

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

SP 71 a-e

Rapport Delta Commissie, 3

Bijdragen van het Mathematisch Centrum



1960

RAPPORT DELTACOMMISSIE

BIJDAGEN

**BESCHOUWINGEN OVER
STORMVLOEDEN
EN GETIJBEWEGING**

IL 15. BIJDAGEN MATHEMATISCH CENTRUM

DEEL 3

STAATSDRUKKERIJ EN UITGEVERIJBEDRIJF - 'S-GRAVENHAGE

RAPPORT DELTACOMMISSIE

BIJDRAGEN II

MATHEMATISCH CENTRUM

BESCHOUWINGEN OVER
STORMVLOEDEN
EN GETIJBEWEGING

REPORT OF THE DELTA COMMITTEE

CONTRIBUTIONS II

- II.1 – Extrapolation of the frequency curve of the levels of high tide at Hook of Holland by means of selected storms
- II.2 – The economic decision problem concerning the security of the Netherlands against storm surges
- II.3 – Testing the independence of the levels of storm surges at Hook of Holland on the one hand and the discharge of the Rhine at Lobith on the other
- II.4 – Mathematical study of the effect of wind upon the water levels of the North Sea
- II.5 – Free oscillations of a fluid in a rotating rectangular basin

RAPPORT DE LA COMMISSION DU DELTA

CONTRIBUTIONS II

- II.1 – Extrapolation de la courbe de transgression des niveaux de marée haute à Hoek van Holland au moyen de tempêtes sélectionnées
- II.2 – Le problème des décisions au point de vue d'économie pour la protection des Pays-Bas contre les marées-tempête
- II.3 – Examen de l'indépendance des marées hautes à Hoek van Holland et les débits du Rhin à Lobith
- II.4 – L'étude mathématique de l'influence des champs de vent sur les niveaux d'eau dans la Mer du Nord
- II.5 – Oscillations libres d'un fluide dans un bassin rectangulaire en rotation

RAPPORT DELTACOMMISSIE

BIJDRAGEN II

Dit deel van het Rapport Deltacommissie bevat de volgende bijdragen:

- Bijdrage II.1 – *D. van Dantzig, J. Hemelrijk*. Extrapolatie van de overschrijdingslijn van de hoogwaterstanden te Hoek van Holland met behulp van geselecteerde stormen 7
- Bijdrage II.2 – *D. van Dantzig, J. Kriens*. Het economisch beslissingsprobleem inzake de beveiliging van Nederland tegen stormvloeden . . . 57
- Bijdrage II.3 – *J. Hemelrijk*. Toetsing van de onafhankelijkheid van het hoogwater te Hoek van Holland en de waterafvoer van de Rijn te Lobith 111
- Bijdrage II.4 – *D. van Dantzig, H. A. Lauwerier*. De wiskundige behandeling van de invloed van windvelden op de waterstanden in de Noordzee 119
- Bijdrage II.5 – *D. van Dantzig*. Vrije slingeren van een vloeistof in een roterend rechthoekig bekken 191

VOORWOORD

Deze bijdragen maken deel uit van het Rapport Deltacommissie, dat is samengesteld uit het Eindverslag en de Interimadviezen van deze commissie en uit een aantal bijdragen.

De volledige uitgave bestaat uit de volgende zes delen:

- Deel 1. Eindverslag en Interimadviezen van de Deltacommissie.
- Deel 2. Bijdrage van het Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut over stormvloeden - Bijdrage I.
- Deel 3. Bijdragen van het Mathematisch Centrum over stormvloeden - Bijdragen II.
- Deel 4. Bijdragen van de Rijkswaterstaat over stormvloeden en getijbeweging - Bijdragen III.
- Deel 5. Bijdragen van Prof. Ir. J. Th. Thijsse en de Rijkswaterstaat betreffende de opzet van het Deltaplan en de gevolgen van de deltawerken - Bijdragen IV.
- Deel 6. Bijdragen van de Rijkswaterstaat, het Waterloopkundig Laboratorium en de Werkgroep voor het onderzoek naar de spanningstoestand in zeedijken, bevattende onderzoekingen, van belang voor het ontwerpen van dijken en dammen - Bijdragen V.
Bijdrage van Prof. Dr. J. Tinbergen over de economische balans van het Deltaplan - Bijdrage VI.

Een overzicht van de inhoud van elk van de zes delen is opgenomen achter in deel I.

De Deltacommissie spreekt gaarne haar erkentelijkheid uit jegens het Mathematisch Centrum en de auteurs van de verschillende onderdelen van de in deel 3 opgenomen bijdragen voor hun bereidheid om de resultaten van hun werk in deze vorm ter beschikking te stellen.

De verantwoordelijkheid voor de inhoud van deze bijdragen berust geheel bij het Mathematisch Centrum.

's-Gravenhage, september 1960

DE DELTACOMMISSIE

FOREWORD

These contributions form part of the Report of the Delta Committee, which is made up of the Final Report and the Interim Reports of this Committee and a number of contributions.

The complete edition consists of the following six volumes:

- Volume 1. Final Report and Interim Reports of the Delta Committee.
- Volume 2. Contribution of the Royal Netherlands Meteorological Institute on storm surges - Contribution I.
- Volume 3. Contributions of the Mathematical Centre on storm surges - Contributions II.
- Volume 4. Contributions of the Rijkswaterstaat (Governmental Service for Roads and Waterworks) on storm surges and tidal movements - Contributions III.
- Volume 5. Contributions of Prof. Ir. J. Th. Thijsse and the Rijkswaterstaat, regarding the conception of the Delta Plan and the consequences of the Delta Works - Contributions IV.
- Volume 6. Contributions of the Rijkswaterstaat, the Hydraulics Laboratory and the Working Group for Examining Stress-distributions in Sea Dikes, including investigations of importance for planning dikes and dams - Contributions V.
Contribution of Prof. Dr. J. Tinbergen. Balance sheet of the Delta Plan - Contribution VI.

A summary of the contents of each of the six volumes is given at the back of volume 1.

The Delta Committee wishes to express its appreciation to the Mathematical Centre and to the authors of the various parts of the contributions contained in volume 3 for their willingness to place the results of their work at the Committee's disposal.

The Mathematical Centre is responsible for the entire contents of these contributions.

The Hague, September 1960

THE DELTA COMMITTEE

INTRODUCTION

In the summer of 1953 the Delta Committee requested the Mathematical Centre to analyse the statistical data on high-water levels which were at the disposal of the Governmental Service for Roads and Waterworks of the Netherlands (Rijkswaterstaat), in order to make, as far as possible, a forecast about the frequencies of extremely high-water levels.

In the course of the investigations this task was enlarged by adding, on the one hand, an econometrical study of the protection of the low areas of our country against inundations by the sea, and, on the other hand, a hydrodynamical study of the influence of a gale on the motion of the water of the North Sea.

The Board of the Mathematical Centre asked one of its members, Prof. Dr. D. van Dantzig, to conduct the research on all these subjects. He carried this out in collaboration with two groups of scientific workers of the Mathematical Centre, one from the Department of Mathematical Statistics, for the statistical and econometrical problems, and one from the Department of Applied Mathematics, for the hydrodynamical problems. This research took several years.

On July 22nd, 1959 Prof. Dr. Van Dantzig passed away. His death, particularly in view of the current investigations, means a loss that cannot be estimated. There is so much the more reason for thankfulness, that he was allowed to see at least a great part of this work accomplished.

The statistical and econometrical investigations led to wellrounded reports. As regards the hydrodynamical problems, one may say that the first phase of this complicated research is now completed. However, in studying these problems, there arose a number of desiderata which requires further and thorough study.

The Board of the Mathematical Centre is very grateful to the Delta Committee for the fact that it has kindly consented to publish as a whole the results so far obtained on the three subjects mentioned.

The volume of the Delta Report dealing with the above problems gives a monumental form to a part of Van Dantzig's heritage and will moreover satisfy his younger co-operators, whose names and share are mentioned in the place designed for this purpose.

THE DIRECTOR OF THE MATHEMATICAL CENTRE
J. F. KOKSMA

BIJDRAGE III

EXTRAPOLATIE
VAN DE OVERSCHRIJDINGSLIJN
DER HOOGWATERSTANDEN
TE HOEK VAN HOLLAND
MET BEHULP VAN
GESELECTEERDE STORMEN

INHOUDSOVERZICHT

0.1	Inhoudsoverzicht	9
0.2	Overzicht van de tabellen	10
0.3	Overzicht van de figuren	10
0.4	Overzicht van de gebruikte symbolen	11
0.5	Literatuur	11
0.6	Summary.	13
0.7	Résumé	14
1.0	Samenstelling van de bijdrage	17
1.1	Inleiding	17
1.2	Inhoud van de bijdrage	17
1.3	Auteurs en medewerkers	17
2.0	Het waarnemingsmateriaal; de keuze van Hoek van Holland.	17
3.0	De frequentieverdeling van alle hoogwaterstanden	17
4.0	Methoden.	18
5.0	Hoogwaterstanden of opzetten?.	20
6.0	Extrapolatie	20
7.0	Het homogeen maken van het waarnemingsmateriaal door splitsing in zomer en winter	21
8.0	Selectie van depressies op meteorologische gronden	21
9.0	Toetsing der aanpassing	22
10.0	Verskillende schattingen van de baanselectielijn.	22
11.0	Andere beschouwingen over de nauwkeurigheid der schattingen.	23
12.0	Interpretatie der uitkomsten	24
13.0	Conclusie	25
 Appendix		
A 1.0	Notatie.	25
A 2.0	Aanpassing van een afgeknotte logaritmischnormale verdeling	27
A 3.0	Aanpassing exponentiële verdeling.	29
A 4.0	Toetsing der aanpassing	30
A 5.0	De selectie volgens Van der Ham	31
A 6.0	Naderé beschouwing der geselecteerde waarnemingen.	32

A 7.0	Betrouwbaarheidsintervallen	34
A 8.0	De methode van Gumbel	35
A 9.0	Tabellen der waarnemingen; toelichting op de figuren.	37

0.2 OVERZICHT VAN DE TABELLEN

10.0.1	Helling van de baanselectielijn bij verschillende beginpunten (aannemelijkste schattingen)	23
11.0.1	Bovengrenzen (in m) van halverings-, decimerings- en nepereringshoogte met onbetrouwbaarheid 0,05, resp. 0,01 bij beginpunt N.A.P. + 1,70 m	24
A 2.0.1	Gegevens, gebruikt voor het vergelijken van een exponentiële verdeling met een logaritmisch-normale verdeling.	29
A 3.0.1	Schattingen voor $n(b)$ en a_e bij verschillende b	30
A 6.0.1	Uitkomsten van een toetsing der hoogste waarnemingen met de B -verdeling	32
A 8.0.1	Vergelijking van de functies $1 - e^{-y}$ en $e^{-e^{-y}}$	36
A 9.0.1	Aantal overschrijdingen van het aangegeven peil in de jaren 1888 tot en met 1956 (69 jaar) en de splitsing daarvan in overschrijdingen in de wintermaanden (januari, november en december) en de overige maanden van het jaar	37
A 9.0.2	Jaarmaxima der hoogwaterstanden van de jaren 1888 tot en met 1956 (69 jaar)	38
A 9.0.3	Hoogwaterstanden hoger dan N.A.P. + 2,20 m van de jaren 1888 tot en met 1956 (69 jaar).	38
A 9.0.4	Hoogste hoogwaterstanden uit naar banen geselecteerde depressies uit de wintermaanden (januari, november en december) van de winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57 (63 jaar)	39
A 9.0.5	Parameters van de baanselectielijnen, getekend in figuur 10.0.1	41

0.3 OVERZICHT VAN DE FIGUREN

3.0.1	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956	43
4.0.1	De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956	44
7.0.1	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een bij de waarnemingen aangepaste lijn	45
7.0.2	De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van alle waarnemingen.	46
7.0.3	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956, gesplitst in winterwaarnemingen en overige waarnemingen.	47
8.0.1	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57.	48
8.0.2	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57, met een daaraan aangepaste rechte	49

9.0.1	De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van de baanselectiewaarnemingen	50
10.0.1	De baanselectielijn bij verschillende beginpunten	51
11.0.1	De baanselectielijn met beginpunt N.A.P. + 1,70 m en bovengrenzen van die lijn met onbetrouwbaarheid 0,05 en 0,01	52
A 2.0.1	De vergelijking van een exponentiële verdeling met een afgeknotte logaritmisch-normale verdeling	53
A 6.0.1	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een 10%-bovengrens voor de theoretische kromme vanaf N.A.P. + 2,00 m	54
A 6.0.2	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen met een 10%-bovengrens voor de experimentele trapfunctie vanaf N.A.P. + 2,45 m	55
A 6.0.3	Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een daaraan aangepaste Pearsonkromme en buigpunt-raaklijn	56

0.4 OVERZICHT VAN DE GEBRUIKTE SYMBOLEN

h	= waterstand in meters t.o.v. N.A.P.
$n(h)$	= verwacht aantal overschrijdingen per jaar van het peil h .
$g(h)$	= kans op overschrijding van het peil h bij één waarneming.
$p(h)$	= kans op overschrijding van het peil h in een jaar.
$f(h)$	= gemiddeld per jaar opgetreden aantal overschrijdingen van het peil h .
a_k	= hoogteverschil, waardoor het gemiddeld aantal overschrijdingen k maal zo klein wordt, in meters.
N	= totaal aantal waargenomen hoogwaterstanden per jaar.
h_k	= hoogwaterstand, die gemiddeld N/k maal per jaar wordt overschreden, in meters.
m	= aantal jaren, waarover de beschouwde waarnemingsperiode zich uitstrekt.
α	= a_e^{-1} .
$\hat{n}(h)$	= schatting van $n(h)$.
\hat{a}_e	= schatting van a_e .
$\hat{\alpha}$	= schatting van α .

0.5 LITERATUUR De verwijzingen in de tekst zijn aangegeven met []

1. *A. Benard* en *E. C. Bos-Levenbach* Het uitzetten van waarnemingen op waarschijnlijkheidspapier. *Statistica* 7, 163 – 173, 1953.
2. *W. L. Deemer Jr.* Estimation of parameters of truncated or censored exponential distributions, and *D. F. Votaw Jr.* *Annals of Math. Stat.*, 26, 498 – 504, 1955.
3. *W. P. Elderton* Frequency curves and correlation, Harren Press, Washington D.C., fourth edition, 1953.
4. *R. A. Fisher* and *L. H. C. Tippett* Limiting forms of the frequency distribution of the largest and smallest member of a sample. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 23, 912, 1928.

5. *M. Frechet* Sur la probabilité de l'écart maximum, Ann. Soc. Polon. Math., 6,93 – 116, 1928.
6. *E. J. Gumbel* Les valeurs extremes des distributions statistiques, Ann. Inst. H. Poincaré, 4, 115 – 158, 1935.
7. *E. J. Gumbel* Simplified plotting of statistical observations, Transactions Amer. Geophys. Union 26^I, 70 – 82, 1945.
8. *L. H. Miller* Table of percentage points of Kolmogorov statistics, J. Amer. Stat. Ass. 51, 111 – 121, 1956.
9. *P. J. Wemelsfelder* Wetmatigheden in het optreden van stormvloeden. De Ingenieur, nr. 9, 1939.

0.6 SUMMARY

Extrapolation of the frequency curve of the levels of high tide at Hook of Holland by means of selected storms

This contribution, due to Prof. Dr. D. van Dantzig, is concerned with the extrapolation of the frequency curve of the high tides at Hook of Holland. In the main text (which is kept free of formulae and mathematical elaboration) the problem of fitting a curve in the best possible way to the data, consisting of the high tides observed during 69 years (there are about two high tides a day) is discussed. The mathematical aspects of the problem are treated in an Appendix.

In 1939 WEMELSFELDER [9]¹⁾ drew attention to the fact that the logarithm of the mean number of high tides per annum exceeding a given level, if plotted against that level, leads to a curve which, in the middle of the range of observations, resembles a straight line very much, the curve becoming vaguer towards the higher high tides. In figure 3.0.1 all observations have been plotted in this way. From this diagram we can draw the following conclusions with regard to the theoretical frequency curve we want to estimate: the logarithmic frequency curve is almost linear in a large part of the range of observations. The plotted observations may well be described as observations drawn from a distribution, having in the logarithmic scale an asymptote towards the higher high tides, which from a point well inside the range of observations differs but little from this distributions. If we can estimate the asymptote, we can use this line to extrapolate the frequency curve towards the region we are interested in. This leads us at the same time to consider the conditional distribution of the high tides exceeding any given level, chosen in the region where the asymptote fits closely to the observations, as an exponential distribution.

At this point one has to consider whether other assumptions might not be compatible with the observations and especially whether these assumptions lead to appreciably different extrapolations of the frequency curve. Usually in analogous problems a logarithmically-normal curve is fitted to the observations. In the Appendix, in A 2.0 we first prove that it is possible to approximate an exponential distribution by means of a truncated logarithmically normal one given by formula (2), to any degree of precision (formulae (3), (4), (5)), as is illustrated by figure A 2.0.1

However, as the fit of the exponential curve (tested in the Appendix, A 4.0) is quite satisfactory and as in view of the fact mentioned above the logarithmically normal curve fits at least as well, it is impossible to distinguish statistically which of the hypotheses is the true one. The two curves will hardly differ, even if we extrapolate e.g. to N.A.P. + 6 m²⁾. As the exponential curve is far easier to handle mathematically and leads to much less arbitrariness in the extrapolation, because only one parameter has to be estimated from the observations, we preferred to use the exponential distribution.

Following GUMBEL [7] we can still make another approach. The yearly maxima of the high tides were plotted on his probability paper, the result of which can be found in figure 4.0.1. A straight line might be fitted to the observations. However, this method has certain disadvantages in comparison with the use of the exponential distribution. Because only 69 yearly maxima can be used a not unimportant part of the information contained in the observations is ignored. Also it is proved (Appendix A 8.0) that in the region which is of importance for our problem (from about N.A.P. + 2 to 6 m) GUMBEL's method and the use of the exponential distribution, if based on *the same observations* (e.g. the yearly maxima of the high tides) lead to the same result (see table A 8.0.1). The exponential method can be applied to much more observations and thus leads to more precise results. Therefore the subsequent argument is based on the use of the exponential distribution, i.e. on fitting an asymptote to the observations. GUMBEL's method is further used only incidentally to support some special points.

Instead of the actually measured high tides one can consider the differences between the measured high tides and the forecasted high tides (which need not fall at the same time). This might lead to more precise conclusions resulting from the statistical analysis, because now the forecasted high tides have been (partly) eliminated. However, if one plots the differences in the same way as the high tides in figure 3.0.1, one obtains a curve which is parallel to that of the high tides. Analysis of this curve would therefore lead to (almost) the same results as a direct analysis of the curve of high tides, is far more involved and has less directly to do with the practical consequences of the problem. We are thus justified in analysing the high tides themselves.

If we fit a straight line to the observations of figure 3.0.1 as has been done in figure 7.0.1, we can draw a corresponding straight line on GUMBEL's probability paper (by copying two points from the region of the higher high tides), which represents the *same* probability distribution for sufficiently high high tides. The result can be found in figure 7.0.2; the slope of the line differs very much from the slope indicated by the points. This was to be expected because the observations in figure 7.0.1 were drawn from a very inhomogeneous population. The lower high tides occurring in summer do not influence the yearly maxima, but change the slope of the curve in figure 7.0.1 and thus of the straight line in figure 7.0.2. Therefore the observations were split in two groups, called "winter" and "summer" observations. "Winter" observations are those obtained in November, December and January. The frequency curves for both groups are plotted in figure 7.0.3; the difference in slope is very marked.

If we want to select our observations in such a way, that the population is as homogeneous as possible, we must realize that the root of the danger to our dikes lies in the *depressions* which lead to dangerously high high tides. Because more than one high tide may occur during a single depression, so that such high tides are highly dependent, perhaps the best measures of the danger to the dikes, due to a depression, is the highest high tide occurring during that depression. Because the potential danger is not the same for all "winter" depressions, a further selection of the depressions is needed. This selection has been made on meteorological grounds by VAN DER HAM of the Royal Dutch Meteorological Institute (see Volume 2, Contribution I, paragraph 2.5). The observations we further consider are those tabulated in

¹⁾ A list of references can be found in 0.5.

²⁾ N.A.P. = Ordnance datum of Amsterdam = mean sea-level.

table A 9.0.4. They will be described as the "selected observations"; they are the highest high tides from meteorologically potentially dangerous "winter" depressions.

In figure 8.0.1 the mean number of high tides per annum exceeding a given level is plotted against that level for the selected observations. To this figure a straight line has been added in figure 8.0.2. The slope of this line was obtained by means of the maximum likelihood method, applied to the observations \geq N.A.P. + 1.70 m, these being considered as independent observations, drawn from an exponential distribution starting at this point. To indicate the "startingpoint" N.A.P. + 1.70 m a vertical has been drawn through this point. The "startingpoint" on the vertical scale is the observed mean number of exceedances of N.A.P. + 1.70 m.

Figure 9.0.1 is the same as figure 4.0.1, except that the straight line corresponding to the line in figure 8.0.2 has been added now. The slope of this line agrees quite well with the slope as indicated by the points. The small difference in height may well be neglected.

All these considerations have led us from estimating the asymptote in figure 3.0.1 to the same problem for figure 8.0.2, because the original conclusions drawn from the first diagram still apply. Again we estimate the asymptote with the maximum likelihood method. In figure 10.0.1 estimates for the asymptote based on different startingpoints are plotted. This diagram clearly indicates the uncertainty of the extrapolation, which can also be estimated from figure 11.0.1. Here the straight line from figure 8.0.2 has been drawn, as an estimate for the frequency curve to the right of which two other straight lines denote an upper confidence limit for the frequency curve with confidence coefficient .95 (middle line) and an upper confidence limit with confidence coefficient .99 (right hand line).

The main text ends with a discussion of the practical aspects of the obtained results.

In the Appendix it is pointed out, that the expected number $n(h)$ of exceedances of a high level in one year practically equals the probability $p(h)$ of that level being exceeded in one year (formulae (12), (13), (14) of A 1.0). This explains why we use diagrams like figure 3.0.1.

A curve given by (1) of A 3.0 is fitted to the observed mean number of exceedances per annum of level h by choosing a level b , considering only the n observations $h_1 \geq \dots \geq h_n \geq b$ observed in m years, estimating $n(b)$ with (2) of A 3.0 and estimating a_e with (3) of A 3.0. The results so obtained are tabulated in table 3.0.1, the values of \hat{a}_e^1 being doubly underlined in cases where a χ^2 -goodness of fit test (discussed in A 4.0) indicated a very bad fit and singly underlined if the fit was just bad (level of significance .05).

In A 5.0 the method of selection, leading to the "selected" observations is described. The observations thus obtained are then considered further in A 6.0 and A 7.0.

If h_1, \dots, h_n are observations in order of magnitude, independently drawn from an exponential distribution, with b as the initial point, the quantity B , defined by (1) of A 6.0, can be computed for different values of k . With (2) of A 6.0 the probability of obtaining this value or a smaller one may be found. It is clear from table A 6.0.1, that the sum of the k highest observations is neither unduly large nor unduly small as compared to the sum of all n observations.

In figure A 6.0.1 the selected observations of figure 8.0.1 are plotted, together with a 10 % upper limit for the theoretical curve, computed with the help of MILLER's tables [8] for the KOLMOGOROV-SMIRNOV test. This upper limit is a stepfunction, which has no practical value for the extrapolation, but it gives another indication of the high uncertainty. The stepfunction has been drawn only for high tides exceeding N.A.P. + 2,00 m.

If we estimate the parameter of the exponential distribution of the high tides \geq N.A.P. + 2.45 m from the observations \geq N.A.P. + 1.70 m and $<$ N.A.P. + 2.45 m, we can consider this parameter (and therefore the whole distribution) as known, and test whether the observations \geq N.A.P. + 2.45 m may have originated from the thus obtained "theoretical" distribution, again with the help of MILLER's tables. Figure A 6.0.2 shows, that the experimental stepfunction is well inside the indicated 10 % upperlimit.

If we fit a Pearson curve to the selected observations, the curve given by (10) of A 6.0 is found. Figure A 6.0.3 shows, that this curve fits the observations reasonably. The straight line in this figure is the tangent to the curve in its point of inflection. Either the curve or this tangent can be used for extrapolation.

In A 7.0 a method for the construction of a one sided confidence interval for $\alpha = a_e^{-1}$ is given, (2) being the basic formula. The use of GUMBEL's probability paper is described in A 8.0. The Appendix ends with a summing up of the diagrams and the way in which they were constructed. For the diagrams in the figures 4.0.1, 7.0.2, 8.0.1, 8.0.2, 9.0.1, A 6.0.1 and A 6.0.3 the method of BENARD-BOS for plotting the observations, which is described in BENARD and BOS-LEVENBACH [1] was used.

0.7 RÉSUMÉ

Extrapolation de la courbe de transgression des niveaux de marée haute à Hoek van Holland au moyen de tempêtes sélectionnées

La présente contribution, due à Prof. Dr. D. van Dantzig, traite de l'extrapolation de la courbe de transgression des niveaux de marée haute à Hoek van Holland. Le texte principal, exempt de formules et d'élaborations mathématiques, contient la discussion du problème d'ajuster une courbe aux données de la manière la plus efficace. Celles-ci se composent des niveaux de marée haute en nombre d'environ deux par jour, enregistrés pendant une période d'observation de 69 ans. Les aspects mathématiques du problème constituent le sujet d'un appendice.

En 1939 les recherches de WEMELSFELDER [9]²⁾ ont révélé que le nombre moyen par an des pleines mers dépassant un niveau donné, lorsqu'on le représente (sur une échelle logarithmique) en fonction du niveau (celui-ci

¹⁾ An estimate of a parameter x is indicated by \hat{x} .

²⁾ Une liste de renvois se trouve dans 0.5.

sur une échelle arithmétique), produit une courbe, qui au milieu du domaine des observations, ressemble beaucoup à une ligne droite, mais qui est plus difficile à reconnaître vers les niveaux plus élevés. Dans la figure 3.0.1 toutes les observations ont été représentées de cette façon. A partir de ce diagramme nous pouvons tirer les conclusions suivantes en ce qui concerne la courbe de fréquence théorique que nous voulons estimer. La courbe de fréquence logarithmique est à peu près linéaire sur l'échelle logarithmique dans une grande partie du domaine des observations. Les observations représentées peuvent être décrites comme des observations dérivées d'une distribution ayant dans l'échelle logarithmique un asymptote vers les niveaux plus élevés des pleines mers et qui, à partir d'un point situé tout à fait à l'intérieur du domaine des observations ne diffère que très peu de la distribution en question. Si nous pouvons estimer l'asymptote, nous pouvons utiliser cette ligne afin d'extrapoler la courbe de fréquence vers la région qui nous concerne plus spécialement. Ceci nous amènera en même temps à considérer la distribution conditionnelle des pleines mers, dépassant des niveaux donnés, choisi dans la région où l'asymptote s'ajuste étroitement aux observations, à titre de distribution exponentielle.

Quand nous en sommes arrivés là, il y a lieu de se demander si d'autres suppositions ne sont pas compatibles avec les observations et surtout si ces suppositions amèneront une extrapolation sensiblement différente de la courbe de fréquence. Lorsqu'on a affaire à des problèmes analogues, on ajuste d'ordinaire une courbe logaritmico-normale aux observations. Dans l'occurrence nous pouvons prouver (Appendice A 2.0, figure A 2.0.1) que quand même on ajusterait aux observations une courbe lognormale (tronquée à gauche), la courbe obtenue de cette façon est à peine différente de la ligne droite dont nous nous servons, même si nous extrapolons par exemple jusqu'à N.A.P. + 6 m ¹⁾.

C'est ainsi que l'ajustement d'une distribution exponentielle conduit à des résultats qui ne diffèrent que très peu de ceux obtenus par l'ajustement d'une distribution lognormale. Ce qui nous a amenés à préférer la distribution exponentielle, c'est encore la circonstance que celle-ci est plus facile à manier que la distribution lognormale et qu'elle aboutit à des résultats moins arbitraires dans l'extrapolation, puisqu'on n'a besoin d'estimer qu'un seul paramètre en partant des observations. L'ajustement (mis à l'épreuve dans A 4.0) a répondu entièrement à notre attente.

En suivant GUMBEL [7] nous pourrions encore aborder le problème d'une autre façon. Si l'on représente les niveaux maxima annuels de pleine mer sur le papier à échelle fonctionnelle des probabilités totales selon la loi de GUMBEL (voir figure 4.0.1), on pourrait ajuster une ligne droite aux observations. Cependant cette méthode présente quelques inconvénients quand on la compare à l'emploi de la distribution exponentielle. Une partie considérable de l'information contenue dans les observations, se soustraira notamment à notre attention, un nombre de 69 maxima annuels seulement étant à notre disposition. C'est ainsi qu'on peut prouver (v. A 8.0) que dans la zone qui intéresse notre problème (c.à.d. d'environ N.A.P. + 2 à 6 m) la méthode de GUMBEL et l'utilisation de la distribution exponentielle aboutiront à un même résultat, si elles partent des mêmes observations. La méthode exponentielle peut être appliquée à un nombre plus élevé d'observations amenant ainsi des résultats d'une plus grande précision. Aussi la dernière méthode, c.à.d. l'ajustement d'un asymptote aux observations, a-t-elle servi de base à l'argumentation qui suit. La méthode de GUMBEL par contre ne trouvera qu'une application incidentelle afin de servir d'appui à quelques questions spéciales.

Au lieu des marées hautes effectivement mesurées on pourrait partir des différences entre les marées hautes mesurées et celles qui ont été prédites (qui ne coïncident pourtant pas nécessairement). Cette méthode pourrait amener des conclusions d'une plus grande précision à cause de la nature de l'analyse statistique, les marées hautes étant ainsi partiellement éliminées. Cependant en représentant les différences ainsi obtenues de la même manière qu'on l'a fait des marées hautes dans la figure 3.0.1, on obtient une courbe qui est parallèle à celle obtenue par la représentation des marées hautes elles-mêmes. L'analyse de cette courbe aboutirait donc à des résultats à peu près identiques à ceux d'une analyse directe de la courbe des marées hautes. Ajoutez à cela que cette analyse indirecte est beaucoup plus compliquée et qu'elle est moins intimement liée aux conséquences pratiques du problème en question. Les arguments précédents nous autorisent donc à analyser les marées hautes elles-mêmes.

En ajustant une ligne droite aux observations représentées par la figure 3.0.1, ainsi qu'il a été fait dans la figure 7.0.1, nous pouvons tracer une ligne droite correspondante sur le papier à échelle fonctionnelle selon GUMBEL qui représente la même distribution des probabilités pour des niveaux suffisamment élevés. Le résultat se trouve dans la figure 7.0.2; l'inclinaison est tout autre que celle indiquée par les points. C'était ce à quoi on pouvait s'attendre, étant donné que les observations représentées par la figure 7.0.1 proviennent d'une population très hétérogène. Les marées hautes plus faibles qui ont lieu en été n'influencent en rien les maxima annuels, mais changent pourtant l'inclinaison de la courbe dans la figure 7.0.1 et par conséquent celle de la ligne droite dans la figure 7.0.2. Pour cette raison les observations ont été divisées en deux groupes, appelés respectivement groupe d'hiver et groupe d'été; les observations du premier groupe sont celles obtenues pendant les mois de novembre, de décembre et de janvier. Les courbes de fréquence des deux groupes ont été tracées dans la figure 7.0.3; la différence entre les deux inclinaisons est très marquée.

Si nous voulons sélectionner nos observations de façon que la population soit aussi homogène que possible, nous devons d'abord bien nous rendre compte que le danger qui menace nos digues procède en grande partie des dépressions, qui peuvent amener des marées hautes dangereusement fortes. Comme pendant une seule dépression plusieurs marées hautes peuvent avoir lieu, de même que de telles marées hautes sont très dépendantes, peut-être le meilleur moyen de mesurer le danger dû à une dépression est de tenir compte de la marée haute la plus forte qui ait lieu pendant cette dépression. Une sélection complémentaire est pourtant nécessaire, vu que le danger potentiel n'est pas le même dans toutes les dépressions d'hiver. Cette sélection a été effectuée au point de vue météorologique par VAN DER HAM de l'Institut Royal Néerlandais de Météorologie (v. Volume 2, Contribution I, paragraphe 2.5). Les observations qui sont le résultat de cette sélection sont celles disposées dans la table A 9.0.4; elles seront intitulées „observations sélectionnées”, ce qui veut dire qu'elles sont les marées hautes les plus fortes qui aient eu lieu pendant des dépressions hivernales potentiellement dangereuses au point de vue météorologique.

¹⁾ N.A.P. = le zéro de nivellement d'Amsterdam = niveau moyen de la mer.

Dans la figure 8.0.1 le nombre moyen annuel des marées hautes dépassant un niveau donné provenant des observations sélectionnées a été représenté comme fonction de ce niveau. Une ligne droite a été ajoutée à ce diagramme dans la figure 8.0.2. On a obtenu l'inclinaison de cette ligne à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, appliquée aux observations \geq N.A.P. + 1 m.70; celles-ci sont considérées ici comme des observations indépendantes procédant d'une distribution exponentielle qui prend naissance à ce point. Afin de marquer le „point de départ” (le niveau N.A.P. + 1 m.70) on a tracé une demi-ligne à partir de ce niveau. Le „point de départ” sur l'échelle verticale est constitué par le nombre moyen observé des niveaux dépassant N.A.P. + 1 m.70.

La figure 9.0.1 est identique à la figure 4.0.1, à part qu'on a ajouté maintenant la ligne droite qui correspond à la ligne dans la figure 8.0.2. L'inclinaison de cette ligne concorde très bien avec celle marquée par les points. La différence légère d'hauteur est négligeable.

Toutes ces considérations nous ont fait passer à partir du problème de l'estimation de l'asymptote dans la figure 3.0.1 au problème analogue en ce qui concerne la figure 8.0.2, les conclusions tirées du premier diagramme étant toujours valables. Nous estimerons l'asymptote à l'aide de la méthode qui a servi à tracer la ligne dans la figure 8.0.2. Dans la figure 10.0.1 l'asymptote a été estimée de diverses manières, chacune fondée sur un autre point de départ. Ce diagramme montre clairement l'incertitude de l'extrapolation; pour estimer celle-ci nous avons encore à notre disposition la figure 11.0.1. Là on a tracé la ligne droite de la figure 8.0.2, qui sert ici à estimer la courbe de fréquence; à droite de la courbe deux autres lignes droites marquent respectivement une limite supérieure de confiance au coefficient de confiance 0,95 (ligne du milieu) et une limite supérieure de confiance au coefficient de confiance 0,99 (ligne de droite).

Le texte principal se termine par une discussion des aspects pratiques des résultats obtenus.

Dans l'Appendice nous signalons, après avoir introduit quelques notations que l'espérance mathématique du nombre $n(h)$ de dépassements annuels d'un niveau élevé est à peu près égal à la probabilité $p(h)$ que dans une année le niveau en question sera dépassé. Ceci explique pourquoi nous nous servons de diagrammes comme la figure 8.0.1.

On a ajusté une courbe donnée par (1) de A 3.0 au nombre moyen observé de dépassements annuels du niveau h , en choisissant un niveau b et en ne considérant que les n observations $h_1 \geq \dots \geq h_n \geq b$ faites dans m ans; ensuite on a estimé $n(b)$ à l'aide de (2) et a_e à l'aide de (3) de A 3.0. Les résultats que nous avons obtenus de cette façon ont été disposés dans la table A 3.0.1; là les valeurs de \hat{a}_e ¹⁾ ont reçu un double soulignement dans tous les cas où le test χ^2 de validité de l'ajustement (discutée dans A 4.0) démontrait un ajustement très imparfait et un soulignement simple lorsque l'imperfection de l'ajustement était moins prononcée (seuil de signification 0,05).

A 5.0 contient la description de la méthode de sélection dont les observations sélectionnées ont été le résultat. Celles-ci sont ensuite examinées dans A 6.0 et A 7.0.

Si h_1, \dots, h_n sont des observations numérotées par ordre de grandeur, tirées indépendamment d'une distribution exponentielle, b étant le point de départ, la quantité B définie par (1) de A 6.0 peut être calculée pour des valeurs différentes de k . A l'aide de (2) de A 6.0 on peut trouver la probabilité d'obtenir cette valeur ou une valeur inférieure. Il résulte clairement de la table A 6.0.1 que la somme des k observations les plus élevées n'est ni excessivement grande ni excessivement petite, si l'on la compare à celle de toutes les n observations.

Dans la figure A 6.0.1 nous avons représenté les observations sélectionnées de la figure 8.0.1, conjointement avec une limite supérieure de 10 % pour la courbe théorique, calculée à l'aide des tables de MILLER [8] destinée au test de KOLMOGOROV-SMIRNOV. Cette limite supérieure est une fonction en escalier qui tout en n'étant d'aucune valeur pratique pour l'extrapolation, fournit pourtant une indication supplémentaire de la haute incertitude. La fonction en escalier n'a été tracée qu'en vue des hautes marées dépassant N.A.P. + 2 m.

Si nous estimons le paramètre de la distribution exponentielle des observations \geq N.A.P. + 2 m.45 en partant des observations \geq N.A.P. + 1 m.70 et $<$ N.A.P. + 2 m.45, nous pourrions supposer connu ce paramètre (et pour cette raison la distribution entière) et nous pourrions ensuite confronter les observations \geq N.A.P. + 2 m.45 et la distribution „théorique” ainsi obtenue, de nouveau à l'aide des tables de MILLER. La figure A 6.0.2 montre une limite supérieure de 10 % pour la fonction en escalier expérimentale.

En essayant maintenant d'ajuster aux observations sélectionnées une courbe de Pearson, on trouve la courbe telle que la donne (10) de A 6.0. Il résulte de la figure A 6.0.3 que cette courbe s'ajuste assez bien aux observations. La ligne droite qu'on voit dans cette figure est la tangente à la courbe en son point d'inflexion. Soit la courbe, soit la tangente peuvent servir à l'extrapolation.

Le A 7.0 contient une méthode de construction d'un intervalle de confiance unilatéral pour $\alpha = a_e^{-1}$, (2) étant la formule fondamentale. Le mode d'emploi du papier à échelle fonctionnelle des probabilités totales selon la loi de GUMBEL se trouve dans le A 8.0. L'appendice se termine par l'énumération des diagrammes et la manière dont ils ont été construits. Aux diagrammes 4.0.1, 7.0.2, 8.0.1, 8.0.2, 9.0.1, A 6.0.1 et A 6.0.3, a servi la méthode de représenter les observations de BENARD-BOS, dont la description se trouve dans BENARD et BOS-LEVENBACH [1].

¹⁾ Une estimation d'un paramètre x est indiquée par \hat{x} .

1.0 SAMENSTELLING VAN DE BIJDRAGE

1.1 Inleiding

In deze bijdrage is beschreven langs welke weg het statistisch onderzoek van de bij Hoek van Holland geregistreeerde hoogwaterstanden (van 1888 tot en met 1956) geleid heeft tot een extrapolatie, waaruit schattingen van de frequenties van zeer hoge stormvloedstanden kunnen worden afgelezen.

Een samenvatting van de resultaten van dit onderzoek vindt men in figuur 11.0.1, waaruit bij voorbeeld valt af te lezen, dat bij een overschrijdingskans van 10^{-4} een geschatte hoogwaterstand van N.A.P. + 5,13 m behoort.

1.2 Inhoud van de bijdrage

In het eerste deel van de bijdrage worden de gevolgde methode, alsmede de overwegingen, die tot de keuze daarvan hebben geleid, en de resultaten van de analyse globaal en zoveel mogelijk op algemeen begrijpelijke wijze uiteengezet. De wiskundige precisering vindt men in een Appendix.

1.3 Auteurs en medewerkers

Dit deel van het onderzoek vond plaats onder leiding van D. van Dantzig en J. Hemelrijk en in samenwerking met verschillende medewerkers van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, in het bijzonder H. Kesten en J. Th. Runnenburg; de laatstgenoemde verzorgde o.a. de redactie van de Appendix van dit hoofdstuk. Tevens vermelden wij gaarne de hulp, geboden door het Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut, in het bijzonder door C. J. van der Ham¹⁾, die de „gevaarlijke depressies” selecteerde, met behulp waarvan de uiteindelijke extrapolatie werd uitgevoerd.

2.0 HET WAARNEMINGSMATERIAAL; DE KEUZE VAN HOEK VAN HOLLAND

Het beschikbare waarnemingsmateriaal bestaat uit waargenomen *hoogwaterstanden* (te vinden in de Jaarboeken der Waterhoogten van de directie Waterhuishouding en Waterbeweging van de Rijkswaterstaat) voor verschillende plaatsen langs de kust en in de zeearmen²⁾. Van deze plaatsen is Hoek van Holland – althans voor Centraal-Holland en Zeeland – het geschiktste punt om de invloed van de Noordzee op de kust te onderzoeken. Het is centraal gelegen en de peilschaal bevindt zich dicht bij de kust, waardoor de storende invloeden, die zich verderop in rivieren en zeearmen voordoen, daar niet of althans het minst aanwezig zijn. Het onderzoek werd daarom voor Hoek van Holland uitgevoerd.

De beschikbare waarnemingen strekten zich uit over de jaren 1888 tot en met 1956 (deze waarnemingen zijn verwerkt in tabel A 9.0.1). De in deze bijdrage gegeven resultaten berusten op ongeveer 49 000 hoogwaterstanden. Van het aanbrengen van een bodemdalingcorrectie op de waarnemingen werd afgezien, omdat: 1. deze correctie zeer onzeker zou zijn, en 2. haar invloed op de voor dit onderzoek belangrijkste hoge H.W.'s relatief zeer gering is. Dit geldt uiteraard niet meer, indien men bij extrapolatie rekening wenst te houden met de bodemdaling in toekomstige perioden. Het is echter beter dit probleem afzonderlijk te beschouwen en het niet onder één hoofd te brengen met de onderzoekingen naar de hoogwateroverschrijdingslijn, die hier worden behandeld. De bodemdaling wordt wèl in rekening gebracht bij de in Bijdrage II.2 beschreven economische beschouwingen.

Naast de hoogwaterstanden zijn de astronomische standen (voorspelde standen volgens de getijtafels) beschikbaar. Het verschil tussen de waargenomen en de voorspelde hoogwaterstand (die dus niet precies op hetzelfde moment behoeven te vallen) wordt de *opzet* genoemd.

3.0 DE FREQUENTIEVERDELING VAN ALLE HOOGWATERSTANDEN

De empirische frequentieverdeling van alle hoogwaterstanden is in figuur 3.0.1 aangegeven. Op de horizontale as is daarbij de hoogte aangegeven in m boven N.A.P. en op de verticale as – op loga-

¹⁾ Zie Bijdrage I, paragraaf 2.5.

²⁾ Een hoogwaterstand (afkorting: H.W.) is de hoogste stand, die gedurende een periode van hoogwater wordt bereikt.

ritmische schaal – het gemiddeld aantal overschrijdingen van de beschouwde hoogte per jaar. De hoogst waargenomen waterstand is N.A.P. + 3,85 m (1 februari 1953); het bijbehorende aantal overschrijdingen per jaar is $1/69 = 0,0145$. De daarop volgende is N.A.P. + 3,28 m (22 december 1894) met een gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van $2/69 = 0,0290$.

In 1939 introduceerde WEMELSFELDER [9] deze statistische behandeling van hoogwaterstanden. Waar in het verleden veelal de hoogte van een te bouwen of te verhogen dijk werd gebaseerd op de hoogste *tot dan* waargenomen waterstand, betoogde WEMELSFELDER terecht, dat men ook met hogere dan de waargenomen waterstanden rekening dient te houden en dat deze op de lange duur elk met een bepaalde frequentie voorkomen. Bij uitzetten van de toen beschikbare gegevens voor Hoek van Holland op de bovenbeschreven wijze, verkreeg hij een rij punten, die voor niet te geringe hoogte bij goede benadering op een rechte lijn lagen. Uit figuur 3.0.1 blijkt, dat dit ook voor de momenteel beschikbare waarnemingen boven N.A.P. + 1,50 m het geval is. De hoogste waterstanden wijken echter merkbaar van de rechte lijn af, en wel naar boven. Hoewel dit mogelijkwijze aan hun geringe aantal te wijten is, zullen wij later zien, dat ook het niet-homogene karakter van dit waarnemingsmateriaal er de oorzaak van kan zijn.

Vervangt men de waargenomen punten door een zo goed mogelijk daarbij aansluitende rechte lijn als (voorlopige) „theoretische verdeling”, dan blijkt, dat bij een hoogteverschil van 0,55 m een kansverhouding 1 : 10 behoort; dit hoogteverschil wordt daarom de „(kans)decimeringshoogte” genoemd. De overeenkomstige „(kans)halveringshoogte” is $^{10}\log 2 = 0,301$ maal zo groot, dus 0,166 m, de „(kans)neperingshoogte” is $^{10}\log e = 0,434$ maal zo groot als de decimeringshoogte, dus 0,239 m.

4.0 METHODEN

De waarnemingen van figuur 3.0.1 en daaraan analoge figuren moeten wij, speciaal met het oog op extrapolatie naar hoge hoogwaterstanden, aanzienlijk buiten het gebied der tot nu toe waargenomen standen vervangen door een bij die waarnemingen aanpassende continue kromme, ondanks alle bekende, tegen extrapolatie in te brengen bezwaren (vgl. 6.0).

Indien wij (dit wordt besproken in 9.0 en A 6.0) de hoogwaterstanden als onafhankelijke trekkingen uit een onbekende verdeling mogen beschouwen, dan geeft deze kromme (op een bekende constante factor na, namelijk het totale aantal optredende hoogwaterstanden per jaar) de kans op overschrijding van een waterpeil h bij één bepaalde hoogwaterstand. Bij de bepaling van de kromme dienen we daarom het volgende in aanmerking te nemen. Voor lage hoogwaterstanden wordt de kromme vrij nauwkeurig door de waarnemingen vastgelegd, daar hierbij voldoende waarnemingen beschikbaar zijn. Bij de hogere hoogwaterstanden daarentegen moet het juiste verloop van de kromme uit een gering aantal waarnemingen geschat worden, die door onregelmatige, zogenaamde „stochastische” fluctuaties aanzienlijk van de kromme kunnen afwijken en bovendien door de gevolgde methode van uitzetten ver uiteenliggen. Desondanks lijkt het niet onredelijk betreffende die onbekende kromme uit de waarnemingen de volgende conclusies te trekken.

De kromme, die wij zoeken, bevat een bij benadering rechtlijnig gedeelte. De figuur doet denken aan een kromme, die een asymptoot heeft, die in een aanzienlijk deel van het waarnemingsgebied weinig van de kromme afwijkt. In werkelijkheid mag men niet onderstellen, dat de kromme inderdaad deze lijn als asymptoot in wiskundige zin bezit, d.w.z., dat zij zich bij willekeurig hoge peilen met onbeperkt toenemende nauwkeurigheid bij deze rechte zou gaan aansluiten. Integendeel, er zijn bepaalde argumenten, die er op kunnen wijzen, dat de hoogwateroverschrijdingslijn voor nog veel hogere peilen dan voor extrapolatie in aanmerking komen, naar beneden moet afbuigen. Wij zien echter hiervan af, daar dit uit de thans beschikbare waarnemingen niet blijkt (vgl. 12.0); eerder wordt een afwijking naar boven gesuggereerd, weshalve voor het bij de extrapolatie in aanmerking komende interval rechtlijnige voortzetting in de rede ligt. Wanneer wij dus hier van „asymptoot” spreken, bedoelen we daarmee alleen dat gedeelte van de kromme, waarvan men redelijkerwijs mag aannemen, dat het ook binnen het extrapolatiegebied nog bij vrij goede benadering met een rechte overeenstemt. Het is bij de extrapolatie niet nodig de overschrijdingslijn tot zéér grote hoogte voort te zetten. Voor het gestelde doel is extrapolatie tot een niveau van ongeveer N.A.P. + 6 m voldoende. Daarbij is van belang, dat er op grond van algemene ervaring bij dergelijke problemen geen reden is aan te nemen, dat de over-

schrijdingslijn nabij een bepaalde hoogte *plotseling* zal gaan afbuigen, maar dat een eventuele kromming in een gebied, dat zich niet zeer ver van een vrijwel rechtlijnig stuk uitstrekt, in ieder geval klein zal blijven. Dit heeft ten gevolge, dat de afwijking van de ware overschrijdingslijn en de rechtlijnig geëxtrapoleerde bij hoogten tot N.A.P. + 6 à 7 m of minder vermoedelijk minder zal zijn dan enkele decimeters.

Dit alles betekent, dat wij voor ons doel kunnen volstaan met het schatten van de juiste ligging van de asymptoot. Wij zoeken dus naar een rechte lijn, die we ook wel met overschrijdingslijn kunnen aanduiden, die goed bij het rechtlijnige gedeelte der figuren past, maar bij de lagere hoogwaterstanden aanzienlijk mag en zal afwijken. Ook de hoogst waargenomen hoogwaterstanden zullen niet op een dergelijke lijn liggen, doch dit is, gezien de grote stochastische fluctuaties in die standen te verwachten.

Bij de definitieve schatting van de asymptoot (zie 8.0 en volgende en A 3.0) zullen wij, overwegende dat uit de figuren met voldoende nauwkeurigheid blijkt, vanaf welk niveau de „asymptoot” redelijk bij de waarnemingen past, de waarnemingen beneden dat niveau buiten beschouwing laten en met de waarnemingen boven dat niveau de „asymptoot” bepalen. Wanneer wij later spreken over het „beginpunt” van die rechte bij dat niveau, dan is dat alleen bedoeld in die zin, dat deze rechte met behulp van de waarnemingen boven dat niveau geschat is. Beschouwen wij na de schatting van de asymptoot alleen de waarnemingen, die boven een gegeven peil liggen, in het gebied waarin de rechte goed bij de waarnemingen past, dan kunnen wij de benadering, die nu voor de verdelingsfunctie met die rechte gevonden is, interpreteren als een benadering van de verdelingsfunctie der hoogwaterstanden vanaf dat beginpunt met een zogenaamde *exponentiële* verdeling. Aan deze interpretatie zullen wij verdere statistische beschouwingen verbinden. Alvorens hiertoe over te gaan, zullen wij nog enige andere methoden bespreken.

Hoewel de waarnemingen de toepassing van de zojuist besproken methode suggereren, dient men toch te overwegen, of ook andere veronderstellingen met deze waarnemingen te rijmen vallen en in het bijzonder of deze andere veronderstellingen bij extrapolatie naar hogere waarden van H.W. (een punt, dat later ter sprake komt) tot andere resultaten zouden leiden. Daarvoor komt dan in de eerste plaats de zogenaamde *logaritmisch-normale verdeling* in aanmerking, die in de literatuur herhaaldelijk vermeld wordt als een geschikte verdeling bij problemen van analoge aard als het onderhavige. In ons geval echter valt aan te tonen (zie A 2.0), dat weliswaar ook deze verdeling goed aan de waarnemingen aangepast kan worden, doch dat de verkregen lijn dan niet of nauwelijks van de door ons gebruikte rechte lijn is te onderscheiden, ook niet bij extrapolatie tot bijv. een hoogte van N.A.P. + 6 m¹⁾. De exponentiële verdeling geeft dus resultaten, die in het door de waarnemingen bestreken interval ook bij benadering in overeenstemming zijn met de veronderstelling van een logaritmisch-normale verdeling. De eerstgenoemde verdeling is echter wiskundig veel beter hanteerbaar en wezenlijk bevredigender, daar zij tot minder willekeur bij de aanpassing en de extrapolatie aanleiding geeft, omdat zij van slechts één aan de waarnemingen aan te passen parameter afhangt. Daarom werd aan de exponentiële verdeling de voorkeur gegeven. De mate van aanpassing werd bovendien in een later stadium nog onderzocht met behulp van een daarvoor gangbare statistische methode. Het resultaat (zie A 4.0) is zeer bevredigend.

Voorts komt de door FRÉCHET [5], FISHER en TIPPETT [4] afgeleide verdeling der uiterste waarden in aanmerking, die door GUMBEL ([6] en latere publikaties) belangrijk is uitgebreid en op velerlei problemen, waaronder ook hydrologische, is toegepast. In het onderhavige geval bestaat de toepassing hiervan daarin, dat men de jaarmaxima bepaalt en deze op zg. „Gumbelpapier” uitzet. Dit papier heeft op de verticale as een lineaire en op de horizontale as een dubbel-logaritmische schaal en als de jaarmaxima beschouwd zouden kunnen worden als de grootste waarnemingen uit onderling onafhankelijke waarnemingsreeksen, die alle dezelfde verdeling bezitten, dan zouden deze jaarmaxima op dit papier bij benadering een rechte lijn moeten volgen. Dit geldt ook, als de uitgangsverdeling der hoogwaters niet een exponentiële is, doch één van het zogenaamde „exponentiële type” waaronder behalve de exponentiële onder andere ook de normale (de verdeling van Laplace-Gauss) en de logaritmisch-normale vallen.

Inderdaad liggen de jaarmaxima, op Gumbelpapier (zie GUMBEL [7]) uitgezet, zodanig, dat een

¹⁾ Ditzelfde geldt voor vrijwel iedere verdeling, waarin een voldoende groot aantal parameters voorkomt, die aangepast kunnen worden.

rechte lijn aangepast zou kunnen worden (zie figuur 4.0.1). Deze methode heeft echter, in vergelijking met het gebruik van de exponentiële verdeling, het nadeel, dat slechts van 69 jaarmaxima gebruik wordt gemaakt, waardoor een niet onbelangrijk deel der in de waarnemingen vervatte informatie ongebruikt blijft. Bovendien kan worden bewezen (A 8.0), dat in het gebied, dat voor ons probleem van belang is, ongeveer van N.A.P. + 2 m tot N.A.P. + 6 m, de methode van GUMBEL en het gebruik van de exponentiële verdeling, indien gebaseerd op dezelfde waarnemingspunten (bijv. de jaarmaxima alleen), tot hetzelfde resultaat leiden. Voor de exponentiële methode zijn echter meer waarnemingen bruikbaar dan de jaarmaxima alleen, zodat deze methode tot nauwkeuriger uitkomsten zal leiden.

Daarom is het verdere betoog gebaseerd op de veronderstelling van een exponentiële verdeling der hoogwaterstanden, terwijl de methode van GUMBEL alleen incidenteel nog te pas komt om een bepaald punt van het betoog te ondersteunen (vgl. 8.0, laatste alinea, en A 8.0).

5.0 HOOGWATERSTANDEN OF OPZETTEN?

Bij de statistische verwerking moest verder beslist worden of de hoogwaterstanden zelf beschouwd zouden worden, dan wel de daarbij behorende opzetten. Beschouwt men de opzetten, dan wordt de invloed van het astronomisch getij – althans ten dele – bij de statistische analyse geëlimineerd, hetgeen wellicht tot nauwkeuriger uitkomsten zou kunnen leiden. Nu blijkt echter, indien men de opzetten op dezelfde wijze uitzet als in figuur 3.0.1 met de hoogwaterstanden is gedaan, dat een lijn wordt verkregen, die evenwijdig aan die van de hoogwaterstanden verloopt. Analyse van deze lijn zou dus tot (nagenoeg) dezelfde resultaten leiden als die van de lijn der hoogwaterstanden. Het eerstgenoemde houdt meer werk in dan het laatstgenoemde en heeft minder rechtstreeks betrekking op de praktische consequenties van het vraagstuk. Om die redenen is het verantwoord, niet met de opzetten, maar met de hoogwaterstanden te werken.

Beter dan de hoogwaterstanden of opzetten zou wellicht het grootste verschil tussen de werkelijke waterhoogte en de voor *hetzelfde* moment voorspelde waterhoogte, die uit de getijkromme volgt, gebruikt kunnen worden. Deze grootte is echter slechts voor enkele stormen bekend, doch niet voor een voldoende aantal perioden van hoogwater, om daarop een statistische analyse te kunnen toepassen.

6.0 EXTRAPOLATIE

Het behoeft geen betoog, dat extrapolatie van een zuiver empirisch verkregen lijn steeds in hoge mate onzeker is. In het hier beschouwde geval moeten veiligheidsmaatregelen genomen worden tegen eventualiteiten, die mogelijk zijn, zonder dat het zeker is, dat – en, zo ja, wanneer – zij zullen optreden. Dit leidt tot een mathematisch-statistische behandeling van het probleem: men zal een schatting moeten maken van de kans, dat bepaalde mogelijke waterstanden zullen worden overtroffen, en op grond daarvan de maatregelen moeten treffen, beseffende dat er steeds een – zij het zeer kleine – kans overblijft, dat zij toch zullen blijken onvoldoende te zijn geweest.

Men zal dus uit de waarnemingen een kansverdeling moeten afleiden, die zich ook verder uitstrekt dan de hoogst waargenomen stand. Dit betekent eigenlijk, dat men zich voorstelt, dat over lange tijd, bijv. na enkele honderden jaren, met de dan beschikbare waarnemingen opnieuw een empirische overschrijdingslijn zal worden afgeleid en dat men nu reeds tracht te raden, hoe deze er zal uitzien. Dit is een gissing, dus onzeker. Door echter de thans bekende feiten zo goed mogelijk in aanmerking te nemen, kan men bereiken, dat redelijkerwijs te verwachten is, dat de toekomstige overschrijdingslijn niet al te veel van de thans gegiste af zal wijken.

Extrapolatie is dus, ook al blijft onzekerheid bestaan, noodzakelijk. Om de onzekerheid zo veel mogelijk te beperken, dient men echter voorzorgen te nemen. De belangrijkste van deze voorzorgen is, dat men er tegen waakt, de extrapolatie te baseren op „niet-homogeen” waarnemingsmateriaal. Verder is het van belang de onzekerheid der extrapolatie, voor zoverre deze op grond van bepaalde veronderstellingen (hier de in 3.0 en 4.0 besproken veronderstelling van een exponentiële verdeling) valt te berekenen, vast te stellen en bij het nemen van een beslissing in de overwegingen te betrekken. Deze beide punten komen in het volgende ter sprake, te beginnen met het eerstgenoemde.

7.0 HET HOMOGEEN MAKEN VAN HET WAARNEMINGSMATERIAAL DOOR SPLITSING IN ZOMER EN WINTER

De eenvoudigste extrapolatieprocedure ware, in figuur 3.0.1 een rechte lijn door de waarnemingspunten te trekken en deze eenvoudig te verlengen, dus rechthoekig te extrapoleren. Dit is in figuur 7.0.1 uitgevoerd. Op verschillende wijzen valt in te zien, dat deze procedure onjuist is.

In 4.0 is reeds opgemerkt, dat de Gumbellijn der jaarmaxima tot hetzelfde resultaat moet leiden als de extrapolatie van een rechte lijn als die van figuur 7.0.1. Brengen wij echter deze lijn van figuur 7.0.1 over op Gumbelpapier, waarop de jaarmaxima zijn uitgezet, dan wordt figuur 7.0.2 verkregen (voor de methode van overbrenging zie A 8.0). Uit deze figuur is duidelijk te zien, dat de jaarmaxima systematisch van deze lijn afwijken. De lagere jaarmaxima liggen er alle onder en de hogere liggen er boven, d.w.z. de helling van de lijn is onjuist.

Dit verschijnsel is gemakkelijk te verklaren en in overeenstemming met de boven gemaakte opmerking, dat het onjuist is niet-homogeen materiaal te extrapoleren. Immers de jaarmaxima vallen steeds (of vrijwel steeds) in de winter; in de zomer zijn de hoogwaterstanden lager. Deze lagere hoogwaterstanden hebben *geen* invloed op de jaarmaxima, maar zij hebben *wel* invloed op de helling van de lijn in figuur 7.0.1 en 7.0.2. Deze helling wordt er door vergroot, waardoor bij extrapolatie een te lage schatting der kansen op overschrijding verkregen wordt. Het zou dus zeer onvoorzichtig zijn, beslissingen op deze extrapolatie te baseren.

Dat zomer en winter verschillen wat de hoogwaterstanden betreft, is natuurlijk ook direct in te zien. De hoogwaterstanden van de maanden november tot en met januari (met de stand van 1 februari 1953 er bij, omdat deze de aanleiding tot het onderzoek was) geven, uitgezet op dezelfde wijze als in figuur 3.0.1 gedaan is, een lijn te zien met een helling, die duidelijk van die van de overige maanden te zamen verschilt (zie figuur 7.0.3). De keuze van de drie maanden november, december en januari als wintermaanden is uiteraard enigszins arbitrair; daarom is onderzocht of verkleining of vergroting (op beperkte schaal) van deze periode de resultaten nog aanzienlijk beïnvloedt. Dit bleek niet het geval te zijn, hetgeen de keuze van deze periode, waarin ook de meeste jaarmaxima vallen, rechtvaardigt.

Ook de hoogwaterstanden van deze drie maanden zijn echter nog verre van homogeen, omdat zij veroorzaakt worden door depressies, die van verschillende typen zijn. Op dit punt gekomen, ligt het voor de hand meteorologische hulpmiddelen te gebruiken, om een grotere mate van homogeniteit te bereiken en daarmee de betrouwbaarheid van de extrapolatie verder te vergroten.

8.0 SELECTIE VAN DEPRESSIES OP METEOROLOGISCHE GRONDEN

Een gevaarlijk hoge waterstand wordt steeds veroorzaakt door een storm en deze weer door een depressie. Beschouwen wij dus depressies in plaats van afzonderlijke hoogwaters, dan komen wij dicht bij de oorzaak van het gevaar. Een depressie strekt zich bovendien vaak uit over meer dan één hoogwater en daardoor ontstaat afhankelijkheid van op elkaar volgende hoogwaters, hetgeen de statistische analyse belemmert. Dit wordt vermeden, indien depressies in plaats van hoogwaters worden beschouwd. Daar het gevaar, dat een depressie voor de dijken geeft, sterk samenhangt met de hoogste tijdens die depressie bereikte waterstand, ligt het voor de hand de verdere analyse te baseren op hoogste standen per depressie.

Lang niet alle depressies zijn echter potentieel gevaarlijk. De verzameling van deze hoogste standen is, meteorologisch beschouwd, nog steeds niet homogeen. In verband daarmee werden door VAN DER HAM van het Koninklijk Nederlands Meteorologisch Instituut¹⁾ die depressies geselecteerd, die op grond van het feit, dat zij bepaalde eigenschappen bezitten, als de *potentieel gevaarlijke depressies* beschouwd moeten worden. De criteria voor deze selectie zijn in A 5.0 beschreven. Het belangrijkste criterium was daarbij, dat deze depressies een binnen een bepaald vak gelegen baan volgden.

Het totale waarnemingsmateriaal, dat nu overblijft, bestaat uit 332 hoogwaterstanden van een gelijk aantal potentieel gevaarlijke depressies. Deze waarnemingen zijn in figuur 8.0.1 op soortgelijke wijze uitgezet als in figuur 3.0.1 voor alle hoogwaters is gedaan. In verband met het feit, dat de verdere

¹⁾ Zie Bijdrage I, paragraaf 2.5.

analyse op deze waarnemingen is gebaseerd, is bij het uitzetten van deze punten een door BENARD en BOS-LEVENBACH [1] uitgewerkte verfijning van de in figuur 3.0.1 gevolgde techniek toegepast, die in A 8.0 is beschreven. De invloed hiervan is gering, behalve voor de hoogste 20 à 30 waargenomen standen, die nu bij een wat kleiner gemiddeld aantal overschrijdingen worden uitgezet. Deze methode is ook in de figuren 4.0.1 en 7.0.2 reeds zonder expliciete vermelding gebruikt.

In figuur 8.0.2 zijn dezelfde punten uitgezet met de meest aannemelijke rechte lijn, aangepast aan de punten boven N.A.P. + 1,70 m. De aanpassing van deze punten aan de rechte is niet overal even fraai, doch dit is, gezien het betrekkelijk geringe aantal punten, niet verwonderlijk. Wel valt op, dat de hogere waarnemingen nu veel minder van de aangepaste lijn afwijken dan in figuur 7.0.1 het geval is; dit verleent steun aan de in 3.0 vermelde veronderstelling, dat de afwijking in figuur 7.0.1 door de inhomogeniteit van het waarnemingsmateriaal veroorzaakt wordt. Vergelijken wij de overschrijdingskans van de hoogte N.A.P. + 5 m, die door deze lijn wordt aangewezen, met de uit figuur 7.0.1 af te leiden waarde voor dezelfde kans, dan zien wij, dat nu de waarde $1,5 \cdot 10^{-4}$ verkregen wordt, terwijl figuur 7.0.1 de waarde $7,1 \cdot 10^{-6}$ geeft. Het verschil is vrij aanzienlijk en geeft een indruk van het belang van de toepassing van de boven beschreven selectie.

9.0 TOETSING DER AANPASSING

Alvorens een verdere statistische analyse te baseren op de veronderstelling, dat de waarnemingen in figuur 8.0.1 vanaf een voldoende hoog peil beschouwd kunnen worden als onafhankelijke waarnemingen uit een exponentiële verdeling, is het nu van belang deze onderstelling te toetsen.

In de eerste plaats is het duidelijk, dat het begin van de door de punten gevormde kromme (tot ongeveer N.A.P. + 1,70 m toe) aanmerkelijk afwijkt van een rechte lijn door de hogere waarnemingen. Dit zelfde verschijnsel doet zich voor bij de lijnen (zie figuur 3.0.1 en 7.0.3), die op alle hoogwaters betrekking hebben. Deze lage standen zijn echter voor het doel van het onderzoek niet belangrijk en kunnen dus gevoeglijk buiten beschouwing blijven.

Voor de hoger gelegen waarnemingen zijn nu verschillende statistische toetsingen uitgevoerd om de gemaakte veronderstelling te toetsen. Deze zijn in A 4.0 beschreven. Zij leidden tot een alleszins bevredigend resultaat.

Wij gaan hier alleen na, of de in figuur 8.0.2 getrokken lijn nu wel in overeenstemming is met de jaarmaxima, uitgezet volgens GUMBEL. In figuur 9.0.1 is de lijn van figuur 8.0.2 overgebracht. De helling van de lijn komt nu zeer goed met de uitgezette punten overeen. Er is echter een systematisch hoogteverschil van ongeveer 10 cm. Daar de puntenreeks de *cumulatieve* verdelingsfunctie bij benadering weergeeft, wordt zulk een systematisch verschil vrijwel uitsluitend veroorzaakt door afwijkingen bij kleine waarden van h , die echter voor ons probleem van weinig belang zijn. Zij zouden er hoogstens toe kunnen leiden, dat men moest aannemen, dat de selectie nog niet homogeen genoeg is en er nog een aantal minder gevaarlijke depressies in voorkomt. Een verschil van 10 cm is bovendien klein en blijft bij extrapolatie onveranderd, zodat het verschil van geen belang is.

Pogingen om het materiaal zo mogelijk nog beter homogeen te maken, werden langs twee andere wegen verricht, nl. door te onderzoeken of er een verband tussen de H.W.'s en de zonnevlekken-intensiteit te vinden was en of aan te tonen viel, dat de jaren verdeeld konden worden in „gevaarlijke” en „minder gevaarlijke” jaren. Beide onderzoeken hadden een negatief resultaat: er waren in het ter beschikking staande materiaal geen aanwijzingen voor een merkbare invloed van de zonnevlekken-intensiteit op de H.W.'s en een splitsing, zoals die van de maanden en die van de depressies, in gevaarlijke en minder gevaarlijke, kan bij de jaren niet worden verkregen. Een meteorologische basis ontbrak trouwens bij deze beide onderzoeken.

10.0 VERSCHILLENDE SCHATTINGEN VAN DE BAANSELECTIELIJN

De gezochte overschrijdingslijn, die past bij de punten in figuur 8.0.1, waarvan dus de lijn in figuur 8.0.2 een schatting is, noemen wij de *baanselectielijn*.

Deze lijn begint in figuur 8.0.2 bij N.A.P. + 1,70 m, waarbij de punten beneden deze hoogte buiten beschouwing zijn gelaten. De keuze van het „beginpunt”, N.A.P. + 1,70 m, is echter betrekkelijk

arbitrair. Men kan ook een ander beginpunt nemen, bijv. N.A.P. + 1,80 of 2,00 m, en dan wordt een andere schattingslijn verkregen. Beneden N.A.P. + 1,70 m buigen de punten in figuur 8.0.1 duidelijk af, dus is het niet wenselijk het beginpunt lager te nemen. Het is echter zeer wel mogelijk het hoger te kiezen.

Bij ieder beginpunt kan nu, op grond van de boven dit beginpunt gelegen waarnemingen, een zg. aannemelijkste schatting van de halverings- en decimeringshoogte (vgl. 3.0) berekend worden. De berekeningswijze en de daaraan ten grondslag liggende theorie zijn in A 3.0 beschreven. De resultaten zijn in tabel 10.0.1 samengevat ¹⁾. Daar de derde decimaal slechts betekenis heeft voor de figuren, kan voor de halverings-, resp. decimeringshoogte bij N.A.P. + 1,70 m de waarde 0,23 m, resp. 0,78 m genomen worden.

Tabel 10.0.1
Helling van de baanselectielijn bij verschillende beginpunten (aannemelijkste schattingen)

Beginpunt in m boven N.A.P.	Aantal overschrijdingen	Decimeringshoogte in m	Halveringshoogte in m	Nepereringshoogte in m
1,50	257	0,881	0,265	0,383
1,60	212	0,814	0,245	0,354
1,70	166	0,776	0,234	0,337
1,80	129	0,739	0,223	0,321
1,90	94	0,749	0,226	0,325
2,00	71	0,725	0,218	0,315
2,10	53	0,700	0,211	0,304
2,20	33	0,838	0,252	0,364
2,30	24	0,891	0,268	0,387
2,40	18	0,908	0,273	0,394
2,50	17	0,725	0,218	0,315
2,60	13	0,699	0,210	0,304

In figuur 10.0.1 zijn de overeenkomstige lijnen getekend. Bij iedere lijn is het beginpunt verdikt aangegeven. Deze figuur geeft een inzicht enerzijds in de grootten der te verwachten overschrijdingsfrequenties van verschillende hoogten, anderzijds in de onzekerheid, waarmee deze getallen behept zijn.

Zo blijkt bijv., dat voor een hoogte van N.A.P. + 5 m de overschrijdingskans, bij extrapolatie verkregen, nog sterk van de keuze van het beginpunt afhangt. De laagste gevonden waarde is $7,59 \cdot 10^{-5}$, de hoogste $4,36 \cdot 10^{-4}$. Voor N.A.P. + 6 m bedragen deze waarden $2,25 \cdot 10^{-6}$ en $3,20 \cdot 10^{-5}$. Beschouwt men anderzijds de horizontale lijn, die bij een overschrijdingskans 10^{-4} behoort, dan lopen de schattingen van de daarbij behorende hoogten uiteen van N.A.P. + 4,85 m tot N.A.P. + 5,56 m. De overschrijdingskans van het peil N.A.P. + 3,85 m varieert van $2,66 \cdot 10^{-3}$ tot $8,85 \cdot 10^{-3}$.

11.0 ANDERE BESCHOUWINGEN OVER DE NAUWKEURIGHEID DER SCHATTINGEN

Een tweede methode, dienende om een indruk van de onzekerheid van de extrapolatie te verkrijgen – steeds uitgaande van de veronderstelling van een exponentiële verdeling, dus van lineaire extrapolatie –, is het bepalen van *betrouwbaarheidsgrenzen* voor de decimerings-, halverings- en nepereringshoogte.

Daar wij slechts over een vrij gering aantal waarnemingspunten beschikken (nl. 166 waarnemingen \geq N.A.P. + 1,70 m in 63 jaar), zal zelfs de best mogelijke schatting van de decimerings- en halveringshoogte nog vrij veel van de „werkelijke” waarde kunnen verschillen.

Een *betrouwbaarheidsbovengrens* (speciaal een bovengrens is hier van belang) is nu een uit deze waarnemingen berekend getal, dat, behoudens een van tevoren bepaalde *onbetrouwbaarheid* (waarvoor de waarden 0,05 en 0,01 zijn genomen), groter is dan de onbekende werkelijke waarde. „Onbetrouw-

¹⁾ De halveringshoogte (resp. nepereringshoogte) is 0,301 (resp. 0,434) maal de decimeringshoogte.

baarheid 0,05 (resp. 0,01)" betekent daarbij, dat bij toepassing van deze methode slechts een kans 0,05 (resp. 0,01) bestaat, dat de gevonden betrouwbaarheidsgrens toch kleiner is dan de werkelijke waarde.

Een dergelijke bovengrens is groter dan de aannemelijkste schatting zelf, daar deze laatste een kans van ongeveer $\frac{1}{2}$ bezit om kleiner dan de gezochte werkelijke waarde te zijn. Het verschil tussen deze beide getallen – en ook dat tussen de bovengrens en de werkelijke waarde – wordt kleiner, naarmate het aantal waarnemingen toeneemt. Het is daarom van belang zoveel mogelijk der waarnemingen in de berekening van de bovengrens te betrekken, daar anders een te pessimistisch beeld verkregen wordt. Daarom zijn de berekeningen gebaseerd op alle waarnemingen boven N.A.P. + 1,70 m, het laagste beginpunt, waarbij de hier gevolgde methode nog redelijk wel bruikbaar is. De berekeningswijze en de daaraan ten grondslag liggende theorie zijn in A 7.0 opgenomen. De resultaten zijn opgenomen in tabel 11.0.1.

Tabel 11.0.1
Bovengrenzen (in m) van halverings-, decimerings- en nepereringshoogte met onbetrouwbaarheid 0,05 resp. 0,01 bij beginpunt N.A.P. + 1,70 m'

	Aannemelijkste schatting in m	Bovengrens met onbetrouwbaarheid van	
		0,05	0,01
Halveringshoogte	0,234	0,267	0,282
Decimeringshoogte	0,776	0,886	0,936
Nepereringshoogte	0,337	0,385	0,407

Dit resultaat is verder in figuur 11.0.1 in beeld gebracht, waarbij de (geringe) onzekerheid in de hoogte van het bij N.A.P. + 1,70 m liggende beginpunt buiten beschouwing gelaten is, daar een geringe *evenwijdige* verplaatsing van de lijn geen invloed van betekenis heeft.

Uit figuur 11.0.1 valt af te lezen, dat bij een overschrijdingskans van 10^{-4} een geschatte hoogte van N.A.P. + 5,13 m behoort (hetgeen tot N.A.P. + 5,1 m afgerond kan worden), terwijl de twee bovengrenzen N.A.P. + 5,62 m (met onbetrouwbaarheid 0,05) en N.A.P. + 5,83 m (met onbetrouwbaarheid 0,01) bedragen. Anderzijds is de geschatte overschrijdingskans van de hoogte N.A.P. + 5 m gelijk aan $1,5 \cdot 10^{-4}$, maar de bovengrenzen bedragen $5 \cdot 10^{-4}$ (onbetrouwbaarheid 0,05), resp. $7,8 \cdot 10^{-4}$ (onbetrouwbaarheid 0,01). De verschillen tussen schatting en bovengrens zijn aanzienlijk, hetgeen het gevolg is van de extrapolatie.

12.0 INTERPRETATIE DER UITKOMSTEN

Bij de interpretatie van deze uitkomsten is de *praktische betekenis van een overschrijdingskans* van een bepaalde hoogte van het grootste belang.

Indien men, om de gedachten te bepalen, er van uit zou gaan, dat men de dijken bij Hoek van Holland voor 100 jaar veilig wil maken, dan dient men het begrip „veilig” nader te omschrijven. Immers, absolute veiligheid is niet mogelijk. Men zou nu bijv. kunnen zeggen, dat men een kans van ongeveer 1% op overstroming van de dijk gedurende die 100 jaar nog acceptabel vindt. In dat geval zal men de dijk zo hoog moeten maken, dat (afgezien van extra-verhogingen voor golfslag, bodemdaling, enz.) de overschrijdingskans van de gekozen hoogte 10^{-4} is of althans dicht daarbij ligt.

In het licht van deze interpretatie is een overschrijdingskans 10^{-4} zeker niet extreem laag. De indruk, dat dit wel zo is, wordt ten onrechte gewekt, indien men deze overschrijdingskans interpreteert als: „gemiddeld ééns in de 10 000 jaar”, daar men dan de neiging heeft, hiervoor te lezen: „voor het eerst over 10 000 jaar”. Men realiseer zich echter, dat de kans op een volgende overstroming binnen 100 jaar reeds 1% bedraagt, dus, zeker bij een zo belangrijke veiligheidsmaatregel, geenszins te verwaarlozen is.

Dit klemmt te meer, indien men voor de bepaling van de dijkhoogte, die de gewenste overschrijdingskans dient te bezitten, gebruik maakt van een *schatting* in plaats van een *bovengrens* of althans een

waarschijnlijk hoge schatting. Neemt men bijv. bij N.A.P. + 5 m als schatting voor de overschrijdingskans $1,5 \cdot 10^{-4}$, dan heeft men, blijkens de figuren 10.0.1 en 11.0.1 geen enkele garantie, dat deze schatting niet aan de lage kant is; is dit echter het geval, dan is, bij aanhouden van N.A.P. + 5 m als richtpunt voor de hoogte bij Hoek van Holland, de kans op overstroming in de eerstvolgende 100 jaar wellicht nog vrij veel hoger dan 1%. Waarden als 5% zijn volgens onze uitkomsten nog mogelijk, zij het minder aannemelijk dan 1%.

Bij deze overwegingen is steeds van lineaire extrapolatie gebruik gemaakt, dus van een voortzetting van het exponentiële karakter der verdeling bij grotere hoogten. Er zijn (niet-statistische) argumenten aangevoerd, op grond waarvan de lijn bij extrapolatie naar lagere overschrijdingskansen zou moeten afbuigen. De beoordeling van deze argumenten valt buiten de competentie van de statisticus. Wel dient er echter op gewezen te worden, dat de thans beschikbare waarnemingspunten (zie bijv. figuur 8.0.1) geen enkele steun aan deze theorie verlenen. De allerhoogste vertonen eerder de neiging naar de andere kant af te buigen, ook al zijn de afwijkingen van rechtlijnigheid niet statistisch aantoonbaar¹⁾. Trouwens, ook als de lijn inderdaad bij grotere hoogte naar kleinere overschrijdingskansen gaat afbuigen, dan is er nog geen reden om aan te nemen, dat dit reeds bij N.A.P. + 5 of 6 m merkbaar het geval zou moeten zijn. Dit alles te zamen wijst er op, dat grote voorzichtigheid gewenst is.

Een punt, dat eveneens in deze richting wijst, is, dat de stormvloed van 1953 zoveel hoger was dan de op één na hoogste. Het verschil bedroeg 0,57 m. Dergelijke grote verschillen bij overschrijding van de hoogst waargenomen waarde zijn in overeenstemming met het karakter van de exponentiële verdeling. Deze heeft nl. de eigenschap, dat het genoemde verschil steeds dezelfde kansverdeling bezit, hoe hoog ook de hoogst waargenomen stand moge zijn. Het zou daarom onjuist zijn, te verwachten, dat een stormvloed, die hogere standen geeft dan die van 1953 „wel niet zo veel hoger zal komen dan deze laatste, omdat die al zo hoog was”. Indien de stand van 1953 overschreden wordt, is een overschrijding van opnieuw ongeveer $\frac{1}{2}$ m of meer geenszins onwaarschijnlijk; de (voorwaardelijke) waarschijnlijkheid dat zulks weer zal geschieden is ongeveer 0,23.

Een uiteindelijke keuze van een bepaalde hoogte als richtpunt kan op grond van de hier gegeven analyse alleen niet tot stand komen. Daarvoor is het nodig, ook economische, technische en wellicht nog andere aspecten in de beschouwingen op te nemen. Econometrische beschouwingen en berekeningen zijn in een afzonderlijke bijdrage vervat (zie Bijdrage II.2).

13.0 CONCLUSIE

De baanselectie-waterstanden \geq N.A.P. + 1,70 m kunnen beschouwd worden als onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling met $\alpha = 2,97 \text{ m}^{-1}$. De hierbij behorende kanshalverings-, decimerings- en nepereringshoogten zijn resp. 0,234, 0,776 en 0,337 m.

APPENDIX

A 1.0 NOTATIE

In Hoek van Holland blijken de hogere H.W.-standen, cumulatief uitgezet op half-logaritmisch papier, voor lange perioden ongeveer op een rechte lijn te liggen [9]. Stelt $n(h)$ het aantal verwachte overschrijdingen van de hoogte h per jaar voor, dan wordt dus door de waarnemingen gesuggereerd, dat voor voldoende grote h :

$$n(h) = ck^{-c'h}, \quad (k > 0) \quad (1)$$

waarin één der parameters k of c' nog willekeurig gekozen kan worden.

Daar het nuttig is, de parameters in deze en andere vergelijkingen een aanschouwelijke betekenis te geven, worden de volgende *parameters* ingevoerd²⁾.

¹⁾ Indien men bij de aanpassing van een hoogwateroverschrijdingslijn aan de waarnemingen een grotere klasse van verdelingen (nl. de zg. Pearson-verdelingen) als basis neemt, wordt een kromme lijn verkregen, die aanzienlijk naar boven afwijkt (A 6.0).

²⁾ Indertijd voorgesteld door VAN DANTZIG.

1. a_k = het hoogteverschil, waardoor het gemiddelde aantal overschrijdingen k maal zo klein wordt. Deze grootte wordt dus gedefinieerd door:

$$n(h + a_k) = \frac{1}{k} n(h), \quad (2)$$

voor iedere h en $h + a_k$. In het lineaire gebied van de lijn is a_k een constante.

Uit (1) en (2), dus bij veronderstelling van rechtlijnigheid, volgt:

$$c' = \frac{1}{a_k}, \quad (3)$$

dus:

$$n(h) = ck^{-\frac{h}{a_k}} \quad (4)$$

2. h_k = hoogte, die gemiddeld $\frac{N}{k}$ maal per jaar wordt overschreden, waarbij N het aantal H.W.'s per jaar voorstelt. Deze grootte wordt dus gedefinieerd door:

$$n(h_k) = \frac{N}{k} \quad (5)$$

en uit (4) en (5) volgt:

$$c = N \cdot k^{\frac{h_k}{a_k} - 1}. \quad (6)$$

Vullen wij (6) in (4) in, dan verkrijgen wij:

$$n(h) = Nk^{-\frac{h - h_k}{a_k} - 1} \quad (k > 0). \quad (7)$$

In deze formule, waarin k dus nog willekeurig gekozen kan worden, hebben nu alle parameters een aanschouwelijke betekenis en bij iedere gewenste waarde van k kunnen zij gemakkelijk uit de grafiek van de lijn bepaald worden.

Werkt men niet met het gemiddeld aantal overschrijdingen van h per jaar, maar met de *kans* op overschrijding bij één waarneming, dan vervalt de factor N in het rechterlid.

Het grondtal k kan nu in (7) nog willekeurig gekozen worden. Voor twee verschillende grondtallen k en g geldt volgens (7):

$$k^{-\frac{h - h_k}{a_k} - 1} = g^{-\frac{h - h_g}{a_g} - 1} \quad (8)$$

voor iedere h in het lineairiteitsgebied.

Vullen wij hierin $h = h_k - a_k$ in, dan volgt gemakkelijk:

$$h_k - h_g = a_k - a_g. \quad (9)$$

Invullen van $h = h_k$ resp. $h = h_g$ in (8) geeft na enige herleiding de beide ook direct uit elkaar volgende betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} a_k &= a_g \cdot g \log k \\ a_g &= a_k \cdot k \log g. \end{aligned} \right\} (10)$$

Drie in het bijzonder voor de hand liggende waarden voor het grondtal k zijn: e (het grondtal der Napijse logaritmen), 2 en 10. Voor deze drie grondtallen kunnen wij de parameter a_k de namen „*neperingshoogte*”, „*halveringshoogte*” resp. „*decimeringshoogte*” geven, waarbij „*hoogte*” in de zin van „*hoogteverschil*” bedoeld is.

Daar veelvuldig slechts een deel van de in een jaar voorkomende waarnemingen wordt beschouwd (bijv. de winterwaarnemingen of de naar bepaalde depressies geselecteerde waarnemingen), gaan we er van uit, dat het aantal waarnemingen in een jaar stochastisch is, d.w.z. dat er een kans p_n op n waar-

nemingen in een bepaald jaar bestaat en dat de aantallen voor verschillende jaren onafhankelijk zijn. Als ¹⁾

$$g(h) = P \{h \geq h\} \quad (11)$$

de kans op overschrijding van het peil h bij één waarneming voorstelt, dan vinden wij voor $p(h)$, de kans op overschrijding van het peil h in een jaar

$$p(h) = \sum_{n=0}^{\infty} [1 - \{1 - g(h)\}^n] p_n, \quad (12)$$

hetgeen voor grote h benaderd kan worden met

$$\sum_{n=0}^{\infty} n p_n \cdot g(h), \quad (13)$$

daar $\{1 - g(h)\}^n$ in dat geval door $1 - n g(h)$ vervangen mag worden ²⁾. Het verwachte aantal overschrijdingen van het peil h in een jaar is:

$$n(h) = \sum_{n=0}^{\infty} n g(h) \cdot p_n, \quad (14)$$

zodat we kunnen concluderen:

Het verwachte aantal overschrijdingen van een hoog peil h in één jaar is gelijk aan de kans op overschrijding van dat peil h in één jaar.

Het *verwachte* aantal overschrijdingen $n(h)$ van een peil h in één jaar kunnen we schatten uit de beschikbare gegevens van 60 à 70 jaar met het *gemiddeld per jaar* opgetreden aantal overschrijdingen van het peil h , dat we $f(h)$ zullen noemen.

In de figuren 3.0.1, 7.0.3, 8.0.1 is $f(h)$ voor verschillende gevallen getekend, met dien verstande, dat bij de *opgetreden* hoogwaterstanden het gemiddeld aantal overschrijdingen is weergegeven. Zo is bijv. in figuur 3.0.1 de stand N.A.P. + 3,28 m *éénmaal* voorgekomen in 69 jaar en *tweemaal* overschreden, daar de standen N.A.P. + 3,28 m en N.A.P. + 3,85 m elk een keer opgetreden zijn. Het gemiddeld aantal overschrijdingen van het peil N.A.P. + 3,28 m per jaar is dus $2/69 = 0,0290$. Bij de lagere hoogwaterstanden komen de uitgezette punten zo dicht bijeen te liggen, dat ze door streepjes vervangen zijn.

Alvorens de consequenties van de aanpassing van een rechte lijn aan $\log f(h)$ te onderzoeken, zullen wij het verband met de logaritmischnormale verdeling bespreken.

A 2.0 AANPASSING VAN EEN AFGEKNOTTE LOGARITMISCH-NORMALE VERDELING

In de literatuur wordt vaak in problemen als het onze een logaritmischnormale verdeling aan de waarnemingen aangepast. Omdat we ons hier niet interesseren voor de lage hoogwaterstanden, kunnen we de waarnemingen het beste vergelijken met een aan de linkerkant afgeknotte logaritmischnormale verdeling. Aan het einde van dit hoofdstuk zullen wij aantonen, dat een exponentiële verdeling willekeurig dicht benaderd kan worden met een afgeknotte logaritmischnormale verdeling, waaruit we de volgende conclusies kunnen trekken:

Waarnemingen, die verkregen zijn door trekking uit een exponentiële verdeling, kunnen ook afkomstig zijn uit een afgeknotte logaritmischnormale verdeling. Met een eindig aantal waarnemingen kan men nooit de conclusie trekken: „deze waarnemingen zijn wel uit een exponentiële, maar niet uit een afgeknotte logaritmischnormale verdeling afkomstig”. De afgeknotte logaritmischnormale verdeling is *algemener* dan de exponentiële, omdat zij meer parameters bevat, zodat zij altijd *minstens zo goed* aan waarnemingen aangepast kan worden als de exponentiële verdeling. In gevallen, waarin de exponentiële verdeling een *bevredigende* aanpassing geeft, verdient de laatstgenoemde de voorkeur boven de afgeknotte logaritmischnormale verdeling, daar zij veel eenvoudiger te hanteren is.

¹⁾ Stochastische grootheden worden onderscheiden van waarden, die zij in een steekproef kunnen aannemen, door ze vet te drukken.

Met $P \{A\}$ geven we de kans op gebeurtenis A aan.

²⁾ De grootste waarde, die n kan aannemen, is ongeveer 706.

We bewijzen nu de in de eerste alinea gemaakte bewering, die we als volgt preciseren.
De exponentiële verdeling

$$F(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha h} & \text{voor } h \geq 0 \\ 0 & \text{voor } h < 0 \end{cases} \quad (1)$$

met $\alpha > 0$, kan op het interval $0 \leq h \leq 1$ willekeurig dicht benaderd worden met een afgeknotte logaritmisch-normale verdeling, gegeven door

$$G(h) = \begin{cases} \int_{l(0)}^{l(h)} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \cdot \left(\int_{l(0)}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right)^{-1} & \text{als } h \geq 0, \\ 0 & \text{als } h < 0, \end{cases} \quad (2)$$

waarin $l(h) = \frac{\log \mu (h + a)}{\sigma}$, en a , μ en σ positieve constanten zijn.

Hiermede wordt bedoeld, dat bij een gekozen $\varepsilon > 0$ de parameters a , μ en σ zo gekozen kunnen worden, dat

$$|F(h) - G(h)| < \varepsilon$$

is voor $0 \leq h \leq 1$.

Als we bij gegeven a en $\alpha > 0$ met $G_a(h)$ die functie $G(h)$ aangeven, waarvoor $a\sigma^2 = 1$ en $\mu a = e^\alpha$ is, dan is het voldoende te bewijzen, dat

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \log \{1 - G_a(h)\} = -\alpha h \quad \text{voor } 0 \leq h \leq 1. \quad (3)$$

Nu is voor $x > 0$:

$$xe^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = 1 - xe^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{v^2} dv$$

en

$$xe^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{v^2} dv \leq \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2} \int_x^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \leq \frac{1}{x^2},$$

zodat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = 1. \quad (4)$$

Passen wij dit toe op $G_a(h)$, dan blijkt inderdaad, dat voor alle h , die voldoen aan $0 \leq h \leq 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \log \{1 - G_a(h)\} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \log \left\{ \int_{l(h)}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \cdot \left(\int_{l(0)}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right)^{-1} \right\} = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \log \left\{ \frac{\log \mu a}{\log (\mu a + \mu h)} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ \left(\log (\mu a + \mu h) \right)^2 - \left(\log \mu a \right)^2 \right\} \right] \right\} = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\log \mu a + \log \left(1 + \frac{h}{a} \right)}{\sigma} \right\}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\log \mu a}{\sigma} \right\}^2 \right] = \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} -\frac{h \log \mu a}{a\sigma^2} = -\alpha h. \end{aligned} \quad (5)$$

Ter illustratie is figuur A 2.0.1 toegevoegd. Hierin is uitgezet op half-logaritmisch papier:

$$(a = \infty) \quad 1 - F(h) = e^{-\alpha h}, \text{ voor } h \geq 0,$$

met $\alpha = 3$ en de benaderingen

$$(a = 1) \quad 1 - G_1(h),$$

$$(a = 10) \quad 1 - G_{10}(h),$$

$$(a = 100) \quad 1 - G_{100}(h).$$

Voor het tekenen van de figuur werd van tabel A 2.0.1 gebruik gemaakt.

Tabel A 2.0.1

Gegevens, gebruikt voor het vergelijken van een exponentiële verdeling met een logaritmisch-normale verdeling

h	$a = \infty$	$a = 1$	$a = 10$	$a = 100$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,5	0,2231	0,2447	0,2250	0,2238
1,0	0,04979	0,0820	0,0531	0,0501
1,5	0,01111	0,0333	0,0131	0,01130
2,0	0,002479	0,0154	0,00336	0,00256
2,5	0,0005531	0,00782	0,000899	0,000584
3,0	0,0001234	0,00427	0,000249	0,000133
3,5	0,00002754	0,00247	0,000071	0,000031

A 3.0 AANPASSING EXPONENTIËLE VERDELING

Indien we een kromme

$$n(h) = Ne^{-\frac{h-h_e}{a_e}} \quad (1)$$

aan het in Hoek van Holland gevonden gemiddelde aantal overschrijdingen van het peil h per jaar $f(h)$ willen aanpassen, kunnen we dit als volgt doen. We beperken ons tot de waarnemingen, die het peil b overschrijden, waarbij we b kiezen in het gebied, waarin we volgens figuur 3.0.1 met een rechte lijn te doen hebben; $f(h)$ wordt dus alleen voor $h \geq b$ aan de waarnemingen aangepast. Als n het aantal waarnemingen $\geq b$ in m jaar is, dan schatten we $n(b)$ met ¹⁾

$$\hat{n}(b) = \frac{n}{m} \quad (2)$$

en als de gevonden waarnemingen h_1, \dots, h_n zijn (met $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_n \geq b$), dan wordt a_e geschat door

$$\hat{a}_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i - b). \quad (3)$$

Daar de invloed van de keuze van $\hat{n}(b)$ gering is, hebben we deze zo eenvoudig mogelijk gehouden. Voor \hat{a}_e is de aannemelijkste schatting van de parameter van een exponentiële verdeling met gegeven beginpunt genomen.

Tabel A 3.0.1 bevat de schattingen, die op de zojuist voor figuur 3.0.1 besproken wijze werden verkregen ²⁾. De in drie decimalen opgegeven waarde voor \hat{a}_e behoren bij de in de grafieken getekende lijnen. De onzekerheid in deze schattingen die ten eerste blijkt uit de verschillen, die bij verschillende waarden van b verkregen worden, en ten tweede uit de wijde betrouwbaarheidsintervallen van tabel 11.0.1 ontnemt echter aan de derde decimaal iedere praktische betekenis, behalve voor de figuren.

¹⁾ Schattingen van parameters geven we met \hat{n} aan.

²⁾ Er werd nog een continuïteitscorrectie toegepast.

Tabel A 3.0.1
Schattingen voor $n(b)$ en a_e bij verschillende b

	b (in m)	$\hat{n}(b)$	\hat{a}_e (in m)
figuur 3.0.1	1,10	126	1,212
figuur 7.0.1	1,30	47,2	0,231
	1,50	19,7	0,236
	1,70	8,41	0,243
	1,90	3,62	0,255
	2,10	1,65	0,255
figuur 7.0.3 (links)	0,70	130	0,362
	0,90	86,2	0,296
	1,10	46,6	0,270
	1,30	22,3	0,269
	1,50	10,9	0,260
	1,70	4,93	0,269
	1,90	2,29	0,280
	2,10	1,19	0,259
figuur 7.0.3 (rechts)	1,10	79,4	0,178
	1,30	24,8	0,197
	1,50	8,86	0,208
	1,70	3,48	0,207
	1,90	1,33	0,211
figuur 8.0.1	1,30	4,97	0,500
figuur 8.0.2	1,40	4,65	0,430
	1,50	4,08	0,383
	1,60	3,37	0,354
	1,70	2,64	0,337
	1,80	2,05	0,321
	1,90	1,49	0,325
	2,00	1,13	0,315
	2,10	0,841	0,304
	2,20	0,524	0,364
	2,30	0,381	0,387
	2,40	0,286	0,394
	2,50	0,270	0,315
	2,60	0,206	0,304

A 4.0 TOETSING DER AANPASSING

Een gangbare toets voor het beoordelen van de aanpassing van een theoretische verdeling aan een steekproefverdeling is de χ^2 -toets. Bij toepassing op een voldoende groot aantal waarnemingen geeft deze betrouwbare resultaten. In tabel A 3.0.1 zijn de nepereringshoogten, die behoren bij aangepaste krommen, welke bij toepassing van deze toets met een onbetrouwbaarheid van 5% verworpen moeten worden, d.w.z. waarbij de aanpassing slecht is, door cursivering aangegeven. Vet gedrukt zijn die gevallen, waarbij de aanpassing zéér slecht is. Uit de gevonden waarden blijkt, dat de aanpassing zéér slecht is voor lage beginpeilen, hetgeen te verwachten was, daar in deze gevallen de *lage* hoogwaterstanden in onze figuren ten duidelijkste niet op een rechte lijn liggen. Daarentegen kunnen de gevonden waarnemingen (althans volgens de nu toegepaste toets) vanaf voldoende hóge peilen zeer wel uit exponentiële verdelingen afkomstig zijn.

Echter is bekend, dat de waarnemingen, in de figuren 3.0.1 en 7.0.3 uitgezet, géén homogeen materiaal vormen en bovendien sterk afhankelijk zijn (hoogwaterstanden, die direct na elkaar bereikt worden, hebben een gemeenschappelijke oorzaak). Dit is in veel mindere mate het geval met de waarnemingen, die in figuur 8.0.1 en de daarop volgende figuren gebruikt zijn.

A 5.0 DE SELECTIE VOLGENS VAN DER HAM

Een gevaarlijk hoge waterstand wordt steeds veroorzaakt door een storm en deze weer door een depressie. Beschouwen wij dus de depressies in plaats van de afzonderlijke H.W.'s, dan komen wij dichter bij de oorzaak van het gevaar. Een depressie strekt zich bovendien vaak uit over meer dan één H.W. en het is juist daardoor, dat er afhankelijkheden tussen op elkaar volgende H.W.'s kunnen ontstaan. Deze zullen dus grotendeels geëlimineerd worden, indien wij met één waarneming per depressie volstaan, en daar het gevaar, dat een depressie voor onze dijken geeft, vrij nauwkeurig weergegeven kan worden door de hoogste waterstand, die tijdens die depressie bereikt wordt, ligt het voor de hand ook de hoogwateroverschrijdingslijn te beschouwen, die verkregen wordt uit deze *hoogste standen per depressie*.

Zelfs nu is het waarnemingsmateriaal nog inhomogeen.

Daarom werden in Bijdrage I van het K.N.M.I. door VAN DER HAM tevens met het oog op onderzoekingen van het K.N.M.I. over de stormramp, uit de lijst van depressies die depressies geselecteerd, die een baan volgden, gelegen in een bepaalde strook boven de Noordzee, en die daarom op meteorologische gronden als bijzonder gevaarlijk voor ons land beschouwd kunnen worden. Een uitvoerige beschrijving van deze groep van depressies van de hand van VAN DER HAM vindt men hieronder. Wij volstaan hier met de opmerking, dat hij zich beperkte tot depressies, waarbij een opzet van minstens 50 cm geconstateerd werd, enerzijds omdat lichte depressies moeilijk te herkennen en van elkaar te onderscheiden zijn en anderzijds omdat op deze wijze een aanzienlijke werkbesparing verkregen werd, terwijl bovendien de depressies met een lage opzet ook lage H.W.'s geven, die voor de extrapolatie van hoogwateroverschrijdingslijnen niet van belang zijn. Voortbouwend op deze meteorologische gedachtengang van het K.N.M.I. ligt het voor de hand, die *hoogwateroverschrijdingslijn* te beschouwen, die verkregen wordt uit de *hoogste standen per depressie* voor deze groep van *gevaarlijke depressies*. Immers op die wijze wordt dan gebruik gemaakt van meteorologische ervaring omtrent het ontstaan van hoge waterstanden. Het resultaat van deze selectie is in figuur 8.0.1 getekend voor de wintermaanden, d.w.z. november, december en januari.

Hieronder volgt een korte beschrijving van de hand van VAN DER HAM van de op de waterstanden te Hoek van Holland toegepaste baanselectiemethode.

Ten einde de waterstandgegevens meer homogeen te maken, werd door het K.N.M.I. de volgende selectiemethode toegepast.

Nagegaan werd langs welke banen de depressies zich bewogen hadden, die in de periode van 1898 tot 1953 een hoog- of laagwateropzet van meer dan 160 cm te Hellevoetsluis veroorzaakt hadden. Onder de baan van een depressie wordt hier verstaan de baan van het centrum van het lagedrukgebied.

Deze depressiebanen (47 in getal) bleken, op één uitzondering na, alle te gaan door het vak, dat als volgt begrensd is:

op 10° W.L. tussen 51° N.B. en 62° N.B.;

op 0° tussen 52° N.B. en 61° N.B.;

op 7° E.L. tussen 52° N.B. en 61° N.B.

De waterstandgegevens van Hoek van Holland werden nu eerst gecombineerd tot opwaai-perioden, waarbij als één opwaaiperiode werd beschouwd de periode, waarin de opwaaiing aan één en dezelfde depressie te danken was. Alleen de opwaaiperioden, waarin de maximale opzet te Hoek van Holland meer dan 50 cm bedroeg, werden daarbij beschouwd.

De selectie bestond nu uiteindelijk hierin, dat voor elke opwaaiperiode werd nagegaan of de bijbehorende depressie een baan gevolgd had, die al of niet binnen het vak gelegen was, dat door de eerdergenoemde „hoofddepressies” was bepaald.

De opwaaiperioden met een depressiebaan, die geheel of gedeeltelijk buiten het genoemde vak viel, werden van de lijst geschrapt.

A 6.0 NADERE BESCHOUWING DER GESELECTEERDE WAARNEMINGEN

Nu we een zo homogeen mogelijk materiaal verkregen hebben, willen we nogmaals onderzoeken, of onze waarnemingen als onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling beschouwd kunnen worden.

We hebben al gezien (A 4.0), dat volgens de χ^2 -toets de waarnemingen \geq N.A.P. + 1,50 m als zodanig beschouwd mogen worden, maar daar we ons voor extrapolatie interesseren, zegt het resultaat van de χ^2 -toets niet veel: alleen zeer grote afwijkingen van de exponentialiteit komen bij deze toets te voorschijn. We kunnen echter, aannemend, dat de waarnemingen \geq N.A.P. + 1,70 m onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling zijn, onderzoeken of deze onderstelling tot onwaarschijnlijke afwijkingen van de hoge waarnemingen t.o.v. de lagere aanleiding geeft.

a) Als h_1, \dots, h_n (geordende) onderling onafhankelijke waarnemingen zijn uit de exponentiële verdeling:

$$F_b(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(h-b)} & h \geq b \\ 0 & h < b, \end{cases}$$

met $b \leq h_n \leq h_{n-1} \leq \dots \leq h_1$, dan vormen x_1, \dots, x_n , waarbij $x_i = (h_i - h_{i+1})$, eveneens een steekproef van onderling onafhankelijke waarnemingen uit $F_b(h)$.

Men kan nu, bij gegeven k , toetsen of het quotiënt

$$B = \frac{x_1 + \dots + x_k}{x_1 + \dots + x_{k+1} + \dots + x_n} = \frac{h_1 + \dots + h_k - kh_{k+1}}{h_1 + \dots + h_n - nb} \quad (1)$$

ongewoon groot of klein is, d.w.z. of de som van de verschillen van de k hoogste waarnemingen te sterk afwijkt van wat op grond van alle n waarnemingen een redelijke waarde genoemd kan worden.

De stochastische grootheid

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n}$$

heeft een $B_{k, n-k}$ -verdeling d.w.z.:

$$P\{\mathbf{B} \leq B\} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \int_0^B x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} dx. \quad (2)$$

Toepassing op de waarnemingen \geq N.A.P. + 1,70 m brengt geen bijzondere kenmerken van de hoogste standen aan het licht, zoals uit tabel A 6.0.1 blijkt.

b) Indien we alleen veronderstellen, dat de waarnemingen uit figuur 8.0.1 onderling onafhankelijke trekkingen uit een onbekende verdeling vormen, kunnen we met behulp van formule (11) van MILLER [8] een bovengrens aangeven voor de onbekende verdelingsfunctie.

In figuur A 6.0.1 zijn opnieuw de waarnemingen van figuur 8.0.1 uitgezet. Het theoretisch verwachte aantal overschrijdingen per jaar komt, behoudens een kans van 10%, niet boven de getekende trapfunctie uit, die gegeven wordt door

$$5,27 \left(\frac{i}{n} + 0,0584 \right) \text{ voor } h_{i+1} < h \leq h_i \quad (3)$$

(waarin $h_n \leq \dots \leq h_1$ de gevonden $n = 332$ waarnemingen voorstellen) en alleen voor $h \geq$ N.A.P. + 2,00 m is ingetekend.

Uit de figuur blijkt duidelijk, dat deze begrenzing vrijwel waardeloos is voor de extrapolatie (dit wijst er opnieuw op, dat extrapolatie slechts onder zeer veel voorbehoud mogelijk is).

Tabel A 6.0.1

Uitkomsten van een toetsing der hoogste waarnemingen met de B -verdeling

$n = 166$	k	B	$P\{\mathbf{B} \leq B\}$
	4	0,0231	0,53
	8	0,0542	0,68
	16	0,0942	0,49
	32	0,2117	0,75

c) We kunnen onderstellen, dat de waarnemingen uit een interval, bijv. de waarnemingen \geq N.A.P. + 1,70 m en $<$ N.A.P. + 2,45 m, de parameter α van de exponentiële verdeling nauwkeurig bepalen en toetsen of de waarnemingen \geq N.A.P. + 2,45 m uit deze exponentiële verdeling afkomstig kunnen zijn met de toets van Kolmogorov-Smirnov met behulp van de tabellen van MILLER [8].

De parameter α van de exponentiële verdeling

$$F_{b_1}(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(h-b_1)} & h \geq b_1 \\ 0 & h < b_1 \end{cases}$$

kan geschat worden uit de $n-l$ waarnemingen h_n, \dots, h_{l+1} , waarvoor geldt $b_1 \leq h_n \leq \dots \leq h_{l+1} < b_2$ met behulp van de aannemelijkste schatting (zie [2]):

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{indien } \sum_{i=1}^{n-l} \frac{h_i - b_1}{n-l} \geq \frac{b_2 - b_1}{2} \\ \left(\sum_{i=1}^{n-l} \left(\frac{h_i - b_1}{n-l} + \frac{(b_2 - b_1) e^{-\hat{\alpha}(b_2 - b_1)}}{1 - e^{-\hat{\alpha}(b_2 - b_1)}} \right)^{-1} \right)^{-1} & \text{indien } 0 < \sum_{i=1}^{n-l} \frac{h_i - b_1}{n-l} < \frac{b_2 - b_1}{2} \end{cases} \quad (4)$$

(Hier wordt α dus geschat onder de voorwaarde, dat er $n-l$ waarnemingen $< b_2$ zijn).

De waarnemingen h_1, \dots, h_l ($h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_l \geq b_2$) vormen een geordende steekproef van onafhankelijke waarnemingen uit:

$$\begin{aligned} F_{b_2}(h) &= \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(h-b_2)} & h \geq b_2, \\ 0 & h < b_2. \end{cases} \\ \text{Zij: } s_l(h) &= \begin{cases} 0 & b_2 \leq h_l \\ 1 - \frac{i-1}{l} & h_l < h \leq h_{i-1} \\ 1 & h > h_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

dan kan uit de tabel van MILLER bij gegeven θ en l een ε bepaald worden, zo dat:

$$P \{ \max [F_{b_2}(h) - s_l(h)] \geq \varepsilon \} = \theta. \quad (6)$$

Nu is voor $h \geq b_2$:

$$f(h) = \frac{l}{m} \{1 - s_l(h)\}, \quad (7)$$

waarin m het beschouwde aantal jaren aangeeft, zodat met

$$z(h) = \frac{l}{m} \{1 - F_{b_2}(h) + \varepsilon\} \quad (8)$$

een functie gevonden is, waarvoor:

$$P \{ \max_{h \geq b_2} [f(h) - z(h)] \geq 0 \} = \theta. \quad (9)$$

We vinden dus een grens $z(h)$, die behoudens een kans θ niet door $f(h)$ wordt overschreden.

Hiervoor moeten we echter $F_{b_2}(h)$ kennen; daar we de juiste waarde van α niet kennen, nemen we in plaats daarvan $\hat{\alpha}$, daar we mogen verwachten, dat dit weinig invloed zal hebben.

Op grond van de in 63 jaar gevonden 166 waarnemingen \geq N.A.P. + 1,70 m, waarvan er 17 \geq N.A.P. + 2,45 m zijn, vinden we $\hat{\alpha} = 2,92 \text{ m}^{-1}$ en bij $\theta = 10\%$ een $\varepsilon = 0,25039$.

Voor dit geval is $z(h)$ getekend in figuur A 6.0.2. Voor $b_1 = \text{N.A.P.} + 1,80 \text{ m}$ en $b_2 = \text{N.A.P.} + 2,55 \text{ m}$ resp. $b_1 = \text{N.A.P.} + 1,70 \text{ m}$ en $b_2 = \text{N.A.P.} + 2,35 \text{ m}$ werden soortgelijke figuren gevonden, die niet in deze bijdrage zijn opgenomen. Tevens werden in figuur A 6.0.2 de punten van de baanselectielijn (van figuur 8.0.1 dus) en de schattingen van $n(h)$ (met $\hat{\alpha} = 2,92 \text{ m}^{-1}$) bij beginpunt N.A.P. + 1,70 m resp. beginpunt N.A.P. + 2,45 m getekend. Uit deze figuren blijkt, dat de hoge waterstanden slechts weinig van de „theoretische” verdeling afwijken.

We kunnen nog opmerken, dat met de gevonden schatting $\hat{\alpha} = 2,92 \text{ m}^{-1}$, indien er (zoals hier) 13 waarnemingen $\geq \text{N.A.P.} + 2,55 \text{ m}$ zijn, de kans, dat de grootste van die waarnemingen $\geq \text{N.A.P.} + 3,85 \text{ m}$ is 0,16 bedraagt en dat deze hoogste waarneming behoudens een kans $0,05 \leq \text{N.A.P.} + 4,22 \text{ m}$ is.

d) In figuur A 6.0.3 is aan alle geselecteerde waarnemingen een Pearsonkromme aangepast. De methode van aanpassen wordt door ELDERTON [3] uitvoerig beschreven. Voor het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar werd gevonden:

$$\hat{n}(h) = \begin{cases} 5,27 & \text{voor } h < 0,523 \\ 5,27 \int_0^g \frac{e^{-z} \cdot z^\delta}{\delta!} dz & \text{voor } h \geq 0,523, \end{cases} \quad (10)$$

met $g = \frac{14,5}{h - 0,523}$ en $\delta = 11,74$.

Hoewel de methode is verouderd, is het toch interessant haar met de andere aanpassingen te vergelijken. Bij het aanpassen van een Pearsonverdeling wordt namelijk géén rekening gehouden met de extrapolatie, die uitgevoerd moet worden, doch alleen die kromme uit een gegeven klasse gezocht, die in zekere zin het beste bij de waarnemingen past. Bij het niveau van $\text{N.A.P.} + 5,00 \text{ m}$ wordt nu een kans $2,70 \cdot 10^{-4}$ gevonden en bij een kans 10^{-4} behoort het peil $\text{N.A.P.} + 5,47 \text{ m}$. Wenst men niet met een kromme, die naar boven afbuigt, te extrapoleren, dan kan aan de getekende kromme de raaklijn in het buigpunt (dat bij $(\text{N.A.P.} + 2,41 \text{ m}; 3,06 \cdot 10^{-1})$ valt) getrokken worden. Behalve het raakpunt ligt het punt, dat bepaald wordt door het peil $\text{N.A.P.} + 4,52 \text{ m}$ en $3,56 \cdot 10^{-4}$ op deze raaklijn. Nu behoort bij het niveau van $\text{N.A.P.} + 5,00 \text{ m}$ een kans $7,79 \cdot 10^{-5}$ en bij een kans 10^{-4} het peil $\text{N.A.P.} + 4,92 \text{ m}$.

Al deze beschouwingen voeren ons tot de conclusie:

De baanselectie-waterstanden $\geq \text{N.A.P.} + 1,70 \text{ m}$ kunnen beschouwd worden als onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling met $\alpha = 2,92 \text{ m}^{-1}$. De hierbij behorende halverings-, decimerings- en nepereringshoogten zijn resp. 0,234, 0,776 en 0,337 m.

A 7.0 BETROUWBAARHEIDSINTERVALLEN

Als wij onderstellen, dat de baanselectiewaterstanden, h_1, \dots, h_n (alle $\geq b$) uit een exponentiële verdeling

$$F_b(h) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(h-b)} & h \geq b \\ 0 & h < b \end{cases}$$

afkomstig zijn, dan kunnen we een getal τ_θ berekenen, waarvoor geldt:

$$P \left\{ \alpha \sum_{i=1}^n \frac{h_i - b}{n} \leq \tau_\theta \right\} = \theta, \quad (1)$$

op grond van

$$P \left\{ \alpha \sum_{i=1}^n \frac{h_i - b}{n} \leq \tau_\theta \right\} = \int_0^{\tau_\theta} \frac{n^n t^{n-1} e^{-nt}}{(n-1)!} dt = \theta, \quad (2)$$

of

$$\tau_\theta = \frac{\chi_{2n}^2(1-\theta)}{2n}, \quad (3)$$

waar $\chi_{2n}^2(1-\theta)$ die waarde voorstelt, die bij een χ^2 -verdeling met $2n$ vrijheidsgraden een overschrijdingskans $1-\theta$ heeft.

Nu geldt tevens $P \left\{ \alpha \leq \frac{n\tau_\theta}{\sum_{i=1}^n (h_i - b)} \right\} = \theta$, zodat dus $\alpha > \frac{n\tau_\theta}{\sum_{i=1}^n (h_i - b)}$ is, behoudens een kans θ , waarmee een betrouwbaarheidsondergrens voor α is gevonden.

Bovendien is bij $h > b$:

$$P \left\{ \exp [-\alpha (h - b)] \geq \exp \left[-\frac{n\tau_\theta}{\sum_{i=1}^n (\mathbf{h}_i - b)} \right] \right\} = \theta,$$

zodat, met $\exp [-\alpha (h - b)] < \exp \left[-\frac{n\tau_\theta}{\sum_{i=1}^n (\mathbf{h}_i - b)} (h - b) \right]$,

behoudens een kans θ , een betrouwbaarheidsbovengrens gevonden is voor de overschrijdingskans van het niveau h bij een individuele waarneming.

Nu is dus (m is het beschouwde aantal jaren):

$$\frac{n}{m} \cdot \exp \left[-\frac{n\tau_\theta}{\sum_{i=1}^n (\mathbf{h}_i - b)} (h - b) \right], \quad (4)$$

behoudens een kans θ , een bovengrens voor het verwachte aantal overschrijdingen per jaar van het peil h of – wat immers voor voldoende grote h hetzelfde is – voor de kans op overschrijding van het peil h in één jaar.

Beschouwen we een vaste kans op overschrijding van het peil h bij één waarneming, dus bijv. $e^{-\alpha(h-b)} = p$, dan vinden we hieruit $h = b - \frac{\log p}{\alpha}$.

Nu is:

$$P \left\{ b - \frac{\log p}{\alpha} \geq b - \frac{\sum_{i=1}^n (\mathbf{h}_i - b)}{n\tau_\theta} \cdot \log p \right\} = \theta,$$

zodat:

$$b - \frac{\sum_{i=1}^n (\mathbf{h}_i - b)}{n\tau_\theta} \cdot \log p,$$

behoudens een kans θ , een bovengrens is voor het peil h , dat bij een waarneming met kans p overschreden wordt.

Evenzo is

$$b - \frac{n\tau_\theta}{\sum_{i=1}^n (\mathbf{h}_i - b)} \cdot \log \left(\frac{m}{n} p \right), \quad (5)$$

behoudens een kans θ , een bovengrens van het peil, dat door het jaarmaximum der hoogwaterstanden met kans p overschreden wordt.

De krommen in figuur 11.0.1 geven in verticale richting gelezen de betrouwbaarheidsbovengrenzen van $\theta = 5\%$ en $\theta = 1\%$ van de kans op overschrijding van het peil h in één jaar en, in horizontale richting gelezen, bij een kans p de betrouwbaarheidsbovengrenzen (met $\theta = 5\%$ en $\theta = 1\%$) voor het peil, dat door het jaarmaximum met kans p overschreden wordt.

A 8.0 DE METHODE VAN GUMBEL

De verdelingsfunctie van de grootste van N onderling onafhankelijke waarnemingen van een stochastische variabele kan onder bepaalde voorwaarden goed met een dubbel-exponentiële verdelingsfunctie benaderd worden.

Bij het onderzoek van de jaarmaxima der afvoeren van rivieren is gebleken, dat, hoewel we hier met maxima van afhankelijke grootheden te doen hebben, deze maxima toch vaak ondersteld kunnen

worden onafhankelijke trekkingen uit een dubbel-exponentiële verdeling te zijn en dat dus de verdelingsfunctie

$$H(h) = e^{-e^{-\beta(h-\gamma)}} \quad (1)$$

een goede benadering voor de werkelijke verdelingsfunctie is.

We kunnen nu $H(h)$ gebruiken voor het doen van de voorspellingen, nadat we β en γ hebben geschat uit de beschikbare gegevens. Met behulp van het door GUMBEL ontworpen waarschijnlijkheidspapier (Gumbelpapier) kunnen we onderzoeken of de jaarmaxima der hoogwaterstanden, die in Hoek van Holland gevonden zijn, ook beschouwd kunnen worden als onafhankelijke trekkingen uit een dubbel-exponentiële verdeling.

De waargenomen standen zijn als volgt uitgezet:

Zijn h_1, \dots, h_m ($h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_m$) de waargenomen standen, dan wordt eerst $(i - 0,3) / (m + 0,4)$ berekend (voor $i = 1, 2, \dots, m$) en vervolgens worden de punten $((i - 0,3) / (m + 0,4); h_{m-i+1})$ op het Gumbelpapier uitgezet, $(i - 0,3) / (m + 0,4)$ op de horizontale (niet lineaire) schaal en h_{m-i+1} op de verticale schaal. In plaats van $(i - 0,3) / (m + 0,4)$ kan ook $i/(m + 1)$ gebruikt worden of men kan de methode van GUMBEL zelf volgen.

Wij geven aan $(i - 0,3) / (m + 0,4)$ de voorkeur, daar hierdoor, in geval van werkelijke onafhankelijke waarnemingen uit een dubbel-exponentiële verdeling ieder uitgezet punt een kans $\frac{1}{2}$ heeft om boven of onder de theoretische kromme te liggen.

Deze methode van uitzetten wordt uitvoerig beschreven in [1] en werd ook toegepast in de figuren 8.0.1, 8.0.2 en 10.0.1.

De jaarmaxima liggen, zoals uit figuur 4.0.1 blijkt, inderdaad bij goede benadering op een rechte lijn.

Daar recht boven ieder punt y van de *lineaire* horizontale schaal het punt $e^{-e^{-y}}$ op de *niet-lineaire* horizontale schaal staat, wordt het lineaire verband der uitgezette punten gegeven door:

$$y = \beta(h - \gamma).$$

Voor grote y (d.w.z. voor grote h , daar $\beta > 0$) bestaat er vrijwel geen verschil tussen

$$e^{-e^{-y}} = 1 - e^{-y} + \frac{e^{-2y}}{2!} - \dots \quad \text{en} \quad 1 - e^{-y}$$

zoals uit tabel A 8.0.1 blijkt.

Tabel A 8.0.1
Vergelijking van de functies $1 - e^{-y}$ en $e^{-e^{-y}}$

y	$1 - e^{-y}$	$e^{-e^{-y}}$
0	0,000000	0,367879
1	0,632121	0,692201
2	0,864665	0,873423
3	0,950213	0,951432
4	0,981684	0,981851
5	0,993262	0,993285
6	0,997521	0,997524
7	0,999088	0,999089

Dit betekent, dat voor grote h de kans op overschrijding van het peil h in één jaar door $1 - e^{-e^{-\beta(h-\gamma)}} \approx e^{-\beta(h-\gamma)}$ gegeven wordt, zodat de op het Gumbelpapier gevonden helling β moet overeenstemmen met de helling α van $n(h)$ op half-logaritmisch papier (d.i. voor grote h eveneens de kans op overschrijding van het peil h in één jaar).

Uit het bovenstaande staatje blijkt, dat we voor $y \geq 4$ het Gumpelpapier als half-logaritmisch papier kunnen beschouwen. De in de figuren 7.0.1 en 8.0.2 getrokken lijnen kunnen voor $y \geq 4$ dus zonder meer overgenomen worden op het Gumbelpapier, door twee punten over te nemen en hun hellingen vergeleken worden met de helling van de Gumbellijn. Hierbij blijkt duidelijk (zie de figuren 7.0.2 en 9.0.1), dat de helling van de lijn uit figuur 7.0.1 slecht en die van de lijn uit figuur 8.0.2 goed bij die van de op het Gumbelpapier getekende punten past.

A 9.0 TABELLEN DER WAARNEMINGEN; TOELICHTING OP DE FIGUREN

In dit hoofdstuk wordt nogmaals van alle figuren van deze bijdrage een opsomming gegeven en aangegeven, hoe zij verkregen zijn. Zij zijn gebaseerd op de volgende vier tabellen.

Tabel A 9.0.1

Aantal overschrijdingen van het aangegeven peil in de jaren 1888 tot en met 1956 (69 jaar) en de splitsing daarvan in overschrijdingen in de wintermaanden (januari, november en december) en de overige maanden van het jaar

Aantal overschrijdingen				Aantal overschrijdingen			
H.W. in m + N.A.P.	Jaar	Winter- maanden	Overige maanden	H.W. in m + N.A.P.	Jaar	Winter- maanden	Overige maanden
3,84	1	1	0	1,98	181	119	62
3,28	2	2	0	1,96	196	130	66
3,00	4	4	0	1,94	215	141	74
2,96	7	6	1	1,92	226	147	79
2,76	8	6	2	1,90	250	158	92
2,74	9	7	2	1,88	272	171	101
2,70	11	8	3	1,86	287	179	108
2,68	14	10	4	1,84	316	198	118
2,66	16	12	4	1,82	343	214	129
2,64	18	13	5	1,80	377	234	143
2,62	21	16	5	1,78	406	247	159
2,56	22	16	6	1,76	442	268	174
2,54	23	17	6	1,74	483	288	195
2,52	27	20	7	1,72	525	306	219
2,50	28	21	7	1,70	580	340	240
2,48	28	21	7	1,68	630	371	259
2,46	29	22	7	1,66	676	401	275
2,44	30	23	7	1,64	737	428	309
2,42	31	23	8	1,62	803	459	344
2,40	34	24	10	1,60	877	507	370
2,38	37	26	11	1,58	952	552	400
2,36	40	28	12	1,56	1034	594	440
2,34	40	28	12	1,54	1129	635	494
2,32	46	32	14	1,52	1233	690	543
2,30	49	33	16	1,50	1362	751	611
2,28	53	34	19	1,48	1487	802	685
2,26	54	35	19	1,46	1600	857	743
2,24	59	40	19	1,44	1749	926	823
2,22	64	44	20	1,42	1894	997	897
2,20	70	48	22	1,40	2109	1088	1021
2,18	76	54	22	1,38	2281	1156	1125
2,16	82	57	25	1,36	2449	1232	1217
2,14	92	64	28	1,34	2706	1338	1368
2,12	103	74	29	1,32	2936	1424	1512
2,10	114	82	32	1,30	3255	1541	1714
2,08	126	89	37	1,28	3550	1659	1891
2,06	132	92	40	1,26	3854	1766	2088
2,04	146	97	49	1,24	4295	1932	2363
2,02	155	103	52	1,22	4715	2069	2646
2,00	169	114	55	1,20	5267	2239	3028

De aangegeven waterpeilen klimmen met 0,02 m; van N.A.P. + 1,20 m tot N.A.P. + 2,56 m zijn zij alle aangegeven, daarboven alleen de hoogste peilen, die een bepaald aantal keren werden overschreden. Het jaarpeil blijkt hier N.A.P. + 2,20 m te zijn en het grenspeil N.A.P. + 2,40 m. Uit de nauwkeuriger tabel A 9.0.4 blijkt dit laatste N.A.P. + 2,39 m te zijn.

Tabel A 9.0.2

Jaarmaxima der hoogwaterstanden van de jaren 1888 tot en met 1956 (69 jaar)

Datum	H.W. in m + N.A.P.	Datum	H.W. in m + N.A.P.	Datum	H.W. in m + N.A.P.
21-11-1888	1,84	30- 9-1911	2,41	15-10-1934	1,87
9- 2-1889	2,76	11-11-1912	2,62	25- 1-1935	2,12
2-10-1890	2,12	4-12-1913	1,91	1-12-1936	2,74
10-12-1891	1,90	11-11-1914	2,14	15- 3-1937	1,79
3- 1-1892	1,96	16- 1-1915	2,12	29- 1-1938	2,36
23-11-1893	1,98	13- 1-1916	3,00	27-11-1939	2,08
22-12-1894	3,28	2-12-1917	2,54	6-12-1940	2,65
7-12-1895	2,68	23-12-1918	2,02	7-12-1941	2,10
16- 1-1896	2,12	19-12-1919	2,39	29-12-1942	2,20
29-11-1897	2,68	4-12-1920	2,20	7- 4-1943	2,68
3- 2-1898	2,28	6-11-1921	2,63	26- 1-1944	2,67
13- 1-1899	2,26	6-12-1922	2,25	19- 1-1945	2,46
22-12-1900	1,85	19-12-1923	2,10	23- 2-1946	2,56
28- 1-1901	2,21	6- 2-1924	1,95	26-11-1947	2,18
26- 1-1902	2,38	28-11-1925	2,09	23-10-1948	2,10
22-11-1903	2,37	10-10-1926	2,40	1- 3-1949	2,70
30-12-1904	2,96	12- 9-1927	1,69	13-11-1950	2,12
7- 1-1905	2,50	26-11-1928	2,96	29-11-1951	2,28
12- 3-1906	2,97	12-12-1929	2,22	7-11-1952	2,12
21- 2-1907	2,28	23-11-1930	2,53	1- 2-1953	3,85
23-11-1908	2,66	17- 1-1931	2,33	23-12-1954	3,00
5- 2-1909	2,10	28-11-1932	2,33	13- 1-1955	2,10
1-11-1910	1,94	26-10-1933	1,98	18- 1-1956	2,15

Tabel A 9.0.3

Hoogwaterstanden hoger dan N.A.P. + 2,20 m van de jaren 1888 tot en met 1956 (69 jaar)

Datum	H.W. in m + N.A.P.	Datum	H.W. in m + N.A.P.	Datum	H.W. in m + N.A.P.
1888	geen	13- 1-1916	3,00	4-12-1936	2,24
9- 2-1889	2,76	25-11-1917	2,32 ¹⁾	29- 1-1938	2,36
22-12-1894	3,28	26-11-1917	2,44	3- 4-1938	2,21
23- 1-1895	2,62	2-12-1917	2,24 ¹⁾	6-12-1940	2,65
6-12-1895	2,30 ¹⁾	2-12-1917	2,54	29-12-1942	2,20
6-12-1895	2,40 ¹⁾	19-12-1919	2,39	7- 4-1943	2,68
7-12-1895	2,68	4-12-1920	2,20	8- 4-1943	2,20 ¹⁾
19- 6-1897	2,52	18- 1-1921	2,25	26- 1-1944	2,67
29-11-1897	2,68	1-11-1921	2,22	4- 2-1944	2,38
3- 2-1898	2,28	6-11-1921	2,63	13- 3-1944	2,30
13- 1-1899	2,26	31-12-1921	2,22	19- 1-1945	2,46
28- 1-1901	2,21	3- 1-1922	2,20	20- 2-1946	2,32
26- 1-1902	2,24 ¹⁾	6-12-1922	2,25	23- 2-1946	2,56
26- 1-1902	2,38	10-10-1926	2,40	1- 3-1949	2,70
10-10-1903	2,28	26-11-1928	2,96	26-10-1949	2,23 ²⁾
22-11-1903	2,37	12-12-1929	2,22	29-11-1951	2,28 ²⁾
30-12-1904	2,96	23-11-1930	2,53	1- 2-1953	3,85
7- 1-1905	2,50	23-11-1930	2,32 ¹⁾	1- 2-1953	2,65
12- 3-1906	2,97	17- 1-1931	2,33	22-12-1954	2,52
13- 3-1906	2,30 ¹⁾	18-10-1932	2,23	23-12-1954	3,00
21- 2-1907	2,28	28-11-1932	2,33	24-12-1954	2,70 ¹⁾ of ²⁾
23-11-1908	2,66	18-10-1936	2,42	1955	geen
30- 9-1911	2,41	28-10-1936	2,37	1956	geen
9- 4-1912	2,32	1-12-1936	2,53 ¹⁾		
11-11-1912	2,62	1-12-1936	2,74		

¹⁾ De waterstand is niet de hoogste uit de bijbehorende depressie.²⁾ De depressiebaan ligt niet in VAN DER HAM's vak, zie A 5.0.

Tabel A 9.0.4

Hoogste hoogwaterstanden uit naar banen geselecteerde depressies uit de wintermaanden (januari, november en december) van de winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57 (63 jaar)

H.W. in m + N.A.P.	Aantal overschrijdingen	H.W. in m + N.A.P.	Aantal overschrijdingen	H.W. in m + N.A.P.	Aantal overschrijdingen
3,85	1	1,99	73	1,58	222
3,28	2	1,98	74	1,57	223
3,00	4	1,97	76	1,56	230
2,96	6	1,96	78	1,55	233
2,74	7	1,95	85	1,54	238
2,68	9	1,94	86	1,53	244
2,66	10	1,93	88	1,52	248
2,63	11	1,92	89	1,51	251
2,62	13	1,91	91	1,50	257
2,54	14	1,90	94	1,49	259
2,53	15	1,89	96	1,48	265
2,52	16	1,88	100	1,47	268
2,50	17	1,87	101	1,46	271
2,44	18	1,86	104	1,45	274
2,39	19	1,85	108	1,44	277
2,38	20	1,84	111	1,43	287
2,37	21	1,83	113	1,42	289
2,36	22	1,82	117	1,41	291
2,33	24	1,81	121	1,40	293
2,26	25	1,80	129	1,39	297
2,25	27	1,79	130	1,38	298
2,24	28	1,78	136	1,37	302
2,22	31	1,77	137	1,36	303
2,21	32	1,76	144	1,35	306
2,20	33	1,75	145	1,34	307
2,18	36	1,74	148	1,33	309
2,16	38	1,73	151	1,32	312
2,15	40	1,72	156	1,30	313
2,14	41	1,71	157	1,28	314
2,13	42	1,70	166	1,27	315
2,12	50	1,69	172	1,24	319
2,11	51	1,68	180	1,23	320
2,10	53	1,67	182	1,22	321
2,09	56	1,66	185	1,21	322
2,08	59	1,65	189	1,20	323
2,07	61	1,64	196	1,18	324
2,05	62	1,63	200	1,12	327
2,04	64	1,62	204	1,09	328
2,02	66	1,61	209	1,06	330
2,01	70	1,60	212	1,03	331
2,00	71	1,59	216	0,97	332

De standen zijn opgegeven in 0,01 m nauwkeurig. Daar gedurende de Tweede Wereldoorlog geen weerkaarten getekend konden worden, was het onmogelijk de selectie voor de winters van 1939/'40 tot en met 1944/'45 toe te passen.

Figuur 3.0.1. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956.

Uitgezet zijn de punten $(h_i; i/m)$, waarbij i het rangnummer van de naar afdalende grootte geordende waarnemingen h_i voorstelt en m het aantal jaren, waarover gemiddeld wordt. Hier is dus $m = 69$. De waarnemingen h_i zijn naar beneden in even aantallen cm afgerond. De horizontale schaal der h_i is aritmetisch, de verticale schaal logaritmisch. Voor lage waarden van h kunnen de punten niet afzonderlijk getekend worden, zij zijn daarom tot streepjes samengevoegd. Tabel A 9.0.1 bevat de waarnemingen \geq N.A.P. + 1,20 m. De data, die bij de standen \geq N.A.P. + 2,20 m behoren, zijn opgenomen in tabel A 9.0.3.

Figuur 4.0.1. De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956.

Uitgezet zijn de punten $((i - 0,3) / (m + 0,4); h_{m-i+1})$, waarin i het rangnummer van de naar afdalende grootte gerangschikte jaarmaxima h_i voorstelt en m het aantal jaren. Hier is dus $m = 69$. De (bovenste) horizontale schaal der $(i - 0,3) / (m + 0,4)$ is dubbel-logaritmisch verdeeld, de verticale schaal aritmetisch. Tabel A 9.0.2 geeft de jaarmaxima met data.

Figuur 7.0.1. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een bij de waarnemingen aangepaste lijn.

Deze figuur is gelijk aan figuur 3.0.1, behoudens dat de lijn

$$19,7 e^{-\frac{h - 1,50}{0,236}} \quad \text{voor } h \geq 1,50$$

is toegevoegd.

Figuur 7.0.2. De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van alle waarnemingen.

Deze figuur is gelijk aan figuur 4.0.1, behoudens dat de lijn uit figuur 7.0.1, op de goede hoogte overgebracht, is toegevoegd.

Figuur 7.0.3. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956, gesplitst in winterwaarnemingen en overige waarnemingen.

Uitgezet zijn de punten $(h_i; i/m)$, zoals in figuur 3.0.1, waarbij de onderste (linker) figuur de waarnemingen uit de maanden januari, november en december bevat en de bovenste (rechter) figuur de overige waarnemingen. Het aantal jaren is ook nu $m = 69$. De hoogste stand (N.A.P. + 3,84 m) is bij de winterwaarnemingen uitgezet. Tabel A 9.0.1 bevat de waarnemingen \geq N.A.P. + 1,20 m. De data, die bij de standen \geq N.A.P. + 2,20 m behoren, zijn opgenomen in tabel A 9.0.3.

Figuur 8.0.1. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57.

Uitgezet zijn de punten $(h_i; (i - 0,3)/(m))$, waarbij i het rangnummer van de naar afdalende grootte geordende waarnemingen h_i voorstelt en m het aantal jaren, waarover gemiddeld wordt. Hier is dus $m = 63$. De h_i zijn de hoogste hoogwaterstanden van naar hun baan geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december van de aangegeven 63 winters. De horizontale schaal der h_i is aritmetisch, de verticale schaal logaritmisch. De waarnemingen zijn in cm nauwkeurig gebruikt en in tabel A 9.0.4 vermeld. Daar gedurende de Tweede Wereldoorlog geen weerkaarten getekend konden worden, was het onmogelijk de selectie voor de winters 1939/'40 tot en met 1944/'45 toe te passen. De stand N.A.P. + 3,85 m van 1 februari 1953 is gerekend als in de beschouwde perioden vallend.

Figuur 8.0.2. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57, met een daaraan aangepaste rechte.

Deze figuur is gelijk aan figuur 8.0.1 behoudens dat de lijn

$$2,63 e^{-\frac{h - 1,70}{0,337}} \quad \text{voor } h \geq 1,70$$

is toegevoegd.

Figuur 9.0.1. De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van de baanselectiewaarnemingen.

Deze figuur is gelijk aan figuur 4.0.1, behoudens dat de lijn uit figuur 8.0.2, op de goede hoogte overgebracht, is toegevoegd.

Figuur 10.0.1. De baanselectielijn bij verschillende beginpunten.

Getekend zijn de lijnen:

$$\hat{n}(b) e^{-\frac{h-b}{\hat{a}_e}} \quad \text{voor } h \geq b,$$

voor de waarden van tabel A 9.0.5.

Tabel A 9.0.5
Parameters van de baanselectielijn,
getekend in figuur 10.0.1

b (in m)	\hat{a}_e (in m)	$\hat{n}(b)$
1,5	0,383	4,08
1,6	0,354	3,37
1,7	0,337	2,63
1,8	0,321	2,05
1,9	0,325	1,49
2,0	0,315	1,13
2,1	0,304	0,841
2,2	0,364	0,524
2,3	0,387	0,381
2,4	0,394	0,286
2,5	0,315	0,270
2,6	0,304	0,206

Vergelijk ook tabel 10.0.1.

Figuur 11.0.1. De baanselectielijn met beginpunt N.A.P. + 1,70 m en bovengrenzen van die lijn met onbetrouwbaarheid 0,05 en 0,01.

Getekend zijn de baanselectielijn met beginpunt N.A.P. + 1,70 m:

$$2,63 e^{-\frac{h-1,70}{0,337}} \quad \text{voor } h \geq 1,70$$

en de bovengrenzen met onbetrouwbaarheid 0,05:

$$2,63 e^{-\frac{h-1,70}{0,385}} \quad \text{voor } h \geq 1,70$$

en met onbetrouwbaarheid 0,01:

$$2,63 e^{-\frac{h-1,70}{0,407}} \quad \text{voor } h \geq 1,70$$

Figuur A 2.0.1. Vergelijking van een exponentiële verdeling met een afgeknotte logaritmischnormale verdeling.

Getekend zijn de rechte lijn:

$$e^{-3h} \quad \text{voor } h \geq 0,$$

(aangegeven met $a = \infty$) en de drie krommen (aangegeven met $a = 1$, $a = 10$ en $a = 100$):

$$\int_{l(h)}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \cdot \left(\int_{l(0)}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \right)^{-1} \quad \text{voor } h \geq 0,$$

waarin $l(h) = \frac{\log \mu (h + a)}{\sigma}$, $\mu = e^3 a^{-1}$ en $\sigma = a^{-\frac{1}{2}}$ voor resp. $a = 1$, 10 en 100. De horizontale schaal is aritmetisch, de verticale schaal logaritmisches.

Figuur A 6.0.1. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een 10% bovengrens voor de theoretische kromme vanaf N.A.P. + 2,00 m.

Deze figuur is gelijk aan figuur 8.0.1, behoudens dat vanaf N.A.P. + 2,00 m de trapfunctie, gegeven door

$$5,27 \left(\frac{i}{n} + 0,0584 \right) \quad \text{voor } h_{i+1} < h \leq h_i,$$

is toegevoegd.

Figuur A 6.0.2. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een 10% bovengrens voor de experimentele trapfunctie vanaf N.A.P. + 2,45 m.

Deze figuur is gelijk aan figuur 8.0.1, behoudens dat nu de waarnemingen bij $(h_i; i/m)$ uitgezet zijn, en toegevoegd zijn de lijnen:

$$2,63 e^{-2,92-(h-1,70)} \quad \text{voor } h \geq 1,70$$

en

$$0,270 e^{-2,92(h-2,45)} \quad \text{voor } h \geq 2,45,$$

die schattingen voor de theoretische baanselectiekromme vanaf N.A.P. + 1,70 m (resp. N.A.P. + 2,45 m) vormen en een 10%-bovengrens voor de trapfunctie rechts van N.A.P. + 2,45 m, die door

$$z(h) = 0,270 (e^{-2,92(h-2,45)} + 0,250) \quad \text{voor } h \geq 2,45$$

gegeven wordt.

Figuur A 6.0.3. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een daaraan aangepaste Pearsonkromme en buigpuntraaklijn.

Deze figuur is gelijk aan figuur 8.0.1, behoudens dat de Pearsonkromme

$$5,27 \int_0^g \frac{z^{11,74} \cdot e^{-z}}{(11,74)!} dz \quad \text{voor } h \geq 0,523,$$

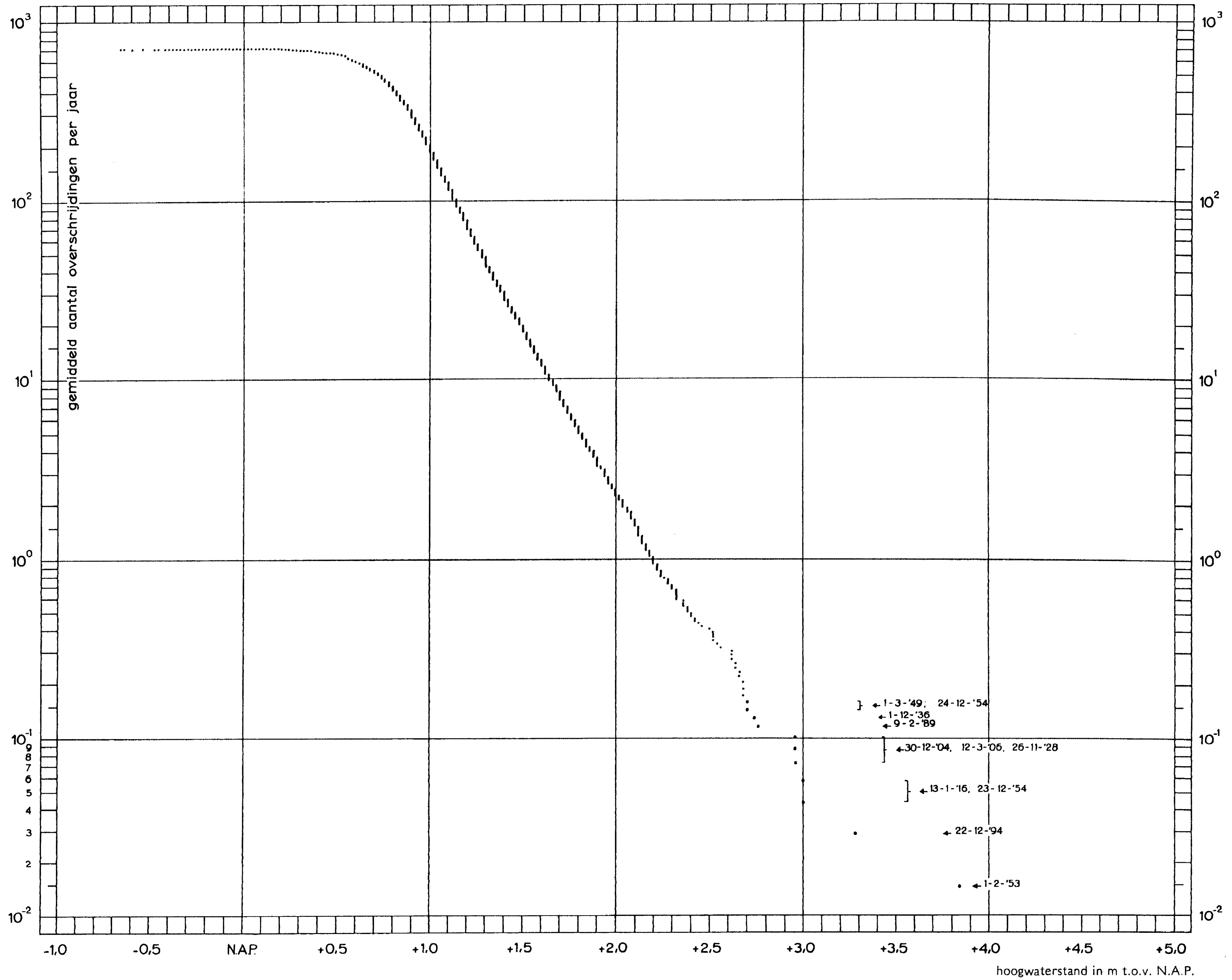
met

$$g = \frac{14,5}{h - 0,523},$$

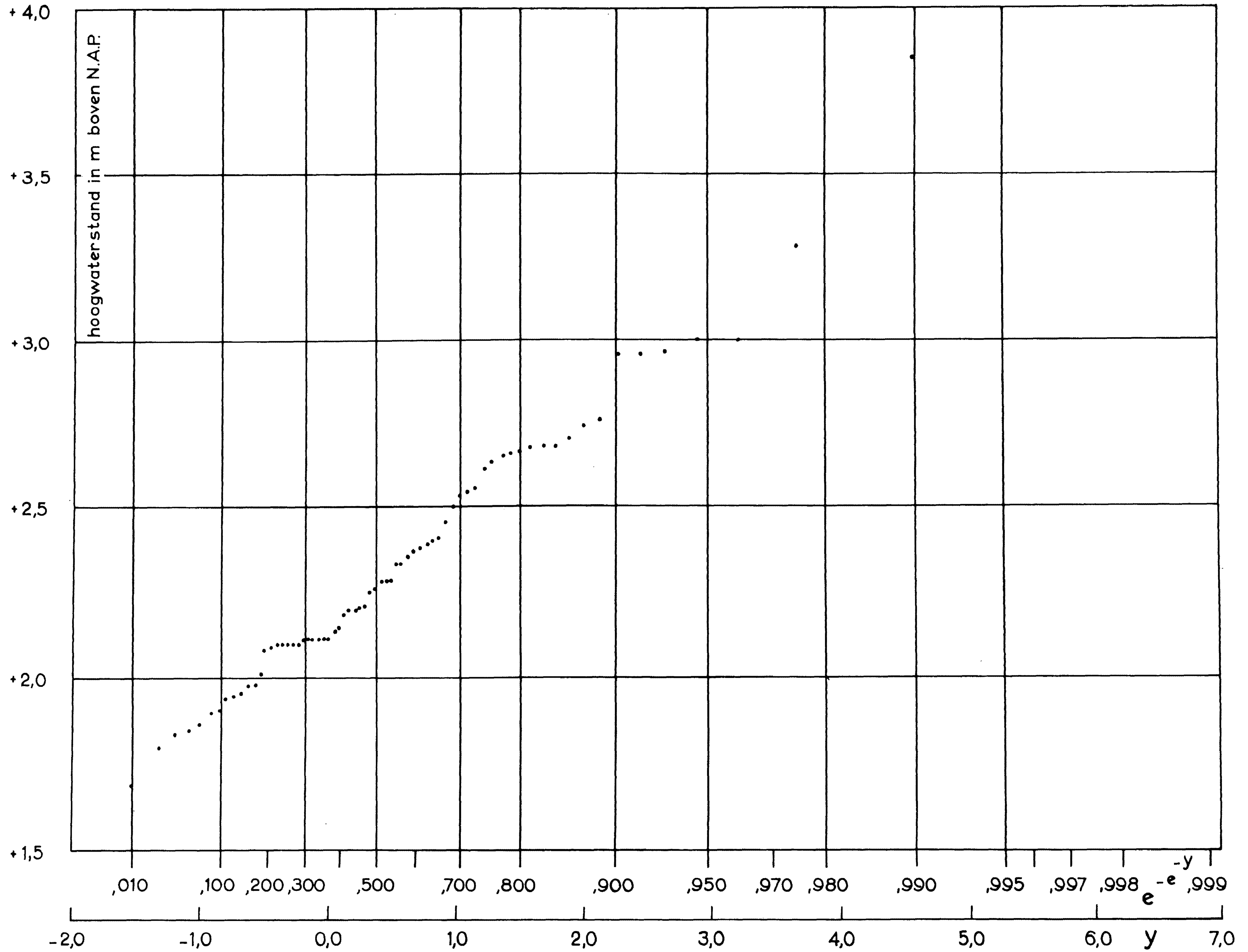
en de lijn (buigpuntraaklijn aan de Pearsonkromme)

$$5,27 e^{-3,20 h + 4,87} \quad \text{voor } h \geq 1,3$$

toegevoegd zijn.

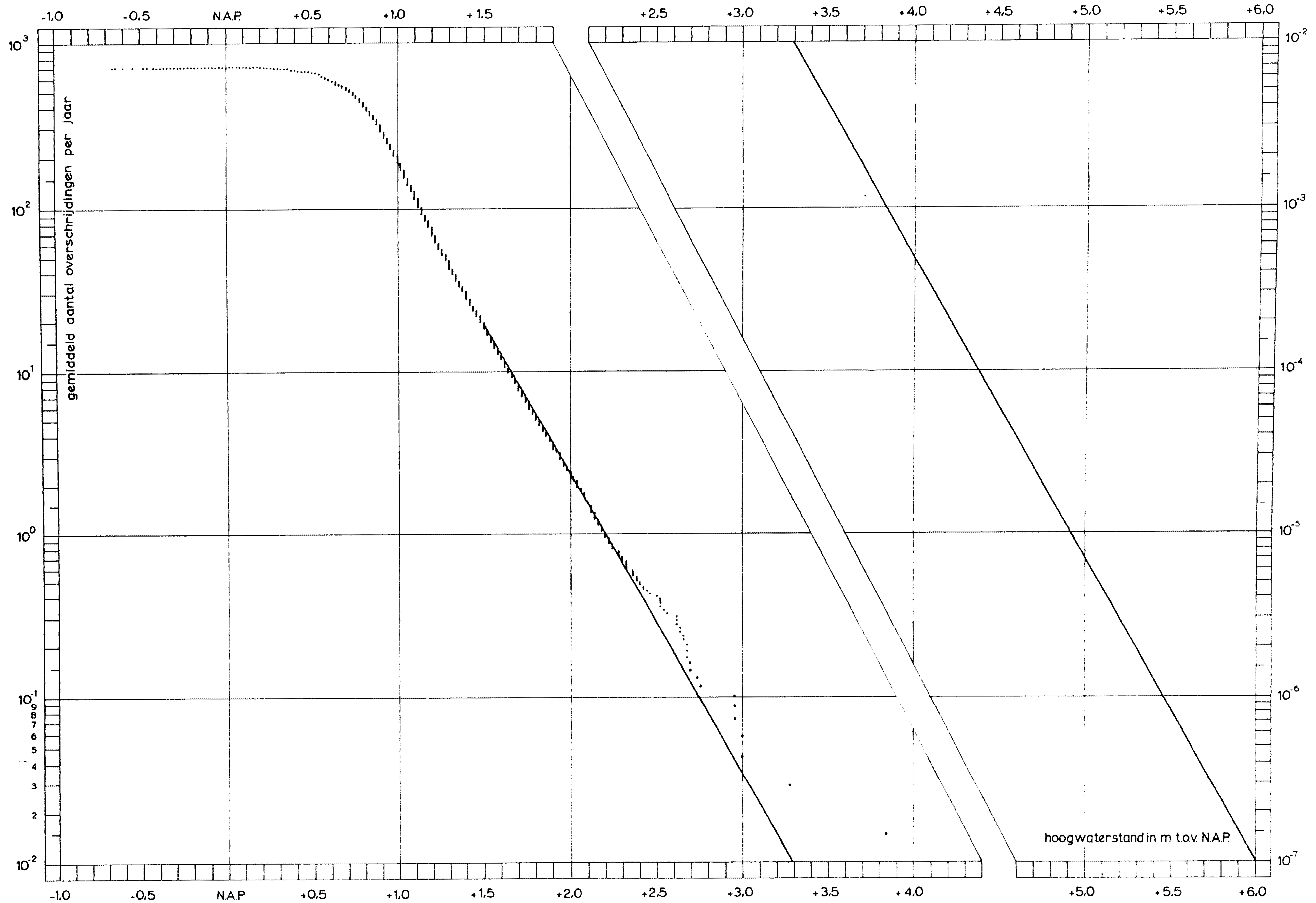


Figuur 3.0.1. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956

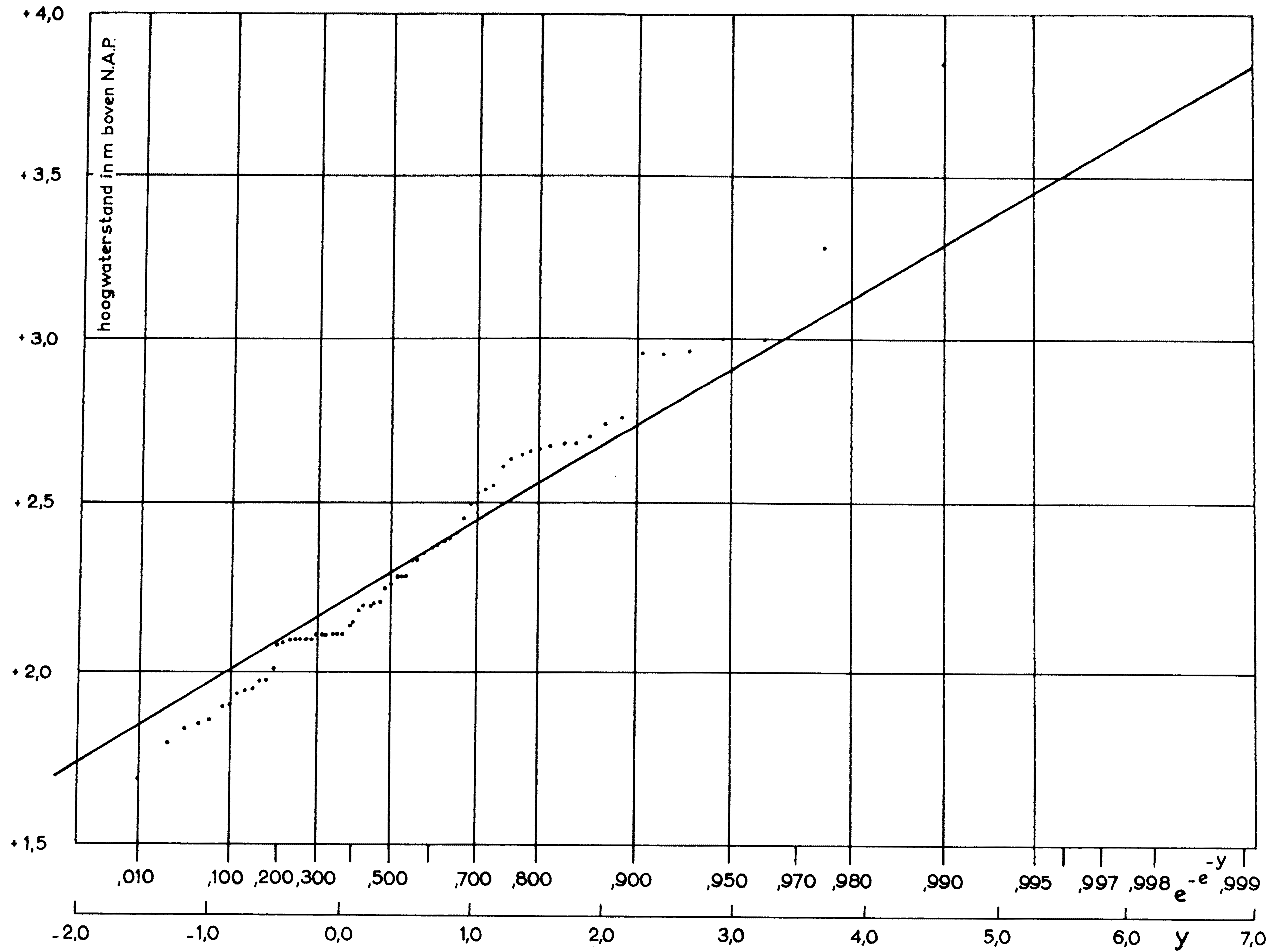


Figuur 4.0.1. De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956

Courtesy of E.J. GUMBEL

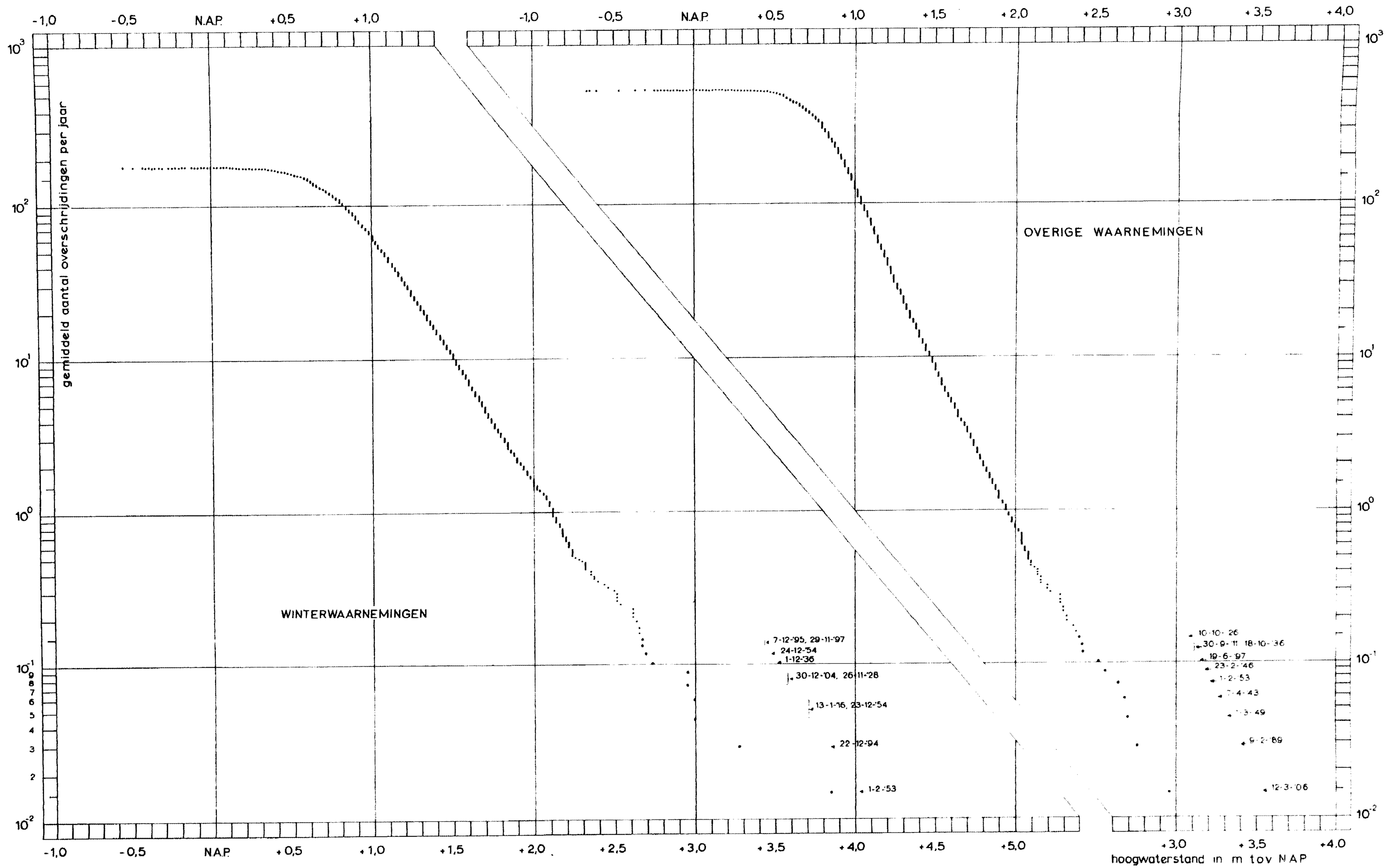


Figuur 7.0.1. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een bij de waarnemingen aangepaste lijn

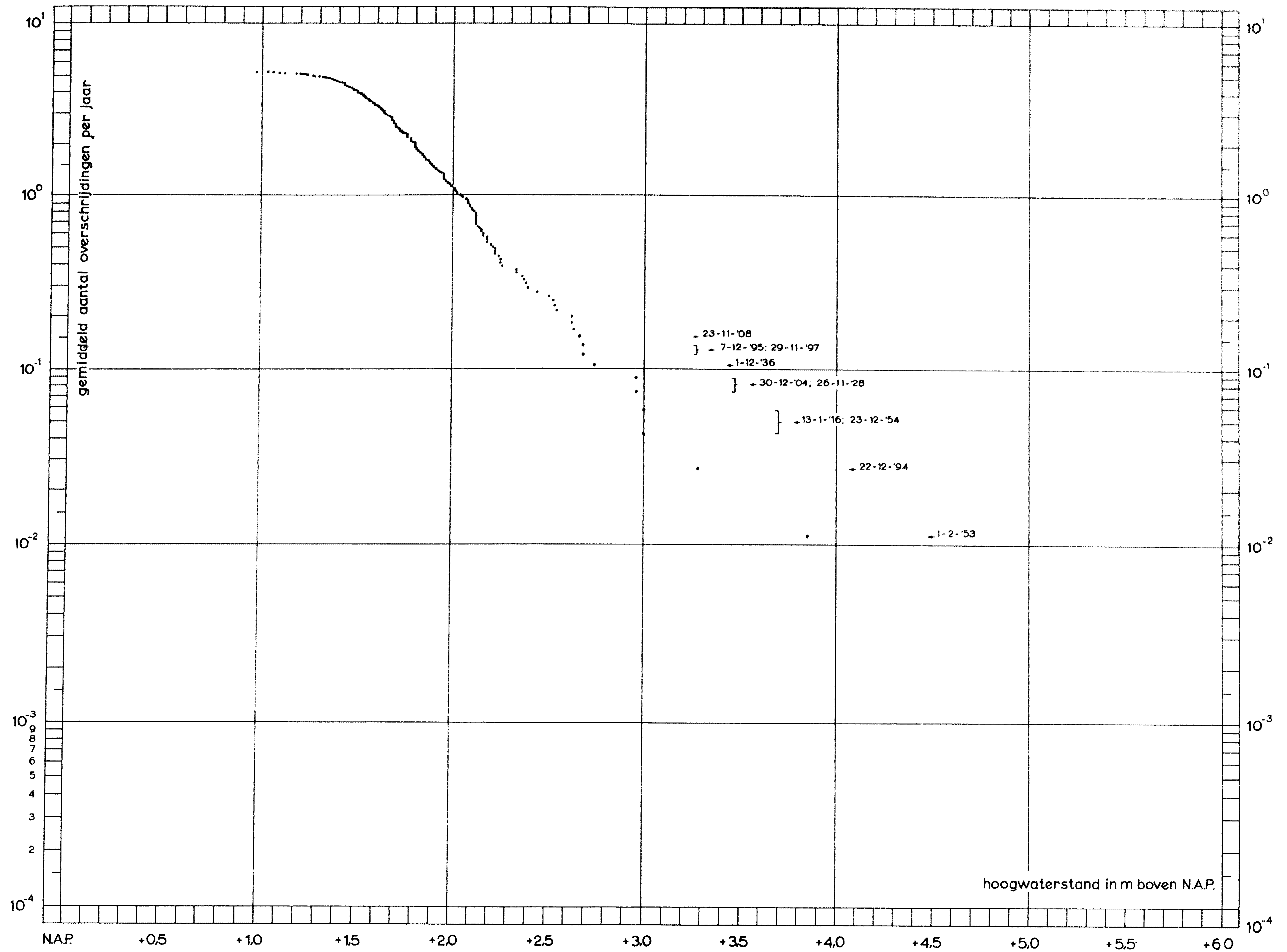


Figuur 7.0.2. De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van alle waarnemingen

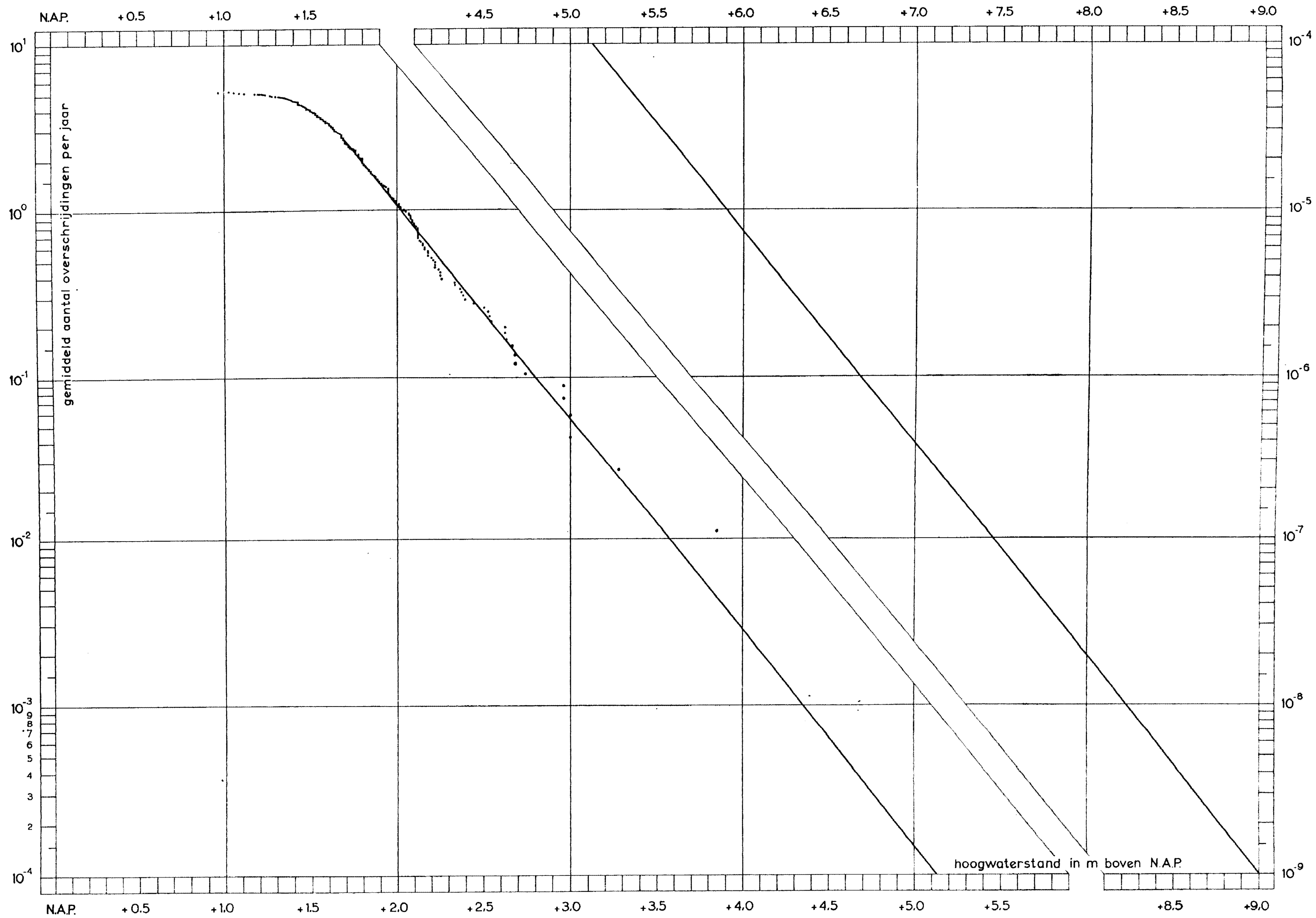
Courtesy of E.J. GUMBEL



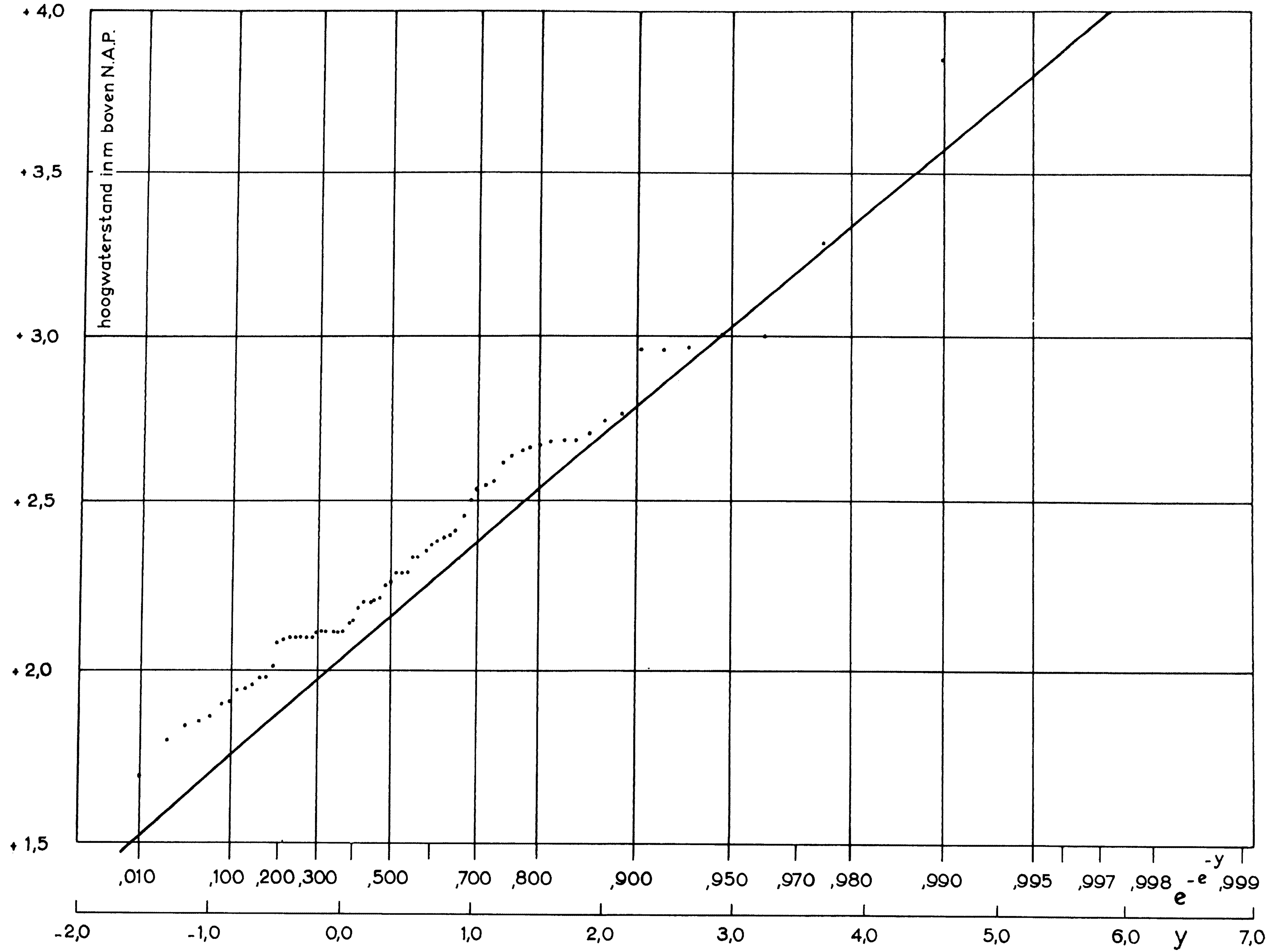
Figuur 7.0.3. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van alle hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956, gesplitst in winterwaarnemingen en overige waarnemingen



Figuur 8.0.1. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57

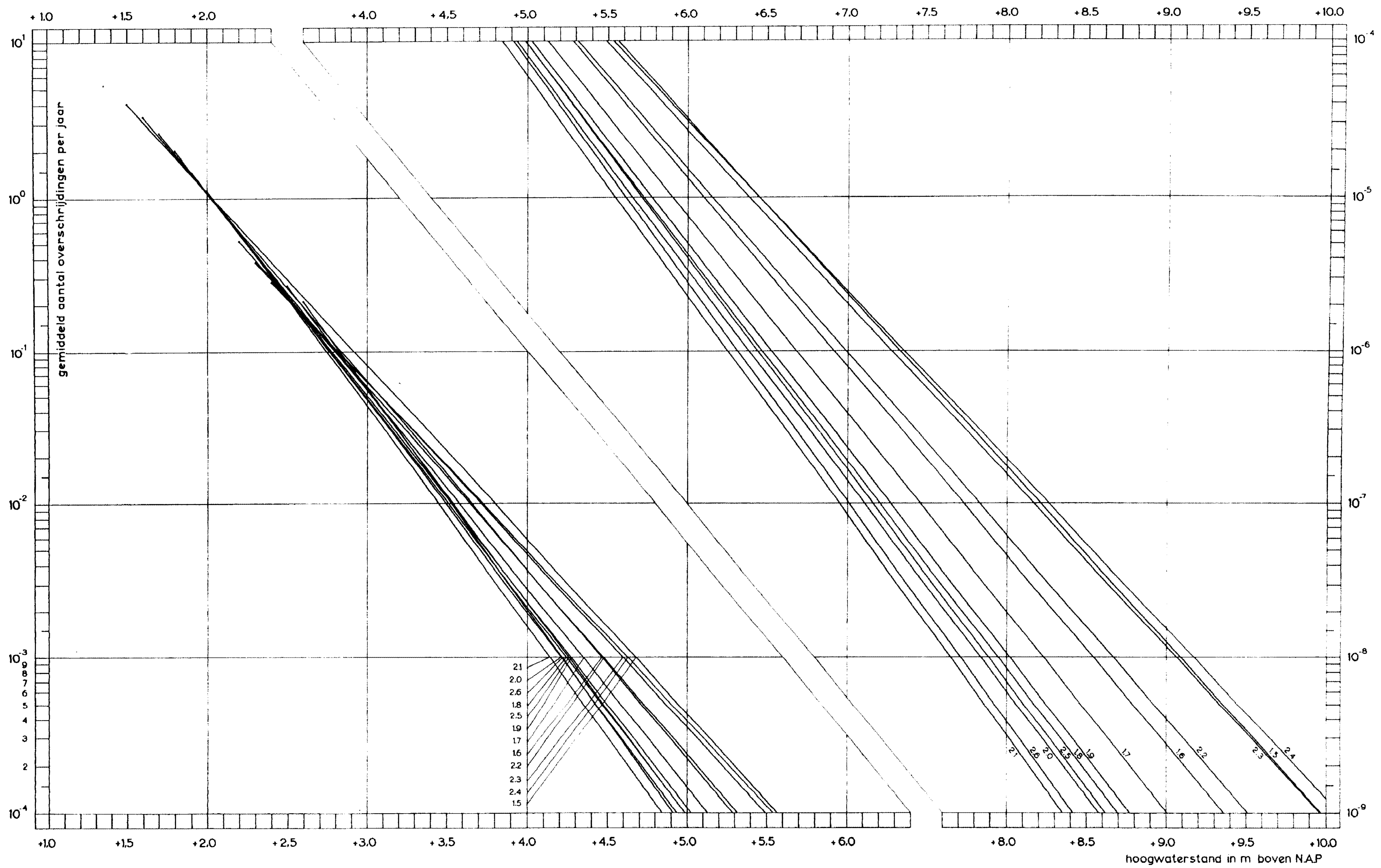


Figuur 8.0.2. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de hoogste hoogwaterstanden der naar banen geselecteerde depressies, uit de maanden januari, november en december der winters 1888/'89 tot en met 1938/'39 en 1945/'46 tot en met 1956/'57, met een daaraan aangepaste rechte

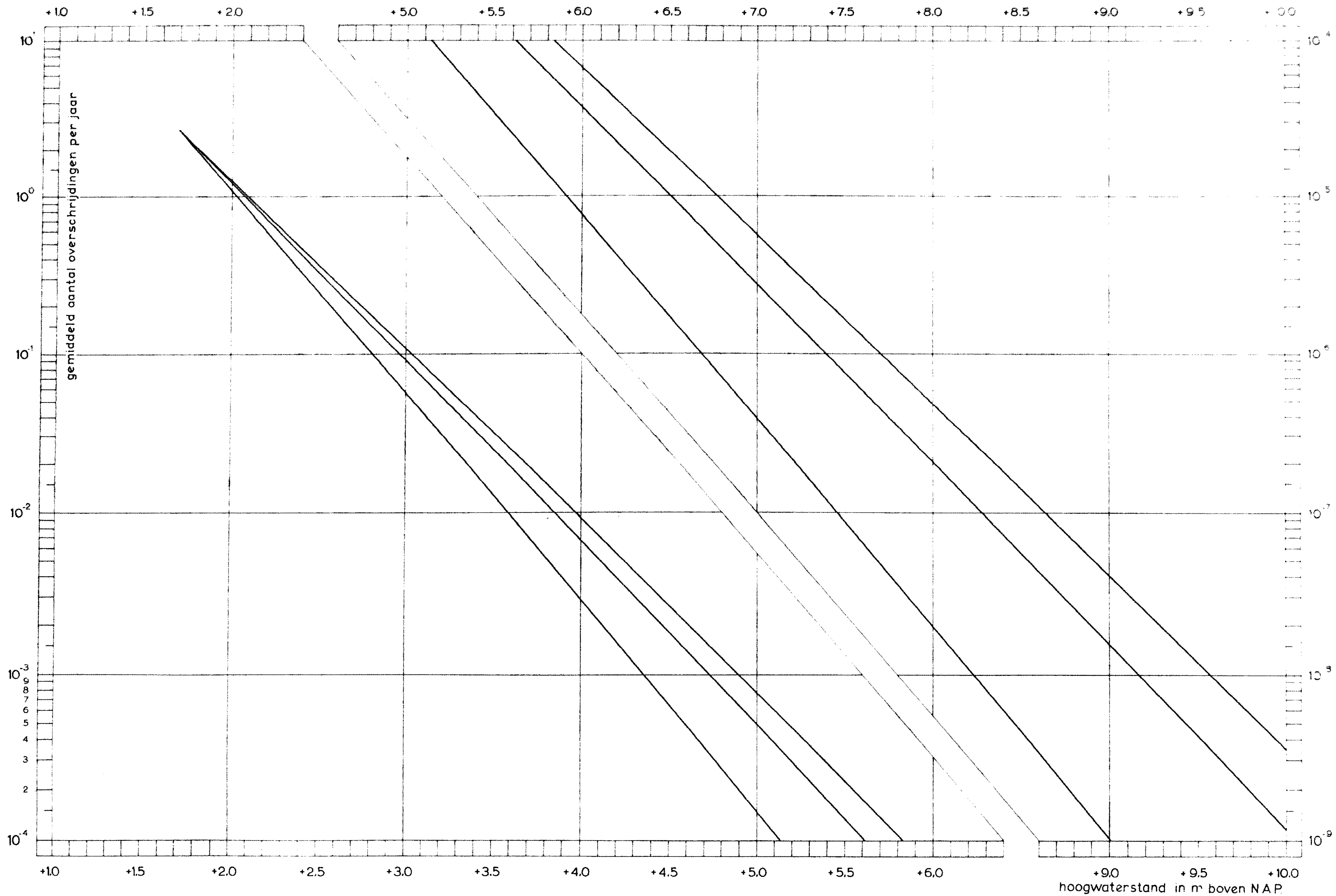


Figuur 9.0.1. De verdeling van de jaarmaxima der hoogwaterstanden uit de jaren 1888 tot en met 1956 en een daarmee vergelijkbare verdelingsfunctie, op grond van de baanselectiewaarnemingen

Courtesy of E.J. GUMBEL

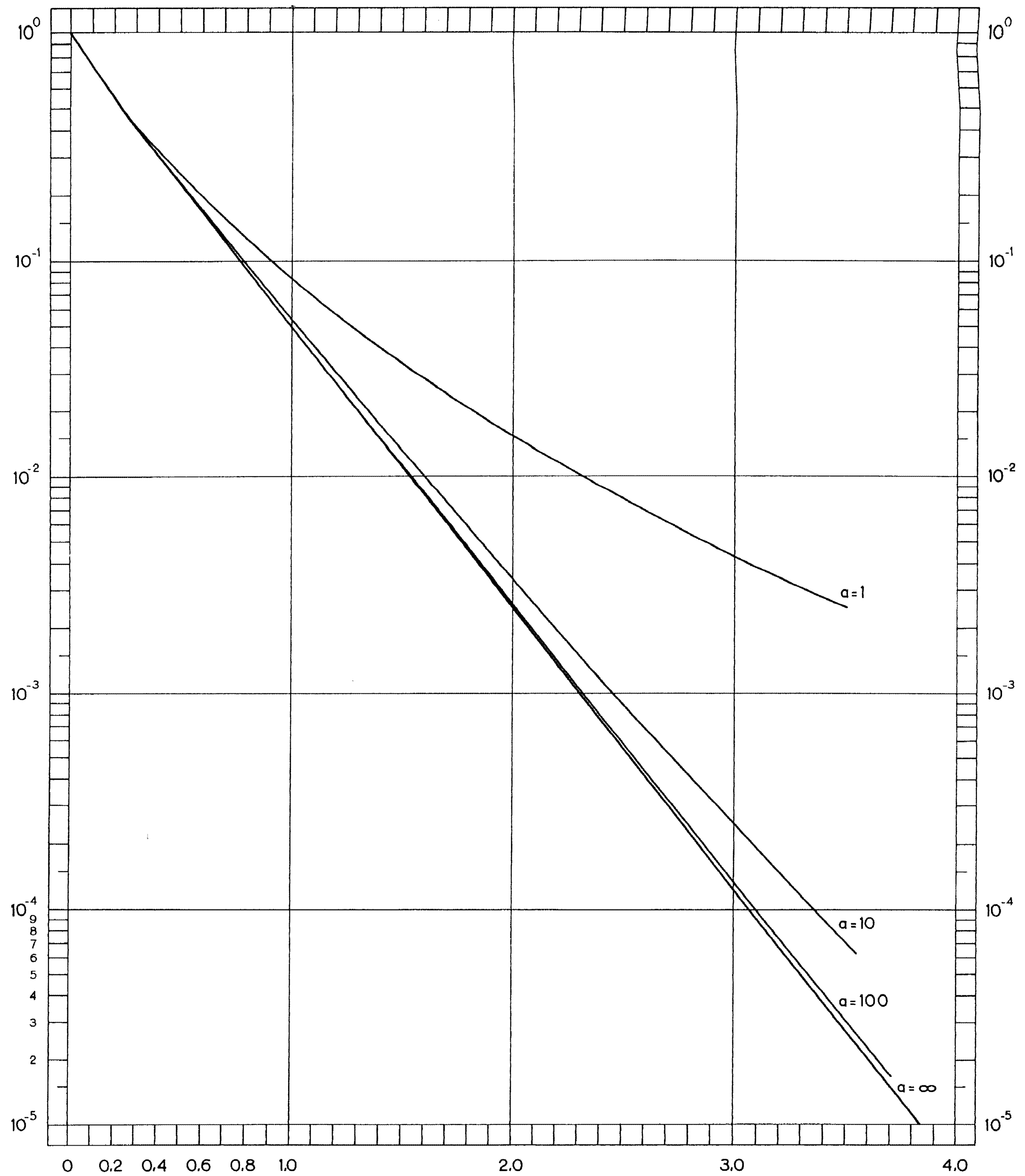


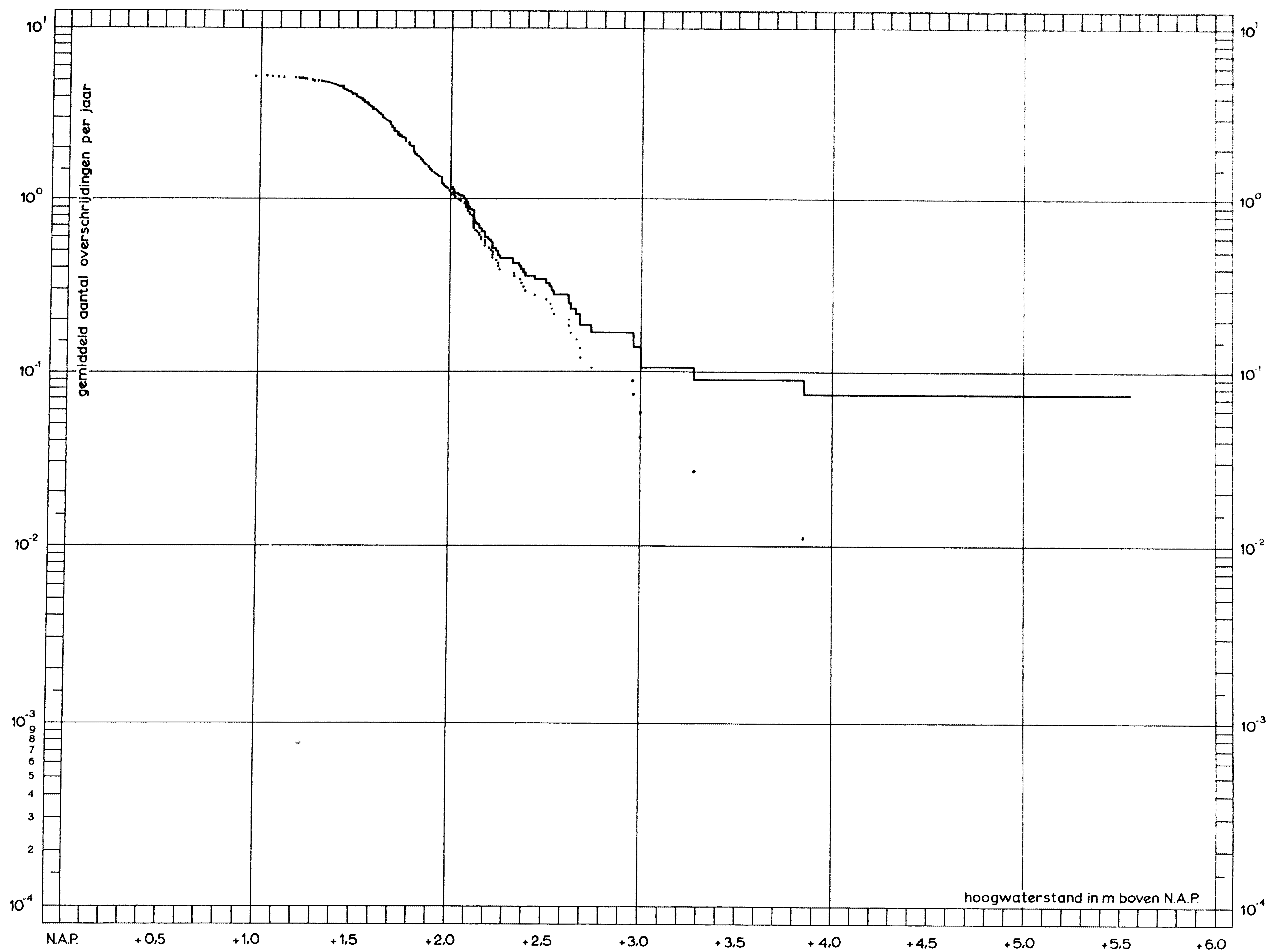
Figuur 10.0.1. De baanselectielijn bij verschillende beginpunten



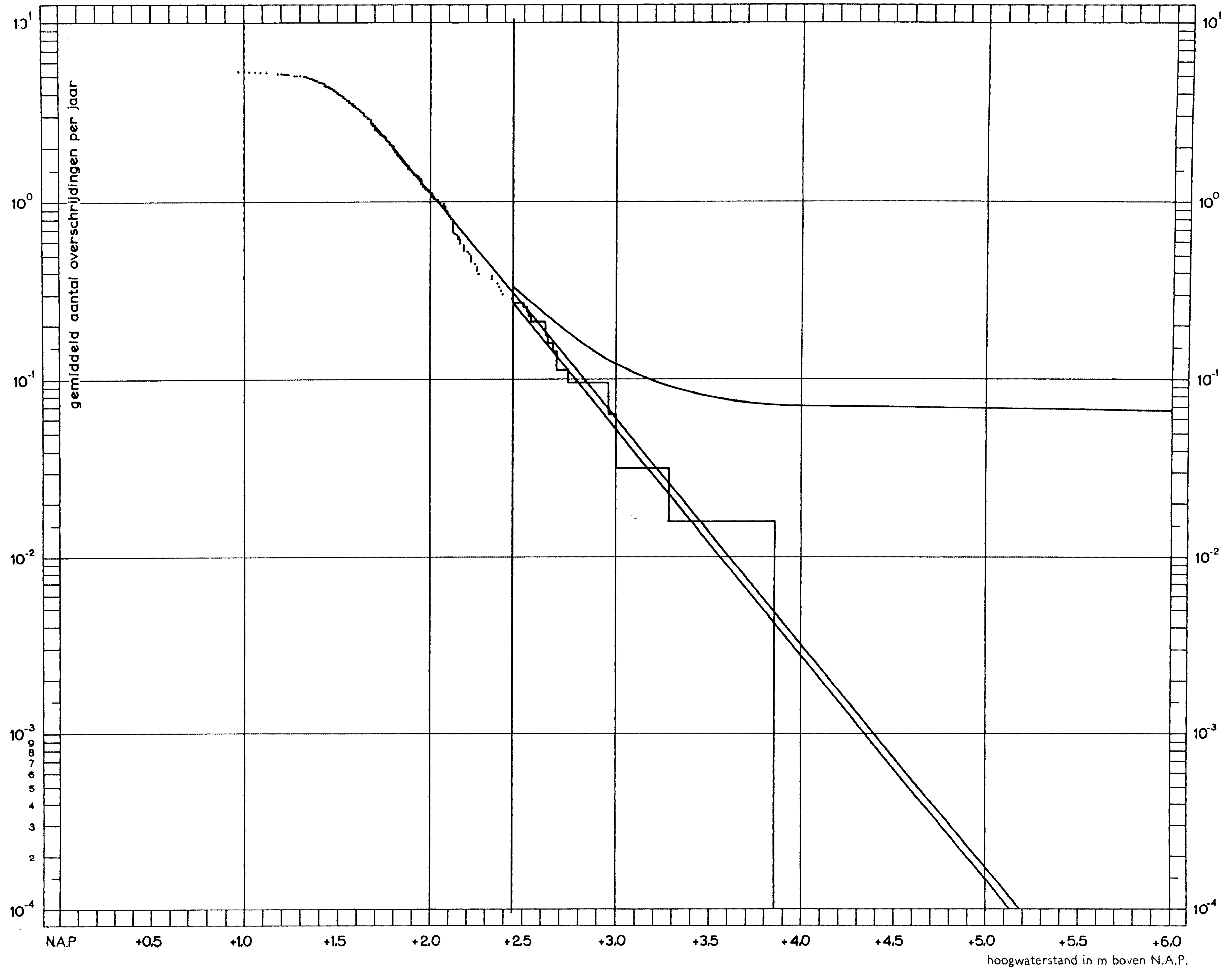
Figuur 11.0.1. De baanselectielijn met beginpunt N.A.P. + 1,70 m en bovengrenzen van die lijn met onbetrouwbaarheid 0,05 en 0,01

Figuur A 2.0.1.
De vergelijking van een exponentiële verdeling met een afgeknotte logaritmischnormale verdeling

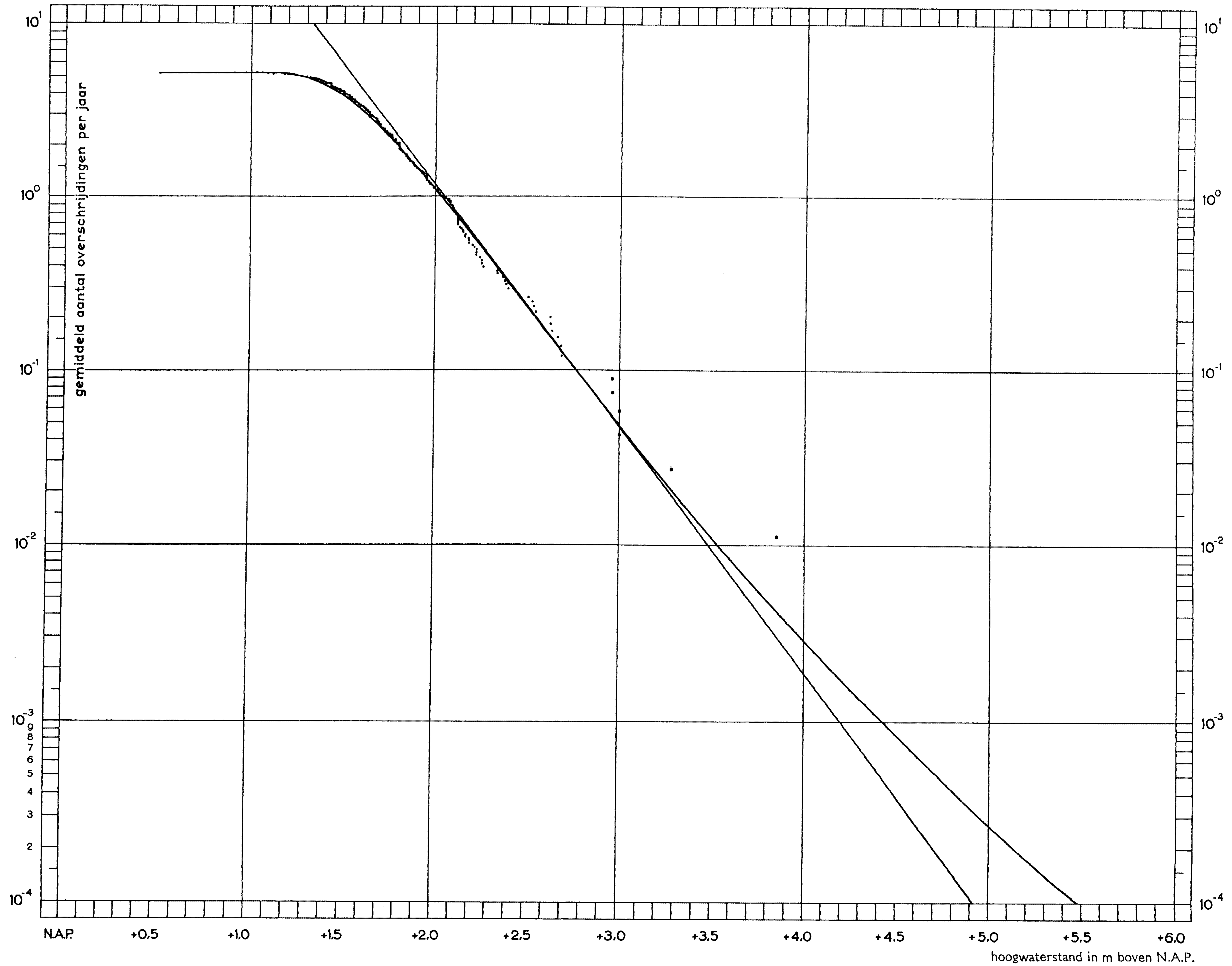




Figuur A 6.0.1. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een 10%-bovengrens voor de theoretische kromme vanaf N.A.P. + 2,00 m



Figuur A 6.0.2. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een 10 %-bovengrens voor de experimentele trapfunctie vanaf N.A.P. + 2,45 m



Figuur A 6.0.3. Het gemiddeld aantal overschrijdingen per jaar van het peil h , afkomstig van de baanselectiewaarnemingen, met een daaraan aangepaste Pearsonkromme en buigpuntraaklijn