Itérations markoviennes dans les ensembles abstraits;

Par D. van DANTZIG (1) et G. ZOUTENDIJK (2).

PRÉFACE.

Au colloque International sur le calcul des Probabilités et ses Applications, tenu à Lyon en 1948 sous la présidence inspirante de M. Fréchet, l'un de nous présenta une forme généralisée de la méthode des fonctions génératrices, appelée la méthode des marques collectives [1]. Dans un travail plus récent [2] cette méthode fut utilisée pour déduire les propriétés des probabilités d'absorption (ou de premier passage par un sous-ensemble) pour les chaînes de Markof stationnaires dans un ensemble abstrait arbitraire. Inspiré par les recherches de M. Fréchet [3], l'auteur du premier Mémoire appliqua sa méthode e. a. aux itérations bernoulliennes. Or, avec une certaine modification, on peut généraliser ces résultats aux itérations markoviennes dans un espace abstrait arbitraire E, en faisant usage du calcul matriciel généralisé et des matrices collectives, développé dans [2].

Nous obtiendrons comme résultat principal la matrice collective des nombres d'itérations (ou séjours ininterrompus d'une longueur finie arbitraire dans des sous-ensembles donnés, qui constituent une partition dénombrable de E). De celle-ci on peut déduire toutes les propriétés qu'on veut des nombres d'itérations plus spéciales, comme nous le démontrerons par quelques exemples. En outre, dans le

(1) Mathematisch Centrum, Amsterdam.
(2) Koninklijke/Shell-Laboratorium, Amsterdam.

paragraphe 6 il sera possible de considérer les résultats principaux de la première partie du Mémoire [2] comme des cas spéciaux de notre théorie.

1. Le calcul matriciel généralisé. — Soit E un ensemble arbitraire, σ_E un σ-corps de sous-ensembles de E, contenant E. Considérons une fonction (disons : réelle) M, définie sur $E\times\sigma_E$. La valeur qu'elle prend sur un élément (x, X) de $E\times\sigma_E$ (donc $x\in E$, $X\in\sigma_E$) sera dénotée par M_X^x. Supposons :

1° Pour chaque $X\in\sigma_E$ fixé M_X^x est une fonction mesurable de x par rapport au σ-corps σ_E;

2° Pour chaque $x\in E$ fixé M_X^x est une fonction σ-additive de X.

Une fonction M_X^x satisfaisant aux conditions 1° et 2° est appelée une matrice (généralisée). Le calcul matriciel ordinaire peut y être appliqué en employant l'intégration de Lebesgue-Stieltjes-Radon au lieu de la sommation, pourvu que toutes les matrices dont on s'occupe satisfassent à quelques conditions simples. Celles-ci sont par exemple remplies si les matrices sont bornées, c'est-à-dire ont la norme finie. Celle-ci est définie par

$$\|M\| \overset{\text{def}}{=} \sup_x \sup_{\{X_n\}} \sum\nolimits^n |M_{X_n}^x|, \tag{1}$$

ou $\{X_n\}$ parcourt toutes les partitions dénombrables de E en sous-ensembles mesurables et disjoints X_1, X_2, ...

Rappelons quelques-unes des propriétés principales de ces normes (*voir* aussi [2]). On a

$$\begin{cases} \|M+N\| \leq \|M\| + \|N\| \\ \|cM\| = |c|.\|M\| \qquad (c \text{ étant un nombre}). \end{cases} \tag{2}$$

Pour une matrice M non négative ($M_X^x \geq 0$ pour chaque x et X), on a

$$\|M\| = \sup_x M_E^x \tag{3}$$

et si M et N sont non négatives

$$\|M\| \leq \|M+N\|. \tag{4}$$

Nous écrirons MN pour le produit matriciel généralisé de deux matrices M et N. Il est défini par ses « composants » $(MN)^x_X$

(5) $$(MN)^x_X \overset{\text{def}}{=} \int_E M^x_{dy} N^y_X,$$

où dans le membre droit la même notation a été utilisée que dans [2]. Dans cet article (§ 8) on a démontré, par exemple si M et N sont bornées, que :

1° MN est aussi une matrice (donc satisfait aux conditions 1° et 2° ci-dessus) et

(6) $$\| MN \| \leqq \| M \| . \| N \|;$$

2° la multiplication matricielle généralisée est associative

(7) $$M(NQ) = (MN)Q,$$

c'est-à-dire

$$\int_E M^x_{dy} (NQ)^y_X = \int_E (MN)^x_{dy} Q^y_X.$$

Une matrice spéciale est la matrice unitée I ayant les « composants »

(8) $$\mathrm{I}^x_X \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X, \\ 0 & \text{si } x \notin X. \end{cases}$$

On a

(9) $$\mathrm{I}M = M\mathrm{I} = M.$$

Plus généralement on peut définir pour un ensemble arbitraire $A \in \sigma_E$ la matrice I_A, déterminée par

(10) $$(\mathrm{I}_A)^x_X \overset{\text{def}}{=} \mathrm{I}^x_{A \cap X}$$

et l'on a

(11) $$(\mathrm{I}_A M)^x_X = \int_E (\mathrm{I}_A)^x_{dy} M^y_X = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A, \\ M^x_X & \text{si } x \in A, \end{cases}$$

(12) $$(M\mathrm{I}_A)^x_X = \int_E M^x_{dy} (\mathrm{I}_A)^y_X = M^x_{A \cap X},$$

(13) $$\| \mathrm{I}_A \| = 1 \qquad (A \neq 0),$$

(14) $$\mathrm{I}_A \mathrm{I}_B = \mathrm{I}_{A \cap B},$$

(15) $$\mathrm{I}_{A \cup B} = \mathrm{I}_A + \mathrm{I}_B$$

si $A \cap B = 0$.

Une condition suffisante pour la convergence de $\sum_1^\infty{}_n (M_n)_X^x$ pour tout x et X est la convergence de $\sum_1^\infty{}_n \| M_n \|$. Dans ce cas, $N_X^x = \sum_1^\infty{}_n (M_n)_X^x$ est une matrice aussi. Il en résulte, en particulier, que si $\| M \| < 1$, donc d'après (6), $\| M^n \| \leq \| M \|^n < 1$, M^n désignant la $n^{\text{ième}}$ puissance matricielle de M, $\sum_0^\infty M^n$ converge et est la seule inverse (à droite et à gauche) de $\mathrm{I} - M$

$$(16)\qquad (\mathrm{I} - M)^{-1} = \sum_0^\infty{}_n M^n \quad \text{si } \| M \| < 1 \qquad (M^0 = \mathrm{I}).$$

Une équation intégrale de la forme

$$(17)\qquad M = A + BM$$

peut être résolue par itération si $\| B \| < 1$,

$$(18)\qquad M = (\mathrm{I} - B)^{-1} A = \sum_0^\infty{}_n B^n A \quad \text{si } \| B \| < 1.$$

Si la matrice M dépend d'un paramètre s et si, pour chaque $x \in E$ et $X \in \sigma_E$,

$$\left(\frac{dM}{ds}\right)_X^x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \succ 0} \frac{1}{h} \{ (M(s+h))_X^x - (M(s))_X^x \}$$

existe et si $\frac{dM}{ds}$ est aussi une matrice, uniformément bornée dans un certain intervalle de valeurs de s, alors on a les règles de différentiation suivantes

$$(19)\qquad \frac{d}{ds}(MN) = M \frac{dN}{ds} + \frac{dM}{ds} N,$$

$$(20)\qquad \frac{d}{ds}(M^n) = \sum_0^{n-1}{}_i M^i \frac{dM}{ds} M^{n-1-i},$$

$$(21)\qquad \frac{d}{ds}(\mathrm{I} - M)^{-1} = (\mathrm{I} - M)^{-1} \frac{dM}{ds} (\mathrm{I} - M)^{-1} \qquad (\| M \|) < 1)$$

2. Les itérations markoviennes. Théorie générale. — Considérons une chaîne de Markof stationnaire (et discrète dans le temps) sur un ensemble d'états E. Elle est déterminée par les probabilités de transition P_X^x. Ici P_X^x est la probabilité pour qu'un système passe dans une seule transition d'une position $x \in E$ à un état quelconque appartenant à $X \in \sigma_E$, ou, en d'autres termes, qu'un « point mobile » « saute » de x dans le sous-ensemble $X \in \sigma_E$. Supposons que la fonction P_X^x satisfait aux conditions 1° et 2° du premier chapitre et que

$$\left\{\begin{array}{ll} P_X^x \geqq 0 & \text{pour tout } x \in E \text{ et } X \in \sigma_E, \\ P_E^x = 1 & \text{pour tout } x \in E. \end{array}\right. \tag{22}$$

Donc

$$\| P \| = 1. \tag{23}$$

Supposons, en outre, que le point mobile peut continuer sa route si et seulement si un événement déterminé $\mathcal{V}$ a lieu, disons qu'un feu rouge change temporairement en vert, et que le fait que $\mathcal{V}$ ait lieu ou non sera décidé chaque fois au moyen d'un jeu de hasard, avec une probabilité $z < 1$ contre $1 - z$, indépendante de toutes les autres (3). Donc les sauts s'arrêtent si le changement de feu n'a pas lieu et à chaque moment il y a une probabilité $1 - z$ pour que les sauts s'arrêtent et le processus soit fini.

Soit donnée une partition dénombrable $\{B_\lambda\}$ de sous-ensembles mesurables de E

$$\sum{}^{\lambda} B_\lambda = E, \qquad B_\lambda \cap B_\mu = 0 \quad \text{si } \lambda \neq \mu. \tag{24}$$

Définition. — Une itération de la longueur $l \geqq 1$ dans B_λ est une éventualité qui arrive si et seulement si à l moments consécutifs, le point mobile *part* d'un état de B_λ (4).

Une itération est appelée complète si elle n'est pas partie d'une itération plus longue.

---

(3) Dans [2] on avait admis que z soit une fonction de l'état où le point se trouve. La plupart des considérations présentes admettent une même généralisation.

(4) Si l'on fait usage de la définition évidente qu'une itération de la longueur l dans B_λ a lieu si le point mobile *se trouve* dans B_λ à l moments consécutifs, il faut convenir au cas où les sauts s'arrêtent de ne pas compter le dernier état. Par suite de cette convention les deux définitions sont équivalentes. Elle n'est importante que pour la dernière itération. *Voir* aussi la note (9).

Utilisant la terminologie des deux articles [1] et [2] nous introduirons un autre évènement auxiliaire $\mathcal{C}$, que nous appellerons « catastrophe » — disons que le feu se dérange (désigné brièvement par « feu noir »). Nous supposerons que chaque fois que le point mobile aura accompli une itération complète, il y aura une probabilité déterminée, dépendant seulement du type et de la longueur de l'itération, pour que $\mathcal{C}$ arrive. Si l'itération justement complétée a le type λ et la longueur l, cette probabilité sera $1 - s_{\lambda l}$ (5).

De cette manière il sera possible de classifier les itérations par rapport à leur type et leur longueur.

Donc $s_{\lambda l}$ est la probabilité de manque de catastrophe à condition que :

1° le point mobile saute au moins l fois ($l \geqq 1$);
2° on obtienne une itération de la longueur l dans B_λ;
3° elle soit complète.

Un point mobile qui commence ses sauts en un état $x \in E$ peut accomplir une itération complète du type λl et se trouver après cela dans $X \in \sigma_E$ pendant que :

1° il se trouve aussi dans $A_\lambda = E - B_\lambda$, de sorte qu'il a quitté B_λ pendant le $l^{\text{ième}}$ saut;

2° il se trouve toujours dans B_λ, mais les sauts s'arrêtent par suite du feu rouge.

La probabilité pour que 1° soit rempli est $z^l\{(\mathrm{I}_{B_\lambda} P)^l \mathrm{I}_{A_\lambda}\}_X^x$; celle pour 2° $z^l\{(\mathrm{I}_{B_\lambda} P)^l \mathrm{I}_{B_\lambda}(1 - z)\}_X^x$.

Donc, dénotant par $(S_{\lambda l})_X^x$ la probabilité pour qu'un point mobile qui part de x accomplisse une itération complète du type λl après laquelle il se trouve dans X sans que la catastrophe n'ait eu lieu,

(5) Dans [1] on dénotait cette probabilité par $1 - \mathrm{I}_{\lambda l}$. D'ailleurs la catastrophe y fut liée aux itérations semi-complètes au lieu des itérations complètes. A cause de cela l'interprétation probabiliste de R_λ et la démonstration de la formule (59) dans [1] ne sont pas correctes, quoique le résultat soit bien exact (Note de D. van Dantzig).

on a

$$\begin{aligned}\{ S_{\lambda l} \}_X^x &= z^l s_{\lambda l} \int_E \{ (\mathrm{I}_{B_\lambda} P)^l \}_{dy}^x \{ \mathrm{I}_{A_\lambda} + (1 - z)\, \mathrm{I}_{B_\lambda} \}_X^y \\ &= z^l s_{\lambda l} \int_E \{ (\mathrm{I}_{B_\lambda} P)^l \}_{dy}^x \{ \mathrm{I} - z\, \mathrm{I}_{B_\lambda} \}_X^y\end{aligned}$$

ou, en notation matricielle,

$$S_{\lambda l} = z^l s_{\lambda l} (\mathrm{I}_{B_\lambda} P)^l (\mathrm{I} - z\, \mathrm{I}_{B_\lambda}). \tag{25}$$

Pour la matrice des probabilités S_λ [6] pour qu'une itération complète d'une longueur quelconque $\geqq 1$ arrive dans B_λ sans catastrophe, on a

$$S_\lambda = \sum_1^\infty{}_l\, z^l s_{\lambda l} (\mathrm{I}_{B_\lambda} P)^l (\mathrm{I} - z\, \mathrm{I}_{B_\lambda}); \tag{26}$$

S_λ aussi est une matrice bornée et

$$\| S_\lambda \| \leqq \Big\| \sum_1^\infty{}_l\, (z\, \mathrm{I}_{B_\lambda})^l (\mathrm{I} - z\, \mathrm{I}_{B_\lambda}) \Big\| = \| z\, \mathrm{I}_{B_\lambda} \| = z < 1 \tag{27}$$

selon (4) et (16).

Introduisons :

$$\Phi_\lambda = \sum_1^\infty{}_l\, z^l s_{\lambda l} (\mathrm{I}_{B_\lambda} P)^l = S_\lambda (\mathrm{I} - z\, \mathrm{I}_{B_\lambda})^{-1}, \tag{28}$$

donc

$$\| \Phi_\lambda \| \leqq \sum_1^\infty{}_l\, z^l = \frac{z}{1 - z} = t$$

---

(6) Ici et par la suite il s'agit toujours de matrices dont les composants dénotent des probabilités pour que l'éventualité mentionnée arrive, après laquelle le système se trouve dans l'ensemble donné et à condition qu'il parte de l'état donné et que la catastrophe n'ait pas lieu. Brièvement nous écrirons : la matrice des probabilités pour que....

Si A et B sont les matrices des probabilités pour que $\mathcal{A}$ respectivement $\mathcal{B}$ arrive, alors, en cas qu'il s'agisse d'un processus de Markof comme ici, le produit matriciel AB est la matrice des probabilités pour que d'abord $\mathcal{A}$ et ensuite $\mathcal{B}$ arrive.

et l'on a

$$(29) \qquad \|\Phi_\lambda\| < 1$$

si $t < 1$, c'est-à-dire $z < \frac{1}{2}$, ce que nous supposerons.

Soit enfin C_X^x la probabilité pour que le système, commençant en x, fasse un nombre ≥ 0 de transitions et termine ses sauts dans X sans que la catastrophe n'ait lieu, et $C_{\lambda X}^x$ la probabilité pour que ce même événement ait lieu, et que d'ailleurs le système *parte* d'un état de B_λ. Alors, C et C_λ étant les matrices correspondantes, on a évidemment

$$(30) \qquad C = (1-z)\mathrm{I} + \sum C_\lambda$$

puisque le système ou bien ne part pas, ou bien part d'un des B_λ. Dans ce dernier cas le système accomplit une itération *complète* du type λ, suivie ou bien d'un feu rouge, ou bien d'un départ dans un B_μ avec $\mu \neq \lambda$. La matrice des probabilités du premier de ces événements est $\Phi_\lambda(1-z)$, celle du second est $\Phi_\lambda \sum_{\mu\neq\lambda} C_\mu$, puisque les probabilités $C_{\mu X}^x$ sont les mêmes après une itération d'un type $\lambda \neq \mu$ qu'au commencement. Donc

$$(31) \qquad C_\lambda = \Phi_\lambda\Big((1-z)\,\mathrm{I} + \sum_{\mu\neq\lambda} C_\mu\Big) = \Phi_\lambda(C - C_\lambda) = (\mathrm{I}+\Phi_\lambda)^{-1}\Phi_\lambda C.$$

Posons

$$(32) \qquad R_\lambda \overset{\text{def}}{=} \Phi_\lambda(\mathrm{I}+\Phi_\lambda)^{-1},$$

et

$$(33) \qquad R \overset{\text{def}}{=} \sum{}^\lambda R_\lambda, \qquad \text{donc} \quad R_\lambda = \mathrm{I}_{B_\lambda} R,$$

Remarquons que

$$\Phi_\lambda = R_\lambda + R_\lambda\Phi_\lambda,$$

donc, grâce à (4),

$$(34) \qquad \|R_\lambda\| \leqq \|\Phi_\lambda\| < 1.$$

Alors

$$\|R\| = \sup_\lambda \|R_\lambda\| \leqq \sup_\lambda \|\Phi_\lambda\| \leqq t < 1,$$

donc

$$(35) \qquad \|R\| < 1 \qquad \text{si} \quad z < \frac{1}{2}.$$

A cause de (32), (31) s'écrit $C_\lambda = R_\lambda C$, et (30) devient au moyen de (33)

$$C = (1 - z)\,\mathrm{I} + RC, \qquad \text{ou} \qquad \frac{C}{1 - z} = (\mathrm{I} - R)^{-1}. \tag{36}$$

Nous pouvons développer :

$$\frac{C}{1-z} = (\mathrm{I} - R)^{-1} = \sum_0^\infty{}^k R^k = \sum_0^\infty{}^k \left(\sum{}^\lambda R_\lambda\right)^k = \mathrm{I} + \sum{}^\lambda R_\lambda + \sum{}^{\lambda,\mu} R_\lambda R_\mu + \ldots.$$

donc

$$\frac{C}{1-z} = \sum_0^\infty{}^n \sum{}^{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \prod_{i=1}^n \mathrm{R}_{\lambda_i}. \tag{37}$$

En utilisant (34) et (29), on déduit aisément

$$\frac{C}{1-z} = \sum_0^\infty{}^n \sum_{\lambda_i \neq \lambda_{i+1}}{}^{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \prod_{i=1}^n \Phi_{\lambda_i} \tag{38}$$

Le coefficient de z^n du membre droit est

$$\sum_1^n{}^k \sum_{\lambda_\nu \neq \lambda_{\nu+1}}{}^{\lambda_1,\ldots,\lambda_k} \sum{}^{i_1,\ldots,i_k} \prod_{\nu=1}^k (\mathrm{I}_{B_{\lambda_\nu}} P)^{i_\nu} s_{\lambda_\nu i_\nu}, \qquad \sum_1^k{}^\nu i_\nu = n.$$

En considérant le coefficient de $\prod_{\lambda, l} s_{\lambda l}^{m_{\lambda l}}$ dans cette expression on obtient la matrice des probabilités $P_{(n) m_{\lambda l}}$ pour qu'il y ait pour tout λ et tout l exactement $m_{\lambda l}$ itérations du type λl (longueur l dans B_λ), pourvu que le nombre total de transitions du système soit n $\left(\sum{}^{\lambda, l}\, l m_{\lambda l} = n\right)$.

Jusqu'ici les $s_{\lambda l}$ étaient des probabilités indéterminées, introduites pour classifier les itérations. En substituant proprement pour les $s_{\lambda l}$ on peut déduire de la matrice collective C toutes les propriétés qu'on veut des nombres des itérations plus spéciales. Par exemple, si l'on n'est intéressé qu'aux itérations de types et longueurs spéciaux on peut poser $s_{\lambda l} = 1$ pour toutes les itérations qu'on ne considère pas. Ce procédé est appelé démarcage complet. En outre, il est possible de combiner les nombres des itérations qui ont une propriété spéciale. Par exemple, si l'on n'est intéressé qu'à la longueur des itérations (donc pas au type), on peut poser $s_{\lambda l} = s_l$ pour tout λ. Dans ce cas le coefficient de $z^n s_l^m$ sera la matrice des probabilités pour qu'il y ait pendant n transitions exactement m itérations de la longueur l. Ce procédé est appelé démarcage incomplet. Par démarcage complet on perd toute information par rapport aux itérations concernantes, par démarcage incomplet on la perd partiellement. Dans les paragraphes suivants nous donnerons quelques exemples.

Remarquons d'abord que démarcage complet des marques de toutes les itérations (c'est-à-dire substitution de $s_{\lambda l} = 1$ pour tout λ et tout l) donne, selon (28), (32), (34) et (36),

$$(39) \quad \begin{cases} \Phi_\lambda = z\mathrm{I}_{B_\lambda} P(\mathrm{I} - z\mathrm{I}_{B_\lambda} P)^{-1}, \qquad \mathrm{I} + \Phi_\lambda = (\mathrm{I} - z\mathrm{I}_{B_\lambda} P)^{-1}, \\ R_\lambda = z\mathrm{I}_{B_\lambda} P, \qquad R = zP, \qquad \dfrac{C}{1 - z} = (\mathrm{I} - zP)^{-1} = \sum_0^\infty {}_n z^n P^n, \\ C_E^x = (1 - z) \sum_0^\infty {}_n z^n (P^n)_E^x = 1. \end{cases}$$

3. Le nombre moyen d'itérations de longueur et de type donnés. — Considérons des itérations du type λl (ayant la longueur l dans B_λ). Supposons que le point mobile part de $x \in E$. Soit $m_{\lambda l}$ la variable aléatoire qui dénote le nombre de fois que le système commençant en x accomplit une itération complète du type λl sans catastrophe et termine ses transitions dans X[7].

L'espérance mathématique de $\underline{m}_{\lambda l}$ peut être trouvée par différentiation de C par rapport à $s_{\lambda l}$, suivie d'un démarcage complet de toutes les marques. En utilisant les règles de différentiation (19),

---

(7) Naturellement $\underline{m}_{\lambda l}$ est dépendante de x et X, ce que nous ne dénoterons pas pour simplifier la notation. Donc la probabilité pour que $\underline{m}_{\lambda l}$ soit m est la probabilité conditionnelle pour que le système, partant de x, accomplisse m itérations du type λ et de la longueur l et termine ses transitions dans X. Elle est un composant d'une matrice. Si x et X sont donnés on peut calculer l'espérance mathématique de $\underline{m}_{\lambda l}$. Celle-ci est aussi un composant d'une matrice mais cela n'est pas vrai pour l'écart quadratique. Celui-ci n'est pas σ-additif en X. Des symboles soulignés désignent des variables aléatoires.

(20) et (21), on obtient

$$\frac{1}{1-z}\frac{\partial C}{\partial s_{\lambda l}} = \frac{\partial}{\partial s_{\lambda l}}(\mathrm{I}-R)^{-1} = (\mathrm{I}-R)^{-1}\frac{\partial R}{\partial s_{\lambda l}}(\mathrm{I}-R)^{-1},$$

$$\frac{\partial R}{\partial s_{\lambda l}} = \frac{\partial R_\lambda}{\partial s_{\lambda l}} = \frac{\partial}{\partial s_{\lambda l}}\{\Phi_\lambda(\mathrm{I}+\Phi_\lambda)^{-1}\} = (\mathrm{I}+\Phi_\lambda)^{-1}\frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial s_{\lambda l}}(\mathrm{I}+\Phi_\lambda)^{-1}$$

pendant que

$$\frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial s_{\lambda l}} = z^l(\mathrm{I}_{B_\lambda}P)^l.$$

Donc, d'après (39),

$$\frac{1}{1-z}\mathcal{E}\underline{m}_{\lambda l} = \frac{1}{1-z}\left[\frac{\partial C}{\partial s_{\lambda l}}\right]_{s=1} = (\mathrm{I}-zP)^{-1}(\mathrm{I}-z\mathrm{I}_{B_\lambda}P)^2 z^l(\mathrm{I}_{B_\lambda}P)^l(\mathrm{I}-zP)^{-1}$$

$$= \sum_l^\infty{}_n z^n\left\{\sum_0^{n-l}{}_i P^i(\mathrm{I}_{B_\lambda}P)^l P^{n-l-i} - 2\sum_0^{n-l-1}{}_i P^i(\mathrm{I}_{B_\lambda}P)^{l+1}P^{n-l-1-i} + \sum_0^{n-l-2}{}_i P^i(\mathrm{I}_{B_\lambda}P)^{l+2}P^{n-l-2-i}\right\}.$$

Le terme entre accolades est l'espérance conditionnelle $\mathcal{E}_{(n)}\underline{m}_{\lambda l}$ de $\underline{m}_{\lambda l}$, le nombre n de transitions étant donné.

Comme pour chaque n, $(P^n)_E^x = 1$ il suit que

$$\{\mathcal{E}_{(n)}\underline{m}_{\lambda l}\}_E^x = \left\{\sum_0^{n-l}{}_i P^i(\mathrm{I}_{B_\lambda}P)^{l-1}\mathrm{I}_{B_\lambda} - 2\sum_0^{n-l-1}{}_i P^i(\mathrm{I}_{B_\lambda}P)^l\mathrm{I}_{B_\lambda} + \sum_0^{n-l-2}{}_i P^i(\mathrm{I}_{B_\lambda}P)^{l+1}\mathrm{I}_{B_\lambda}\right\}_E^x. \tag{40}$$

ce qui représente le nombre moyen d'itérations du type λl à condition que le point mobile parte de x et saute n fois.

Si E est l'ensemble de tous les entiers positifs, si les éventualités sont indépendantes, B_λ ne comprend que l'entier λ et $P\mathrm{I}_{B_\lambda} = p_\lambda$, on n'obtient pas de (40) la formule correspondante pour le cas d'indépendance. En effet, nous avons prescrit l'état initial et cet état compte pour l'itération initiale, ce qui est impossible dans le cas d'indépendance. C'est pour cela qu'une itération du type λl qui commence à l'état initial [$i = 0$ dans (40)] donnera des difficultés.

Cette difficulté peut être résolue en introduisant des probabilités initiales, c'est-à-dire en supposant que l'état λ sera l'état initial avec une probabilité p_λ ([8]). Alors on obtient de (40)

$$\mathcal{E}_{(n)} \underline{m}_{\lambda l} = (n-l+1)p_\lambda^l - 2(n-l)p_\lambda^{l+1} + (n-l-1)p_\lambda^{l+2} = p_\lambda^l q_\lambda \{2 + (n-l-1)q_\lambda\},$$

avec

$$q_\lambda = 1 - p_\lambda,$$

ce qui correspond à une formule bien connue qu'on peut trouver, par exemple, dans [3] (le n° 319).

4. Les itérations d'une longueur $\geqq r$ dans un ensemble $B \subset E$. — Supposons que la partition de E consiste en deux ensembles B et $A = E - B$. Démarquons complètement toutes les itérations de A et celles de B qui ont une longueur $< r$. Démarquons incomplètement les itérations de B d'une longueur $\geqq r$. Donc posons $s_{Al} = 1$ pour tout l, $s_{Bl} = 1$ pour $l < r$ et $s_{Bl} = s$ pour $l \geqq r$. Alors le coefficient de $s^h z^n$ dans le développement de $\frac{C}{1-z}$ donnera la probabilité pour qu'il y ait exactement h itérations d'une longueur $\geqq r$ dans B, le nombre n de transitions étant donné. On a

$$\Phi_B = \sum_1^\infty {}_l\, z^l (I_B P)^l s_{Bl} = z I_B P (I - z I_B P)^{-1} - (1-s) z^r (I_B P)^r (I - z I_B P)^{-1} = (Z - K)(I - Z)^{-1};$$

si nous posons $Z = z I_B P$ et $K = (1-s) z^r (I_B P)^r$,

$$I + \Phi_B = (I - K)(I - Z)^{-1},$$

donc

$$R_B = (Z - K)(I - K)^{-1} = I - (I - Z)(I - K)^{-1},$$
$$R = R_B + R_A = R_B + z I_A P,$$
$$I - R = (I - Z)(I - K)^{-1} - z I_A P = (I - Z - z I_A P + z I_A P K)(I - K)^{-1},$$

([8]) Cette difficulté n'existe pas si pour une itération dans B_λ on ne compte pas le nombre de fois que le système part d'un état de B_λ mais le nombre de fois qu'il arrive à un état de B_λ. Pourtant de cette manière on n'a pas de connection avec la théorie d'absorption développé dans [2]. C'est pour cela que nous avons choisi notre méthode (*voir*, pour la connection en question, paragraphe 6).

d'où

$$\frac{C}{1-z} = (I - R)^{-1} = (I - K)\{I - z(P - I_A PK)\}^{-1}.$$

Donc, puisque $z\|P - I_A PK\| \leqq z \max(\|P\|, \|I_A PK\|) = z < 1$,

$$\frac{C}{1-z} = (I - K)\sum_0^\infty {}_i z^i (P - I_A PK)^i$$

$$= \{I - (1-s) z^r (I_B P)^r\} \sum_0^\infty {}_i \sum_0^i {}_p (-1)^p (1-s)^p z^{pr+i} Y_{p,i}^{(r)}$$

$$= \sum_0^\infty {}_p (-1)^p (1-s)^p \sum_p^\infty {}_i z^{pr+i} \{I - (1-s) z^r (I_B P)^r\} Y_{p,i}^{(r)},$$

où nous avons posé

$$(41)\quad \begin{cases} Y_{p,i}^{(r)} = \sum_{i_1,\ldots,i_p} \left\{ \prod_{\nu=1}^{p} P^{i_\nu} I_A P (I_B P)^r \right\} P^{i-p-k} \\ (0 < p \leqq i;\ k = \sum_1^p {}_\nu i_\nu \text{ et } 0 \leqq k \leqq i - p), \\ Y_{0,i}^{(r)} = P^i \quad \text{et} \quad Y_{p,i}^{(r)} = 0 \quad \text{si} \quad p < 0 \quad \text{ou} \quad p > i, \end{cases}$$

$$\frac{C}{1-z} = \sum_0^\infty {}_n z^n \sum {}_p (-1)^p (1-s)^p \{Y_{p,n-rp}^{(r)} + (I_B P)^r Y_{p-1,n-rp}^{(r)}\}$$

$$= \sum_0^\infty {}_n z^n \sum {}_{h \geqq 0} s^h \sum {}_{p \geqq h} (-1)^{p+h} \binom{p}{h} \{Y_{p,n-rp}^{(r)} + (I_B P)^r Y_{p-1,n-rp}^{(r)}\},$$

où les sommations par rapport à h et p se terminent, puisque $Y_{p,i}^{(r)} = 0$ si $p > i$.

Soit

$$(42)\quad Q_B^{(n)}(r;\,h) \overset{\text{def}}{=} \sum {}_{p \geqq h} (-1)^{p+h} \binom{p}{h} \{Y_{p,n-rp}^{(r)} + (I_B P)^r Y_{p-1,n-rp}^{(r)}\},$$

alors $\{Q_B^{(n)}(r;\,h)\}_X^x$ est la probabilité pour que le système, partant de x, soit arrivé dans X après n transitions, pendant que h itérations d'une longueur $\geqq r$ ont eu lieu dans B. Si $r = 1$, $Q_B^{(n)}(1;\,h)$ est la matrice des probabilités pour qu'il y ait h itérations dans B, le nombre n de transitions étant donné.

Le nombre moyen d'itérations $\geqq r$ dans B est $\sum_h h\{Q_B^{(n)}(r;\,h)\}_X^x$, si n est donné.

Ce nombre peut être calculé directement :

$$\frac{1}{1-z}\left[\frac{\partial C}{\partial s}\right]_{s=1}=\left[\frac{\partial(1-R)^{-1}}{\partial s}\right]_{s=1}=(1-zP)^{-1}\left[\frac{\partial R_B}{\partial s}\right]_{s=1}(1-zP)^{-1}$$

et

$$\left[\frac{\partial R_B}{\partial s}\right]_{s=1}=-(1-Z)\left[(1-K)^{-1}\frac{\partial K}{\partial s}(1-K)^{-1}\right]_{s=1}=(1-z\mathrm{I}_BP)\,z^r(\mathrm{I}_B\mathrm{P})^r.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z}\left[\frac{\partial C}{\partial s}\right]_{s=1}&=(1-zP)^{-1}(1-z\mathrm{I}_BP)\,z^r(\mathrm{I}_BP)^r(1-zP)^{-1}\\&=\sum_r^\infty{}_n\, z^n\left\{\sum_0^{n-r}{}_i P^i(\mathrm{I}_BP)^rP^{n-r-i}-\sum_0^{n-r-1}{}_i P^i(\mathrm{I}_BP)^{r+1}P^{n-r-1-i}\right\}.\end{aligned}$$

Soit $\underline{m}_B^{(r)}$ la variable aléatoire qui dénote le nombre de fois que le système accomplit une itération complète de longueur $\geqq r$ dans B et termine ses transitions dans X, s'il les commence en x.

Alors nous avons pour l'espérance conditionnelle de $\underline{m}_B^{(r)}$ si le nombre n de transitions est donné

$$\begin{aligned}(43)\qquad \{\mathcal{E}_{(n)}\underline{m}_B^{(r)}\}_X^x&=\sum_h h\{Q_B^{(n)}(r;\,h)\}_X^x\\&=\left\{\sum_0^{n-r}{}_i P^i(\mathrm{I}_BP)^rP^{n-r-i}-\sum_0^{n-r-1}{}_i P^i(\mathrm{I}_BP)^{r+1}P^{n-r-1-i}\right\}_X^x\end{aligned}$$

et

$$(44)\qquad \{\mathcal{E}_{(n)}\underline{m}_B^{(r)}\}_E^x=\left\{\sum_0^{n-1}{}_i P^i(\mathrm{I}_BP)^{r-1}\mathrm{I}_B-\sum_0^{n-r-1}{}_i P^i(\mathrm{I}_BP)^r\mathrm{I}_B\right\}_E^x.$$

Si $r=1$, on obtient l'espérance conditionnelle du nombre d'itérations dans B, n étant donné

$$(45)\qquad \{\mathcal{E}_{(n)}\underline{m}_B\}_E^x=\left\{\sum_0^{n-1}{}_i P^i\mathrm{I}_B-\sum_0^{n-2}{}_i P^i\mathrm{I}_BP\mathrm{I}_B\right\}_E^x=\mathrm{I}_B^x+\left\{\sum_0^{n-2}{}_i P^i(\mathrm{I}_AP\mathrm{I}_B)\right\}_E^x.$$

5. Le séjour total dans un ensemble B. — Si l'on ne s'intéresse pas aux itérations dans B, mais seulement au nombre de fois que le système est dans B [9], on peut poser $s_{Bl} = s^l$ et démarquer les $s_{\lambda l}$ pour $B_\lambda \neq B$. Alors une itération de la longueur l dans B est comptée l fois, de sorte qu'on obtient le nombre total de fois que le point mobile est dans B.

Donc posons $s_{Bl} = s^l$ et $s_{Al} = 1$,

$$\Phi_B = sz\mathrm{I}_B P(\mathrm{I} - sz\mathrm{I}_B P)^{-1}, \qquad \mathrm{I} + \Phi_B = (\mathrm{I} - sz\mathrm{I}_B P)^{-1};$$

$$R_B = sz\mathrm{I}_B P, \qquad R_A = z\mathrm{I}_A P, \qquad \text{d'où} \qquad R = z(\mathrm{I}_A P + s\mathrm{I}_B P);$$

$$\frac{\mathrm{C}}{1-z} = (\mathrm{I} - R)^{-1} = (\mathrm{I} - z(\mathrm{I}_A P + s\mathrm{I}_B P))^{-1} = \sum_0^\infty {}_n z^n (\mathrm{I}_A P + s\mathrm{I}_B P)^n.$$

Donc le coefficient

$$W_B^{(n)}(k) = \sum{}_{i_\nu, j_\nu} \prod_\nu (\mathrm{I}_A P)^{i_\nu} (\mathrm{I}_B P)^{j_\nu}, \tag{46}$$

où

$$\sum{}_\nu j_\nu = k \qquad \text{et} \qquad \sum{}_\nu i_\nu = n - k,$$

de $z^n s^k$ est la matrice des probabilités pour que le système accomplissant n transitions soit k fois dans B.

La durée moyenne du séjour total dans B peut être calculée directement

$$\left[\frac{\partial(\mathrm{I} - R)^{-1}}{\partial s}\right]_{s=1} = \left[(\mathrm{I} - R)^{-1} \frac{\partial R_B}{\partial s} (\mathrm{I} - R)^{-1}\right]_{s=1} = (\mathrm{I} - zP)^{-1} z\mathrm{I}_B P (\mathrm{I} - zP)^{-1}$$

$$= \sum_1^\infty {}_n z^n \sum_0^{n-1} {}_i P^i (\mathrm{I}_B P) P^{n-1-i}.$$

Donc si $\underline{n}_B$ est la variable aléatoire qui dénote le nombre de fois que le système partant de x, est dans B et termine ses transitions dans X, on a pour pour l'espérance conditionnelle de $\underline{n}_B$

$$\{\mathcal{E}_{(n)} \underline{n}_B\}_X^x = \left\{\sum_0^{n-1} {}_i P^i \mathrm{I}_B P^{n-i}\right\}_X^x \tag{47}$$

---

[9] L'état où le point mobile se trouve au moment où les sauts s'arrêtent n'est pas compté [*voir* aussi la note [4]].

et

$$\{\mathcal{E}_{(n)}\underline{n}_B\}_E^x = \left\{\sum_0^{n-1} {}_i P^i \mathrm{I}_B\right\}_E^x. \tag{48}$$

6. Le premier passage par un sous-ensemble $A \subset E$. — Dans [2] (§ 3 et 4), on étudia les propriétés de la matrice collective D_A ([10]) dont le composant $\{D_A\}_X^x$ dénote la probabilité pour qu'un point mobile, partant de x, vienne après un nombre fini ≥ 0 de sauts pour la première fois en un état de A, appartenant aussi à X ([11]). On démontra que la matrice D_A est idempotente et que, si $A_2 \subset A_1$,

$$D_{A_1} D_{A_2} = D_{A_2} = D_{A_2} D_{A_1} \quad ([12]). \tag{49}$$

Pour obtenir une connection entre cette théorie et la théorie développée dans le paragraphe 2, il n'est pas nécessaire de marquer les itérations. Donc, posons $s_{Al} = 1$ et $s_{Bl} = 1$ pour tout l. En d'autres termes, supposons que la catastrophe ne peut pas avoir lieu. Maintenant on déduit aisément la relation entre la matrice D_A et la matrice S_B des probabilités d'itérations complètes : le point mobile part de x. Ou bien il est déjà dans A, ou bien il est dans B et doit accomplir une itération complète dans B finissant dans A.

Donc

$$D_A = \mathrm{I}_A + \mathrm{I}_B S_B \mathrm{I}_A$$

ou, comme $\mathrm{I}_B S_B = S_B$,

$$D_A = \mathrm{I}_A + S_B \mathrm{I}_A. \tag{50}$$

En considérant cette formule il est clair que la matrice D_A est idempotente (puisque $\mathrm{I}_A S_B = 0$ et $S_B \mathrm{I}_A$ est nilpotente).

Soit ensuite $A_2 \subset A_1$, donc $B_1 \subset B_2$.

([10]) Dans [2] on écrivit C_A et T au lieu de D_A et z. En outre, T pouvait dépendre de x, ce qui est aussi possible dans nos considérations [*voir* la note ([3])].

([11]) Si A est un ensemble « absorbant » on peut interpréter $\{D_A\}_X^x$ comme la probabilité pour que le point mobile, partant de x, soit absorbé dans $A \cap X$. Cette terminologie a été utilisée dans [2]. Pour un A arbitraire les mêmes formules sont valables si l'on fait usage de notre interprétation.

([12]) *Voir* la formule (4.1) de [2].

Une itération complète dans B_2, finissant dans A_2 (matrice des probabilités $S_{B_2}\mathrm{I}_{A_2}$) peut avoir lieu :

1° parce que le point cheminant part d'un état de B_1 et accomplit une itération dans B_1, finissant dans A_2 (matrice des probabilités $\mathrm{I}_{B_1}S_{B_1}\mathrm{I}_{A_2}=S_{B_1}\mathrm{I}_{A_2}$);

2° parce que le point cheminant part d'un état de B_1, accomplit une itération dans B_1, finissant dans $A_1-A_2=B_2-B_1$, après laquelle il accomplit une itération dans B_2, finissant dans A_2 [matrice des probabilités $\mathrm{I}_{B_1}S_{B_1}(\mathrm{I}_{A_1}-\mathrm{I}_{A_2})S_{B_2}\mathrm{I}_{A_2}=S_{B_1}\mathrm{I}_{A_1}S_{B_2}\mathrm{I}_{A_2}$];

3° parce que le point cheminant part d'un état de $B_2-B_1=A_1-A_2$ et accomplit une itération dans B_2, finissant dans A_2 [matrice des probabilités $(\mathrm{I}_{A_1}-\mathrm{I}_{A_2})S_{B_2}\mathrm{I}_{A_2}=\mathrm{I}_{A_1}S_{B_2}\mathrm{I}_{A_2}$].

Donc

$$S_{B_2}\mathrm{I}_{A_2}=S_{B_1}\mathrm{I}_{A_2}+S_{B_1}\mathrm{I}_{A_1}S_{B_2}\mathrm{I}_{A_2}+\mathrm{I}_{A_1}S_{B_2}\mathrm{I}_{A_2}$$

ou

$$\mathrm{I}_{A_2}+S_{B_2}\mathrm{I}_{A_2}=(\mathrm{I}_{A_1}+S_{B_1}\mathrm{I}_{A_1})(\mathrm{I}_{A_2}+S_{B_2}\mathrm{I}_{A_2}) \quad (51)$$ [13]

ou

$$D_{A_2}=D_{A_1}D_{A_2},$$

la première égalité de (49), que nous avons démontrée de nouveau. La deuxième égalité de (49) est une conséquence triviale de (50). Donc les résultats des paragraphes 3 et 4 du Mémoire [2] sont des cas particuliers de notre théorie.

BIBLIOGRAPRIE.

[1] D. van Dantzig, *Sur la méthode des fonctions génératrices et ses applications* (*Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique*, t. 13, 1949, p. 29-45).

---

(13) La même relation est valable si l'on avait posé $s_{B_1l}=s_{B_2l}=s^l$ au lieu de $=1$. En général, (s_{B_1l} et s_{B_2l} arbitraires), $S_B\mathrm{I}_A$ est aussi nilpotente, $\mathrm{I}_A+S_B\mathrm{I}_A$ idempotente et, si $A_2\subset A_1$

$$(\mathrm{I}_{A_2}+S_{B_2}\mathrm{I}_{A_2})(\mathrm{I}_{A_1}+S_{B_1}\mathrm{I}_{A_1})=\mathrm{I}_{A_2}+S_{B_2}\mathrm{I}_{A_2},$$

mais le membre gauche n'est pas commutative dans ce cas.

[2] D. van Dantzig, *Chaînes de Markof dans les ensembles abstraits et applications aux processus avec régions absorbantes et au problème des boucles* (*Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **14**, fasc. 3, 1955, p. 145-199).

[3] M. Fréchet, *Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants* (*Act. Scient. Ind.*, t. **11**, 1940 et **14**, 1943).

(Manuscrit reçu le 27 décembre 1957.)