{14} \underline{\boldsymbol{a}}^2_j$$

als de $\underline{\boldsymbol{a}}_j$ de gereduceerde rijtotalen van het preferentieschema zijn. Volgens formule (5.2.2) geldt dan:

(5) $$\underline{\boldsymbol{a}}_j = \underline{\boldsymbol{s}}_j - \underline{\boldsymbol{u}}_j$$

Hierin is $\underline{\boldsymbol{s}}_j$ het gereduceerde kolomtotaal behorende bij object $O_j$ in het rangnummerschema (zie schema 5.1.1) en $\underline{\boldsymbol{u}}_j$ een grootheid die bepaald wordt door de relaties tussen $O_j$ en het daaraan toegevoegde object waarmee $O_j$

---

*) Appendix bij het artikel: Enige rangcorrelatieschema's door Ph. van Elteren en W. F. van Peype, Statistica Neerlandica 10, p. 177, 1956.

Rapport SP 47A van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam.

driemaal vergeleken wordt. Het gereduceerde kolomtotaal $\underline{\boldsymbol{s}}_j$ is gelijk aan de som van de gereduceerde rangnummers $\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}$ welke aan $O_j$ worden toegekend. In het symbool $\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}$ heeft de index $i$ betrekking op de rangschikking waarin het rangnummer voorkomt; de index $j$ op het gerangschikte object. Het vet cursief gedrukte geeft aan dat het rangnummer gereduceerd is, d.w.z. verminderd is met zijn gemiddelde waarde $3\frac{1}{2}$. De index $j$ kan de waarden 1, 2, . . ., 14 aannemen. Welke waarden de index $i$ kan aannemen, hangt af van de waarde van $j$. Het zijn steeds 3 waarden uit de rij 1, 2, . . ., 7. In schema 5.1.1 geldt bijvoorbeeld bij $j = 1: i = 1$, 5 of 7 en bij $j = 3: i = 1$, 2 of 6.

Wij moeten nu $E\underline{A}$ en $\sigma^2(\underline{A})$ berekenen onder de hypothese $H_0$ gespecificeerd in par. 2.1. Onder deze hypothese vormen de gereduceerde rangnummers in iedere rij een aselecte permutatie van de getallen $-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{5}{2}$. Hieruit volgt, dat ieder gereduceerd rangnummer afzonderlijk deze waarden met gelijke kansen aanneemt. De verdeling van een gereduceerd rangnummer is dus symmetrisch en de verwachting ervan is nul:

$$E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{ij} = 0. \tag{6}$$

Ook de hogere momenten van $\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}$ kunnen gemakkelijk berekend worden. Men vindt bijvoorbeeld:

$$E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}^2 = 3^{-1}.2^{-2}(5^2 + 3^2 + 1^2) = \tfrac{35}{12}, \tag{7}$$

$$E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}^3 = 0, \tag{8}$$

$$E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}^4 = 3^{-1}.2^{-4}(5^4 + 3^4 + 1^4) = \tfrac{707}{48}. \tag{9}$$

Verder zijn onder de hypothese $H_0$ de rijen van het schema onderling onafhankelijk; $\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}$ zal dus onafhankelijk zijn van $\underline{\boldsymbol{r}}_{kj}$ en $\underline{\boldsymbol{r}}_{kl}$ als $k \neq i$ is. Hieruit volgt bijvoorbeeld, als $k \neq i$ is:

$$E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}\,\underline{\boldsymbol{r}}_{kl} = E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}\,E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{kl} = 0, \tag{10}$$

$$E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}\,\underline{\boldsymbol{r}}_{kl}^2 = E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}\,E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{kl}^2 = 0, \tag{11}$$

$$E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}^2\,\underline{\boldsymbol{r}}_{kl}^2 = E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}^2\,E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{kl}^2 = (E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}^2)^2 = \tfrac{35^2}{12^2} = \tfrac{1225}{144}. \tag{12}$$

De tweede overgang in (12) volgt uit het feit, dat alle $\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}$ *dezelfde* verdeling hebben. De grootheid $\underline{\boldsymbol{s}}_j$ is de som van drie onafhankelijke stochastische grootheden, met dezelfde verdeling en dus geldt:

$$E\,\underline{\boldsymbol{s}}_j = 3\,E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{ij} = 0, \tag{13}$$

$$E\,\underline{\boldsymbol{s}}_j^2 = 3\,E\,\underline{\boldsymbol{r}}^2_{ij} = 3.\tfrac{35}{12} = \tfrac{35}{4}. \tag{14}$$

Uit de in par. 5.2 gegeven definitie van $\underline{\boldsymbol{u}}_j$ volgt:

$\underline{u}_1 = +\,1$ en $\underline{u}_2 = -\,1$ als $\underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}$, $\underline{r}_{51} > \underline{r}_{52}$ en $\underline{r}_{71} > \underline{r}_{72}$,
$\underline{u}_1 = -\,1$ en $\underline{u}_2 = +\,1$ als $\underline{r}_{11} < \underline{r}_{12}$, $\underline{r}_{51} < \underline{r}_{52}$ en $\underline{r}_{71} < \underline{r}_{72}$,
$\underline{u}_1 = \phantom{+}\,0$ en $\underline{u}_2 = \phantom{+}\,0$ in de overige gevallen.

Wij merken op, dat $\underline{u}_1 = -\underline{u}_2$ is (evenzo $\underline{u}_3 = -\underline{u}_4$ enz. voor de andere paren toegevoegde objecten). Verder is de verdeling van $\underline{u}_1$ gemakkelijk te vinden, immers:

$$P\,[\underline{u}_1 = 1] = P\,[\underline{r}_{11} > \underline{r}_{12} \text{ en } \underline{r}_{51} > \underline{r}_{52} \text{ en } \underline{r}_{71} > \underline{r}_{72}] = \{P\,[\underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}]\}^3.$$

De laatste overgang geldt vanwege de onafhankelijkheid der rijen en de identiteit van de verdelingen der $\underline{r}_{ij}$. Onder de nulhypothese geldt uiteraard:

$$P\,[\underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}] = P\,[\underline{r}_{11} < \underline{r}_{12}] = \tfrac{1}{2}$$

dus is

$$P\,[\underline{u}_1 = +\,1] = P\,[\underline{u}_1 = -\,1] = \tfrac{1}{8} \tag{15}$$

en

$$P\,[\underline{u}_1 = 0] = 1 - \tfrac{2}{8} = \tfrac{3}{4}. \tag{16}$$

Hiermee is de waarschijnlijkheidsverdeling van $\underline{u}_1$ volledig gegeven; men vindt:

$$E\,\underline{u}_1 = E\,\underline{u}_1^3 = 0\,;\; E\,\underline{u}_1^2 = E\,\underline{u}_1^4 = \tfrac{1}{4} \text{ enz.} \tag{17}$$

Analoge formules gelden voor $\underline{u}_2$ t/m $\underline{u}_{14}$.

**Verwachting van $\underline{d}$**

Wij zullen nu de afleiding van $E\,\underline{A}$ vrij uitvoerig behandelen, om te laten zien hoe wij van de op de vorige bladzijden aangegeven principes gebruik kunnen maken. Wij zullen ons daarna beperken tot het aangeven van de hoofdlijnen bij de afleiding van $\sigma^2\,(\underline{A})$.

Volgens (4) geldt:

$$\begin{aligned} E\,\underline{A} = E \sum_{j=1}^{14} \underline{a}_j^2 = 14\,E\,\underline{a}_1^2 = 14\,E\,(\underline{s}_1 - \underline{u}_1)^2 = \\ = 14\,E\,\underline{s}_1^2 - 28\,E\,\underline{s}_1\underline{u}_1 + 14\,E\,\underline{u}_1^2. \end{aligned} \tag{18}$$

De eerste en de laatste term kennen wij reeds (zie (14) en (17). Wij moeten dus alleen $E\,\underline{s}_1\underline{u}_1$ nog berekenen. Omdat de grootheden $\underline{s}_1$ en $\underline{u}_1$ afhankelijk zijn, gaan wij als volgt te werk:

$$\begin{aligned} E\,\underline{s}_1\underline{u}_1 = 1.P\,[\underline{u}_1 = 1]\,E\,(\underline{s}_1 \mid \underline{u}_1 = +\,1) + 0.P\,[\underline{u}_1 = 0]\,E\,(\underline{s}_1 \mid \underline{u}_1 = 0) + \\ - 1.P\,[\underline{u}_1 = -\,1]\,E\,(\underline{s}_1 \mid \underline{u}_1 = -\,1). \end{aligned}$$

Onder $E(\underline{s}_1 \mid \underline{u}_1 = +1)$ verstaan wij hierbij: de verwachting van $\underline{s}_1$ onder de voorwaarde $\underline{u}_1 = +1$ enz. In verband met (15) vinden wij nu:

$$(19) \qquad E\,\underline{s}_1\underline{u}_1 = \tfrac{1}{8}\,E(\underline{s}_1 \mid \underline{u}_1 = +1) - \tfrac{1}{8}\,E(\underline{s}_1 \mid \underline{u}_1 = -1).$$

Nu is:

$$E(\underline{s}_1 \mid \underline{u}_1 = +1) = E(\underline{r}_{11} + \underline{r}_{51} + \underline{r}_{71} \mid \underline{u}_1 = +1) =$$
$$= E(\underline{r}_{11} \mid \underline{u}_1 = +1) + E(\underline{r}_{51} \mid \underline{u}_1 = +1) + E(\underline{r}_{71} \mid \underline{u}_1 = +1).$$

Vanwege de onafhankelijkheid der rijen, kunnen wij voor de eerste term de voorwaarde $\underline{u}_1 = +1$ reduceren tot $\underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}$ en voor de andere termen tot analoge ongelijkheden; wij vinden zodoende:

$$(20) \quad E(\underline{s}_1 \mid \underline{u}_1 = +1) = E(\underline{r}_{11} \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}) + E(\underline{r}_{51} \mid \underline{r}_{51} > \underline{r}_{52}) +$$
$$+ E(\underline{r}_{71} \mid \underline{r}_{71} > \underline{r}_{72}) = 3E(\underline{r}_{11} \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}).$$

Onder de voorwaarde $\underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}$ zijn er voor $\underline{r}_{11}$ de volgende mogelijkheden:

| $2\underline{r}_{12}$ | $2\,\underline{r}_{11}$ | Som der waarden van $2\,\underline{r}_{11}$ |
|---|---|---|
| $-5$ | $-3,\ -1,\ +1,\ +3,\ +5$ | $+5$ |
| $-3$ | $-1,\ +1,\ +3,\ +5$ | $+8$ |
| $-1$ | $+1,\ +3,\ +5$ | $+9$ |
| $+1$ | $+3,\ +5$ | $+8$ |
| $+3$ | $+5$ | $+5$ |
| | Totaal: | $+35$ |

In totaal zijn er voor $2\underline{r}_{11}$ onder deze voorwaarde dus 15 even waarschijnlijke mogelijkheden met som 35.

Dus is: $\qquad E(2\,\underline{r}_{11} \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}) = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$,

$$(21) \qquad E(\underline{r}_{11} \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{7}{3} = \tfrac{7}{6}.$$

Uit symmetrieoverwegingen volgt nu direct:

$$(22) \qquad E(\underline{r}_{11} \mid \underline{r}_{11} < \underline{r}_{12}) = -\tfrac{7}{6}.$$

Men vindt nu:

$$E(\underline{s}_1 \mid \underline{u}_1 = +1) = 3 \cdot \tfrac{7}{6} = \tfrac{7}{2};\ E(\underline{s}_1 \mid \underline{u}_1 = -1) = -\tfrac{7}{2} \text{ (zie 20)}$$

en:

$$(23) \qquad E\,\underline{s}_1\underline{u}_1 = \tfrac{1}{8} \cdot 2 \cdot \tfrac{7}{2} = \tfrac{7}{8} \text{ (zie (19))}.$$

Wij kunnen nu onze resultaten (14), (17) en (23) invullen in formule (18) en vinden:

$$E\,\underline{A} = 14 \cdot \tfrac{35}{4} - 28 \cdot \tfrac{7}{8} + \tfrac{14}{4} = 101\tfrac{1}{2}. \tag{24}$$

Dus volgens (2) is:

$$E\,\underline{d} = \tfrac{1}{2}(227\tfrac{1}{2} - 101\tfrac{1}{2}) = 63. \tag{25}$$

**Variantie van $\underline{\boldsymbol{d}}$**

De variantie van $\underline{A}$ berekenen wij als volgt:

$$\sigma^2(\underline{A}) = E\,\underline{A}^2 - (E\,\underline{A})^2 = E\,\underline{A}^2 - (101\tfrac{1}{2})^2. \tag{26}$$

Nu is:

$$E\,\underline{A}^2 = E(\sum_{j=1}^{14} \underline{\boldsymbol{a}}_j^2)^2 = \sum_{j=1}^{14} E\,\underline{\boldsymbol{a}}_j^4 + 2 \sum_{j<k} E\,\underline{\boldsymbol{a}}_j^2\,\underline{\boldsymbol{a}}_k^2.$$

Alle termen $E\,\underline{\boldsymbol{a}}_j^4$ zijn gelijkwaardig. Dit geldt niet voor de termen $E\,\underline{\boldsymbol{a}}_j^2\,\underline{\boldsymbol{a}}_k^2$ $(j < k)$. Als $O_j$ en $O_k$ toegevoegde objecten zijn, heeft deze term een andere waarde dan wanneer dit niet het geval is. Er zijn in totaal $\tfrac{1}{2}.14.13 = 91$ paren, waaronder 7 bestaande uit twee toegevoegde objecten. We kunnen dus schrijven:

$$E\,\underline{A}^2 = 14\,E\,\underline{\boldsymbol{a}}_1^4 + 2.7\,E\,\underline{\boldsymbol{a}}_1^2\,\underline{\boldsymbol{a}}_2^2 + 2.84\,E\,\underline{\boldsymbol{a}}_1^2\,\underline{\boldsymbol{a}}_3^2 \tag{27}$$

($O_1$ en $O_2$ zijn toegevoegde, $O_1$ en $O_3$ niet toegevoegde objecten).

De berekening van de termen uit het rechterlid van (27) is vrij tijdrovend, vooral die van de laatste term. Het principe is steeds, dat men de momenten van de grootheden $\underline{\boldsymbol{a}}_j$ herleidt tot momenten of simultane momenten van de gereduceerde rangnummers, al dan niet met nevenvoorwaarden. Men maakt daarbij gebruik van de onafhankelijkheid der rijen, van de symmetrie en het onderling gelijk zijn van de verdelingen der $\underline{\boldsymbol{r}}_{ij}$ en van de mogelijkheid om bepaalde waarden van $\underline{\boldsymbol{u}}_j$ te interpreteren als ongelijkheden tussen rangnummers. Zo vindt men:

$$E\,\underline{\boldsymbol{a}}_1^4 = E(\underline{\boldsymbol{s}}_1 - \underline{\boldsymbol{u}}_1)^4 = E\,\underline{\boldsymbol{s}}_1^4 - 4\,E\,\underline{\boldsymbol{s}}_1^3\underline{\boldsymbol{u}}_1 + 6\,E\,\underline{\boldsymbol{s}}_1^2\underline{\boldsymbol{u}}_1^2 - 4\,E\,\underline{\boldsymbol{s}}_1\underline{\boldsymbol{u}}_1^3 + E\,\underline{\boldsymbol{u}}_1^4, \tag{28}$$

waarin:

$$E\,\underline{\boldsymbol{s}}_1^4 = 3\,\{E\underline{\boldsymbol{r}}_{11}^4 + 6(E\,\underline{\boldsymbol{r}}_{11}^2)^2\} = 3(\tfrac{707}{48} + 6 \cdot \tfrac{35^2}{12^2}) = \tfrac{3157}{16}, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} E\,\underline{\boldsymbol{s}}_1^3\underline{\boldsymbol{u}}_1 &= \tfrac{1}{4}\,E(\underline{\boldsymbol{s}}_1^3 \mid \underline{\boldsymbol{u}}_1 = +1) = \tfrac{1}{4}\{3\,E(\underline{\boldsymbol{r}}_{11}^3 \mid \underline{\boldsymbol{r}}_{11} > \underline{\boldsymbol{r}}_{12}) + \\ &+ 3.6.E(\underline{\boldsymbol{r}}_{11}^2 \mid \underline{\boldsymbol{r}}_{11} > \underline{\boldsymbol{r}}_{12})\,E(\underline{\boldsymbol{r}}_{11} \mid \underline{\boldsymbol{r}}_{11} > \underline{\boldsymbol{r}}_{12}) + 6\,[E(\underline{\boldsymbol{r}}_{11} \mid \underline{\boldsymbol{r}}_{11} > \underline{\boldsymbol{r}}_{12})]^3\} = \\ &= \tfrac{1}{4}\{3 \cdot \tfrac{707}{120} + 3.6 \cdot \tfrac{35}{12} \cdot \tfrac{7}{6} + 6(\tfrac{7}{6})^3\} = \tfrac{31843}{1440}, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} E\,\underline{\boldsymbol{s}}_1^2\underline{\boldsymbol{u}}_1^2 &= \tfrac{1}{4}\,E(\underline{\boldsymbol{s}}_1^2 \mid \underline{\boldsymbol{u}}_1 = +1) = \tfrac{1}{4}\{3\,E(\underline{\boldsymbol{r}}_{11}^2 \mid \underline{\boldsymbol{r}}_{11} > \underline{\boldsymbol{r}}_{12}) + \\ &+ 2.3\,[E(\underline{\boldsymbol{r}}_{11} \mid \underline{\boldsymbol{r}}_{11} > \underline{\boldsymbol{r}}_{12})]^2\} = \tfrac{1}{4}\{3 \cdot \tfrac{35}{12} + 2.3 \cdot (\tfrac{7}{6})^2\} = \tfrac{203}{48}, \end{aligned} \tag{31}$$

$$E\,\underline{\boldsymbol{s}}_1\underline{\boldsymbol{u}}_1^3 = E\,\underline{\boldsymbol{s}}_1\underline{\boldsymbol{u}}_1 = \tfrac{7}{8} \qquad \text{(zie (23))}. \tag{32}$$

Men kan nu de resultaten (29) t/m (32) en (17) in (28) substitueren en men vindt dan:

$$E\,\underline{a}_1^4 = \tfrac{94309}{720}. \tag{33}$$

De beide andere termen van (27) zijn nog iets gecompliceerder omdat zij simultane momenten van twee afhankelijke stochastische grootheden zijn. Bij ontwikkeling verkrijgt men simultane momenten van de gereduceerde rangnummers, die moeilijker te berekenen zijn. Wij vinden:

$$\begin{aligned} E\,\underline{a}_1^2\underline{a}_2^2 &= E(\underline{s}_1 - \underline{u}_1)^2(\underline{s}_2 - \underline{u}_2)^2 = E(\underline{s}_1 - \underline{u}_1)^2(\underline{s}_2 + \underline{u}_1)^2 = \\ &= E\,\underline{s}_1^2\,\underline{s}_2^2 + 2\,E\,\underline{s}_1^2\,\underline{u}_1^2 + E\,\underline{u}_1^4 - 4\,E\,\underline{s}_1\underline{u}_1\underline{s}_2^2 + \\ &\quad - 4\,E\,\underline{s}_1\underline{u}_1^3 - 4\,E\,\underline{s}_1\underline{u}_1^2\underline{s}_2\,, \end{aligned} \tag{34}$$

waarin:

$$E\,\underline{s}_1^2\underline{s}_2^2 = 3E\,\underline{r}_{11}^2\underline{r}_{12}^2 + 12(E\,\underline{r}_{11}\underline{r}_{12})^2 + 6(E\,\underline{r}_{11}^2)^2 = \tfrac{6153}{80}\,, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} E\,\underline{s}_1\underline{u}_1\underline{s}_2^2 &= \tfrac{1}{4}\,E(\underline{s}_1\underline{s}_2^2 \mid \underline{u}_1 = +1) = \tfrac{1}{4}\,\{3\,E(\underline{r}_{11}\,\underline{r}_{12} \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}) + \\ &+ 6\,E(\underline{r}_{11} \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12})\,E(\underline{r}_{12}^2 \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}) + \\ &+ 12\,E(\underline{r}_{12} \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12})\,E(\underline{r}_{11}\,\underline{r}_{12} \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}) + \\ &+ 6[E(\underline{r}_{11} \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12})]^3\} = \tfrac{16051}{1440}, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} E(\underline{s}_1\underline{u}_1^2\underline{s}_2) &= \tfrac{1}{4}\,E(\underline{s}_1\underline{s}_2 \mid \underline{u}_1 = +1) = \\ &= \tfrac{3}{4}\,E(\underline{r}_{11}\underline{r}_{12} \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}) - \tfrac{6}{4}[E\,(\underline{r}_{11} \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12})]^2 = -\,\tfrac{119}{48}. \end{aligned} \tag{37}$$

Verder uit (34) t/m (37), tevens gebruik makend van (31), (23) en (17):

$$E\,\underline{a}_1^2\,\underline{a}_2^2 = \tfrac{6833}{144}\,. \tag{38}$$

De laatste term van (27) wordt:

$$\begin{aligned} E\,\underline{a}_1^2\underline{a}_3^2 = E\,\underline{s}_1^2\underline{s}_3^2 + 2\,E\,\underline{s}_1^2\underline{u}_3^2 + E\,\underline{u}_1^2\underline{u}_3^2 - 4\,E\,\underline{s}_1^2\underline{s}_3\underline{u}_3 + \\ - 4\,E\,\underline{s}_1\underline{u}_1\underline{u}_3^2 + 4\,E\,\underline{s}_1\underline{u}_1\underline{s}_2\underline{u}_2. \end{aligned} \tag{39}$$

Hierin is:

$$E\,\underline{s}_1^2\underline{s}_3^2 = E\,\underline{r}_{11}^2\underline{r}_{13}^2 + 8(E\,\underline{r}_{11}^2)^2 = \tfrac{54229}{720}, \tag{40}$$

en omdat $\underline{s}_1$ onafhankelijk is van $\underline{u}_3$:

$$E\,\underline{s}_1^2\underline{u}_3^2 = E\,\underline{s}_1^2\,E\,\underline{u}_3^2 = \tfrac{35}{16}, \tag{41}$$

$$E\,\underline{u}_1^2\underline{u}_3^2 = (E\,\underline{u}_1^2)^2 = \tfrac{1}{16}, \tag{42}$$

$$E\,\underline{s}_1^2\underline{s}_3\underline{u}_3 = \tfrac{1}{4}\,\{E(\underline{r}_{11}\underline{r}_{13}^2 \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}) + 8\,E(\underline{r}_{11} \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12})\,E\,\underline{r}_{11}^2\}. \tag{43}$$

De berekening van de eerste term tussen de accolades in het rechterlid van

(43) is iets moeilijker, omdat hierin 3 afhankelijke grootheden voorkomen. Wij moeten dan bij ieder der 15 mogelijke combinaties van $\underline{r}_{11}$ en $\underline{r}_{12}$ met $\underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}$ de nog voor $\underline{r}_{13}$ overblijvende waarden kwadrateren en vermenigvuldigen met $\underline{r}_{11}$ en daarna delen door het aantal van deze overblijvende waarden (dit zijn 4 waarden bij iedere combinatie van $\underline{r}_{11}$ en $\underline{r}_{12}$ dus in totaal $4.15 = 60$). Wij vinden zodoende

$$E\,(\underline{r}_{11}\underline{r}_{13}{}^2 \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}) = \tfrac{371}{120}\,,$$

en

$$E\,\underline{s}_1{}^2\underline{s}_3\underline{u}_3 = \tfrac{10913}{1440}\,. \tag{44}$$

Verder is:

$$E\,\underline{s}_1\underline{u}_1\underline{u}_3{}^2 = E\,\underline{s}_1\underline{u}_1\,E\,\underline{u}_3{}^2 = \tfrac{7}{32} \tag{45}$$

en

$$E\,\underline{s}_1\underline{u}_1\underline{s}_3\underline{u}_3 = 2^{-5}\,\{E(\underline{s}_1\underline{s}_3 \mid \underline{u}_1 = +1,\, \underline{u}_3 = +1) + {} \tag{46}$$

Hierin is:

$$+ E(\underline{s}_1\underline{s}_3 \mid \underline{u}_1 = +1,\, \underline{u}_3 = -1)\}.$$

$$E(\underline{s}_1\underline{s}_3 \mid \underline{u}_1 = +1,\, \underline{u}_3 = +1) = E\,(\underline{r}_{11}\underline{r}_{13} \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12},\, \underline{r}_{13} > \underline{r}_{14}) + {} + 8\,[E(\underline{r}_{11} \mid \underline{r}_{11} > \underline{r}_{12})]^2. \tag{47}$$

In de eerste term in het rechterlid van (47) komen vier afhankelijke stochastische grootheden voor. Wij moeten nu bij iedere combinatie van waarden van $\underline{r}_{12}$ en $\underline{r}_{14}$ nagaan welke mogelijkheden er zijn voor $\underline{r}_{11}$ en $\underline{r}_{13}$ die voldoen aan: $\underline{r}_{11} > \underline{r}_{12}$ en $\underline{r}_{13} > \underline{r}_{14}$, bijvoorbeeld:

bij $2\underline{r}_{12} = -5$; $2\underline{r}_{14} = -3$ heeft men $2\underline{r}_{11} = -1, +1, +3, +5$
en $2\underline{r}_{13} = -1, +1, +3, +5$.

Voor $\underline{r}_{11}$ en $\underline{r}_{13}$ heeft men dus in dit geval ieder 4 waarden. Deze rangnummers kunnen echter niet aan elkaar gelijk zijn; er resulteren dus $16 - 4 = 12$ mogelijkheden. De som van de waarden die $4.\underline{r}_{11}.\underline{r}_{13}$ aan kan nemen bij $2\,\underline{r}_{12} = -5$, $2\underline{r}_{14} = -3$ is nu:

$$(-1 + 1 + 3 + 5)(-1 + 1 + 3 + 5) - 1^2 - 1^2 - 3^2 - 5^2 = 28.$$

Evenzo heeft men bij:

$2\underline{r}_{12} = -5$ en $2\underline{r}_{14} = -1$; $2\underline{r}_{11} = -3, +1, +3, +5$ en $2\underline{r}_{13} = +1, +3, +5$.

Het aantal mogelijkheden is $4.3 - 3 = 9$. De som van $4\underline{r}_{11}\underline{r}_{13}$ over deze mogelijkheden wordt

$$(-3 + 1 + 3 + 5)\,(1 + 3 + 5) - 1^2 - 3^2 - 5^2 = 19 \text{ enz.}$$

Men vindt op deze wijze:

$$(48) \qquad E\,(\underline{\boldsymbol{r}}_{11}\underline{\boldsymbol{r}}_{13} \mid \underline{\boldsymbol{r}}_{11} > \underline{\boldsymbol{r}}_{12}, \underline{\boldsymbol{r}}_{13} > \underline{\boldsymbol{r}}_{14}) = \tfrac{133}{180}\,.$$

In $E(\underline{\boldsymbol{s}}_1\underline{\boldsymbol{s}}_3 \mid \underline{\boldsymbol{u}}_1 = +1, \underline{\boldsymbol{u}}_3 = -1)$ komt de term $E(\underline{\boldsymbol{r}}_{11}\underline{\boldsymbol{r}}_{13} \mid \underline{\boldsymbol{r}}_{11} > \underline{\boldsymbol{r}}_{12}, \underline{\boldsymbol{r}}_{13} < \underline{\boldsymbol{r}}_{14})$ voor. Men vindt hiervoor $-\tfrac{343}{180}$; de berekening is analoog aan die van het resultaat (48). Daarna wordt uit (46) t/m (48) gevonden:

$$(49) \qquad E\;\underline{\boldsymbol{s}}_1\underline{\boldsymbol{u}}_1\underline{\boldsymbol{s}}_3\underline{\boldsymbol{u}}_3 = \tfrac{1099}{1440}\,.$$

Door de resultaten (40), (41), (42), (44), (45) en (49) in te vullen in (39) vindt men:

$$(50) \qquad E\;\underline{\boldsymbol{a}}_1{}^2\underline{\boldsymbol{a}}_3{}^2 = \frac{18583}{360}\,.$$

De resultaten (33), (38) en (50) worden nu gesubstitueerd in (27); men vindt dan:

$$E\,\underline{A}^2 = \frac{2010631}{180}\,,$$
$$\sigma^2(\underline{A}) = E\underline{A}^{\,2} - (101\tfrac{1}{2})^2 = \frac{78113}{90}\,,$$
$$\sigma^2\,(\underline{d}) = \tfrac{1}{4}\sigma^2\,(\underline{A}) = \frac{78113}{360} = 216{,}98\,.$$