

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

SP 71-E

Rapport Delta Commissie, 3

Bijdragen van het Mathematisch Centrum



1960

BIJDRAGE II.5

VRIJE SLINGERINGEN
VAN EEN VLOEISTOF IN EEN
ROTTEREND RECHTHOEKIG
BEKKEN

INHOUDSOVERZICHT

| | Blz. |
|---|------------|
| 0.1 Inhoudsoverzicht | 193 |
| 0.2 Opgenomen figuur | 193 |
| 0.3 Overzicht van de gebruikte symbolen | 193 |
| 0.4 Literatuuropgave | 194 |
| 0.5 Summary | 195 |
| 0.6 Résumé | 195 |
| 1.0 Samenstelling van de bijdrage | 197 |
| 1.1 Inleiding. | 197 |
| 1.2 Inhoud van de bijdrage | 198 |
| 1.3 Auteur en medewerker. | 198 |
| 2.0 Uiteenzetting van het probleem | 198 |
| 3.0 Het oneindige kanaal | 200 |
| 4.0 Het rechthoekige meer. | 202 |
| 5.0 Ontwikkelingen voor kleine waarden van Ω | 207 |
| 6.0 De rechthoekige baai | 210 |
| 7.0 De lage frequenties van een lange baai | 215 |

0.2 OPGENOMEN FIGUUR

| | |
|---|-----|
| 3.0.1 De bij de Kelvin- en Poincarégolven behorende polen | 202 |
|---|-----|

0.3 OVERZICHT VAN DE GEBRUIKTE SYMBOLEN

| | |
|---------------|--|
| g | de versnelling van de zwaartekracht; |
| t | de tijd; |
| u, v | de componenten van de totale stroom; |
| U, V | de componenten van de wrijvingskracht, welke door de wind op het wateroppervlak wordt uitgeoefend; |
| x, y, z | Cartesische coördinaten, waarbij het model bepaald is door $0 < x < \pi$, $0 < y < b$, waarbij $z = 0$ het zee-oppervlak en $z = h$ de bodem aangeeft; |
| ε | een sommatie-index, welke de twee waarden ± 1 aanneemt; |
| ζ | de verhoging van het water, gerekend vanaf de rusttoestand; |
| κ | $\kappa = (\Omega^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}$; |
| λ | een wrijvingscoëfficiënt; |
| ω | de frequentie van een vrije slingering; |
| Ω | de coëfficiënt van Coriolis. |

0.4 LITERATUUR De verwijzing in de tekst is aangegeven door []

1. *R. H. Corkan and A. T. Doodson* Free tidal oscillations in a rotating square sea. Proc. Roy. Soc. A 215, 147–162, 1952.
2. *D. van Dantzig* Mathematical problems raised by the flood disaster 1953. Proc. Int. Congr. of Math. I, 218–239, 1954.
3. *D. van Dantzig* Enkele voorbeelden van berekening van waterbeweging onder invloed van wind. Proc. Kon. Ned. Ak. v. Wet. Afd. Natuurkunde, 65, nr. 3, 1956.
4. *D. van Dantzig* Einige analytische Ergebnisse über die Wasserbewegung in einem untiefen Meere. Hauptvortrag GAMM, Saarbrücken. Rapport TW 53, Math. Centrum, Amsterdam, 1958.
5. *D. van Dantzig* Free oscillations of a fluid in a rotating rectangular basin. Rapport TW 49 Math. Centrum, Amsterdam, 1958.
6. *G. R. Goldsbrough* The tidal oscillations in rectangular basins. Proc. Roy. Soc. A 132, 689–701, 1931.
7. *H. Jeffreys* The free oscillations of water in an elliptical lake. Proc. Lond. Math. Soc., 23, 455–476, 1925.
8. *H. Lamb* Hydrodynamics. 6th ed. par. 207–212a, Cambridge, 1932.
9. *H. A. Lauwerier* The expansion of a function into a Fourier series with prescribed phases, valid in the half-period interval. Rapport TW 33, Math. Centrum, Amsterdam, 1955.
10. *H. A. Lauwerier* The influence of a homogeneous wind upon an infinitely wide North Sea. Rapport TW 41, Math. Centrum, Amsterdam, 1957.
11. *H. A. Lauwerier* On certain trigonometrical expansions. J. Math. Mech. 8, 419–432.
12. *H. A. Lauwerier* Free motion in a rotating sea which has the form of a semi-infinite strip. Rapport TW 46, Math. Centrum, Amsterdam, 1958.
13. *J. Proudman* Note on the free tidal oscillations of a sea with slow rotation. Proc. Lond. Math. Soc., 35, 75–82, 1933.
14. *Lord Rayleigh* On the vibrations of a rectangular sheet of rotating liquid. Phil. Mag. 5, 297–301, 1903.
(Ook Papers, 5, 93–97).
15. *Lord Rayleigh* Notes concerning tidal oscillations upon a rotating globe. Proc. Roy. Soc. A 82, 448–464, 1909.
(Ook Papers, 5, 497–513).
16. *G. I. Taylor* Tidal oscillations in gulfs and rectangular basins, Proc. Lond. Math. Soc., 20, 148–181, 1922.
17. *G. W. Veltkamp* Ontwikkelingen van Fourier-reeksen met voorgeschreven fasen. Rapport TW 34, Math. Centrum, Amsterdam, 1955.
18. *G. W. Veltkamp* On Kelvin and Poincaré waves in a strip. Rapport TW 37, Math. Centrum, Amsterdam, 1956.
19. *G. W. Veltkamp* The behaviour of a solution of Helmholtz' equation near a confluence of boundary conditions, involving directional derivatives. Rapport TW 40, Math. Centrum, Amsterdam, 1956.

0.5 SUMMARY ¹⁾

Free oscillations of a fluid in a rotating rectangular basin

In this contribution the free motions of a fluid in a rotating rectangular basin of uniform depth are studied. This investigation may throw some light upon the behaviour of the free modes of the North Sea since this sea, in a rough approximation, can be considered as a rectangular basin which is closed on three sides by coasts and which is connected to the ocean on the remaining side.

The free motions depend largely on the speed of rotation which finds its expression in the coefficient of Coriolis Ω . To a lesser extent they depend also on the bottom friction which is accounted for by the friction coefficient λ . In this study much attention is paid to the influence of Ω and λ on the eigenvalues. For $\lambda = 0$ and small Ω the eigenvalues can be expanded into a series of increasing powers of Ω . Examples of such expansions are given in (1), (2) and (3) of chapter 1.0.

In this contribution the following results have been obtained. The classic formula of LAMB [8] for the lowest eigenvalue of a square lake (17) of 5.0 is extended by a second order term in Ω (19) of 5.0. Corresponding formulae are given for the rectangular lake (8) of 5.0 and for the rectangular bay (22) of 7.0. If in particular the length of the basin is twice its breadth we find the numerical results (9) of 5.0 and (23) of 7.0 respectively. The latter formulae show that the main free period of a rectangular lake is increased by a (slow) rotation but that of a rectangular bay is decreased. These results have only a qualitative meaning for the eigenvalues of the North Sea because at the latitude of the North Sea Ω is rather large. Nevertheless the main part of the theory is developed irrespective of the value of Ω .

The contents of this contribution are as follows. In 1.0 a historical introduction to the problem is given. The problem is formulated mathematically in 2.0.

The free motions with the frequency ω are determined by the differential equations (2) of 2.0. By means of the transformation (3) of 2.0 the case with $\lambda \neq 0$ can be reduced to the case $\lambda = 0$. The influence of a small friction term upon the frequency ω is given in formula (5) of 2.0. In the first approximation the free period is left unaltered but the oscillations are damped. In the subsequent part of the investigation it is assumed that $\lambda = 0$. By way of introduction the free motions in an infinite channel are considered in 3.0. They consist of linear combinations of the well-known Kelvin- and Poincaré-waves.

In 4.0 a rectangular lake with sides π and $2b$ is considered. For $\Omega = 0$ the solution is trivial and the free frequencies are given in (4). The case $\Omega \neq 0$ is treated by means of the formalism of operators in Hilbert space. The solution can be expressed in the form of a linear combination of Kelvin- and Poincaré-waves with two sets of unknown coefficients. The boundary conditions lead to two sets of equations (7) from which the free periods and the coefficients can be determined. The system (7) is equivalent to the systems (22) and (28). The latter system can be written in the form (29) and it can be reduced to (30). The solution of (30) involves the inversion of two operators. In 5.0 this inversion is carried out for small values of Ω by making use of expansions in rising powers of Ω . In this way the first few terms of the expansion of the free frequencies in a power series of Ω are determined. Special attention is paid to the case of a square sea. The results have already been quoted above. In 6.0 the free oscillations of a rectangular bay are studied in a similar way as for a rectangular lake in 4.0. The free frequencies follow from the determinantal equation (37) of 6.0. In 7.0 it is assumed that Ω is small and b , the length of the bay, is large. Then the influence of Ω upon the lowest frequency can be determined from (37) of 6.0. The first order term is given in (19) of 7.0 and the second order term in (20) of 7.0. The numerical form of the first order correction has already been quoted above.

0.6 RÉSUMÉ ²⁾

Oscillations libres d'un fluide dans un bassin rectangulaire en rotation

Dans cette contribution on étudie les mouvements libres d'un fluide dans un bassin rectangulaire ayant une profondeur uniforme et animé d'une rotation. Cette étude peut apporter quelques éclaircissements sur le comportement des oscillations libres de la Mer du Nord, celle-ci pouvant être, en gros, représentée par un bassin rectangulaire fermé sur trois côtes par des côtes, et communiquant avec l'océan sur le quatrième côté.

Les oscillations libres dépendent dans une forte mesure de la vitesse de rotation exprimée par le coefficient de Coriolis Ω . Dans une moindre mesure elles dépendent aussi des frictions sur le fond qui interviennent dans le calcul par l'introduction du coefficient de friction λ . Dans ce chapitre on accorde une grande attention à l'influence de Ω et de λ sur les valeurs propres. Pour $\lambda = 0$ et un petit Ω , les valeurs propres peuvent être développées en une série avec des puissances croissantes de Ω . Des exemples de ces développements en séries sont donnés en (1), (2) et (3) du chapitre 1.0.

Dans cette contribution on obtient les résultats suivants. La formule classique de LAMB [8] pour la plus basse valeur propre d'un lac carré (17) du 5.0 est augmentée d'un terme de second ordre en Ω , (19) du 5.0. Des formules correspondantes sont données pour le lac rectangulaire, (8) du 5.0, et pour la baie rectangulaire, (22) du 7.0. Dans le cas particulier où la longueur du bassin est le double de sa largeur, nous trouvons respectivement les résultats numériques (9) du 5.0 et (23) du 7.0. Ces formules montrent que par suite d'une (lente) rotation, la plus longue période

¹⁾ An English version of this contribution is obtainable as report TW 49 of the Mathematical Centre.

²⁾ Une version anglaise de cette contribution, le rapport TW 49, peut être obtenue au Centre Mathématique.

d'oscillation propre croît dans le cas d'un lac rectangulaire, mais décroît dans le cas d'une baie rectangulaire. Pour les valeurs propres de la Mer du Nord, ces résultats n'ont qu'une signification qualitative, attendu que Ω , à la latitude géographique de la Mer du Nord, est assez grande. Néanmoins, la partie la plus importante de la théorie est développée indépendamment de la valeur de Ω .

Cette contribution se subdivise comme suit. En 1.0 on donne une introduction historique au problème. Le problème est formulé mathématiquement en 2.0.

Les oscillations libres avec la fréquence ω sont déterminées par les équations différentielles (2) du 2.0. Au moyen de la transformation (3) du 2.0, les cas où $\lambda \neq 0$ peuvent être ramenés au cas où $\lambda = 0$. L'influence d'un petit terme de friction sur la fréquence ω est donnée dans la formule (5) du 2.0. En première approximation la période libre demeure inchangée, mais les oscillations sont amorties. Dans la partie suivante de l'étude, on admet que $\lambda = 0$. Pour servir d'introduction les mouvements libres dans un canal infini sont examinés en 3.0. Ils consistent en une combinaison linéaire des ondes bien connues de Kelvin et de Poincaré. En 4.0, on considère un lac rectangulaire ayant pour côtés π et $2b$. Pour $\Omega = 0$, la solution est triviale, et les fréquences libres, pour ce cas, sont données en (4). Le cas où $\Omega \neq 0$ est traité au moyen du formalisme des opérateurs dans l'espace de Hilbert. La solution peut être présentée par une combinaison linéaire des ondes de Kelvin et de Poincaré, avec deux systèmes de coefficients inconnus. Les conditions-limites conduisent à deux systèmes d'équations (7) d'où l'on peut déterminer les périodes libres et les coefficients. Le système (7) est équivalent aux systèmes (22) et (28). Ce dernier peut s'écrire sous la forme (29) et être réduit à (30). Pour résoudre (30), on doit invertir deux opérateurs. En 5.0, cette inversion est réalisée pour de petites valeurs de Ω à l'aide de développements en puissances croissantes de Ω . De cette façon on détermine les tout premiers termes du développement des fréquences propres dans une série de puissances de Ω . On accorde une attention particulière au cas d'un lac carré. Les résultats en ont déjà été mentionnés ci-dessus. Au paragraphe 6.0 les oscillations libres d'une baie rectangulaire sont étudiées d'une manière analogue qu'en 4.0 pour un lac rectangulaire. Les fréquences propres découlent de l'équation déterminante (37) du 6.0. Au paragraphe 7.0, on admet que Ω est petit et que b , la longueur de la baie, est grand. On peut alors tirer de (37) du 6.0 l'influence de Ω sur la plus basse fréquence. Le terme de premier ordre est donné en (19) du 7.0, et le terme de second ordre en (20) du 7.0. La forme numérique de la correction de premier ordre a été mentionnée ci-dessus.

1.0 SAMENSTELLING VAN DE BIJDRAGE

1.1 Inleiding

In deze bijdrage wordt het vraagstuk behandeld van de vrije slingeren in een roterende rechthoekige zee. Aangezien de Noordzee ongeveer de vorm van een rechthoek heeft, welke aan drie zijden door kusten wordt begrensd en aan de vierde zijde open is en daar overgaat in een oceaan, is de hier ontwikkelde theorie op de Noordzee van toepassing.

Bij dit onderzoek wordt aangenomen, dat de zee een constante diepte heeft. De beweging van het water ontstaat onder invloed van de windkrachten, van de getijden en van de vrije slingeren. Ten gevolge van de linearisering van de hydrodynamische grondvergelijkingen kan het superpositiebeginsel worden toegepast. Dit betekent, dat bovengenoemde oorzaken van de waterbeweging afzonderlijk mogen worden beschouwd en dat de werkelijke beweging uit de afzonderlijke bewegingen kan worden samengesteld. In Bijdrage II.4 zijn de waterbewegingen ten gevolge van de windkrachten uitvoerig behandeld. In deze bijdrage worden de vrije slingeren onderzocht.

Vrije slingeren in een waterbekken zullen fysisch ontstaan, indien de watermassa door een of andere oorzaak in beweging is gebracht en de kracht, welke de beweging heeft veroorzaakt, heeft opgehouden te werken. Dit geval doet zich bijv. voor als een storm het water heeft opgestuwd en daarna is gaan liggen.

Mathematisch worden de vrije slingeren beschreven door dezelfde differentiaalvergelijkingen als in de voorgaande bijdrage. Aangezien we afwezigheid van windkrachten veronderstellen, zijn de rechterleden nu nul. De verhoging van de zeespiegel en elk van de beide snelheidscomponenten blijkt aan een *homogene* vergelijking van Helmholtz met *homogene* randvoorwaarden te voldoen.

Het onderzoek van dit moeilijke vraagstuk heeft tot numerieke resultaten geleid in het geval van kleine waarden van de coëfficiënt van Coriolis, zoals bij een roterend model in een laboratorium kan voorkomen. Op de Noordzee mag deze coëfficiënt niet meer als „klein” worden beschouwd. Voor dit geval is in algemene zin aangegeven hoe de oplossing van het probleem kan worden bepaald.

Getijgolven in roterende rechthoekige zeeën zijn door een aantal, in hoofdzaak Britse onderzoekers bestudeerd. Zij beschouwden echter alleen het geval van een gesloten zee, die door vier kusten wordt begrensd.

RAYLEIGH [14, 15] beschouwde in 1903 en 1909 de vrije trillingen als de rotatie (Ω) klein is, maar enkele van zijn resultaten waren onjuist. TAYLOR [16] gaf in 1922 de eerste volledige oplossing voor een gesloten rechthoekige zee. JEFFREYS [7] oefende in 1925 critiek uit op TAYLOR's conclusies en bracht naar voren, dat in TAYLOR's oplossing een tweevoudig oneindig aantal eigenwaarden lag besloten en dat er golven mogelijk waren, die in beide richtingen het bekken rond konden lopen.

LAMB [8] leidde in 1932 met een andere methode de benaderingen voor de laagste eigenwaarden af als Ω klein is. In het bijzonder verkreeg hij voor een vierkante zee de formule

$$\omega - \omega_0 = \pm \frac{4}{\pi^2} \Omega.$$

GOLDSBROUGH [6] gaf in 1931 een benaderde oplossing voor de vrije trillingen van een roterende rechthoekige zee. Het geval van een vierkante zee werd in het bijzonder onderzocht en de formule van LAMB werd bevestigd. PROUDMAN [13] onderwierp in 1933 RAYLEIGH's onderzoek aan een nadere beschouwing en toonde aan, dat door een juiste toepassing van het principe van RAYLEIGH de formule van LAMB verkregen kan worden. CORKAN en DOODSON [1] beschouwden in 1952 de vrije trillingen van een roterende vierkante zee. Met behulp van iteratie-methoden werd een aantal gevallen numeriek behandeld.

De stormramp van 1 februari 1953 stimuleerde het onderzoek op dit gebied. In 1954 gaf VAN DANTZIG [2] een overzicht van de resultaten die door het Mathematisch Centrum waren verkregen. Tot dien waren enkele voorlopige resultaten betreffende de vrije trillingen van een open roterende rechthoek gevonden. Meer recent onderzoek werd in 1956 en 1958 door VAN DANTZIG besproken [3, 4]. In daarop volgende rapporten van het Mathematisch Centrum werden enkele aspecten behandeld, die ook van belang zijn voor het geval van vrije bewegingen. LAUWERIER [9, 11] en VELTKAMP onderzochten een bepaalde goniometrische ontwikkeling, die ter sprake komt in 6.0. VELTKAMP [18] be-

schouwde uitvoerig de Kelvin- en Poincaré-golven, die hier behandeld worden in 3.0, 4.0 en 6.0. VELTKAMP [19] gaf een gedetailleerde beschouwing over de aard van de singulariteit, die ontstaat waar een kust en een oceaandrandsamenkomen. LAUWERIER [10, 12] beschouwde de vrije beweging in een oneindig lange strook met een kust- en een oceaangebrenzing en in een half oneindige strook met drie kusten. Het laatste geval wordt hier niet expliciet behandeld maar kan gemakkelijk als grensgeval van het rechthoekige bassin afgeleid worden uit 4.0 of ook uit 6.0.

1.2 Inhoud van de bijdrage

De vrije bewegingen en de vrije perioden hangen af van de Corioliscoëfficiënt Ω en de wrijvingscoëfficiënt λ . Hoewel verderop alleen het geval van *reële* Ω (en $\lambda = 0$) expliciet zal worden vermeld, zijn de resultaten ook geldig voor complexe Ω , zodat met behulp van de genoemde transformatie het geval $\lambda \neq 0$ (en reële Ω) eveneens wordt gedekt.

In 2.0 wordt in navolging van VELTKAMP [18] aangetoond, dat met behulp van een complexe transformatie het geval $\lambda \neq 0$ gereduceerd kan worden tot het geval $\lambda = 0$. We behoeven dus alleen het laatste te behandelen. Voor $\Omega = 0$ is het vraagstuk elementair en in de gevallen van een rechthoekig bekken zoals besproken in 4.0 en 6.0 wordt een discreet spectrum van eigenwaarden verkregen. Voor $\Omega \neq 0$ worden alleen die eigenwaarden beschouwd, die voor $\Omega \rightarrow 0$ tot dit discrete spectrum naderen. Een eventueel continu spectrum zal hier buiten beschouwing worden gelaten.

In 3.0 wordt het welbekende geval van een oneindig lang kanaal behandeld.

In 4.0 wordt dit probleem opgelost voor een rechthoekig meer door gebruikmaking van de operatorenstechniek in een Hilbertruimte.

De formele oplossing, die in 4.0 wordt gevonden, wordt in 5.0 voor kleine Ω ontwikkeld. Als bijzonder geval wordt een vierkante, roterende zee beschouwd. Dit hoofdstuk omvat de resultaten, welke door bovengenoemde auteurs zijn verkregen.

In 6.0 wordt het geval van een rechthoekige baai onderzocht. De in dit hoofdstuk verkregen resultaten zijn alle nieuw. Ook hier wordt een ontwikkeling van de eigenwaarden voor kleine Ω afgeleid. Voor de laagste eigenwaarde in een baai, die twee keer zo lang als breed is, vinden we

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + 2,01 \Omega^2 + O(\Omega^4), \quad (1)$$

zodat een langzame rotatie de vrije periode verkleint, in tegenstelling tot het geval van een rechthoekig meer. Bij dezelfde afmetingen als boven vinden we in dit geval:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - 0,30 \Omega^2 + O(\Omega^4). \quad (2)$$

De hier toegepaste behandeling voldoet niet in alle opzichten, aangezien de resultaten slechts voor kleine Ω bruikbaar zijn.

Door gebruik te maken van ontwikkelingen van het type van Fredholm voor de resolventen, had deze beperking vermeden kunnen worden. Ten gevolge hiervan zijn de in deze bijdrage verkregen resultaten eerder van toepassing op een laboratoriummodel van een rechthoekig bassin, dat met een vrij lage snelheid roteert, dan op de Noordzee, waar Ω tamelijk groot is. De bepaling van de orthogonale functies, waarin een willekeurig elevatiepatroon zou kunnen worden ontwikkeld, is niet uitgevoerd, aangezien hier aanzienlijke complicaties zouden optreden.

1.3 Auteur en medewerker

Deze bijdrage is een vertaling van een in het Engels geschreven rapport van D. van Dantzig [5]. De Nederlandse versie is verzorgd door D. J. Hofsommer.

2.0 UITEENZETTING VAN HET PROBLEEM

Met de notatie van Bijdrage II.4, formules (6) en (7) van 2.0, zijn de bewegingsvergelijkingen en de continuïteitsvergelijking:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) u - \Omega v + gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= U \\
 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) v + \Omega u + gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= V \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

We nemen aan, dat h , λ en Ω positieve constanten zijn. We kunnen de voortplantingssnelheid \sqrt{gh} van de vrije golven voor het geval, dat er geen wrijving is en geen rotatie plaatsvindt, als eenheid van snelheid kiezen, zodat $gh = 1$. Voor het geval van een bekken, waarvan de diepte ongeveer overeenkomt met de gemiddelde diepte van de Noordzee, wordt deze eenheid van snelheid ongeveer 91 km/h. We nemen verder aan, dat het bekken hetzij aan alle kanten door ondoordringbare kusten wordt begrensd, hetzij gedeeltelijk wordt begrensd door zulke kusten en gedeeltelijk door een oneindig diepe oceaan. Langs een kust verdwijnt de normale component van de snelheid; langs de oceaan is de hoogte van het zeeniveau constant, d.w.z. $\zeta = 0$.

We wensen slechts de vrije (gedempte) trillingen van een rechthoekig bekken te beschouwen. In dat geval is $U = V = 0$ en u , v en ζ zijn de reële delen van grootheden, welke evenredig zijn met $e^{i\omega t}$, waarin ω complex is met een positief imaginair deel als $\lambda > 0$. Als we deze evenredigheidsfactoren met dezelfde symbolen aanduiden, worden de vergelijkingen (1):

$$\begin{aligned}
 (i\omega + \lambda) u - \Omega v + \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= 0 \\
 \Omega u + (i\omega + \lambda) v + \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\omega \zeta &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Door een complexe verandering van de schaal kunnen deze vergelijkingen worden gereduceerd tot een gelijksoortig stelsel (met dezelfde randvoorwaarden), maar zonder wrijving [18]. Daartoe stellen we

$$\begin{aligned}
 \omega' &\stackrel{\text{def}}{=} \omega \left(1 - \frac{i\lambda}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\
 \Omega' &\stackrel{\text{def}}{=} \Omega \left(1 - \frac{i\lambda}{\omega}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
 \zeta' &\stackrel{\text{def}}{=} \zeta \left(1 - \frac{i\lambda}{\omega}\right)^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

waardoor een stelsel van de vorm (2) wordt verkregen, waarin $u' = u$, $v' = v$ en $\lambda' = 0$. Als de eigenfrequenties van dit stelsel bij gegeven randvoorwaarden gevonden zijn in de vorm $\omega' = \varphi(\Omega')$ wordt ω verkregen door het oplossen van de vergelijking

$$\omega \left(1 - \frac{i\lambda}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} = \varphi \left(\Omega \left(1 - \frac{i\lambda}{\omega}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)
 \tag{4}$$

Als $\lambda \ll |\omega|$ vinden we in eerste-ordebenadering:

$$\omega = \varphi(\Omega) + \frac{1}{2}i\lambda [1 + \Omega\varphi'(\Omega)/\varphi(\Omega)] + O(\lambda^2/\omega^2).
 \tag{5}$$

Dit betekent, dat de perioden in eerste benadering onveranderd blijven, maar dat de trillingen gedempt zijn. De dempingsfactor $\exp -\frac{1}{2}\lambda [1 + \Omega\varphi'(\Omega)/\varphi(\Omega)] t$ kan worden berekend als $\varphi(\Omega)$ bekend is voor reële waarden van Ω .

Op overeenkomstige wijze vinden we voor $\zeta' = \psi(\Omega') = \psi(\Omega', x, y)$ dat

$$\zeta = \psi(\Omega) - i\frac{\lambda}{2\omega} [\psi(\Omega) - \Omega\psi'(\Omega)] + O(\lambda^2/\omega^2).
 \tag{6}$$

We zien hieruit, dat de amplitude van ζ voor $\lambda > 0$ in eerste benadering verkregen kan worden uit die voor $\lambda = 0$ door vermenigvuldiging met de dempingsfactor

$$\exp - \frac{\lambda}{2\omega} [\psi(\Omega) - \Omega\psi'(\Omega)] t. \quad (7)$$

Het is derhalve voldoende slechts het geval zonder wrijving te beschouwen.

Als we de accenten weglaten of, wat op hetzelfde neerkomt, als we $\lambda = 0$ stellen in (2) worden deze vergelijkingen vereenvoudigd tot:

$$\left. \begin{aligned} i\omega u - \Omega v + \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= 0 \\ \Omega u + i\omega v + \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\omega \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} (8)$$

Hieruit volgt, dat

$$\left. \begin{aligned} \Delta u - \kappa^2 u &= 0 \\ \Delta v - \kappa^2 v &= 0 \\ \Delta \zeta - \kappa^2 \zeta &= 0, \end{aligned} \right\} (9)$$

waarin

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

en

$$\kappa^2 \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^2 - \omega^2. \quad (10)$$

We vermelden nog de betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\kappa^{-2} \left(i\omega \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \Omega \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \\ v &= \kappa^{-2} \left(\Omega \frac{\partial \zeta}{\partial x} - i\omega \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (11)$$

en

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \omega^2 \zeta &= i\omega \frac{\partial u}{\partial x} - \Omega \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \omega^2 v &= i\Omega \omega u - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} (12)$$

3.0 HET ONEINDIGE KANAAL

Gemakshalve zullen we hier de reeds lang bekende oplossingen voor een oneindig lang recht kanaal met (constante) breedte $2a$ in herinnering brengen. We kiezen a/π als lengte-eenheid, zodat $a/(\pi \sqrt{gh})$ de eenheid van tijd wordt. Als de breedte en de diepte van het kanaal overeenkomen met de gemiddelde breedte en diepte van de Noordzee, wordt de eenheid van lengte ongeveer 128 km en de daarmee overeenkomende eenheid van tijd 1,4 h. Op de breedte van de Noordzee is Ω ongeveer $0,43 \text{ h}^{-1}$, d.w.z. 0,6 in onze dimensieloze eenheden.

Kiezen we nu één kust van het kanaal als y -as, zo, dat de twee kusten worden voorgesteld door $x = 0$ en $x = \pi$, dan worden de randvoorwaarden:

$$u = 0 \quad \text{voor } x = 0 \text{ en } x = \pi.$$

We beschouwen slechts die oplossingen (u, v, ζ) , die (voor bijna elke y) kwadratisch integreerbaar zijn (symbolisch: $\in L^2$) in het interval $0 < x < \pi$ zodat de theorieën over Fourierreeksen en over de Hilbertruimte kunnen worden toegepast. Elke $u \in L^2$ in dit interval kan worden ontwikkeld volgens:

$$u = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n(y) e^{inx}.$$

De eerste differentiaalvergelijking (9) van 2.0 eist, dat $u_n(y)$ evenredig is met $e^{\pm \nu_n y}$, waarin

$$\nu_n \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n^2 + \kappa^2} \quad (\kappa^2 = \Omega^2 - \omega^2). \quad (1)$$

Als we met ε een variabele aangeven, die de beide waarden $+1$ en -1 kan aannemen (of ook: die de twee tekens $+$ en $-$ kan voorstellen) en als we sommatie over deze variabele met een kleine Σ aanduiden, vinden we na toevoeging van een factor $-\frac{1}{2}i(n^2 + \Omega^2)$:

$$u = -\frac{1}{2}i \Sigma \sum C_n^\varepsilon (n^2 + \Omega^2) e^{inx - \varepsilon \nu_n y}$$

Om aan de randvoorwaarden te voldoen, is het noodzakelijk en voldoende dat

$$C_{-n}^\varepsilon = -C_n^\varepsilon, \quad (2)$$

d.w.z. dat de C_n^ε oneven functies van n zijn. Daaruit volgt dat u een lineaire combinatie met coëfficiënten $(n^2 + \Omega^2) C_n^\varepsilon$ is van de elementaire oplossingen

$$e^{-\varepsilon \nu_n y} \sin nx,$$

die „Poincarégolven” worden genoemd, evenals de overeenkomstige v en ζ , die door substitutie uit (12) van 2.0 worden verkregen. Uit (12) van 2.0 blijkt echter, dat we hieraan nog oplossingen van de overeenkomstige homogene vergelijkingen moeten toevoegen, die samen met $u = 0$ de zgn. „Kelvingolven” voorstellen. Deze laatste kunnen ook formeel uit de Poincarégolven worden gevonden door $-i\varepsilon\Omega$ voor n en $i\omega$ voor ν_n te substitueren. De algemene oplossing voor het oneindige kanaal luidt dus, als we nog een kleine verandering aanbrengen in de constante factoren:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2}i \Sigma \sum C_n^\varepsilon (n^2 + \Omega^2) e^{inx - \varepsilon \nu_n y} \\ v &= \frac{1}{2} \Sigma \sum C_n^\varepsilon (\varepsilon n \nu_n + \Omega \omega) e^{inx - \varepsilon \nu_n y} - \Sigma C_n^\varepsilon e^{\varepsilon(\Omega x - i\omega y - \frac{1}{2}\pi \Omega)} \\ \zeta &= \frac{1}{2}i \Sigma \sum C_n^\varepsilon (n\omega - \varepsilon \Omega \nu_n) e^{inx - \varepsilon \nu_n y} - \Sigma \varepsilon C_n^\varepsilon e^{\varepsilon(\Omega x - i\omega y - \frac{1}{2}\pi \Omega)} \end{aligned} \right\} (3)$$

waarin Σ een sommatie aangeeft over alle gehele getallen n en Σ een sommatie over de twee waarden $\varepsilon = +1$ en $\varepsilon = -1$, of ook over de twee tekens $\varepsilon = +$ en $\varepsilon = -$, waarbij aan de voorwaarde (2) moet zijn voldaan. We merken op, dat $\nu_{-n} = \nu_n$ zodat de gedeelten van v en ζ die met Poincarégolven overeenkomen, een term (resp. $C_n^\varepsilon \Omega \omega$, $C_n^\varepsilon \varepsilon \Omega \nu_n$) bevatten, die een oneven en één (resp. $\varepsilon C_n^\varepsilon n \nu_n$, $C_n^\varepsilon n \omega$) die een even functie is van n . Gebruikmakende van (2) kunnen de vergelijkingen (3) geschreven worden in de gedaante:

$$\left. \begin{aligned} u &= \Sigma \sum_1^\infty C_n^\varepsilon (n^2 + \Omega^2) \sin nx e^{-\varepsilon \nu_n y} \\ v &= \Sigma \sum_1^\infty C_n^\varepsilon (\varepsilon n \nu_n \cos nx + i\Omega \omega \sin nx) e^{-\varepsilon \nu_n y} - \Sigma C_n^\varepsilon e^{\varepsilon(\Omega x - i\omega y - \frac{1}{2}\pi \Omega)} \\ \zeta &= \Sigma \sum_1^\infty C_n^\varepsilon (in \omega \cos nx + \varepsilon \Omega \nu_n \sin nx) e^{-\varepsilon \nu_n y} - \Sigma \varepsilon C_n^\varepsilon e^{\varepsilon(\Omega x - i\omega y - \frac{1}{2}\pi \Omega)} \end{aligned} \right\} (4)$$

De analogie van de twee Kelvingolven met een paar Poincarégolven zou kunnen worden gebruikt voor een uniforme behandeling met behulp van de residu-rekening in plaats van een behandeling met behulp van reeksen. Dit kan bij voorbeeld worden uitgevoerd in een complex ν -vlak, waarin

$n = n(\nu) = \pm (\nu^2 + \omega^2 - \Omega^2)^{\frac{1}{2}}$. De tweewaardigheid van $n(\nu)$ is niet ernstig, aangezien alleen even functies er van in de integranden voorkomen. Met betrekking tot een monotoon toenemende rij van gebieden, die in de limiet alle nulpunten van de noemers bevatten (of ook een enkel gebied $|\operatorname{Im} \nu| < a$, waarin $a > |\omega|$), verkrijgen we in plaats van (4):

$$\left. \begin{aligned} u &= \mathcal{E} \frac{\sin n(\nu) x C(\nu) e^{-\nu y}}{\tan \pi n(\nu)} \\ v &= \mathcal{E} \frac{\nu n(\nu) \cos n(\nu) x + i\omega\Omega \sin n(\nu) x}{(\nu^2 + \omega^2) \tan \pi n(\nu)} C(\nu) e^{-\nu y} \\ \zeta &= \mathcal{E} \frac{i\omega n(\nu) \cos n(\nu) x + \Omega\nu \sin n(\nu) x}{(\nu^2 + \omega^2) \tan \pi n(\nu)} C(\nu) e^{-\nu y}, \end{aligned} \right\} (5)$$

waarin \mathcal{E} de som van de residuen voorstelt en $C(\nu)$ een functie holomorf in het (limiet)gebied is.

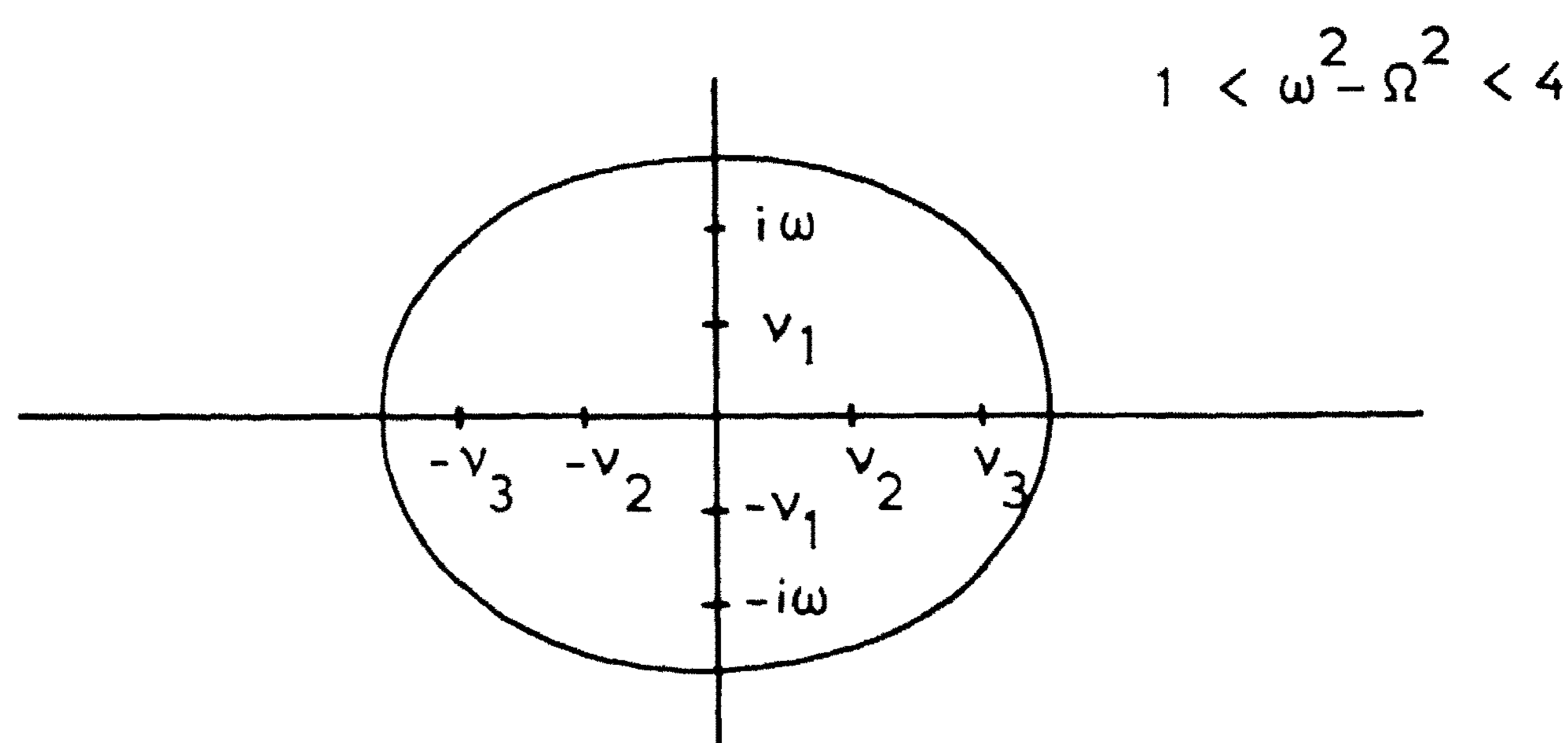


Fig. 3.0.1. De bij de Kelvin- en Poincarégolven behorende polen

We zullen echter geen gebruik maken van de residu-rekening. Formele ontwikkelingen (4) zullen slechts dan worden beschouwd oplossingen van ons probleem te zijn, als u en v (voor bijna iedere y) behoren tot de klasse L^2 van kwadratisch integreerbare functies van x in het interval $0 < x < \pi$. Ditzelfde geldt dan voor $\partial\zeta/\partial x$ en $\partial\zeta/\partial y$ en a fortiori voor ζ zelf. Deze voorwaarde is gelijkwaardig met de eis, dat de rijen $n^2 C_n^\varepsilon e^{-\varepsilon\nu_n y}$ voor beide waarden van ε en alle y in het interval $0 < y < b$ behoren tot de klasse l^2 van kwadratisch sommeerbare rijen, d.w.z., dat

$$\sum n^4 |C_n^\varepsilon|^2 e^{2b|\operatorname{Re} \nu_n|} < \infty.$$

De reeksen, die in (4) en verderop optreden, behoeven niet overal convergent te zijn.

4.0 HET RECHTHOEKIGE MEER

We bespreken nu het rechthoekige meer (d.w.z. een bekken, dat geheel begrensd wordt door ondoordringbare kusten) met een lengte $2b$, hetwelk kan worden beschouwd als een kanaal $0 < x < \pi$ afgesloten door dammen bij $y = b$ en $y = -b$. We moeten nu de oplossingen (2), (3) en (4) van 3.0 aanpassen aan de nieuwe randvoorwaarden:

$$v = 0 \quad \text{voor } y = b \quad \text{en voor } y = -b.$$

We vinden dan:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \sum_1^\infty C_n^\varepsilon e^{-\varepsilon\nu_n b} (\varepsilon\nu_n \cos nx + i\omega\Omega \sin nx) &= \Sigma C^\varepsilon e^{\varepsilon(\Omega x - i\omega b - \frac{1}{2}\pi\Omega)} \\ \Sigma \sum_1^\infty C_n^\varepsilon e^{\varepsilon\nu_n b} (\varepsilon\nu_n \cos nx + i\omega\Omega \sin nx) &= \Sigma C^\varepsilon e^{\varepsilon(\Omega x + i\omega b - \frac{1}{2}\pi\Omega)} \end{aligned} \right\} (1)$$

Voeren we nu in:

$$\left. \begin{aligned} d_n^+ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum \varepsilon C_n^\varepsilon \\ d_n^- &\stackrel{\text{def}}{=} -i \sum C_n^\varepsilon \end{aligned} \right\} (2)$$

dan blijkt, als we sommen en verschillen nemen van overeenkomstige leden van (1), dat:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^\infty \cosh v_n b (n v_n d_n^+ \cos nx - \omega \Omega d_n^- \sin nx) &= \cos \omega b \sum C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi)} \\ \sum_1^\infty \sinh v_n b (n v_n d_n^- \cos nx + \omega \Omega d_n^+ \sin nx) &= \sin \omega b \sum \varepsilon C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi)} \end{aligned} \right\} (3)$$

We merken op, dat de imaginaire eenheid i niet meer expliciet voorkomt, hoewel hij impliciet kan voorkomen in enkele van de v_n , in het bijzonder als $\omega^2 > n^2 + \Omega^2$.

Het probleem is nu alle waarden van ω te bepalen waarvoor niet-triviale stelsels (d_n^+ , d_n^- , C^+ , C^-) bestaan en de daarmee overeenkomende oplossing (u , v , ζ) te vinden.

Voor $\Omega = 0$ is de oplossing triviaal. Daar de functies $\cos nx$ voor $n \geq 0$ alle onafhankelijk zijn, is het noodzakelijk en voldoende, dat alle coëfficiënten verdwijnen, d.w.z. dat

$$\begin{aligned} (\cos \omega b) \sum C^\varepsilon &= 0 & (\sin \omega b) \sum \varepsilon C^\varepsilon &= 0 \\ d_n^+ v_n \cosh v_n b &= 0 & d_n^- v_n \sinh v_n b &= 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat hetzij $\sin 2\omega b = 0$ is, hetzij dat $\sinh 2v_n b = 0$ is voor de een of andere n . De laatstgenoemde voorwaarde betekent dat $2v_n b = i\pi k$ voor een of andere gehele k , d.w.z. dat

$$\omega = \pm (n^2 + \frac{1}{4}\pi^2 k^2 b^{-2})^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

De oplossingen van $\sin 2\omega b = 0$ hebben ook de vorm (4) met $n = 0$.

De oplossingen, die behoren bij een ω , die de vorm (4) heeft, behoeven niet eenduidig te wezen, daar meer dan één paar (n, k) dezelfde ω kan geven, die dan een veelvoudige eigen-frequentie is. We zullen de oplossingen niet expliciet opschrijven. Terugkerende tot het algemene geval $\Omega \neq 0$ definiëren we

$$\left. \begin{aligned} f_n^+ &\stackrel{\text{def}}{=} n v_n d_n^+ \cosh v_n b \\ f_n^- &\stackrel{\text{def}}{=} n v_n d_n^- \sinh v_n b \end{aligned} \right\} (5)$$

en

$$\left. \begin{aligned} a^+(x) &\stackrel{\text{def}}{=} (\cos \omega b) \sum C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi)} \\ a^-(x) &\stackrel{\text{def}}{=} (\sin \omega b) \sum \varepsilon C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi)} \end{aligned} \right\} (6)$$

zodat (3) overgaat in:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^\infty f_n^+ \cos nx - \omega \Omega \sum_1^\infty \frac{\text{ctnh } v_n b}{n v_n} f_n^- \sin nx &= a^+(x) \\ \sum_1^\infty f_n^- \cos nx + \omega \Omega \sum_1^\infty \frac{\tanh v_n b}{n v_n} f_n^+ \sin nx &= a^-(x) \end{aligned} \right\} (7)$$

De hiervoor genoemde voorwaarde over de kwadratische integreerbaarheid betekent, dat $f_n^\pm \in L^2$.

Voor elk paar reële functies $\varphi, \psi \in L^2$ (d.w.z. steeds kwadratisch integreerbaar op het interval $0 < x < \pi$) definiëren we het „inwendige product”:

$$(\varphi, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx \quad (8)$$

(de aandacht zij gevestigd op de factor 2), en voor elke φ de norm:

$$\|\varphi\| \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

De cosinus-ontwikkeling van een functie φ op het interval $0 < x < \pi$ is gelijk aan

$$\varphi(x) = \sum_* \varphi_m \cos mx, \quad (10)$$

als de reeks convergeert, waarbij

$$\varphi_m \stackrel{\text{def}}{=} (\cos mx, \varphi(x)), \quad (11)$$

terwijl het symbool \sum_* een sommatie aangeeft over alle *niet-negatieve* gehele getallen, waarbij we echter voor $m = 0$ de *helft* van de sommand nemen ¹⁾. Uit (8) t/m (11) volgt dan dat

$$(\varphi, \psi) = \sum_* \varphi_m \bar{\psi}_m$$

en in het bijzonder

$$\|\varphi\|^2 = \sum_* |\varphi_m|^2.$$

Voor

$$I_{mn} \stackrel{\text{def}}{=} (\cos mx, \cos nx) \quad (m \geq 0, n \geq 0) \quad (12)$$

geldt in het bijzonder:

$$I_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{als } m = n \neq 0 \\ 2 & \text{als } m = n = 0 \\ 0 & \text{als } m \neq n \end{cases} \quad (13)$$

en voor alle φ :

$$\varphi_m = \sum_* I_{mn} \varphi_n.$$

Ook is, als

$$\Gamma_{mn} \stackrel{\text{def}}{=} (\cos mx, \sin nx), \quad (14)$$

$\Gamma_{mn} = 0$ als $m - n$ even is en $\Gamma_{mn} = 4n/\pi (n^2 - m^2)$ als $m - n$ oneven is, d.w.z.

$$\Gamma_{mn} = \frac{4}{\pi} \frac{n}{n^2 - m^2} p(n - m), \quad (15)$$

waarin

$$p(k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} 0 & \text{als } k \text{ even is} \\ 1 & \text{als } k \text{ oneven is.} \end{cases} \quad (16)$$

In het bijzonder is

$$\Gamma_{m0} = 0 \quad \Gamma_{0n} = \frac{4p(n)}{\pi n}, \quad (17)$$

zodat

$$\sin nx = \sum_* \cos mx \Gamma_{mn} \quad (0 < x < \pi). \quad (18)$$

Daarenboven hebben we

$$\cos mx = \sum_* \Gamma_{mn} \sin nx \quad (0 < x < \pi), \quad (19)$$

waarbij uiteraard het symbool \sum_* vervangen kan worden door \sum_1^∞ of \sum_0^∞ .

We merken de identiteit op:

$$\sum_n \Gamma_{ln} \Gamma_{mn} = I_{ln} \quad (20)$$

¹⁾ Het is mogelijk de factor 2 in (8) weg te laten en $\sum_{-\infty}^{+\infty}$ i.p.v. \sum_* te gebruiken, indien we op een geschikte manier de coëfficiënten ook voor negatieve n definiëren. De voor- en nadelen van deze verandering in het formalisme, evenals van de vervanging van het interval $(0, \pi)$ door $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ of $(-\pi, +\pi)$, zijn ongeveer even groot.

echter is:

$$\sum_m^* \Gamma_{mk} \Gamma_{mn} = I_{kn}^{\circ} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} I_{kn} & \text{als } k \neq 0 \\ 0 & \text{als } k = 0, \end{cases} \quad (21)$$

d.w.z. $I_{kn}^{\circ} = I_{kn} (1 - \delta_{ko})$. Daarenboven is $\Gamma_{nm} = -\frac{m}{n} \Gamma_{mn}$ tenzij $n = 0$.

Als we de inwendige producten vormen van de beide leden van de vergelijkingen (7) met $\cos mx$, vinden we voor $m > 0$:

$$\left. \begin{aligned} f^+_m - \omega \Omega \sum_1^{\infty} \Gamma_{mn} \frac{\text{ctnh } \nu_n b}{n \nu_n} f^-_n &= (\cos mx, a^+(x)) \\ f^-_m + \omega \Omega \sum_1^{\infty} \Gamma_{mn} \frac{\tanh \nu_n b}{n \nu_n} f^+_n &= (\cos mx, a^-(x)) \end{aligned} \right\} (22)$$

Voor $m = 0$ blijft (22) gelden als we definiëren

$$f^+_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad f^-_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0. \quad (23)$$

Definiëren we voor $m \geq 0$

$$a^{\pm}_m \stackrel{\text{def}}{=} (\cos mx, a^{\pm}(x)), \quad (24)$$

dan hebben we, omdat $(\cos mx, e^{\lambda x}) = \frac{2\lambda}{\pi(m^2 + \lambda^2)} [(-1)^m e^{\pi\lambda} - 1]$:

$$\left. \begin{aligned} a^+_m &= \frac{2\Omega}{\pi(m^2 + \Omega^2)} \cos \omega b \Sigma \varepsilon C^{\varepsilon} [(-1)^m e^{\varepsilon\pi\Omega} - 1] e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\Omega\pi} \\ &= \begin{cases} \frac{4\Omega}{\pi(m^2 + \Omega^2)} b^+ \sinh \frac{1}{2}\pi\Omega \cos \omega b & m \text{ even} \\ -\frac{4\Omega}{\pi(m^2 + \Omega^2)} b^- \cosh \frac{1}{2}\pi\Omega \cos \omega b & m \text{ oneven} \end{cases} \\ a^-_m &= \frac{2\Omega}{\pi(m^2 + \Omega^2)} \sin \omega b \Sigma C^{\varepsilon} [(-1)^m e^{\varepsilon\pi\Omega} - 1] e^{-\frac{1}{2}\varepsilon\Omega\pi} \\ &= \begin{cases} \frac{4\Omega}{\pi(m^2 + \Omega^2)} b^+ \sinh \frac{1}{2}\pi\Omega \sin \omega b & m \text{ even} \\ -\frac{4\Omega}{\pi(m^2 + \Omega^2)} b^- \cosh \frac{1}{2}\pi\Omega \sin \omega b & m \text{ oneven,} \end{cases} \end{aligned} \right\} (25)$$

waarin

$$b^+ \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma C^{\varepsilon} \quad b^- \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma \varepsilon C^{\varepsilon}. \quad (26)$$

Wegens (25) zijn de $a^{\pm}_n \in l^1$ (d.w.z. absoluut sommeerbaar) en dus zeker $\in l^2$ (d.w.z. kwadratisch sommeerbaar).

Definiëren we nu nog voor $n > 0$:

$$\left. \begin{aligned} K^+_{mn} &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{mn} \frac{\text{ctnh } \nu_n b}{n \nu_n} \\ K^-_{mn} &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{mn} \frac{\tanh \nu_n b}{n \nu_n} \end{aligned} \right\} (27)$$

en

$$K^{\pm}_{m0} \stackrel{\text{def}}{=} 0,$$

dan kunnen de vergelijkingen (22) als volgt worden geschreven:

$$\left. \begin{aligned} f^+_m - \omega \Omega \sum_* K^+_{mn} f^-_n &= a^+_m \\ f^-_m + \omega \Omega \sum_* K^-_{mn} f^+_n &= a^-_m. \end{aligned} \right\} (28)$$

We merken op, dat de K^\pm eindige normen $\|K^\pm\|$ bezitten:

$$\|K^\pm\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m^*} \sum_{n^*} |K^\pm|^2 = \sum_1^\infty n \frac{|\tan \nu_n b|^{\bar{+}2}}{n^2 |\nu_n|^2} \sum_{m^*} \Gamma_{mn^2} = \sum_1^\infty \frac{|\tan \nu_n b|^{\bar{+}2}}{n^2 |\nu_n|^2} < \infty$$

(wegens (21)), aangezien voor $n \rightarrow \infty$ geldt $\tanh \nu_n b \rightarrow 1$ en $\nu_n/n \rightarrow 1$.

Als we de vectoren en matrices in de Hilbertruimte door dezelfde symbolen aangeven als hun componenten met weglating van de indices, kunnen de vergelijkingen (28) verkort worden geschreven ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} f^+ - \omega \Omega K^+ f^- &= a^+ \\ f^- + \omega \Omega K^- f^+ &= a^- \end{aligned} \right\} (29)$$

We dienen nu de niet-triviale oplossingen (f^+, f^-, C^+, C^-) van (29) met (25) te vinden, hieraan de voorwaarden (23) op te leggen en ten slotte de d^\pm_n op te lossen uit (5). De laatstgenoemde oplossing is slechts dan mogelijk en eenduidig als $\sinh 2\nu_n b \neq 0$. Aan deze voorwaarde wordt niet noodzakelijkerwijs voldaan maar bij een gegeven Ω zal er slechts voor bijzondere waarden van b niet aan voldaan zijn (en omgekeerd). Dit treedt dan en slechts dan op als, in analogie met (4):

$$\omega^2 = \Omega^2 + n^2 + \pi^2 k^2 / 4b^2.$$

We zullen daarom aannemen dat $\sinh 2\nu_n b \neq 0$ voor alle waarden van $n \geq 1$, zodat het voldoende is (29), (25), (23) op te lossen.

Eliminatie van resp. f^- en f^+ uit (29) levert:

$$\left. \begin{aligned} f^+ + \omega^2 \Omega^2 K^+ K^- f^+ &= h^+ \stackrel{\text{def}}{=} a^+ + \omega \Omega K^+ a^- \\ f^- + \omega^2 \Omega^2 K^- K^+ f^- &= h^- \stackrel{\text{def}}{=} a^- - \omega \Omega K^- a^+ \end{aligned} \right\} (30)$$

Het stelsel (29) is gelijkwaardig met het stelsel, dat ontstaat indien één van zijn (vector)vergelijkingen, bijv. de eerste, vervangen wordt door de overeenkomstige vergelijking uit (30).

Daar K^\pm , en dus ook $K^\pm K^\mp$ eindige normen bezitten, hebben de matrices $I + \omega^2 \Omega^2 K^\pm K^\mp$ voor voldoende kleine waarden van $\omega \Omega$ eenduidige tweezijdige reciproken R^\pm , die voor voldoende kleine waarden van $\omega^2 \Omega^2$ verkregen kunnen worden met behulp van een ontwikkeling volgens Neumann ^{2) 3)}:

$$\left. \begin{aligned} R^+ &\stackrel{\text{def}}{=} (I + \omega^2 \Omega^2 K^+ K^-)^{-1} = \sum_0^\infty (-\omega^2 \Omega^2)^n (K^+ K^-)^n \\ R^- &\stackrel{\text{def}}{=} (I + \omega^2 \Omega^2 K^- K^+)^{-1} = \sum_0^\infty (-\omega^2 \Omega^2)^n (K^- K^+)^n \end{aligned} \right\} (31)$$

We merken op, dat

$$\left. \begin{aligned} R^- &= I - \omega^2 \Omega^2 K^- R^+ K^+, & K^+ R^- &= R^+ K^+ \\ R^+ &= I - \omega^2 \Omega^2 K^+ R^- K^-, & K^- R^+ &= R^- K^- \end{aligned} \right\} (32)$$

¹⁾ In deze notatie hebben de identiteiten (20), (21) de eenvoudige gedaanten $\Gamma \Gamma' = I$, $\Gamma' \Gamma = I^\circ$, waarbij Γ' de getransponeerde van de matrix Γ is.

²⁾ Het feit dat in de R^\pm (zie ook (4) van 5.0 hierna) twee verschillende operatoren afwisselend voorkomen, is niet essentieel. Hadden we i.p.v. (27) gedefinieerd

$$\left. \begin{aligned} K'^\pm &\stackrel{\text{def}}{=} \pm (-1)^n \Gamma_{mn} (n \nu_n)^{-1} (\tanh \nu_n b)^{\bar{+}} (-1)^n = (-1)^n K_{mn} \pm (-1)^n \\ f_n'^\pm &\stackrel{\text{def}}{=} f_n^\pm (-1)^n \end{aligned} \right\}$$

dan vinden we afzonderlijke vergelijkingen voor f'^+ en f'^- , die elk slechts afhankelijk zijn van de overeenkomstige operator K'^+ , resp. K'^- .

³⁾ Indien $\omega^2 \Omega^2 > \|K^+ K^-\|^{-1}$ kan de geldigheid van de machtreksen (31) vervallen. De reciproken R^\pm blijven dan echter bestaan, tenzij $-(\omega \Omega)^{-2}$ een latente wortel is van $K^+ K^-$ (en eveneens van $K^- K^+$). Als deze wortel r -voudig is, moeten er voor de oplosbaarheid van de vergelijkingen (30) r lineaire betrekkingen voor h^+ en eveneens r betrekkingen voor h^- bestaan. Zowel f^+ als f^- zijn dan op r constanten na bepaald. Ook in dit geval volgen dus uit ieder van de voorwaarden (23) $(r+1) - r = 1$ lineaire betrekkingen tussen b^+ en b^- . Om ze te vinden, hebben we de spectrale ontwikkeling van $K^\pm K^\mp$ nodig. We zullen hier niet verder op ingaan.

Met behulp van (31) kan (30) worden opgelost:

$$\left. \begin{aligned} f^+ &= R^+ h^+ \\ f^- &= R^- h^-. \end{aligned} \right\} (33)$$

Hieraan moeten de voorwaarden (23) worden opgelegd, d.w.z.:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_* R^+_{om} h^+_m &= 0 \\ \Sigma_* R^-_{om} h^-_m &= 0. \end{aligned} \right\} (34)$$

We brengen in herinnering, dat de I_{mn} , K^{\pm}_{mn} alleen dan niet verdwijnen als m en n ongelijke pariteit hebben. Derhalve is $R^{\pm}_{om} = 0$, tenzij m even is, zodat alleen h^{\pm}_m met *even* m in (34) voorkomen. Ten gevolge van (30) zijn deze functies van a^{\pm}_m voor even m en van a^{\mp}_n voor oneven m , en dus wegens (25) alleen hetzij van de b^+ of van de b^- . We verkrijgen dus twee stelsels oplossingen, één met $b^+ \neq 0$, $b^- = 0$, het andere met $b^+ = 0$, $b^- \neq 0$.

Definiëren we nu nog:

$$\varrho^{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^2 \Sigma_* R^{\pm}_{om} (m^2 + \Omega^2)^{-1} \quad (35)$$

en

$$\sigma^{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^2 \Sigma_* (R^{\pm} K^{\pm})_{on} (n^2 + \Omega^2)^{-1}, \quad (36)$$

dan vinden we uit (34), (30) en (25)

hetzij $b^- = 0$, $b^+ \neq 0$ en

$$\varrho^+ \sinh \frac{1}{2} \pi \Omega \cos \omega b - \omega \Omega \sigma^+ \cosh \frac{1}{2} \pi \Omega \sin \omega b = 0, \quad (37)$$

hetzij $b^+ = 0$, $b^- \neq 0$ en

$$\varrho^- \sinh \frac{1}{2} \pi \Omega \sin \omega b + \omega \Omega \sigma^- \cosh \frac{1}{2} \pi \Omega \cos \omega b = 0. \quad (38)$$

5.0 ONTWIKKELINGEN VOOR KLEINE WAARDEN VAN Ω

Bij gegeven Ω en b is elk van de transcendente vergelijkingen (37) en (38) van 4.0 voor ω bijzonder gecompliceerd. Immers ω komt voor

- impliciet in de K^{\pm}_{mn} via het argument $\nu_n = (n^2 + \Omega^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}$,
- impliciet in de R^{\pm}_{om} via het argument $\omega \Omega$,
- expliciet wegens de factor $\omega^{\pm 1} \tan \omega b$.

De afhankelijkheid van Ω is zelfs nog gecompliceerder en die van b ongeveer even gecompliceerd.

We kunnen echter ϱ^{\pm} en σ^{\pm} in een machtreeks in Ω^2 ontwikkelen, waaruit benaderingen van ω voor kleine Ω^2 gemakkelijk kunnen worden afgeleid (we herinneren eraan, dat in gewone eenheden Ω vervangen moet worden door $\Omega a \pi^{-1} (gh)^{-\frac{1}{2}}$). We zullen dit alleen voor de eerste vergelijking (37) van 4.0 uitvoeren.

Daar R^+_{om} verdwijnt tenzij m even is en daar $R_{00}^+ = I_{00} = 2$, volgt uit (35) van 4.0 dat

$$\varrho^+ = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} (-\Omega^2)^s \sum_{m=2}^{\infty} m^{-2s} R^+_{om}. \quad (1)$$

Daarenboven is voor $m \neq 0$

$$R^+_{om} = \sum_{r=1}^{\infty} (-\omega^2 \Omega^2)^r [(K^+ K^-)^r]_{om}, \quad (2)$$

waaruit:

$$\varrho^+ = 1 - \omega^2 \Omega^4 \sum_{r=0}^{\infty} (-\Omega^2)^r \sum_{h=0}^r \omega^{2r} M_{r-h+1}^{2h+2}, \quad (3)$$

waarin

$$\left. \begin{aligned} M_l^{2h} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2l} [(K^+ K^-)^h]_{on} \\ M_l^{2h+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2l} [(K^+ K^-)^h K^+]_{on}, \end{aligned} \right\} (4)$$

en op dezelfde manier, daar (R^+K^+) verdwijnt tenzij n oneven is, is:

$$\sigma^+ = \Omega^2 \sum_{r=0}^{\infty} (-\Omega^2)^r \sum_o^r \omega^{2h} M_{r-h+1}^{2h+1} \quad (5)$$

Om een tweede-ordebenadering (in Ω^2) te vinden, is het voldoende om te stellen:

$$\begin{aligned} \varrho^+ &= 1 + O(\Omega^4) \\ \sigma^+ &= \Omega^2 M_1^1 - \Omega^4 (M_2^1 + \omega^2 M_3^1) + O(\Omega^6). \end{aligned}$$

We krijgen:

$$\frac{\text{ctn } \omega b}{\omega} - \frac{\Omega}{\tanh \frac{1}{2} \pi \Omega} \frac{\sigma^+}{\varrho^+} = \frac{2}{\pi} \left[\Omega^2 M_1^1 - \Omega^4 \left(-\frac{1}{12} \pi^2 M_1^1 + M_2^1 + \omega^2 M_3^1 \right) \right] + O(\Omega^6). \quad (6)$$

Echter is

$$\begin{aligned} M_1^l &= \sum_1^{\infty} n^{-2l} K_{on}^+ = \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{p(n)}{n^{2l+2} \nu_n \tanh \nu_n b} = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{p(n)}{n^{2l+2} \nu_n^o \tanh \nu_n^o b} - \frac{2}{\pi} \Omega^2 \sum_1^{\infty} \frac{p(n)}{n^{2l+2} \nu_n^o{}^3} \left\{ \frac{1}{\tanh \nu_n^o b} + \frac{\nu_n^o}{\sinh^2 \nu_n^o b} \right\} + O(\Omega^4), \quad (7) \end{aligned}$$

waarin $\nu_n^o = \sqrt{n^2 - \omega_o^2}$ en waarbij verondersteld is dat $\nu_n^o \neq 0$ voor alle waarden van n , terwijl als argument van M_1^3 in plaats van ν_n genomen mag worden ν_n^o . Verdere vereenvoudiging kan worden verkregen als b groot is (we kunnen altijd veronderstellen, dat $b \geq a = \frac{1}{2}\pi$). Dit zal hierna afzonderlijk worden gedaan. Het vinden van hogere ordebenaderingen vereist slechts geduld. Als we ons beperken tot de eerste-ordebenadering, vinden we, als we nog $\delta \stackrel{\text{def}}{=} \omega_o - \omega$ stellen, waarin $\cos \omega_o b = 0$ zodat $\omega^{-1} \text{ctn } \omega b = \omega_o^{-1} \delta b + O(\Omega^2)$:

$$\frac{\delta}{\omega_o} = \frac{8\Omega^2}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{p(n)}{n^4 \nu_n^o b \tanh \nu_n^o b} + O(\Omega^4). \quad (8)$$

Deze reeks convergeert tamelijk snel, daar n alleen oneven waarden aanneemt en de algemene term is $O(n^{-5})$.

Voor de laagste frequentie is in het bijzonder $\omega_o b = \frac{1}{2}\pi$, zodat

$$\nu_n^o b = \sqrt{n^2 b^2 - \frac{1}{4}\pi^2}.$$

Als hierin de lengte $2b$ van het meer het dubbele is van de breedte $2a = \pi$, zodat $b = \pi$, $\omega_o = \frac{1}{2}$, dan gaat (8) over in:

$$\frac{\delta}{\omega_o} = 0,302 \Omega^2. \quad (9)$$

Het is duidelijk, dat de hyperbolische tangenten snel tot 1 naderen. Dit feit kan worden gebruikt bij de berekening van hogere termen in Ω^2 , als b groot genoeg is. We zullen alleen de eerste-ordebenadering in $\beta = e^{-2\nu_1 b}$ aangeven. Dan is $e^{-2\nu_n b} = O(\beta^3)$ als $n \geq 3$. Daarenboven is:

$$\left. \begin{aligned} \text{ctnh } \nu_1 b - 1 &= \frac{e^{-\nu_1 b}}{\sinh \nu_1 b} = 2\beta + O(\beta^2) \\ 1 - \tanh \nu_1 b &= \frac{e^{-\nu_1 b}}{\cosh \nu_1 b} = 2\beta + O(\beta^2) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Stellen we ¹⁾

$$K_{mn} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} I_{mn} (n\nu_n)^{-1} & \text{als } n \neq 0 \\ 0 & \text{als } n = 0 \end{cases} \quad (11)$$

dan volgt hieruit dat

$$\left. \begin{aligned} K_{m1}^+ &= K_{m1} (1 + 2\beta) + O(\beta^2) \\ K_{m1}^- &= K_{m1} (1 - 2\beta) + O(\beta^2) \\ K_{mn}^{\pm} &= K_{mn} + O(\beta^3) \quad \text{als } n > 1. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

¹⁾ We herinneren er aan, dat we hebben aangenomen, dat $\nu_n \neq 0$ voor alle waarden van n .

Derhalve is:

$$\left. \begin{aligned} [(K^+K^-)^h]_{mn} &= (K^{2h})_{mn} (1 - 2\beta \delta_{n1}) + 2\beta \sum_1^{2h-1} (-1)^{j-1} (K^j)_{m1} (K^{2h-j})_{1n} + O(\beta^2) \\ [(K^+K^-)^h K^+]_{mn} &= (K^{2h+1})_{mn} (1 + 2\beta \delta_{n1}) + 2\beta \sum_1^{2h} (-1)^{j-1} (K^j)_{m1} (K^{2h+1-j})_{1n} + O(\beta^2). \end{aligned} \right\} (13)$$

We zullen deze waarden niet in (2) t/m (5) en de daaruit afgeleide vergelijkingen invullen. We zullen ze slechts gebruiken voor de berekening van de tweede-ordebenadering voor δ als $\omega_o = \pi/2b$ en als b groot is. Ten slotte beschouwen we het hiervoor uitgezonderde geval, waarin één van de ν^n , bijv. ν^o_s , verdwijnt. Dit betekent, dat $\omega_o = s$ (of $-s$) (s oneven) een ontaarde eigenfrequentie is. Het eenvoudigste geval, waarvoor de eerste-ordebenadering reeds lang bekend is (zie LAMB [8], PROUDMAN [13], CORKAN en DOODSON [1]), is de laagste eigenfrequentie van een vierkant meer: $b = \frac{1}{2}\pi$, $\omega_o = 1$.

Voor het geval, dat $\nu^o_s = 0$ kan de afleiding tot en met (6) gehandhaafd worden, maar (7) is alleen juist voor de termen waarvoor $n \neq s$. Voor $n = s$ wordt:

$$\nu_s^2 = s^2 + \Omega^2 - (\omega_o - \delta)^2 = 2\omega_o \delta + \Omega^2 - \delta^2. \quad (14)$$

Hieruit zien we, dat M^1_1 van de orde ν_s^{-2} wordt, d.w.z. van de orde δ^{-1} , en dat $\delta = O(\Omega)$ wordt in plaats van $\delta = O(\Omega^2)$. De term $n = s$ in de eerste som van het rechterlid van (7) wordt:

$$\frac{4}{\pi} \frac{1}{s^{2l+2} \nu_s \tanh \nu_s b} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{s^{2l+2} b} \frac{1 + \frac{2}{3} \omega_o \delta b^2}{2\omega_o \delta + \Omega^2 - \delta^2} (1 + O(\Omega^4)). \quad (15)$$

In eerste benadering hebben we dus wegens (6):

$$\frac{\delta b}{\omega_o} = \frac{\delta b}{s} = \frac{2\Omega^2}{\pi} \frac{2}{\pi b s^5 \delta},$$

of

$$\delta = \frac{2}{\pi s^2 b} + O(\Omega^2). \quad (16)$$

In het bijzondere geval van het vierkante meer ($s = 1$, $b = \frac{1}{2}\pi$) wordt dit:

$$\delta = \frac{4\Omega}{\pi^2} + O(\Omega^2), \quad (17)$$

in overeenstemming met de door LAMB gegeven waarde.

Gebruiken we (15) voor het verkrijgen van een tweede-ordebenadering, dan vinden we met behulp van (6) en (4):

$$\delta = \frac{2\Omega}{\pi b s^2} \left[1 - \frac{\pi \Omega b s}{8} \left(1 + \frac{4}{\pi^2 b^2 s^4} - \frac{16}{3\pi^2 s^2} \right) + \frac{2\Omega s^3}{\pi} \sum_{n \neq s} \frac{p(n)}{n^4 \nu^n \tanh \nu^n b} \right] + O(\Omega^3) \quad (18)$$

In het bijzondere geval van de laagste eigenfrequentie van een vierkant meer wordt dit

$$\delta = \frac{4\Omega}{\pi^2} \left[1 - \frac{\Omega}{4} \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{4}{\pi^2} - \frac{4}{3} \right) + \frac{2\Omega}{\pi} \sum_3^\infty \frac{p(n)}{n^4 \nu^n \tanh \frac{1}{2} \nu^n \pi} \right] + O(\Omega^3), \quad (19)$$

waarin

$$\nu_n^o = \sqrt{n^2 - 1}$$

zodat numeriek:

$$\delta = 0,4053 \Omega (1 - 0,3570 \Omega). \quad (20)$$

We zien dat voor $\Omega = 0,6$ de frequentieverlaging meer dan 20 % wordt overschat als we slechts de eerste benadering beschouwen.

6.0 DE RECHTHOEKIGE BAAI

Met dezelfde veronderstellingen als in 2.0 beschouwen we een rechthoekige baai $0 < x < \pi$, $0 < y < b$, begrensd door ondoordringbare kusten $x = 0$, $0 < y < b$; $y = 0$, $0 < x < \pi$; $x = \pi$, $0 < y < b$ en door een oceaan $y > b$, die oneindig diep wordt verondersteld. Langs de grens $y = b$ mag $\zeta = 0$ worden genomen.

Om de eigentrillingen te vinden, gaan we weer uit van de oplossing (4) van 3.0 voor het oneindig lange kanaal, waaraan we de volgende voorwaarden opleggen:

$$\begin{aligned} v &= 0 \text{ voor } y = 0, 0 < x < \pi \\ \zeta &= 0 \text{ voor } y = b, 0 < x < \pi, \end{aligned}$$

of expliciet:

$$\begin{aligned} \Sigma \sum C_n^\varepsilon (\varepsilon n v_n \cos nx + i\omega \Omega \sin nx) &= \Sigma C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi)} \\ \Sigma \sum C_n^\varepsilon e^{-\varepsilon v_n b} (i\omega n \cos nx + \varepsilon \Omega v_n \sin nx) &= \Sigma \varepsilon C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi) - i\varepsilon \omega b} \end{aligned} \quad (1)$$

We definiëren (zie ook (26) van 4.0):

$$\begin{aligned} b^+ &\stackrel{\text{def}}{=} \Sigma C^\varepsilon \\ b^- &\stackrel{\text{def}}{=} \Sigma \varepsilon C^\varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \gamma(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \cosh \Omega (x - \frac{1}{2}\pi) \\ \sigma(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sinh \Omega (x - \frac{1}{2}\pi) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \Sigma C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi)} \\ \psi(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \Sigma \varepsilon C^\varepsilon e^{\varepsilon \Omega (x - \frac{1}{2}\pi)} \end{aligned} \quad (4)$$

en voor $n > 0$:

$$\begin{aligned} f_n &\stackrel{\text{def}}{=} n v_n \Sigma \varepsilon C_n^\varepsilon \\ g_n &\stackrel{\text{def}}{=} i\omega n \Sigma C_n^\varepsilon e^{-\varepsilon v_n b} \end{aligned} \quad (5)$$

We nemen aan, dat $\cos \omega b \neq 0$ en $n v_n \cosh v_n b \neq 0$ voor alle $n \geq 1$. Bij gegeven b is dit voor vrijwel alle Ω juist en omgekeerd, mits ω een eigenfrequentie is. In dat geval kunnen de C_n^ε uit (5) worden opgelost. We vinden:

$$C_n^\varepsilon = \frac{1}{2i\omega n v_n \cosh v_n b} (v_n g_n + \varepsilon i\omega e^{\varepsilon v_n b} f_n) \quad (6)$$

Tevens is:

$$C^\varepsilon = \frac{1}{2} (b^+ + \varepsilon b^-) \quad (7)$$

en

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \gamma(x) b^+ + \sigma(x) b^- \\ \psi(x) &= \sigma(x) b^+ + \gamma(x) b^- \end{aligned} \quad (8)$$

De uitdrukkingen voor (u, v, ζ) worden:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_1^{\infty} \frac{(n^2 + \Omega^2) \sin nx}{i\omega n v_n \cosh v_n b} [i\omega f_n \sinh v_n (b - y) + v_n g_n \cosh v_n y], \\ v &= \sum_1^{\infty} \frac{1}{i\omega \cosh v_n b} [\cos nx \{ i\omega f_n \cosh v_n (b - y) - v_n g_n \sinh v_n y \} + \\ &\quad + \frac{i\omega \Omega}{n v_n} \sin nx \{ i\omega f_n \sinh v_n (b - y) + v_n g_n \cosh v_n y \}] - \varphi(x) \cos \omega y + i\psi(x) \sin \omega y, \\ \zeta &= \sum_1^{\infty} \frac{1}{i\omega n v_n \cosh v_n b} [i\omega n \cos nx \{ i\omega f_n \sinh v_n (b - y) + v_n g_n \cosh v_n y \} + \\ &\quad + \Omega v_n \sin nx \{ i\omega f_n \cosh v_n (b - y) - v_n g_n \sinh v_n y \}] - \psi(x) \cos \omega y + i\varphi(x) \sin \omega y. \end{aligned} \right\} (9)$$

De voorwaarden (1) worden:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^{\infty} f_n \left(\cos nx + \frac{i\omega \Omega}{n v_n} \tanh v_n b \sin nx \right) + \Omega \sum_1^{\infty} \frac{g_n \sin nx}{n \cosh v_n b} &= \varphi(x) \\ \sum_1^{\infty} g_n \left(\cos nx + \frac{i v_n}{n \omega} \tanh v_n b \sin nx \right) + \sum_1^{\infty} \frac{f_n \sin nx}{n \cosh v_n b} &= \psi_*(x) \end{aligned} \right\} (10)$$

waarin:

$$\psi_*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(x) \cos \omega b - i\varphi(x) \sin \omega b.$$

Voor $\Omega = 0$ is het vraagstuk weer triviaal. Daar de $\cos nx$ voor $n \geq 0$ alle onafhankelijk zijn, verkrijgen we uit (1) met behulp van (5) en (2):

$$\left. \begin{aligned} \sum \varepsilon C^\varepsilon &= \sum \varepsilon C^\varepsilon e^{-i\varepsilon \omega b} = 0 \\ v_n \sum \varepsilon C_n^\varepsilon &= \omega \sum C_n^\varepsilon e^{-\varepsilon v_n b} = 0 \end{aligned} \right\} (11)$$

voor alle waarden van n . Dan is ook:

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega b \sum \varepsilon C^\varepsilon &= 0 \\ \omega \cosh v_n b \sum C_n^\varepsilon &= 0. \end{aligned} \right\} (12)$$

De enige niet-triviale oplossingen (d.w.z. die waarvoor niet alle (u, v, ζ) identiek verdwijnen) worden verkregen uit:

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega b = 0; \quad \omega &= (k + \frac{1}{2}) \pi b^{-1}; \quad C^- = C^+ \text{ (bijv. } = \frac{1}{2}) \\ u = 0; \quad v &= -i \sin \omega y; \quad \zeta = \cos \omega y \end{aligned} \right\} (13)$$

en voor enkele positieve gehele getallen uit:

$$\cosh v_s b = 0; \quad \omega^2 = s^2 + (k + \frac{1}{2})^2 \pi^2 b^{-2}; \quad C^+_{-s} = C^-_s \text{ (bijv. } = \frac{1}{2is})$$

namelijk:

$$\left. \begin{aligned} u &= -is \sin sx \cosh v_s y \\ v &= i v_s \cos sx \sinh v_s y \\ \zeta &= \omega \cos sx \cosh v_s y. \end{aligned} \right\} (14)$$

We kunnen de eerstgenoemde trillingswijze (13) formeel uit de laatstgenoemde afleiden (op een constante factor na) als we s ook de waarde 0 laten aannemen (en dus willekeurige gehele waarden).

Terugkerend tot het algemene geval nemen we de cosinus-coëfficiënten van beide leden van vergelijking (10). We hebben met een gehele $m \geq 0$:

$$(e^{\lambda x - \frac{1}{2}\lambda\pi}, \cos mx) = \frac{2\lambda \{ (-1)^m e^{\frac{1}{2}\lambda\pi} - e^{-\frac{1}{2}\lambda\pi} \}}{\pi (\lambda^2 + m^2)} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_m &\stackrel{\text{def}}{=} (\cosh \Omega (x - \frac{1}{2}\pi), \cos mx) = \begin{cases} 0, & \text{als } m \text{ oneven is} \\ \frac{4\Omega \sinh \frac{1}{2}\pi\Omega}{\pi (\Omega^2 + m^2)}, & \text{als } m \text{ even is} \end{cases} \\ \sigma_m &\stackrel{\text{def}}{=} (\sinh \Omega (x - \frac{1}{2}\pi), \cos mx) = \begin{cases} 0, & \text{als } m \text{ even is} \\ -\frac{4\Omega \cosh \frac{1}{2}\pi\Omega}{\pi (\Omega^2 + m^2)}, & \text{als } m \text{ oneven is} \end{cases} \end{aligned} \right\} (16)$$

zodat

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + m^2} \gamma_0 \quad (m \text{ even}) \\ \sigma_m &= \frac{\Omega^2 + 1}{\Omega^2 + m^2} \sigma_1 \quad (m \text{ oneven}) \end{aligned}$$

en, wegens (8):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m &\stackrel{\text{def}}{=} \gamma_m b^+ + \sigma_m b^- \\ \psi_m &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma_m b^+ + \gamma_m b^- \end{aligned} \right\} (17)$$

Daarenboven, als we voor $m \geq 0, n > 0$ definiëren

$$\left. \begin{aligned} K_{mn}^- &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{mn} \frac{\tanh v_n b}{n v_n} \\ H_{mn} &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{mn} \frac{v_n}{n} \tanh v_n b \\ N_{mn} &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{mn} \frac{1}{n \cosh v_n b} \end{aligned} \right\} (18)$$

vinden we voor $m \geq 0$:

$$\left. \begin{aligned} f_m + i\omega\Omega \sum_1^\infty K_{mn}^- f_n + \Omega \sum_1^\infty N_{mn} g_n &= \varphi_m \\ g_m + \frac{i\Omega}{\omega} \sum_1^\infty H_{mn} g_n + \Omega \sum_1^\infty N_{mn} f_n &= \psi_{*m}, \end{aligned} \right\} (19)$$

waarbij we gesteld hebben

$$f_0 \stackrel{\text{def}}{=} (1, f) = 0, \quad g_0 \stackrel{\text{def}}{=} (1, g) = 0. \quad (20)$$

De definities (18) breiden we uit tot $n = 0$ door de eis te stellen dat $\Gamma_{mn}/n = -\Gamma_{nm}/m$ en $\Gamma_{mn} = 0$ als $m = N(v)$, ook voor $n = 0$ geldig blijven, d.w.z.:

$$\left. \begin{aligned} K_{m0}^- &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{4p(m)}{m^2} \frac{\tanh \kappa b}{\kappa} \\ H_{m0} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{4p(m)}{m^2} \kappa \tanh \kappa b \\ N_{m0} &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{4p(m)}{m^2} \frac{1}{\cosh \kappa b}, \end{aligned} \right\} (18a)$$

met $v_0 = \kappa$.

De $(m, 0)$ -componenten van K^- , H , N blijven dan eindig voor alle $m \geq 0$ en verdwijnen voor $m = 0$. Het symbool \sum_1^∞ in (19) kan dan wegens (20) vervangen worden door Σ_* en (19) kan in operatorvorm als volgt worden geschreven:

$$\left. \begin{aligned} f + i\omega\Omega K^- f + \Omega N g &= \varphi \\ g + \frac{i\Omega}{\omega} H g + \Omega N f &= \psi_* \end{aligned} \right\} (21)$$

Het voornaamste verschil met het geval van een meer is het volgende. Zoals we in 4.0 hebben gezien, heeft K^- een eindige norm en hetzelfde geldt voor N omdat de kwadraten van de coëfficiënten van Γ_{mn} in deze matrices convergeren, maar dit geldt niet voor H omdat $\sum |v_n n^{-1} \tanh v_n b|^2 = \infty$. Desondanks is H begrensd, d.w.z. als $\psi \in L^2$ dan is $H\psi \in L^2$ en $\|H\psi\| / \|\psi\|$ is begrensd. Inderdaad is:

$$\|H\psi\|^2 = \Sigma_* |n^{-1} v_n \psi_n \tanh v_n b|^2 \leq (1 + |\kappa|^2) C^2 \|\psi\|^2,$$

waarin C een bovengrens is voor alle $|\tanh v_n b|$. Deze grens bestaat omdat we verondersteld hebben dat $\cosh v_n b \neq 0$ voor alle waarden van n , zodat indien $C' = \max |\tanh v_n b|$ over alle $n^2 \leq \Omega^2 - \omega^2$, $C = \max(1, C')$ aan de gestelde voorwaarden voldoet. Hieruit volgt dat voor voldoende kleine waarden van Ω/ω , (bijv. $|\Omega/\omega| \leq C(1 + |\kappa|^2)^{\frac{1}{2}}$), de operator

$$Q^+ \stackrel{\text{def}}{=} \left(I + \frac{i\Omega}{\omega} H \right)^{-1} \quad (22)$$

bestaat en dat

$$Q^+ = \sum_0^\infty \left(-\frac{i\Omega}{\omega} \right)^n H^n. \quad (23)$$

De voorwaarde voor het bestaan van de inversen van operatoren van de gedaante $I + \gamma H$ zijn in enkele belangwekkende rapporten onderzocht door LAUWERIER [9], [11] en VELTKAMP [17], die verschillende methoden toepasten. Voor het bijzondere geval, dat $H = \Gamma$ verkreeg LAUWERIER expliciete oplossingen, waartoe hij het algemene geval, waarin $H_{mn} = \Gamma_{mn} + O(n^{-2})$, terugbracht.

Stellen we

$$h \stackrel{\text{def}}{=} g + \frac{i\Omega}{\omega} H g, \quad (24)$$

dan hebben we wegens (22) dat

$$g = Q^+ h. \quad (25)$$

Met behulp van de afkorting

$$\left. \begin{aligned} Q^- &\stackrel{\text{def}}{=} (I + i\omega\Omega K^-)^{-1} \\ &= \sum_0^\infty (-i\omega\Omega)^n (K^-)^n \end{aligned} \right\} (26)$$

geeft (20)

$$\left. \begin{aligned} h + \Omega N f &= \psi_* \\ f &= Q^- (\varphi - \Omega N Q^+ h), \end{aligned} \right\} (27)$$

waaruit:

$$\left. \begin{aligned} (I - \Omega^2 Q^- N Q^+ N) f &= \chi^+ \stackrel{\text{def}}{=} Q^- (\varphi - \Omega N Q^+ \psi_*) \\ (I - \Omega^2 N Q^- N Q^+) h &= \psi_* - \Omega N Q^- \varphi \end{aligned} \right\} (28)$$

Met behulp van de operator

$$\left. \begin{aligned} S^+ &\stackrel{\text{def}}{=} (I - \Omega^2 Q^- N Q^+ N)^{-1} \\ &= \sum_0^\infty \Omega^{2n} (Q^- N Q^+ N)^n \end{aligned} \right\} (29)$$

verkrijgen we uit (28), (27), (26):

$$\left. \begin{aligned} f &= S^+ \chi^+ \\ g &= Q^+ (\psi_* - \Omega N Q^- \varphi). \end{aligned} \right\} (30)$$

We hebben eveneens

$$g = S^- \chi^-, \quad (31)$$

waarin

$$S^- \stackrel{\text{def}}{=} Q^+ (I - \Omega^2 N Q^- N Q^+)^{-1} (Q^+)^{-1} = (I - \Omega^2 Q^+ N Q^- N)^{-1} \quad (32)$$

en

$$\chi^- \stackrel{\text{def}}{=} Q^+ (\psi_* - \Omega N Q^- \varphi). \quad (33)$$

Tussen S^- en S^+ bestaan de identiteiten:

$$\left. \begin{aligned} S^\mp &= I - \Omega^2 Q^\pm N S^\pm Q^\mp N \\ S^\mp Q^\pm N &= Q^\pm N S^\pm. \end{aligned} \right\} (34)$$

We merken op, dat de imaginaire eenheid i niet meer expliciet voorkomt, hoewel dit impliciet wel het geval is, in het bijzonder via $i\omega\Omega K^-$ in Q^- en via $i\Omega\omega^{-1}H$ in Q^+ , dus ook in S^\pm .

Uit de voorwaarden (21) volgen twee homogene lineaire vergelijkingen voor de twee Kelvin-coëfficiënten C^ε , of ook voor de b^ε . De eigenfrequentievoorwaarde komt overeen met het verdwijnen van de determinant van deze vergelijkingen. Als we de coëfficiënt van b^ε in f , g resp. met f^ε , g^ε aangeven, vinden we met behulp van (8), (10), (28) uit (30) en (31):

$$\left. \begin{aligned} f^+ &= S^+ Q^- [(I + i\Omega \sin \omega b N Q^+) \gamma - \Omega \cos \omega b N Q^+ \sigma] \\ f^- &= S^+ Q^- [(I + i\Omega \sin \omega b N Q^+) \sigma - \Omega \cos \omega b N Q^+ \gamma] \end{aligned} \right\} (35)$$

$$\left. \begin{aligned} g^+ &= S^- Q^+ [\cos \omega b \sigma - (i \sin \omega b I + \Omega N Q^-) \gamma] \\ g^- &= S^- Q^+ [\cos \omega b \gamma - (i \sin \omega b I + \Omega N Q^-) \sigma]. \end{aligned} \right\} (36)$$

De nul-componenten van deze stelsels moeten voldoen aan de *eigenfrequentievoorwaarde*

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} f_o^+ & g_o^+ \\ f_o^- & g_o^- \end{vmatrix} = 0 \quad (37)$$

of, uitgeschreven:

$$\begin{vmatrix} (S^+ Q^- \gamma)_0 - \Omega (S^+ Q^- N Q^+ \{\sigma \cos \omega b - i\gamma \sin \omega b\})_0 & (S^- Q^+ \{\sigma \cos \omega b - i\gamma \sin \omega b\})_0 + \Omega (S^- Q^+ N Q^- \gamma)_0 \\ (S^+ Q^- \sigma)_0 - \Omega (S^+ Q^- N Q^+ \{\gamma \cos \omega b - i\sigma \sin \omega b\})_0 & (S^- Q^+ \{\gamma \cos \omega b - i\sigma \sin \omega b\})_0 + \Omega (S^- Q^+ N Q^- \sigma)_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (38)$$

Dit is de gezochte vergelijking voor de eigenfrequenties ω . Is hieraan voldaan, dan bestaan $b^\varepsilon \neq 0$ zodat f en g , gedefinieerd door (35) en (36), voldoen aan (20). De (u, v, ζ) gedefinieerd door (7) zijn de overeenkomstige trillingswijzen.

Hoewel de vergelijking (38) nog steeds zowel impliciet als expliciet imaginaire grootheden bevat, is zij in werkelijkheid reëel, zoals op de volgende wijze kan worden ingezien. In de eerste plaats verdwijnen γ_m en σ_m tenzij m even, resp. oneven is. Dan zal de operator I , en dus ook K^- , N , H en producten van oneven orde van deze grootheden, de pariteit van de index veranderen, terwijl producten van even orde de pariteit onveranderd laten. Ten slotte betekent de vorming van een inwendig product met de constante 1, dat we de component met index 0 nemen. Uiteindelijk gaan de γ en σ dan vergezeld van producten van respectievelijk even en oneven orde. Nu treden K^- en H steeds met een factor i in R^- , L en S op. Aangezien het linkerlid van (20) als een reële functie van Q^ε , S^ε , γ , $i\sigma$, iN kan worden geschreven, blijkt, dat alle imaginaire grootheden wegvallen.

7.0 DE LAGE FREQUENTIES VAN EEN LANGE BAAI

Wegens de ingewikkelde aard van vergelijking (38) van 6.0 zullen we alleen benaderde oplossingen in wat meer bijzonderheden bespreken, waarbij we de volgende veronderstellingen maken:

1. de lengte b van de baai is groot;
2. Ω is in voldoende mate klein.

Nauwkeuriger gezegd: we zullen de nulde- en eerste-ordebenadering bespreken met betrekking tot

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\nu_1 b}, \quad (1)$$

waarbij aangenomen wordt, dat ν_1 reëel is, d.w.z. $\omega^2 < 1 + \Omega^2$. Dan zijn alle $e^{-\nu_n b}$ ($n > 1$) van de orde $O(\beta^2)$. In het geval van de Noordzee hebben we ongeveer $b = 2a = 2\pi$, $\Omega = 0,6$. De laagste eigenfrequenties naderen voor $\Omega \rightarrow 0$ tot de wortels van $\cos \omega_0 b = 0$, d.w.z. $\omega_0 = (k + \frac{1}{2}) \pi/b$. Voor $k = 0$ en $k = 1$ wordt dit dus $\omega_0 = \frac{1}{4}$ resp. $\omega_0 = \frac{3}{4}$. Dus is β van de orde van grootte van (ongeveer) $e^{-2\pi} = 0,002$, resp. $e^{-\pi} = 0,043$. We mogen dus verwachten, dat voor $\omega_0 = \frac{1}{4}$ de nulde-ordebenadering en voor $\omega_0 = \frac{3}{4}$ de eerste-ordebenadering redelijk goed zijn. Voor de frequenties, die voor $\Omega \rightarrow 0$ tot de wortels van $\cosh \nu_s b = 0$ naderen, is de benadering niet langer geldig.

Nu is wegens (18) van 6.0 (zie ook (12) van 5.0):

$$\left. \begin{aligned} K_{mn} &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{mn} \frac{1}{n\nu_n} = K^{-mn} + O(\beta^2) \\ H^0_{mn} &\stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{mn} \frac{\nu_n}{n} = H_{mn} + O(\beta^2) \\ N_{mn} &= \begin{cases} 2\beta\Gamma_{m1} + O(\beta^3) & \text{als } n = 1 \\ O(\beta^2) & \text{als } n < 1. \end{cases} \end{aligned} \right\} (2)$$

In het bijzonder kunnen alle termen, die twee factoren N bevatten, worden verwaarloosd, speciaal de tweede term tussen haakjes in (32) van 6.0.

Voeren we daarenboven de reële delen R^\pm van Q^\pm in volgens

$$\left. \begin{aligned} R^+ &\stackrel{\text{def}}{=} \left(I - \frac{\Omega^2}{\omega^2} H^2 \right)^{-1} = \sum_0^\infty \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} \right)^n H^{2n} \\ R^- &\stackrel{\text{def}}{=} \left(I - \omega^2 \Omega^2 (K^-)^2 \right)^{-1} = \sum_0^\infty (\omega^2 \Omega^2)^n (K^-)^{2n}, \end{aligned} \right\} (3)$$

dan is:

$$\left. \begin{aligned} Q^+ &= R^+ - i \frac{\Omega}{\omega} R^+ H = R^+ - i \frac{\Omega}{\omega} H R^+ \\ Q^- &= R^- - i\omega\Omega R^- K^- = R^- - i\omega\Omega K^- R^-. \end{aligned} \right\} (4)$$

Wegens de reeds genoemde pariteitsbetrekkingen wordt dan:

$$\left. \begin{aligned} (Q^\pm \gamma)_0 &= (R^\pm \gamma)_0 \\ (Q^+ \sigma)_0 &= -i\Omega\omega^{-1} (R^+ H \sigma)_0 \\ (Q^- \sigma)_0 &= -i\Omega\omega (R^- K^- \sigma)_0 \end{aligned} \right\} (5)$$

en

$$\left. \begin{aligned} (Q^+ N Q^- \gamma)_0 &= i\omega\Omega (R^+ N K^- R^- \gamma)_0 - i\Omega\omega^{-1} (R^+ H N R^- \gamma)_0 \\ (Q^- N Q^+ \gamma)_0 &= -i\omega\Omega (R^- K^- N R^+ \gamma)_0 - i\Omega\omega^{-1} (R^- N H R^+ \gamma)_0 \\ (Q^+ N Q^- \sigma)_0 &= (R^+ N R^- \sigma)_0 - \Omega^2 (R^+ H N K^- R^- \sigma)_0 \\ (Q^- N Q^+ \sigma)_0 &= (R^- N R^+ \sigma)_0 - \Omega^2 (R^- K^- N H R^+ \sigma)_0. \end{aligned} \right\} (6)$$

We merken op, dat voor willekeurige operatoren

$$(UNV)_{mn} = 2\beta (U\Gamma)_{m1} V_{1n}(1 + O(\beta))$$

en dat

$$(R^\pm HN)_{01} = (R^\pm K^-N)_{01} = 0.$$

Laten we in het vervolg de $O(\beta^2)$ -correctie weg, dan wordt (6):

$$\left. \begin{aligned} (Q^+NQ^- \gamma)_0 &= -2i\Omega\omega\beta (R^+\Gamma)_{01} (K^-R^- \gamma)_1 \\ (Q^-NQ^+ \gamma)_0 &= -2i\Omega\omega^{-1}\beta (R^-\Gamma)_{01} (HR^+ \gamma)_1 \\ (Q^+NQ^- \sigma)_0 &= 2\beta (R^+\Gamma)_0 (R^- \sigma)_1 \\ (Q^-NQ^+ \sigma)_0 &= 2\beta (R^-\Gamma)_0 (R^+ \sigma)_1. \end{aligned} \right\} (7)$$

De nulde-ordebenadering van (38) van 6.0 wordt derhalve

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \begin{vmatrix} (Q^- \gamma)_0 & (Q^+ \sigma)_0 \cos \omega b - i(Q^+ \gamma)_0 \sin \omega b \\ (Q^- \sigma)_0 & (Q^+ \gamma)_0 \cos \omega b - i(Q^+ \sigma)_0 \sin \omega b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (R^- \gamma)_0 & -i\Omega\omega^{-1} (R^+ H\sigma)_0 \cos \omega b - i(R^+ \gamma)_0 \sin \omega b \\ -i\omega\Omega (R^- K^- \sigma)_0 & (R^+ \gamma)_0 \cos \omega b - \Omega\omega^{-1} (R^+ H\sigma)_0 \sin \omega b \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

of:

$$\Delta_0 = \Delta_{0c} \cos \omega b - \Delta_{0s} \sin \omega b, \quad (9)$$

waarin

$$\begin{aligned} \Delta_{0c} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} (R^- \gamma)_0 & \Omega (R^+ H\sigma)_0 \\ -\Omega (R^- K^- \sigma)_0 & (R^+ \gamma)_0 \end{vmatrix} \\ \Delta_{0s} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} (R^- \gamma)_0 & \omega (R^+ \gamma)_0 \\ \Omega (R^- K^- \sigma)_0 & \Omega\omega^{-1} (R^+ H\sigma)_0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

De eerste-ordecorrectie is:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\Omega \begin{vmatrix} (Q^-NQ^+ \sigma)_0 \cos \omega b - i(Q^-NQ^+ \gamma)_0 \sin \omega b & (Q^+ \sigma)_0 \cos \omega b - i(Q^+ \gamma)_0 \sin \omega b \\ (Q^-NQ^+ \gamma)_0 \cos \omega b - i(Q^-NQ^+ \sigma)_0 \sin \omega b & (Q^+ \gamma)_0 \cos \omega b - i(Q^+ \sigma)_0 \sin \omega b \end{vmatrix} + \\ &+ \Omega \begin{vmatrix} (Q^- \gamma)_0 & (Q^+NQ^- \gamma)_0 \\ (Q^- \sigma)_0 & (Q^+NQ^- \sigma)_0 \end{vmatrix} \\ &= -2\Omega\beta (R^-\Gamma)_{01} \begin{vmatrix} (R^+ \sigma)_1 \cos \omega b - \Omega\omega^{-1} (R^+ H\gamma)_1 \sin \omega b & -i\Omega\omega^{-1} (R^+ H\sigma)_0 \cos \omega b - i(R^+ \gamma)_0 \sin \omega b \\ -i\Omega\omega^{-1} (R^+ H\gamma)_1 \cos \omega b - i(R^+ \sigma)_1 \sin \omega b & (R^+ \gamma)_0 \cos \omega b - \Omega\omega^{-1} (R^+ H\sigma)_0 \sin \omega b \end{vmatrix} + \\ &+ 2\Omega\beta (R^+\Gamma)_{01} \begin{vmatrix} (R^- \gamma)_0 & -i\Omega\omega (R^- K^- \gamma)_1 \\ -i\Omega\omega (R^- K^- \sigma)_0 & (R^- \sigma)_1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

d.w.z.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2\Omega\beta (R^+\Gamma)_{01} \begin{vmatrix} (R^- \gamma)_0 & \Omega\omega (R^- K^- \gamma)_1 \\ -\Omega\omega (R^- K^- \sigma)_0 & (R^- \sigma)_1 \end{vmatrix} + \\ &- 2\Omega\beta (R^-\Gamma)_{01} \begin{vmatrix} (R^+ \sigma)_1 & \Omega\omega^{-1} (R^+ H\sigma)_0 \\ -\Omega\omega^{-1} (R^+ H\gamma)_1 & (R^+ \gamma)_0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Onze benaderde vergelijking heeft de gedaante

$$\Delta_{0c} \cos \omega b - \Delta_{0s} \sin \omega b + \Delta_1 = 0, \quad (12)$$

waarin $\Delta_1 = O(\beta)$. De benaderde oplossing van de nulde orde is

$$\omega = \frac{1}{b} \operatorname{arc\,ctn} \frac{\Delta_{0s}}{\Delta_{0c}} + O(\beta) \quad (13)$$

en de eerste-ordebenadering is

$$\omega = \frac{1}{b} \left[\operatorname{arc\,ctn} \frac{\Delta_{0s}}{\Delta_{0c}} + \Delta_1 (\Delta_{0c}^2 + \Delta_{0s}^2)^{-\frac{1}{2}} \right] + O(\beta^2). \quad (14)$$

Om meer uitgewerkte resultaten te krijgen, zullen we ons beperken tot het geval, waarin Ω klein is en waarbij de trilling voor $\Omega \rightarrow 0$ overgaat in één van de enkelvoudige ééndimensionale trillingen (13) van 6.0, waarvan de frequentie $\omega_0 = (k + \frac{1}{2}) \pi/b$ bedraagt, hetgeen een oplossing is van $\cos \omega_0 b = 0$. We nemen aan, dat er geen ontaarding optreedt, d.w.z. dat voor deze waarde ω_0 van ω en $\Omega = 0$ alle $\nu_n = \nu_n^\circ$ ongelijk nul zijn. We zullen de benadering tot en met de orde $O(\Omega^4)$ geven, waarbij β en Ω^2 als van gelijke orde zullen worden beschouwd. Later zullen we de eerste-ordebenadering nader uitwerken, die van de orde $O(\Omega^2)$ is. We merken op, dat $\gamma_0 = 4 \sinh \frac{1}{2} \pi \Omega / \pi \Omega$ van de orde $O(1)$ in Ω is (nauwkeuriger: $2 + O(\Omega^2)$), dat alle γ_m voor $m > 1$ van de orde $O(\Omega^2)$ zijn en dat alle σ_n van de orde $O(\Omega)$ zijn. Derhalve is voor $n \geq 1$

$$(H^{2n}\gamma)_0 = \Sigma_* (H^{2n})_{0m} \gamma_m = O(\Omega^2),$$

aangezien $(H^{2n})_{00} = \Sigma_* (H^{2n-1})_{0k} H_{k0} = 0$ omdat $H_{k0} = 0$ voor alle waarden van k . Op overeenkomstige wijze blijkt dat

$$((K^-)^{2n}\gamma)_0 = O(\Omega^2) \text{ voor } n \geq 1,$$

en dat

$$(H^{2n+1}\sigma)_0 = O(\Omega),$$

en

$$((K^-)^{2n+1}\sigma)_0 = O(\Omega).$$

Dan is:

$$(R^+\gamma)_0 = \sum_0^\infty \left(-\frac{\Omega^2}{\omega^2} \right)^n (H^{2n}\gamma)_0 = \gamma_0 + O(\Omega^4)$$

(en niet slechts $O(\Omega^2)$) en

$$(R^+\gamma)_0 = \gamma_0 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} (H^2\gamma)_0 + O(\Omega^6).$$

Op overeenkomstige wijze blijkt

$$(R^-\gamma)_0 = \gamma_0 - \Omega^2 \omega^2 ((K^-)^2\gamma)_0 + O(\Omega^6).$$

Verder is

$$\begin{aligned} (R^+H\sigma)_0 &= (H\sigma)_0 + O(\Omega) \\ (R^-K^-\sigma)_0 &= (K^-\sigma)_0 + O(\Omega^3) \end{aligned}$$

en dus wegens (10):

$$\begin{aligned} \Delta_{0c} &= \left| \begin{array}{cc} \gamma_0 - \omega^2 \Omega^2 ((K^-)^2\gamma)_0 & \Omega (H\sigma)_0 \\ -\Omega (K^-\sigma)_0 & \gamma_0 + \Omega^2 \omega^{-2} (H^2\gamma)_0 \end{array} \right| + O(\Omega^6) \\ &= \gamma_0^2 + O(\Omega^4) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{0s} &= \left| \begin{array}{cc} \gamma_0 & \omega \gamma_0 \\ (K^-\sigma)_0 - \omega^2 \Omega^2 ((K^-)^3\sigma)_0 & \omega^{-1} (H\sigma)_0 - \omega^{-3} \Omega^2 (H^3\sigma)_0 \end{array} \right| + O(\Omega^6) \\ &= \Omega \gamma_0 [\omega^{-1} (H\sigma)_0 - \omega (K^-\sigma)_0] - \Omega^3 \gamma_0 [\omega^{-3} (H^3\sigma)_0 - \omega^3 ((K^-)^3\sigma)_0] + O(\Omega^6) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Delta_1 = O(\Omega^4, \beta^2). \quad (17)$$

Stellen we nu nog

$$\omega = \omega_0 - \delta, \quad (18)$$

waaruit volgt:

$$\operatorname{ctn} \omega b + \tan \delta b = \delta b + O(\delta^3),$$

dan wordt de eerste-ordebenadering volgens (13):

$$\delta = \delta_1 + O(\Omega^4, \beta),$$

waarin

$$\delta_1 = b^{-1} \Delta_{0s}/\Delta_{0c} + O(\beta) = \frac{1}{2}\Omega^2 b^{-1} [(\omega\Omega)^{-1} (H\sigma)_0 - \omega\Omega^{-1} (K^{-}\sigma)_0]. \quad (19)$$

De tweede-ordebenadering wordt:

$$\delta = \delta_2 + O(\Omega^6, \beta^2),$$

waarin

$$\begin{aligned} \delta_2 &= b^{-1} [\Delta_{0s}/\Delta_{0c} - \frac{1}{2}\Delta_1 (\Delta_{0s}^2 + \Delta_{0c}^2)^{-\frac{1}{2}}] + O(\beta^2) \\ &= \delta_1 \left[1 - \frac{\pi^2 \Omega^2}{12} \right] - \frac{1}{2}\Omega^3 b^{-1} [\omega^{-3} (H^3\sigma)_0 - \omega^3 (K^{-})^3 \sigma_0]. \end{aligned} \quad (20)$$

Schrijven we weer ν_n voor $\sqrt{n^2 - \omega_0^2}$ dan vinden we

$$\begin{aligned} (H\sigma)_0 &= \sum_1^{\infty} \Gamma_{0n} \frac{\nu_n \tanh \nu_n b}{n} \sigma_n = \\ &= \frac{16}{\pi^2} \Omega \cosh \frac{1}{2}\pi\Omega \sum_1^{\infty} \frac{p(n) \nu_n \tanh \nu_n b}{n^2 (n^2 + \Omega^2)} \\ &= -\frac{16\Omega}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{p(n) \nu_n^0}{n^4} + O(\Omega^2, \beta^2) \\ (K\sigma)_0 &= \sum_1^{\infty} \Gamma_{0n} \frac{\tanh \nu_n b}{n\nu_n} \sigma_n = \\ &= -\frac{16\Omega}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{p(n)}{n^4 \nu_n^0} + O(\Omega^2, \beta^2) \end{aligned} \quad (21)$$

zodat (19) overgaat in:

$$\frac{\delta_1}{\omega_0} = -\frac{8\Omega^2}{\pi^2 b \omega_0^2} \sum_1^{\infty} \frac{(n^2 - 2\omega_0^2) p_n}{n^4 \nu_n^0}. \quad (22)$$

We zullen (20) niet nader uitwerken, waarin bijvoorbeeld het verschil tussen ω^2 en ω_0^2 , dat impliciet in de ν_n voorkomt, in rekening moet worden gebracht.

In het bijzondere geval dat $b = 2\pi$, $\omega_0 = \frac{1}{4}$ (d.w.z. de laagste eigentrilling van een op de Noordzee gelijkende baai) wordt (22):

$$\frac{\delta_1}{\omega_0} = -2,01 \Omega^2 \quad (23)$$

Voor de Noordzee is evenwel Ω veel groter dan ω_0 , zodat in verband met de divergentie van ontwikkelingen als die van R^+ volgens (3), de toepassing van (23) eigenlijk niet gerechtvaardigd is. De eerste-ordecorrectie bedraagt 72 % voor $\Omega = 0,6$. We hebben reden om aan te nemen, dat de exacte waarde van ω groter dan die van Ω is. De bijdragen van de volgende termen van de ontwikkeling van ω in opklimmende machten van Ω zullen dus aanzienlijk zijn.