Integratietheorie van Hamilton-Jacobi.

De vergelijking van Lagrange.

Beschouw een stelsel met n graden van vrijheid en de noodzakelijke coördinaten q^1, q^2, $\cdots$, q^n, algemeen q^k, ($k, \lambda, \mu, \rho, \sigma, \tau = 1, \cdots n$). De kinetische energie zij aangeduid door T (in afwijking van de L van het algemeene college). De vergelijkingen van Lagrange luiden:

$$1.1 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial T}{\partial q^\lambda} = \alpha_\lambda \quad ; \quad T = T(q^k, \dot{q}^k, t).$$

In het bijzonder geval, dat de arbeidscoëfficiënten zich laten afleiden uit een functie P van q^k, $\dot{q}^k$ en t, en wel op de volgende wijze

$$1.2 \qquad \alpha_\lambda = \frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial P}{\partial q^\lambda},$$

gaat de vergelijking (1.1) over in

$$1.3 \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\lambda} = 0} \qquad \text{(vergelijking van Lagrange)}$$

waarin

$$1.4 \qquad \mathcal{L} = T - P$$

de functie van Lagrange is; ook wel genoemd de kinetische potentiaal. We onderstellen in het volgende altijd dat er een kinetische potentiaal bestaat, die niet identisch, dat is voor alle waarden van q^k, $\dot{q}^k$ en t, nul is. In het geval dat P niet afhangt van $\dot{q}^k$ en niet expliciet afhankelijk is van t, is P het gewone arbeidsvermogen van plaats.

In het algemeen is $\mathcal{L}$ een functie van q^k, $\dot{q}^k$ en t, dus

$$1.5 \qquad \begin{aligned} d\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} d\dot{q}^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\right) dq^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} d\dot{q}^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= d\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt, \end{aligned}$$ [1]

[1] Einsteinsche conventie. Bij sommatie over twee indices, waarvan er één onder en boven staat, wordt het teken $\sum$ weggelaten.

of

2.1 $$d\left(p_k \dot{q}^k - \mathcal{L}\right) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\, dt,$$

waar

2.2 $$\boxed{p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}}$$

(partieele afleiding beteekent hier, dat q_λ en t constant gehouden worden)

(p_k heet de bij q^k behoorende impuls). Schrijven we nu

2.3 $$\boxed{H = p_k \dot{q}^k - \mathcal{L}}\,; \qquad H = \text{(Functie van Hamilton)},$$

dan is dus

2.4 $$dH = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\, dt.$$

Is derhalve $\mathcal{L}$ als een functie van q^k en $\dot{q}^k$ te schrijven waarin t niet expliciet optreedt, dan bestaat er een eerste integraal: H = constant.

Indien T een homogene quadratische dunctie der $\dot{q}^k$ is (zooals b.v. in bewegingsvraagstukken zonder bewegenden dwang) met coofficienten die van de q^k, doch niet nog extra van t afhangen, dan is

2.5 $$T = \frac{1}{2} T_{k\lambda}(q) \dot{q}^k \dot{q}^\lambda$$

en is P alleen afhankelijk van de q^k en niet van t en $\dot{q}^k$, dan volgt voor p_k (2.2)

2.6 $$p_k = T_{k\lambda} \dot{q}^\lambda,$$

zoodat

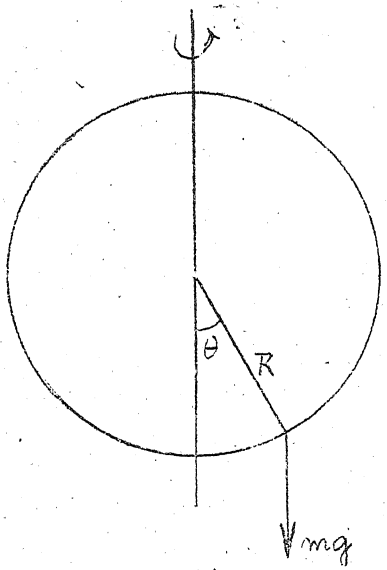
2.7 $$H = 2T - \mathcal{L} = 2T - T + P = T + P.$$

In dat geval stelt dus de Hamiltonsche functie H de totale energie voor en wij schrijven

2.8 $$H = \mathcal{E}.$$

Er bestaat dus een energieintegraal $H = \mathcal{E}$, wanneer T een homogene quadratische functie der $\dot{q}^k$ is met coefficienten die eventueel wel van de q^k, maar niet expliciet van t afhangen en bovendien P een functie is, die alleen van q^k, maar niet van t en van de $\dot{q}^k$ afhankelijk is.

Voorbeeld:



Ring met constante hoeksnelheid draaiende om verticale middellijn met massapunt zonder wrijving

1e methode. Niet stilzetten.

$$T = \tfrac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} \omega^2 R^2 \sin^2\theta$$

$$P = -mgR\cos\theta$$

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin^2\theta + mgh\cos\theta$$

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \dot{\theta} \quad ; \quad q' = \theta$$

$$H = \tfrac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - \tfrac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin^2\theta - mgR\cos\theta$$

H = constant is een eerste integraal, de mechanische beteekenis hiervan is niet gemakkelijk in te zien. Zeker is H niet de totale energie $T-P$, want deze is veranderlijk omdat het mechanisme, dat ω constant houdt, energie toevoert en afvoert.

2e methode. Stilzetten.

3.1 $$T = \tfrac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

Kracht: Horizontaal $m\omega^2 R\sin\theta = m\omega^2 x$

Verticaal $-mg$

Dus:

$$P = -\tfrac{1}{2} m\omega^2 x^2 + mgy = -\tfrac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin^2\theta - mgR\cos\theta$$

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin^2\theta + mgR\cos\theta$$

$$H = \tfrac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - \tfrac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin^2\theta - mgR\cos\theta = T + P = \mathcal{E}.$$

Er blijkt dus dat de constante die bij de eerste oplossingsmethode gevonden werd, de beteekenis heeft van de totale energie beoordeelt van het standpunt van den waarnemer, die met den ring meebeweegt.

Opmerking: De constante in $H = c$ laat zich niet altijd door omzetten van het probleem op zulk een eenvoudige wijze als totale energie duiden.

De kanonische vergelijkingen van Hamilton.

Keeren we nu terug tot het geval, dat alleen gegeven is dat de kinetische potentiaal $\mathcal{L}$ bestaat. Uit

4.1 $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = 0$$

en

4.2 $$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}$$

volgt

4.3 $$\dot{p}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} .$$

De onbekende van het probleem zijn q^k en $\dot{q}^k$; gevraagd is, deze als functie van den tijd te bepalen door integratie van (4.1) bij gegeven biginvoorwaarden:

4.4 $$\left.\begin{aligned} q^k &= q_o^k \\ \dot{q}^k &= v_o^k \end{aligned}\right\} \quad \text{voor } t = t_o .$$

Nu zijn echter volgens (4.2) de p_λ functies van q^k , $\dot{q}^k$ en t , men kan dus de $\dot{q}^k$ (zonder integratie, eenvoudig door oplossing der vergelijkingen (4.2) naar de $\dot{q}^k$) in q^k , p_λ en t uitdrukken. M.a.w., als onbekenden van het probleem mogen we ook beschouwen q^k en p_λ, en gevraagd is dan, deze als functies van den tijd te bepalen bij gegeven biginvoorwaarden:

4.5 $$\left.\begin{aligned} q^k &= q_o^k \\ p_\lambda &= p_\lambda^o \end{aligned}\right\} \quad \text{voor } t = t_o .$$

De n vergelijkingen (4.1), van de tweede orde in q^k laten zich nu dienovereenkomstig overvoeren in $2n$ vergelijkingen in q^k en p_λ van de eerste orde:

Algemeen is, wanneer t constant gehouden wordt en q^k en p_λ met δq^k en δp_λ toenemen, de toename van $\mathcal{L}$

5.1 $$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k}\delta q^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k}\delta \dot{q}^k$$

(we gebruiken δ inplaats van d om aan te geven dat t constant gehouden wordt) dus, op grond van (4.1) en (4.2)

5.2 $$\begin{aligned}\delta \mathcal{L} &= \dot{p}_k \delta q^k + p_k \delta \dot{q}^k \\ &= \delta\left(p_k \dot{q}^k\right) + \left(\dot{p}_k \delta q^k - \dot{q}^k \delta p_k\right)\end{aligned}$$

of

5.3 $$\delta H = \dot{q}^k \delta p_k - \dot{p}_k \delta q^k .$$

Daar echter steeds H , als functie van q^k , p_λ en t opgevat, bij differentiatie oplevert

5.4 $$\begin{aligned}dH &= \frac{\partial H}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} dp_\lambda + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ \delta H &= \frac{\partial H}{\partial q^k}\delta q^k + \frac{\partial H}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda ,\end{aligned}$$

volgt

5.5 $$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q^\lambda} &= -\dot{p}_\lambda \\ \frac{\partial H}{\partial p_k} &= \dot{q}^k\end{aligned}}$$

Dit zijn de kanonische vergelijkingen van het probleem (Hamilton 1834) Zij zijn afgeleid uit de vergelijkingen van Lagrange en omgekeerd kan men de laatste ook uit de eerste afleiden. De vergelijkingen van Lagrange en de kanonische vergelijkingen zijn dus aequivalent.

Stel dat H zich laat schrijven als een functie van p_λ en q^k , die t niet expliciet bevat. Dan volgt uit (5.5)

5.6 $$dH = dq^\lambda \frac{\partial H}{\partial q^\lambda} + dp_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} = -\dot{p}_\lambda dq^\lambda + \dot{q}^k dp_k = 0$$

en we hebben een tweede criterium voor het bestaan van een eerste integraal $H=c$ gevonden.

Is H een functie van p_λ en q^k , die t niet expliciet

bevat, dan bestaat er een eerste integraal $H = c$.

Wij bewijzen dat deze beide criteria identiek zijn:

Indien $\mathcal{L}$ als functie van q^k, $\dot{q}^k$ en t de t niet expliciet bevat, dan bevat H als functie van p_λ, q^k en t de t eveneens niet expliciet en omgekeerd.

Bewijs: Volgens definitie is

$$H = p_k \dot{q}^k - \mathcal{L}(q^k, \dot{q}^k, t) \tag{6.1}$$

dus

$$dH = dp_k \dot{q}^k + p_k d\dot{q}^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} dq^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt . \tag{6.2}$$

Tengevolge van (1.3) en (2.2) is dus

$$\begin{aligned} dH &= dp_k \dot{q}^k + p_k d\dot{q}^k - \dot{p}_k dq^k - p_k d\dot{q}^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= dp_k \dot{q}^k - \dot{p}_k dq^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} . \end{aligned} \tag{6.3}$$

Uit (5.5) volgt dus

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial q^k} dq^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \tag{6.4}$$

zoodat

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{6.5}$$

waarin links p_λ en q^k constant gehouden worden en rechts q^k en $\dot{q}^k$.

Een mechanisch probleem met n graden van vrijheid vereischt derhalve oplossing van $2n$ differentiaalvergelijkingen van de eerste orde.

Voor het latere is het van belang op te merken, dat $H(q,p,t)$ nooit een homogene functie van den eersten graad in p kan zijn, m.a.w. dat nooit kan gelden

$$H(\alpha p, q, t) = \alpha H(p, q, t) . \tag{6.6}$$

Immers dan zou volgens de stelling van Euler voor homogene functies

7.1 $$p_\lambda \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} = H$$

moeten zijn of

7.2 $$p_\lambda \dot{q}^\lambda - H = \mathcal{L} = 0.$$

$\mathcal{L}$ zou dus identiek nul moeten zijn, wat tegen de onderstelling op blz. 2 is.

Voorbeeld 1. Als eerste voorbeeld behandelen we de beweging van een massapunt onder den invloed van een krachtveld met een gegeven arbeidsvermogen van plaats P, alleen afhankelijk van x, y en z. Hier is

$$T = \tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$P = P(x, y, z) = \text{gegeven}$$

$$\mathcal{L} = T - P = \tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - P$$

7.3
$$q^1 = x \qquad p_1 = m\dot{x} \qquad \text{(impuls in de } x\text{-richting)}$$
$$q^2 = y \qquad p_2 = m\dot{y}$$
$$q^3 = z \qquad p_3 = m\dot{z}$$

$$H = p_k \dot{q}^k - \mathcal{L} = \tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + P$$
$$= \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + P = T + P.$$

De vergelijkingen van Hamilton luiden:

7.4
$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\dot{p}_i \;;\; \frac{\partial P}{\partial x} = -m\ddot{x} \;;\; \text{cycl.}$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i \;;\; \dot{x} = \dot{x} \quad \text{(identiteit in dit geval).}$$

Opgave: Behandel hetzelfde probleem met bolcoordinaten.

Voorbeeld 2. Als tweede voorbeeld nemen we weer den ring met massapunt, blz. 3.

Zetten we den toestel niet stil, dan is

7.5 $$H = \frac{1}{2} m \left(\frac{p^2}{m^2 R^2} - \omega^2 R \sin^2 \varphi \right) - mgR \cos\varphi.$$

De vergelijkingen van Hamilton luiden

8.1 $\frac{\partial H}{\partial p} = -\dot{p}$ $\quad -m\omega^2 R^2 \sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta = -mR^2\ddot{\theta}$

of $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + m\omega^2 R\sin\theta\cos\theta$

8.2 $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$: $\frac{p}{mR^2} = \frac{p}{mR^2}$ (hier een identiteit).

Om een algemeene methode te vinden voor de oplossing van een stelsel vergelijkingen in den kanonischen vorm, herleiden we deze tot een variatievergelijking.

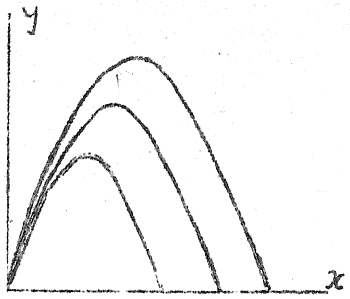
De variatievergelijkingen van Hamilton.

De vergelijkingen zijn opgelost wanneer de q^k en dus ook $\dot{q}^k$ (of de p_λ) als functie van t bekend zijn. De stand van het stelsel is op ieder oogenblik gegeven door de n getallen $q^1, \ldots q^n$. Men kan dit anders uitdrukken door te zeggen dat alle mogelijke standen een ruimte van n afmetingen X_n vormen met de coordinaten $q^1, \ldots, q^n$. Deze ruimte noemen we de coordinatenruimte. Gaat men van zekere beginvoorwaarden

8.3
$$\left.\begin{aligned} q^k &= q_0^k \\ p_\lambda &= p_\lambda^0 \end{aligned}\right\} \text{voor } t = t_0$$

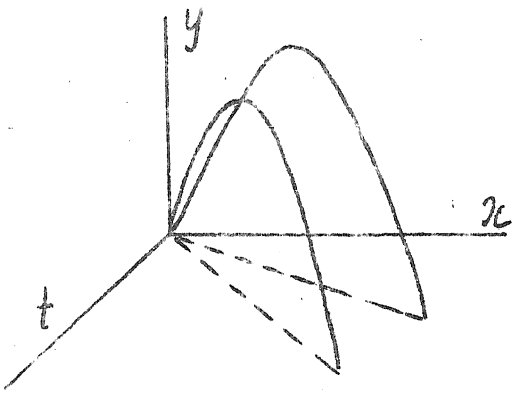
uit, dan beeldt zich het verdere verloop van de beweging af op een kromme in de X_n, de baan der beweging, en bij ieder punt van die kromme hoort een zekere waarde van t. In ieder punt is de richting van de kromme vastgelegd door de differentialen $dq^1, \ldots, dq^n$ dat is dus door de $\dot{q}^k$, of ook door de p_λ, daar deze immers met de q^k en t samen de $\dot{q}^k$ bepalen. Door ieder punt der X_n gaan in iedere richting oneindig veel banen, immers door een andere keuze van p_λ^0 kan men bereiken dat de $\dot{q}^k$ ten tijde $t = 0$ alle met eenzelfde factor veranderen. De richting in q^k verandert dan niet, maar het verdere verloop van de baan wel.

Voorbeeld: Vrije val met gegeven begirichting. De X_n is hier het x,y-vlak, $q^1 = x$; $q^2 = y$.



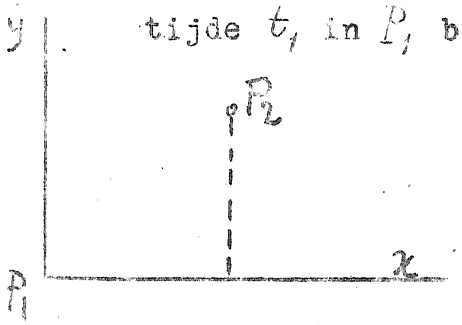
De banen, hier de bekende kogelbanen, zijn parabolen, die in het beginpunt alle dezelfde raaklijn hebben.

Neemt men nu de X_{n+1} gevormd door $q^1, \ldots, q^n$ en t, dan ligt het gaval anders. Deze ruimte noemen we de <u>filmruimte</u>. Willen wij dan van een punt, bewegend in een vlak, de filmruimte construeeren, dan maken we een film van de beweging, knippen de plaatjes uit en maken er een driedimensionaal pakje van. De stand van het stelsel wordt in de filmruimte X_{n+1} eveneens gegeven door een kromme, de <u>wereldlijn</u>. Veranderen de $\dot{q}^k$ ten tijde $t = o$ alle met eenzelfde factor, dan veranderen niet de verhoudingen $dq^1 : dq^2 : \ldots : dq^n$, maar wel de verhoudingen $dq^1 : dq^2 : \ldots : dq^n : dt$ zoodat de beginrichting van de wereldlijn <u>wel</u> verandert.



<u>Voorbeeld:</u> In het vorige voorbeeld is de snelheid voor iedere baan een <u>andere</u> constante. De wereldlijnen zijn dus ook weer parabolen, maar deze liggen alle in andere vlakken. Hun projecties op het xy-vlak zijn de banen in de vorige figuur.

Daaruit volgt, dat in de wereldfilm door ieder punt één bij het probleem passende wereldlijn in iedere richting gaat en men zou geneigd zijn daaruit intuitief te besluiten, dat er door twee voldoende naburig gelegen punten in de wereldfilm één en slechts één wereldlijn gaat. Teruggebracht tot de X_n zou dat het volgende beteekenen. Zijn t_1 en t_2 twee <u>gegeven</u> tijden en P_1 en P_2 twee <u>gegeven</u> punten der X_n, dan zal er in het algemeen één en slechts één baan zijn, die ten tijde t_1 in P_1 begint en ten tijde t_2 in P_2 eindigt.



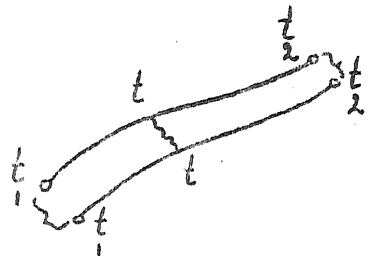
<u>Voorbeeld:</u> Is in het voorgaande voorbeeld het punt ten tijde t_o in x_o, y_o, en moet het punt x_1, y_1 ten tijde t_1 bereikt worden, dan is

10.1 $$\overset{\circ}{v}_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$$

$$\overset{\circ}{v}_2 (t_1 - t_0) - \tfrac{1}{2} g (t_1 - t_0) = y_1 - y_0$$

en uit deze vergelijking volgen $\overset{\circ}{v}_1$ en $\overset{\circ}{v}_2$ eendeudig.

Deze intuitieve beschouwing moet nu door een exacte vervangen worden. Daartoe beschouwen we een willekeurige baan tusschen de punten q_1^k en q_2^k, die doorloopen wordt tusschen t_1 en t_2 en vormen langs deze baan de integraal



10.2 $$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt.$$

Ondersteld is dus, dat er een kinetische potentiaal $\mathcal{L}$ bestaat, deze mag expliciet van t afhangen. We beschouwen nu een naburige kromme in de X_n tusschen de punten $q_1^k + \delta q_1^k$ en $q_2^k + \delta q_2^k$ die geen mogelijke baan behoeft te zijn en vormen de integraal over die kromme, echter in de onderstelling, dat t constant gehouden wordt, d.w.z. dat men het punt q^k op de eerste trajectorie, dat ten tijde t bereikt wordt, het punt $q^k + \delta q^k$ en dezelfde tijd t op de gevarieerde kromme correspondeert. Bij begin- en eindpunt van de gevarieerde kromme behooren dus ook t_1 en t_2.
In dit geval is de variatie van de integraal

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k \right) dt \qquad \text{(omdat } t \text{ constant gehouden wordt)}$$

10.3 $$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \delta q^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k \right\} dt \qquad \text{(volgens vergel. v. Lagrange).}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} d \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right)_{t = t_2} \delta q_1^k - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right)_{t = t_1} \delta q_2^k .$$

Uit deze vergelijking volgt:

1e. Vallen begin- en eindpunt van de baan en de gevarieerde kromme samen, dan is

10.4 $$\delta \int \mathcal{L}\, dt = 0.$$

Dit is de Hamiltonsche ~~xxrgwijking~~ variatievergelijking (ook wel genoemd het Hamiltonsche variatieprincipe). De vergelijking is de eerste noodzakelijke voorwaarde voor het extreem (maxium of minimum) zijn van $\int \mathcal{L} dt$. Om te onderzoeken of werkelijk een extreme waarde optreedt, zou men nog eens moeten differentieeren. Dan blijkt, dat werkelijk een minimum optreedt indien q_1^k en q_2^k niet te ver uit elkaar liggen. Is q_1^k op de baan gegeven, dan bestaat er een grenswaarde voor q_2^k , het bij q_1^k behoorende brandpunt, waarbij $\int \mathcal{L} dt$ niet meer minimum is, blijven we dichter bij q_1^k dan dit brandpunt, dan is $\int \mathcal{L} dt$ minimum en er bestaat dus in dat geval tusschen q_1^k en q_2^k in de infinitesimale omgeving der gegeven trajectorie geen andere dan deze baan, die in het interval t_1 tot t_2 doorloopen kan worden. Is q_2^k het brandpunt van q_1^k dan gaan er door q_1^k en q_2^k meerdere infinitesimaal naburige banen, die alle in het interval t_1 tot t_2 doorloopen kunnen worden.

Er bestaan dus in totaal ∞^{2n} wereldlijnen, door elk algemeen gelegen punt der X_{n+1} filmruimte gaan er ∞^n . Kiezen we uit deze een stelsel van ∞^n zoodat er door ieder algemeen gelegen punt 1 gaat, dan noemen we dat stelsel een congruentie van wereldlijnen. In onze gewone ruimte $(n+1 = 3)$ hebben we iets dergelijks met de rechte lijnen. Er bestaan ∞^4 rechte lijnen, door elk punt gaan er ∞^2 . Kiezen we uit de ∞^4 er ∞^2 uit, zoodat door elk algemeen gelegen punt één lijn gaat, dan heet dat stelsel een congruentie. Voorbeeld: alle normalen van een ellipsoide

Voorbeeld van een brandpunt. Een massapunt kan zonder uitwendige krachten en zonder wrijving bewegen over een vast boloppervlak met straal R . q^1 en q^2 zijn b.v. de bolcoordinaten θ en φ , X_2 is get boloppervlak. De banen zijn alle groote cirkels van den bol, de snelheid langs een trajectorie is constant. Zijn A en B in het algemeen slechts twee trajectorien, die samen een grooten cirkel vormen (dit ligt aan de bijzondere keuze van het voorbeeld

en is in het algemeen niet noodig; verg. het vorige voorbeeld) en dus kunnen beide in $t_2 - t_1$ doorloopen worden, mits men als beginsnelheid kiest $v_o = \frac{g_q AB}{t_2 - t_1}$ resp. $v_o = \frac{2\pi R - g_q AB}{t_2 - t_1}$.
De beide banen liggen echter niet infinitesimaal naburig. Zijn echter A en B diametraal gelegen, dan zijn er ∞ veel banen, die alle in een tijd $t_2 - t_1$ doorloopen kunnen worden en bij elk van deze zijn er andere aan te wijzen, die er slechts infinitesimaal van verschillen.

2e De Hamiltonsche variatievergelijking (10.4) is aequivalent met het stelsel der kanonische vergelijkingen (5.5). We behoeven slechts de aequivalentie met de vergelijkingen van Lagrange aan te toonen, want deze zijn immers met (5.5) aequivalent (blz. 5). Uit (10.4) volgt

12.1 $$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}\, dt = 0$$

dus

$$0 = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k \right) dt \qquad \text{(omdat } t \text{ constant gehouden wordt)}$$

12.2 $$= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \delta q^k \right\} dt$$

$$= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right)_{t=t_2} \delta q_2^k - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right)_{t=t_1} \delta q_1^k + \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right\} \delta q^k\, dt.$$

De eerste twee termen vallen weg wegens $\delta q_1^k = 0$; $\delta q_2^k = 0$ en aangezien de vergelijking moet gelden voor iedere baankromme en voor iedere keuze der δq^k volgt

12.3 $$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} = 0.$$

Bij een wereldlijn behoort in elk punt nog iets anders, namelijk de waarde van $\mathcal{L}\, dt$ in dat punt, genomen langs die lijn Nu is volgens (2.3)

12.4 $$\mathcal{L}\, dt = -H\, dt + p_k\, dq^k$$

en dat is een differentiaalvorm van de eerste orde in q^k , t

Keeren we terug tot drie afmetingen. Dan beteekent die

differentiaalvorm

13.1 $$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

waarin X, Y en Z functies van x, y en z zijn, meetkundig een 2-richting waarin de verplaatsing dx, dy, dz gelegen moet zijn, opdat de differentiaalvorm nul wordt:

13.2 $$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

Omgekeerd bepaalt het veld van de 2-richtingen de differentiaalvorm slechts op een factor na.

Bijgevolg bepaalt $\mathcal{L}\,dt$ in ieder punt van de filmruimte een n-richting, die zeker de richting van de bijbehoorende wereldlijn niet bevat (want $\mathcal{L}\,dt$ is immers niet nul). (Men moet niet vragen of de n-richting soms loodrecht op de wereldlijn is. Hoekmaten en lengtematen zijn in de X_{n+1} niet gedefinieerd). Maar <u>hier</u> bepaalt, zooals we bewijzen zullen, de n-richting de uitdrukking $\mathcal{L}\,dt$ <u>wel</u>, al is het dan ook niet <u>eenduidig</u>. Zij namelijk de n-richting gegeven door de verhouding

13.3 $$c_0 : c_1 : \ldots : c_n$$

($c_0, \ldots, c_n$ zijn dus <u>gegeven</u> grootheden, c_0 heeft de dimensie $\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1}$ en c_1, c_2, c_3 zijn dimensieloos), dan zijn in de eerste plaats H en p_λ alvast op een onbekende factor α na bepaald

13.4 $$-H = \alpha c_0 \;;\quad p_\lambda = \alpha c_\lambda$$

en nu moet bovendien nog aan de vergelijking

13.5 $$H = H(p_\lambda, q^\kappa, t)$$

voldaan zijn. Wij vinden dus bij substitutie

13.6 $$\alpha c_0 = -H(\alpha c_\lambda, q^\kappa t)$$

en uit deze vergelijking kan α steeds worden opgelost, behalve in het geval dat H een homogene functie van den eersten graad in de p_λ zou zijn, een geval dat echter zooals we op blz. 6

zagen, nooit kan voorkomen. De vergelijking voor α zal in het algemeen meerdere wortels hebben, meestal is H van den tweeden graad in p_λ (niet noodzakelijk homogeen) en dan zijn er dus altijd twee wortels. De wortels α zijn functies van q^k en t. Bij elken reeelen wortel in een bepaald punt q^k, t der filmruimte, die niet nul is, behoort een differentiaalvorm $\mathcal{L}dt$, d.w.z. (ingevolge /2.4) zekere bepaalde waarden van H en p_λ. Uit (5.5) volgt echter dat $\dot{q}^k$ een functie van p_λ, q^k en t is, zoodat elke reeele wortel in een punt q^k, t ook $\dot{q}^k$, dat is de richting van de wereldlijn daar ter plaatse, vastlegt. Bij elken reeelen worten behoort dus een bepaalde richting van de plaatselijke wereldlijn. Bij complexe wortels behoort natuurlijk in een reeel mechanisch vraagstuk niets, d.w.z. de plaatselijke n-richting die tot complexe wortels zou voeren is voor een reeel vraagstuk uit te schakelen. Resumeerende hebben we dus:

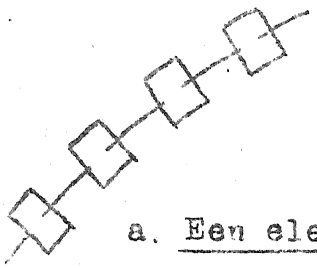
1. Bij elke richting in een punt der filmruimte behoort één enkele n-richting, zoodat bij een wereldlijn in die gegeven richting een differentiaalvorm $\mathcal{L}dt$ behoort in de n-richting. $\mathcal{L}dt$ is volkomen bepaald, niet slechts op een factor na. Om $\mathcal{L}dt$ uit de gegeven richting, dat is $dq^1 : dq^2 : \ldots\ldots dq^n : dt$ te bepalen wordt uit $\dot{q}^k$ eerst p_λ berekend met behulp van (8.2) of (4.2), daarna H uit $H = H(p_\lambda, q^k, t)$.

2. Bij elke gegeven n-richting in een punt der filmruimte behoort een bepaald aantal (het aantal reeele niet verdwijnende wortels der vergelijking (/3.6)) waarden van $\mathcal{L}dt$, welk aantal ook nul kan zijn, en bij iedere zoodanige waarde van $\mathcal{L}dt$ één enkele bepaalde richting, de plaatselijke richting van de bijbehoorende wereldlijn.

We zullen de n-richting, die in een bepaald punt bij de richting van een wereldlijn hoort de toegevoegde n-richting noemen,

omgekeerd de richting, de toegevoegde richting van de n-richting. De toegevoegde n-richting is éénduidig bepaald, de toegevoegde richting is echter meerduidig bepaald en kan onder omstandigheden ook ontbreken.

Een punt der filmruimte met een n-richting heet een element, en een wereldlijn met de toegevoegde n-richtingen in elk punt erbij heet een elementenrij. Dan gelden dus de volgende stellingen:



a. Een elementenrij is volkomen bepaald door één van zijn punten en de richting van de wereldlijn aldaar.

b. Een gegeven element is element van een aantal elementenrijen dat gelijk is aan het aantal reeele wortels der α-vergelijking.

Er bestaan in het geheel ∞^{2n} elementenrijen, door elk algemeen gelegen punt ∞^n. Een stelsel van ∞^n elementenrijen zoodanig, dat er door elk algemeen gegegen punt één gaat, heet een congruentie van elementenrijen. Een dergelijke congruentie is in het algemeen zoo, dat de n-richtingen zich niet aaneenschakelen tot $\infty^1 X_n$, is dit wel het geval, dan heet de congruentie X_n-vormend. Dit is een bijzonder en voor de mechanica zeer belangrijk geval.

De meetkundige beteekenis der kanonische vergelijkingen is nu de volgende. De vergelijking

$$15.1 \qquad dq^\kappa = \frac{\partial H}{\partial p_\kappa}\, dt$$

legt de richting van een wereldlijn door een punt vast, indien in dat punt de differentiaalvorm $\mathcal{L}\,dt$ gegeven is; de vergelijking

$$15.2 \qquad dp_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial q^\lambda}\, dt$$

legt dan de differentiaalvorm $\mathcal{L}\,dt$ in een volgend punt van de wereldlijn vast.

Voorbeeld:

Voorbeeld 1 van blz. 7 ; punt in gegeven conservatief

krachtveld

$$16.1 \qquad H = T + P = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + P.$$

De α-vergelijking luidt

$$16.2 \qquad -\alpha c_0 = \frac{1}{2m}\alpha^2 c^2 + P \; ; \; c_2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$

of

$$16.3 \qquad \alpha^2 + 2m\frac{c_0}{c^2}\alpha + \frac{2m}{c^2}P = 0.$$

Deze vergelijking heeft alleen reeele wortels, wanneer

$$16.4 \qquad c_0^2 - 2P\frac{c^2}{m} \geqq 0$$

is. Dat dit zoo is spreekt vanzelf, aangezien $c_0, \ldots, c_n$ evenredig zijn met $-H, p_1, \ldots, p_n$, is de voorwaarde namelijk gelijkwaardig met

$$16.5 \qquad H^2 - 2PT = (P-T)^2 \geqq 0$$

en inderdaad kan in een reeel vraagstuk $P-T$ niet imaginair worden.

De wortels van (16.3) zijn

$$16.6 \qquad \alpha = \frac{1}{c}\left(-\frac{mc_0}{c} \pm \sqrt{\frac{m^2c_0^2}{c^2} - 2mP}\right).$$

De filmruimte is vierdimensionaal. Is in eenig punt x, y, z, t een drierichting gegeven door de vergelijking

$$16.7 \qquad c_1\,dx + c_2\,dy + c_3\,dz + c_0\,dt = 0,$$

dan zijn de bijbehoorende waarden van $-H$, p_λ en $\dot{q}^k$

$$-H = -\frac{mc_0^2}{c^2} \pm \frac{c_0}{c}\sqrt{\frac{m^2c_0^2}{c^2} - 2mP}$$

$$16.8 \qquad p_i = \frac{c_i}{c}\left(-\frac{mc_0}{c} \pm \sqrt{\frac{m^2c_0^2}{c^2} - 2mP}\right)$$

$$\dot{x} = \dot{q}_1 = \frac{p_1}{m} = \frac{c_1}{c}\left(-\frac{c_0}{c} \pm \sqrt{\frac{c_0^2}{c^2} - 2\frac{P}{m}}\right).$$

Bijgevolg is de richting van de bijbehoorende wereldlijn gegeven door

17.1 $dx:dy:dz:dt = c_1:c_2:c_3:\dfrac{c}{-\frac{c_0}{c^2}\pm\sqrt{\frac{c_0^2}{c^2}-2\frac{P}{m}}}$

Noemen we de bijbehoorende snelheden v_1 en v_2, dan volgt

17.2 $v_1 v_2 = v_{1'} v_{2'} + v_{1^2} v_{2^2} + v_{1^3} v_{2^3} = \frac{c_1^2}{c^2}\frac{2P}{m} + \frac{c_2^2}{c^2}\frac{2P}{m} + \frac{c_3^2}{c^2}\frac{2P}{m} = \frac{2P}{m}$.

De snelheden (die dezelfde richting hebben) hebben dus tot product $\frac{2P}{m}$. Voor het vraagstuk van de kogelbanen (blz 9) is $P = mgy$. Bijgevolg hooren die twee banen bij elkaar waarvoor

17.3 $v_1 \cdot v_2 = 2gy$.

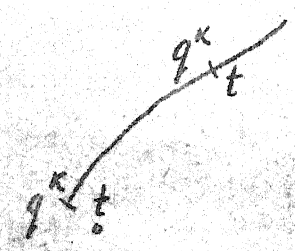
Voor $y=0$ wordt $P=0$. Dan wordt de eene snelheid nul. Men ziet aan dit voorbeeld dat de constante in P meedoet. De wereldlijnen zijn natuurlijk van P onafhankelijk, maar de stand der toegevoegde richtingen niet, immers

17.4 $c_1:c_2:c_3:c_0 = p_1:p_2:p_3:-H$

en H bevat P. Verandert men P met een constante, dan draait de 3-richting in eenig punt om een bepaalde vaste van de keerze van de constante onafhankelijke 2-richting, gelegen in de 3-richting van x, y, z. Deze 2-richting is gegeven door $c_1:c_2:c_3 = p_1:p_2:p_3$ en staat dus in de xyz-ruimte loodrecht op den snelheidsvector.

<u>De Eikonaalfuncties.</u>

Aangezien er door een stel van twee voldoende naburige punten q_1^k en q_2^k in X_n slechts een eindig aantal banen gaat, die juist in den (voldoende korten) tijd tusschen t_1 en t_2 doorloopen kunnen worden is $R = \int_{q_1,t_1}^{q_2,t_2} \mathcal{L}\,dt$ een (in het algemeen meerwaardige) functie van q_1^k, q_2^k en van de tijden t_1 en t_2.



Zij dus een wereldlijn gegeven, beginnende in het punt q_0^k ten tijde $t = t_0$ en zij het punt tentijde t in het punt q^k van die lijn. Dan leert de variatievergelijking (10.3)

18.1 $$\delta \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}\,dt = p_k \delta q^k - \overset{\circ}{p}_k \delta \overset{\circ}{q}^k .$$

Aangezien nu

18.2 $$\overset{\circ}{R} = \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}\,dt = \overset{\circ}{R}\left(q^k, \overset{\circ}{q}^k, t, \overset{\circ}{t}\right),$$

volgt (daar de tijd bij de differentiatie δ constant blijft)

18.3 $$\delta \overset{\circ}{R} = \frac{\partial \overset{\circ}{R}}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial \overset{\circ}{R}}{\partial \overset{\circ}{q}^k} \delta \overset{\circ}{q}^k$$

en dus

18.4 $$\frac{\partial \overset{\circ}{R}}{\partial q^k} = p_k \quad ; \quad \frac{\partial \overset{\circ}{R}}{\partial \overset{\circ}{q}^k} = -\overset{\circ}{p}_k .$$

Houden wij nu $\overset{\circ}{q}^k$ en $\overset{\circ}{t}$ constant dan wordt $\overset{\circ}{R}$ een functie van q^k en t, waaruit volgt dat

18.5 $$\mathcal{L} = \frac{d\overset{\circ}{R}}{dt} = \frac{\partial \overset{\circ}{R}}{\partial t} + \frac{\partial \overset{\circ}{R}}{\partial q^k} \dot{q}^k = \frac{\partial \overset{\circ}{R}}{\partial t} + p_k \dot{q}^k ,$$

zodat

18.6 $$\frac{\partial \overset{\circ}{R}}{\partial t} = -H .$$

Nu laat zich H schrijven als een functie van q^k, p_λ en t (blz. 5) en uit (18.4) en (18.6) volgt dus de differentiaalvergelijking voor $\overset{\circ}{R}$ als functie van q^k en t

18.7 $$\boxed{\frac{\partial \overset{\circ}{R}}{\partial t} = -H\left(q^k, \frac{\partial \overset{\circ}{R}}{\partial q^k}, t\right)}$$

Dit is de vergelijking van Hamilton-Jacobi. De algemeene oplossing van een dergelijke partieele differentiaalvergelijking hangt in het algemeen niet, zooals die van de gewone differentiaalvergelijking, van een eindig aantal constanten af, maar bevat willekeurige functies. (Voorbeeld: $\nabla \times \vec{v} = 0$; oplossing $\vec{v} = \text{grad}\, p$, waar p een willekeurige functie is). Een bijzondere oplossing is de een of andere functie van q^k en t , die voldoet. Hier hebben we geen van beide, maar een oplossing die van $n+1$ constanten $\overset{\circ}{q}^k$ en $\overset{\circ}{t}$ afhangt, een stel van ∞^{n+1} oplossingen dus. In de filmruimte is $\overset{\circ}{R}\left(q^k, \overset{\circ}{q}^k, t, \overset{\circ}{t}\right)$ een tweepuntsfunctie

d.i. een functie, die niet van één punt maar van twee afhangt. Zij bestaat voor elk stel van twee punten, die niet te ver van elkaar verwijderd zijn en niet bijzonder liggen, en is de integraal van $\mathcal{L}\,dt$ langs de wereldlijn die de punten verbindt. Afhankelijk van de keuze der functie H kunnen er punten zijn die bijzonder liggen, d.w.z. waartusschen geen wereldlijn mogelijk is. De tweepuntsfunctie in de wereldfilm heet de eenvoudige eikonaalfunctie. Men ziet gemakkelijk in dat

$$19.1 \qquad \begin{aligned} &\mathring{R}\,(q^k, \overset{\circ}{q}{}^k, t, \overset{\circ}{t}) = -\,\mathring{R}\,(\overset{\circ}{q}{}^k, q^k, \overset{\circ}{t}, t) \\ &\mathring{R}\,(q^k, q^k, t, t) = 0. \end{aligned}$$

De eenvoudige eikonaalfunctie $\mathring{R}$ is niet de algemeene oplossing van (18.7). We zullen nu aantoonen, dat men iedere willekeurige oplossing $R\,(q, t)$ met behulp van $\mathring{R}$ kan construeeren. We gaan dus uit van de vergelijking (18.7):

$$19.2 \qquad \frac{\partial R}{\partial t} = -\,H\left(q^k, \frac{\partial R}{\partial q^\lambda}, t\right)$$

onafhankelijk van eenig mechanisch probleem met kinetische potentiaal, waarvan we eerst uitgingen. Voor $\frac{\partial R}{\partial q^\lambda}$ schrijven we p_λ, maar nu alleen als verkorte notatie. Met name mogen we volstrekt niet al aannemen, dat er tusschen p_λ en q^k kanonische vergelijkingen bestaan, alleen (19.2) is gegeven, dat wil dus zeggen, de functie $H\,(q, p, t)$ en niets anders. Van H zij alleen aangenomen, dat de functie niet homogeen van den eersten graad in p_λ is. Door

$$19.3 \qquad \frac{\partial R}{\partial t}, \quad \frac{\partial R}{\partial q^\lambda}$$

is in elk punt der X_{n+1} een n-richting vastgelegd. Omgekeerd bepaalt elke n-richting in een punt in dat punt nul, een of meer stellen waarden $\frac{\partial R}{\partial t}$, $\frac{\partial R}{\partial q^\lambda}$ en wel volkomen, niet alleen op een factor na. Is namelijk de n-richting vastgelegd door de gegeven verhouding $c_0 : \ldots : c_n$, dan is

$$19.4 \qquad \frac{\partial R}{\partial t} = \alpha\, c_0 \;;\; \frac{\partial R}{\partial q^\lambda} = \alpha\, c_\lambda$$

en dit, gesubstitueerd in (19.2), voert tot

$$20.1 \qquad -\alpha c_0 = H\left(q^k, \alpha c_\lambda, t\right),$$

de α -vergelijking van blz. 13 .

Gaan we uit van de een of andere willekeurige maar bekende oplossing $R(q,t)$ van (19.1). Neem een punt q^k_0, t_0 op de X_n $R(q,t) = c$. Daar ter plaatse valt dus de door $\frac{\partial R}{\partial t}$, p_λ bepaalde n -richting samen met de n -richting van de X_n . Door dit punt gaan we nu eens een kromme construeeren, die overal aan de differentiaalvergelijkingen

$$20.2 \qquad \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_k}$$

zal voldoen (Dit is een willekeurig vrije daad). Aangezien p_λ niets anders als een afkorting is voor $\frac{\partial R}{\partial q^\lambda}$ en $\frac{\partial R}{\partial q^\lambda}$ in elk punt der X_{n+1} bekend is, is $\frac{\partial H}{\partial p_k}$ een functie van q^k en t geworden en hebben we dus te maken met een stelsel van n gewone differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. Oplossing levert de gezochte kromme en bij verplaatsing van q^k_0, t_0 over de X_n met de vergelijking $R(q,t) = c$ een stelsel van ∞^n krommen, door elk punt der X_n één. Nu is $p_\lambda = \frac{\partial R}{\partial q^\lambda}$, dus

$$20.3 \qquad \frac{\partial p_\lambda(q,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q^\lambda}\frac{\partial R(q,t)}{\partial t} = -\frac{\partial H(q,t)}{\partial q^\lambda}$$
$$= -\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q^\lambda}$$

en

$$20.4 \qquad \frac{\partial p_\lambda}{\partial q^k} = \frac{\partial p_k}{\partial q^\lambda}.$$

Substitueert men (20.4) in (20.3) dan volgt op grond van (20.2)

$$20.5 \qquad \frac{\partial p_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial p_\lambda}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt} = \frac{dp_\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^\lambda}.$$

Zijn dus de krommen vastgelegd door de eerste kanonische vergelijking (20.2), dan geldt voor de verandering van p langs die kromme, de tweede kanonische vergelijking (20.5). Uitgaande van de vergelijking (19.2), die nog niet met een mechanisch pro-

bleem te maken had, zijn we dus vanzelf gekomen tot een stel vergelijkingen (20.2) en (20.5), die als kanonische vergelijkingen van een mechanisch probleem met kinetische potentiaal kunnen worden opgevat. Nu hebben we al gezien, dat de kanonische vergelijkingen een stelsel van ∞^{2n} elementrijen bepalen heelemaal onafhankelijk van de speciale oplossing $R(q,t)$ waarvan we uitgingen. Uit al deze elementrijen worden er door de oplossing $R(q,t)$ juist een congruentie van elementrijen uitgelicht en wel juist een zoodanige die X_n -vormend is (blz. 16). De wereldlijnen van deze elementrijen zijn vastgelegd door (20.2) en de ∞^1 X_n zijn gegeven door de vergelijking

21.1 $$R(q,t) = \text{constant}$$

Bepalen we nu dR eens langs een wereldlijn van de congruentie

21.2 $$dR = \frac{\partial R}{\partial t}dt + \frac{\partial R}{\partial q^k}dq^k$$
$$= -H(p,q,t)dt + p_k dq^k = \mathcal{L}(p,q,t)dt$$

waarbij voor p_λ de plaatselijke waarde langs de wereldlijn, $\frac{\partial R}{\partial q^\lambda}$ ingevoerd moet worden, dus

21.3 $$R(q,t) - R(q_o,t_o) = \int_{q_o,t_o}^{q,t} \left(-H(p,q,t) + p_k \dot{q}^k\right)dt.$$

Dit is echter juist de waarde van de eenvoudige eikonaalfunctie tusschen q_o^k, t_o en q^k, t. We hebben dus de stelling verkregen:

Zijn de wereldlijnen en de eenvoudige eikonaalfunctie van een probleem bekend, dan verkrijgt men een oplossing R van de differentiaalvergelijking van Hamilton-Jacobi, die op een voorgeschreven (niet ongeschikt gekozen) X_n in de filmruimte een gegeven constante waarde C aanneemt, op de volgende wijze:

1. constueer de congruentie der wereldlijnen uitgaande van

punten der $X_{n'}$, wier toegevoegde n-richting in het snijpunt met de n'-richting der $X_{n'}$ samenvalt. Niet alle X_n zijn dus als begin-X_n bruikbaar; zij moeten aan de voorwaarde voldoen dat aan hun n-richting in ieder punt een reëele richting toegevoegd is. Verder zijn er in het algemeen meerdere stelsels van wereldlijnen mogelijk, men kieze er dan één uit.

2. stel in ieder punt dier kromme $\mathcal{R}$ gelijk aan C vermeerderd met de eenvoudige eikonaalfunctie tusschen het snijpunt en dit punt.

De gevonden functie R voegt aan ieder punt een getallenwaarde toe, de differentiaalvergelijking van Hamilton-Jacobi voegt dus aan iedere combinatie van een (niet ongeschikt gekozen) X_n en een punt een getallenwaarde toe, n.l. de waarde van de eenvoudige eikonaalfunctie tusschen het snijpunt van de wereldlijn door het punt met de $X_{n'}$ en het punt zelf. De algemeene oplossing dezer vergelijking is dus een X_n-punt-functie. Trekt zich de X_n tot een punt samen, dan krijgt men de tweepunts-functie, de eenvoudige eikonaal, terug. De algemeene oplossing kan men dus de algemeene eikonaal noemen. Het woord eikonaal wordt in de literatuur soms voor beide begrippen gebruikt.(Bijv. H. der Ph. V blz. 126).

Uit de constructie van de functie $\mathcal{R}$ voor een gegeven X_n met vergelijking $R(q,t)=0$ uit de eikonaalfunctie volgt nu nog een belangrijke stelling. Alle X_n met vergelijking $R(q,t)=c$, die men tenslotte vindt, hebben in ieder punt een n-richting, die toegevoegd is aan de richting van de wereldlijn door dat punt, dus:

Grijpt men uit het stelsel van ∞^{2n} elementrijen een congruentie zoodanig dat er één X_n bestaat zoodat in ieder punt van die X_n de n-richting van de elementrij samenvalt met die van de X_n, dan vormen alle ∞^{n+1} n-rictingen van alle ∞^n rijen samen een stelsel van ∞^1 X_n en is dus de congruentie van elementrijen X_n-vormend.

Oplossing van een mechanisch probleem met behulp van n eerste integralen.

Gesteld nu eens dat de eenvoudige eikonaalfunctie bekend ware. Dan zouden de $2n$ vergelijkingen

$$23.1 \qquad \frac{\partial \mathring{R}(q,q_0,t,t_0)}{\partial q^k} = p_k \,; \qquad \frac{\partial \mathring{R}(q,q_0,t,t_0)}{\partial q_0^k} = -p_{0k}$$

ons in staat stellen de q^k en p_k uit te drukken als functies van t en $2n$ integratieconstanten p_{0k}, q_0^k en den tijd t_0 en daarmede ware dan het probleem opgelost.

Wie levert ons echter de eenvoudige eikonaalfunctie? Niet de vergelijking van Hamilton-Jacobi, want een willekeurige oplossing van deze vergelijking, die n wezenlijke (d i. niet door een geringer aantal vervangbare) constanten bevat, is daarom nog de eikonaalfunctie niet. Ook de vergelijking

$$23.2 \qquad \mathring{R} = \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}\, dt$$

helpt ons niet zonder meer, want om de integraal te vormen hebben we de wereldlijnen noodig en die zijn nog niet bekend als het probleem niet opgelost is. Er is echter één geval waarbij we R (niet $\mathring{R}$) wel kunnen bepalen en dat is het geval waarbij we al over n eerste integralen beschikken, die aan zekere nader te noemen voorwaarde voldoen. Met n eerste integralen kunnen we de $\dot{q}^k$ en dus ook de p_λ als functies van de q^k en t en van n integratieconstanten uitdrukken:

$$23.3a \qquad p_\lambda = f_\lambda(q^k, t, c_1, \cdots, c_n) \quad \text{of} \quad \dot{q}^k = \varphi^k(q^k, t, c_1, \cdots, c_n) \qquad 23.3b$$

n eerste integralen kennen beteekent dus het richtingsveld van een congruentie van wereldlijnen kennen [1]. Heeft men n eerste integralen met n integratieconstanten, dan kent men ∞^n van die richtingsvelden.

(De kennis van $2n$ onafhankelijke eerste integralen zou zonder verdere integratie de oplossing leveren omdat met behulp van

---

[1] Maar nog niet de congruentie zelf ! Daarvoor zijn nog integraties noodig.

die $2n$ integralen de q^k en de p_λ in t kunnen worden uitgedrukt. Meer dan $2n$ onafhankelijke eerste integralen kunnen er dus niet zijn). Stel nu dat we n eerste integralen met n integratieconstanten hebben. Dan laat zich aantoonen dat <u>onder omstandigheden</u> de differentiaalvorm

24.1 $$\mathcal{L}\,dt = f_k\,dq^k - H(f,q,t)\,dt$$

een <u>volledige</u> differentiaal is in dq^k en dt, wanneer men H met behulp van (23.3b) in q^k en t uitdrukt.

Gaan we terug tot 3 afmetingen in de gewone ruimte. De uitdrukking

24.2 $$w_1\,dx + w_2\,dy + w_3\,dz = -\bar{w}.d\bar{r}$$

is een volledige differentiaal indien $\bar{w}$ „rotatievrij" is d.w.z. wanneer

24.3 $$\text{rot}\,\bar{w} = \nabla\times\bar{w} = 0;\ \text{d.w.z.}\ \frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0;\ \text{cycl.}$$

In dat geval is echter de integraal

24.4 $$-\int_P^Q \bar{w}.d\bar{r} = \int_P^Q w_1\,dx + w_2\,dy + w_3\,dz$$

tusschen P en Q <u>onafhankelijk</u> van de keuze van den weg tusschen P en Q. Is $-\bar{w}.d\bar{r}$ een volledige differentiaal

24.5 $$-\bar{w}.d\bar{r} = df(x,y,z)$$

dan zijn de door w_1, w_2, w_3 bepaalde 2-richtingen (in de gewone ruimte de 2-richtingen $\perp$ op den plaatselijken vector $\bar{w}$) χ_2-vormend. Dat zijn ze echter ook als $-\bar{w}.d\bar{r}$ op een niet constanten factor σ na, een volledige differentiaal is:

24.6 $$-\bar{w}.d\bar{r} = \sigma\,df(x,y,z).$$

Dan is echter het veld $\bar{w}$ niet meer rotatievrij. Er is dus een verschil tusschen 1^e een rotatievrij veld w_1, w_2, w_3, dat steeds ook χ_2-vormend is en 2^e een χ_2-vormend

veld dat nog niet rotatievrij hoeft te zijn. Dit zelfde gaat ook door voor de χ_{n+1}; is een differentiaalvorm $w_0\,dt + w_\lambda dq^\lambda$ gegeven, dan kan het veld w_0, w_λ zijn:

1e rotatievrij en dus χ_n-vormend; $w_0 dt + w_\lambda dq^\lambda$ is dan een volledige differentiaal.

2e χ_n-vormend, doch niet rotatievrij;

3e niet χ_n-vormend en dus ook niet rotatievrij.

In de beide laatste gevallen is $w_0 dt + w_\lambda dq^\lambda$ geen volledige differentiaal.

In het eerste geval zou de keuze van den integratieweg tusschen P en Q vrij zijn en men zou dus geen wereldlijn behoeven te nemen. Opdat $\mathcal{L}dt$ na substitutie der eerste integralen (23.3) een volledige differentiaal in q^k en t zij, moet $-H, f_1, \ldots, f_n$ rotatievrij zijn, d.w.z. er moet gelden:

$$25.1 \qquad \frac{\partial f_k}{\partial q^\lambda} = \frac{\partial f_\lambda}{\partial q^k}$$

$$25.2 \qquad \frac{\partial f_k}{\partial t} + \frac{\partial H(q,t)}{\partial q^k} = 0.$$

We zullen aantoonen dat (25.2) altijd vervuld is, wanneer aan (25.1) voldaan is. Ga daartoe uit van de kanonische vergelijking

$$25.3 \qquad \dot{p}_\lambda = -\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial q^k},$$

zet het linker lid om in

$$25.4 \qquad \frac{\partial f_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial q^\kappa}\dot{q}^\kappa$$

en het rechter lid in

$$25.5 \qquad -\frac{\partial H(f,q,t)}{\partial q^\lambda} + \frac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_k}\frac{\partial f_k}{\partial q^\kappa}.$$

Volgens de kanonische vergelijking (5.5) is echter

$$25.6 \qquad \dot{q}^k = \frac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_k}.$$

Indien nu aan (25.1) voldaan moet zijn, kan $\frac{\partial f_k}{\partial q^\kappa}$ door $\frac{\partial f_\lambda}{\partial q^k}$ vervangen worden. Trekt men na die vervanging (25.4) en (25.5)

van elkaar af, dan ontstaat

26.1 $$\frac{\partial f_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial H(q,t)}{\partial q^\lambda} = 0,$$

wat te bewijzen was.

De voorwaarden (25. 1,2) zijn te sterk, we zullen namelijk aantoonen, dat men slechts behoeft te eischen, dat $-H$, f_λ , X_n -vormend is en dat daaruit dan vanzelf de rotatievrijheid van $-H$, f_λ , dus het volledig differentiaal zijn van $\mathcal{L}dt$ volgt. Ga namelijk uit van één der X_n van $-H$, f_λ , dat is dus één der X_n die door aaneenvoegen van n -richtingen der elementen der n eerste integralen ontstaat. De n -richting van deze X_n is in elk punt toegevoegd aan de plaatselijke richting van één der ∞^n wereldlijnen, die bij de n eerste integralen hooren en waarvan deze n eerste integralen het richtingsveld doen kennen. Construeer nu als op blz. 21 is geschied de eikonaalfunctie R , die op de gekozen X_n de constante waarde C aanneemt. Dan is gebleken, (21.2)

27.2 $$dR = -H(p,q,t)dt + p_k dq^k = \mathcal{L}(p,q,t)dt,$$

waarin voor p_λ de plaatselijke waarde moest worden ingevoerd, welke waarde niet juist uit de n bekende eerste integralen volgt. Daaruit volgt dus, dat bij eliminatie van p_λ met behulp van n eerste integralen $\mathcal{L}dt$ een volledig differentiaal is, mits de congruentie der elementrijen dezer eerste integralen X_n-vormend is. De rotatievrijheid van $-H, p_\lambda$ volgt dan vanzelf.

Is het veld $-H, p_\lambda$, dat bij n eerste integralen behoort, X_n -vormend, dan is het ook rotatievrij. Men zegt dan, dat de n eerste integralen „in evolutie" zijn. $\mathcal{L}dt$ is dan na eliminatie der p_λ een volledige differentiaal.

Zijn de n eerste integralen in evolutie, dan verkrijgt men door integratie van $\mathcal{L}dt$ (dit zijn de n quadraturen) een functie die natuurlijk niets anders is als de eikonaalfunctie R

27.3 $$R = \int \mathcal{L}dt + C.$$

Verandering van de integratieconstante verandert niets aan de ligging der aequiskalaire χ_n. Dat R aan de vergelijking van Hamilton-Jacobi voldoet laat zich nog eens toetsen.

Eenerzijds is

$$27.1 \qquad dR = \frac{\partial R}{\partial t} dt + \frac{\partial R}{\partial q^\lambda} dq^\lambda ,$$

anderzijds

$$27.2 \qquad dR = \mathcal{L} dt = -H dt + p_k dq^k ,$$

dus inderdaad:

$$27.3 \qquad \frac{\partial R}{\partial t} = -H ; \qquad \frac{\partial R}{\partial q^k} = p_k .$$

R is nog niet de eenvoudige eikonaalfunctie $\mathring{R}$. We zullen nu echter aantoonen, dat niet alleen de kennis van $\mathring{R}$, maar reeds die van R gelijk staat met de kennis van de oplossing van het mechanische probleem. R bevat n integratieconstanten c_λ, die uit de n eerste integralen gekomen zijn:

$$27.4 \qquad R = R\left(q^k, t, c_\lambda\right).$$

We bewijzen dat

$$27.5 \qquad \frac{\partial R}{\partial c_k} = b^k = \text{constant}$$

is. Inderdaad is

$$27.6 \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial c_\lambda} &= \frac{\partial^2 R}{\partial t \partial c_\lambda} + \frac{\partial^2 R}{\partial q^k \partial c_\lambda} \dot{q}^k \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial t \partial c_\lambda} + \frac{\partial^2 R}{\partial q^k \partial c_\lambda} \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial t \partial c_\lambda} + \frac{\partial p_k}{\partial c_\lambda} \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{aligned}$$

Nu komen de c_λ uit de eerste integralen (23.3), dus is

$$27.7 \qquad \frac{\partial H}{\partial c_\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial c_\lambda}$$

en bijgevolg

$$27.8 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = \frac{\partial}{\partial c_\lambda}\left(\frac{\partial R}{\partial t} + H\right) = 0$$

omdat R aan de vergelijking van Hamilton-Jacobi voldoet. Uit (27.5), een vergelijking in q^k, t, c_λ en β^k, laten zich de q^k als functie van t en de $2n$ integratieconstanten zonder verdere integratie oplossen. Dus:

Een mechanisch probleem is tot n quadraturen (namelijk die noodig voor de integratie van $\int L\,dt$) teruggevoerd, indien men over n eerste integralen in involutie beschikt.

Men lette er wel op dat de stelling zegt „indien men beschikt", er wordt niets gezegd over de methoden om eerste integralen, die in involutie met elkaar zijn, te verkrijgen. Hoe die eerste integralen te vinden zijn hangt van het speciale probleem af dat men behandelt; leiddraad zijn daarbij o.a. de verschillende theorema's van het behoud (van arbeid, van impulsie, van impulsmoment)in de klassieke mechanica veelal verkeerdelijk „principes" genoemd. Principes of axioma's der klassieke mechanica zijn alleen $\bar{K} = m\bar{a}$, actie = reactie, $|W| \leqq f|N)$ en de botsingsformule. Gaat men de mechanica veralgemeenen, verlaat men dus de klassieke mechanica, dan wordt dat natuurlijk anders, men kan dan bijvoorbeeld de variatievergelijking van Hamilton of een veralgemeening daarvan als variatieprincipe dus als axioma vooropzetten en zien wat zich daaruit laat afleiden.

We hebben hier R laten ontstaan uit n eerste integralen. Deze beperking moet nog opgeheven worden.

Gesteld eens dat we over een oplossing $R(q, t, c_\lambda)$ der vergelijking van Hamilton-Jacobi beschikken, zonder dat er iets gezegd is waar deze oplossing of waar de c_λ vandaan komen. Dan gaan we te werk als op blz. 19, schrijven voorloopig als afkorting $\frac{\partial R}{\partial q^\lambda} = p_\lambda$ en bewijzen, als daar is geschied, dat er vergelijkingen van den vorm

$$28.1 \qquad \frac{\partial H}{\partial q^\lambda} = -\dot{p}_\lambda \; ; \qquad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}^k$$

bestaan. Voor dit kanonische systeem vormen dan de vergelijkingen $p_\lambda = \frac{\partial R}{\partial q^\lambda}$ een stel eerste integralen in involutie, en deze bevatten n integratieconstanten. Conclusie is dus:

Heeft men een willekeurige oplossing $R(q^k, t, c_\lambda)$ der vergelijking van Hamilton-Jacobi met n integratieconstanten, dan stellen de vergelijkingen

29.1 (a) $\frac{\partial R}{\partial c_k} = b^k = \text{constant}$; (b) $\frac{\partial R}{\partial q^k} = p_k$

resp. voor (a) de oplossing met $2n$ integratieconstanten b^k, c_λ van het stelsel der kanonische vergelijkingen

29.2 $\frac{\partial H}{\partial q^\lambda} = -\dot{p}_\lambda \qquad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}^k$.

en (b) een stel van n eerste integralen (in involutie) dezer vergelijkingen met n integratieconstanten c_λ .

Achteraf blijkt dus dat er bij iedere oplossing der vergelijking van Hamilton-Jacobi met n integratieconstanten een stel van n eerste integralen in involutie hoort, zoodat integratie van $\mathcal{L}\,dt$ na eliminatie van p_λ met behulp van die eerste integralen juist die bepaalde oplossing levert. Dit is ook meetkundig in te zien. Bij een bepaalde oplossing R hoort een X_n-vormende congruentie van elementrijen (blz. 21) en het richtingsveld van de wereldlijnen dezer elementrijen is equivalent met n eerste integralen in involutie (blz. 23).

Hoe vindt men nu uit de functie R de eenvoudige eikonaalfunctie $\mathring{R}$? Daartoe moet men integreeren tusschen de grenzen $\overset{\circ}{t}, \overset{\circ}{q}$ en t, q maar dan ook de integratieconstante c_λ weer wegwerken. Dit kan pas wanneer men over de volledige integratie (29.1a) en niet slechts over de n eerste integralen beschikt. Want dan zijn de q^k als functie van t , c_λ en n nieuwe integratieconstanten b^k bekend.

29.3 $q^k = f^k(t, c_\lambda, b^k)$.

Verder is bekend dat q^k ten tijde $\overset{\circ}{t}$ de waarde $\overset{\circ}{q}{}^k$ aanneemt:

29.4 $\overset{\circ}{q}{}^k = f^k(\overset{\circ}{t}, c_\lambda, b^k)$

en uit de $2n$ vergelijkingen (29.3) en (29.4) kunnen dus de c_λ en b^k als functies van q^k , t , $\overset{\circ}{q}{}^k$, t opgelost worden. Dus:

Men vindt de eenvoudige eikonaalfunctie $\mathring{R}$ uit R door te integreeren tusschen t_0, q^k_0 en t, q^k en de integratieconstanten c_λ te elimineeren met behulp van de na volledige integratie van het probleem verkregen vergelijkingen.

In tegenstelling tot R is dus $\mathring{R}$ pas bekend, wanneer het probleem opgelost is en kan $\mathring{R}$ derhalve niet voor de oplossing gebruikt worden.

Conclusie was, dat de oplossing tot n quadraturen teruggebracht is, wanneer men n eerste integralen met n integratieconstanten kent, die in involutie zijn, d.w.z. opgelost naar p_λ aan (25.1) voldoen of, wat hetzelfde is, die tot X_n-vormende congruenties van elementrijen behooren. Dit kan nog beter gezegd worden. Indien twee functies φ_1 en φ_2 van p_λ, q^k en t voldoen aan de vergelijking

$$30.1 \qquad (\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial q^k}\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial q^k}\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_k} = 0;$$

((φ_1, φ_2) is het haaksymbool van Poissón) dan noemt men de functies in involutie. De n functies

$$30.2 \qquad \varphi_\lambda = p_\lambda - f_\lambda(q,t)$$

zijn alleen dan allen met elkaar in involutie, wanneer

$$30.3 \qquad -\frac{\partial f_\lambda}{\partial q^k} + \frac{\partial f_k}{\partial q^\lambda} = 0$$

d.w.z. wanneer (25.1) geldt. Nu kan men gemakkelijk bewijzen, dat indien het stelsel vergelijkingen

$$30.4 \qquad \psi_\lambda(p,q,t) = 0$$

een gevolg is van het stelsel

$$30.5 \qquad \varphi_\lambda(p,q,t) = 0$$

en indien de functies φ_λ in involutie zijn, ook de ψ_λ dit moeten zijn. Daaruit volgt dus de stelling:

De oplossing van de kanonische vergelijkingen van Hamilton laat zich terugbrengen tot quadraturen, indien men beschikt

over n onafhankelijke eerste integralen

31.1 $$\psi_\lambda(p,q,t) = 0,$$

zoodanig, dat de functies ψ_λ alle onderling in involutie zijn.

De haaksymbolen van Poisson hebben enkele integessante eigenschappen. Zij

31.2 $$F(p,q,t) = c$$

een eerste integraal der kanonische vergelijkingen, dat wil zeggen, dat aan

31.3 $$\dot{q}^\kappa \frac{\partial F}{\partial q^\kappa} + \dot{p}_\lambda \frac{\partial F}{\partial p_\lambda} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

identisch voldaan is, wanneer in deze vergelijking de $\dot{p}_\lambda$ en $\dot{q}^\kappa$ uit de kanonische vergelijkingen gesubstitueerd worden:

31.4 $$\frac{\partial F}{\partial q^\kappa}\frac{\partial H}{\partial p_\kappa} - \frac{\partial H}{\partial q^\kappa}\frac{\partial F}{\partial p_\kappa} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

of

31.5 $$(F,H) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Deze vergelijking is dus de n.e.v. voorwaarde opdat $F = c$ eerste integraal is. Bevat F den tijd niet expliciet, dan gaat zij over in

31.6 $$(F,H) = 0.$$

Hieruit volgt:

Bestaat er in een systeem van twee graden van vrijheid een integraal $H = c$ en beschikt men over een andere integraal $F = c$, die t niet expliciet bevat, dan is $(F,H) = 0$ en het probleem laat zich dus tot (twee) quadraturen terugvoeren.

Uit de definitie (30.1) bewijst men gemakkelijk:

31.7 $$\frac{\partial \varphi}{\partial q^\lambda} = (\varphi, p_\lambda); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_\kappa} = -(\varphi, q^\kappa) = (q^\kappa, \varphi)$$

en

31.8 $$(\varphi,(\psi,\theta)) + (\psi,(\theta,\varphi)) + (\theta,(\varphi,\psi)) = 0.$$

Zijn dus $F = c_1$ en $G = c_2$ twee eerste integralen, dan is

32.1
$$((F,G),H) = -((G,H),F) - ((H,F),G) = -\left(F, \frac{\partial G}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial t}, G\right) =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t}(F,G).$$

waaruit volgt:

Zijn $F = c_1$ en $G = c_2$ twee eerste integralen, dan is ook (F,G) een eerste integraal.

Voorbeelden:

1) Planetenbeweging.

32.2
$$\left.\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} m\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) \\ P &= -\frac{m\mu^2}{r} \end{aligned}\right\} \quad \mathcal{L} = T - P$$
$$q^1 = r \;;\; q^2 = \theta$$
$$p_1 = m\dot r \;;\; p_2 = m r^2\dot\theta$$
$$H = \frac{1}{2m}(p_1)^2 + \frac{1}{2m(q^2)^2}(p_2)^2 - \frac{m\mu^2}{q^1}.$$

Eerste integralen (in involutie)

32.3
$$\tfrac{1}{2} m\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) - \frac{m\mu^2}{r} = E = \text{constant (Energieintegraal)}$$
$$r^2\dot\theta = c = \text{constant (momentintegraal)}.$$

Uitdrukking $\mathcal{L}\,dt$:

32.4
$$\mathcal{L}\,dt = -H\,dt + p_1\,dq^1 + p_2\,dq^2$$
$$= -H\,dt + m\dot r\,dr + mr^2\dot\theta\,d\theta.$$

Met behulp van de eerste integralen wordt deze uitdrukking omgezet in

33.5
$$\mathcal{L}\,dt = -E\,dt + m\sqrt{f(r,c,E)}\,dr + mc\,d\theta,$$

waar

33.1 $$f(r,c,E) = \frac{2E}{m} + \frac{2\mu^2}{r} - \frac{c^2}{r^2}$$

$\mathcal{L}\,dt$ is nu een volledige differentiaal:

33.2 $$R = \int \mathcal{L}\,dt = -Et + m\int \sqrt{f}\,dr + mc\theta + C$$

en de oplossing van het probleem luidt:

33.3 $$\frac{\partial R}{\partial E} = -t + \int \frac{dr}{\sqrt{f}} = C_1$$

33.4 $$\frac{\partial R}{\partial c} = -mc\int \frac{dr}{\sqrt{f}}\cdot\frac{1}{r^2} + m\theta = mC_2$$

of

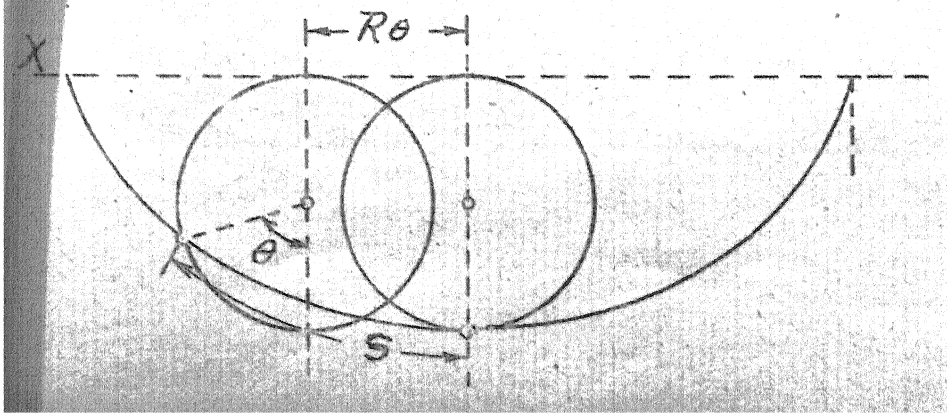
33.5
$$a)\quad t = \int \frac{dr}{\sqrt{f}} + C_1$$
$$b)\quad \theta = \int \frac{dr}{\sqrt{f}}\cdot\frac{1}{r^2} + C_2\,,$$

waarin de vier integratieconstanten E, c, C_1 en C_2 voorkomen Met behulp van deze vergelijking en

33.6
$$a)\quad t_0 = \left(\int \frac{dr}{\sqrt{f}}\right)_{r=r_0} + C_1$$
$$b)\quad \theta_0 = \left(\int \frac{dr}{\sqrt{f}}\cdot\frac{1}{r^2}\right)_{r=r_0} + C_2$$

laten zich de vier constanten in t, r, θ, t_0, r_0 en θ_0 uitdrukken en deze uitdrukkingen, gesubstitueerd in de tusschen de grenzen t_0, r_0, θ_0 en t, r, θ genomen integraal voor R (33.2) levert $\mathring{R}$. De bewerking laat zich hier natuurlijk niet elementair uitvoeren omdat de integralen elliptisch zijn.

2) <u>Cycloidale slinger van Huygens.</u>



$$x = R(\theta + \sin\theta)$$
$$y = R(1+\cos\theta)$$
$$ds^2 = 4R^2\cos^2 \tfrac{1}{2}\theta\, d\theta^2$$
$$s = 4R\sin\tfrac{1}{2}\theta.$$

Neem s als variabele

$$s = q$$

34.1 $$T = \tfrac{1}{2} m \dot{s}^2$$

$$p = m \dot{s},$$

dan is

$$P = mgR(1-\cos\theta) = \frac{mg}{2l} s^2$$ (niveauvlak door het laagste punt)

34.2 $$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} m \dot{s}^2 - \frac{mg}{2l} s^2 \qquad l = 4R$$

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{mg}{2l} q^2$$

Kanonische vergelijkingen:

34.3 $$\frac{mg}{l} q = -\dot{p} = -m\ddot{q} \quad \text{of} \quad \ddot{q} + \frac{g}{l} q = 0$$

$$\frac{1}{m} p = \dot{q}$$ (hier een identiteit).

De oplossing luidt:

34.4 a) $q = A \sin(\omega t + \varphi)$; $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

b) $p = m\omega A (\cos\omega t + \varphi)$ (eerste integraal)

c) $H = E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 =$ constant (energieintegraal).

De wereldlijnen zijn sinuslijnen. Geef in een bepaald punt der filmwereld q_0, t_0 de verhouding $-H : p$

34.5 $-H = \alpha C_0$; $p = \alpha C_1$; C_0 en C_1 gegeven constanten

dan is

34.6 $$-\alpha C_0 = \frac{1}{2m} \alpha^2 C_1^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2$$

of

34.7 $$\alpha^2 + \frac{2mC_0}{C_1^2} \alpha + \frac{m^2}{C_1^2} \omega^2 q^2 = 0,$$

zodat

34.8 $$\alpha = -\frac{mC_0}{C_1^2} + \sqrt{\frac{m^2 C_0^2 - m^2 C_0^2 \omega^2 q^2}{C_1^4}}.$$

De wortels zijn reëel indien $C_0^2 - C_1^2 \omega^2 q^2 > 0$, deze voorwaarde

is echter steeds vervuld, want alleen dan is

$$35.1 \qquad H^2 - p^2\omega^2 q^2 = H^2 - 2mT\frac{2}{m}P = H^2 - 4TP = (T-P)^2 > 0.$$

Is dus de verhouding $\frac{-H}{p}$ zoo gekozen als met een reëel probleem in overeenstemming is, $(T-P)^2 > 0$, dan gaan er door q_0, t_0 twee bij deze verhouding behoorende wereldlijnen.

De uitdrukking $\mathcal{L}\,dt$ wordt

$$35.2 \qquad \mathcal{L}\,dt = -H\,dt + p\,dq.$$

Met gebruikmaking van de energieintegraal gaat dit over in

$$35.3 \qquad \mathcal{L}\,dt = -E\,dt + \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}\,dq$$

dus

$$35.4 \qquad \mathring{R} = \int -E\,dt + \sqrt{2mE - m\omega^2 q^2}\,dq.$$

Om $\mathring{R}$ te vinden substitueert men hierin de voor q gevonden oplossing en integreert tusschen q_0, t_0 en q, t

$$\begin{aligned} \mathring{R} &= \int_{t_0}^{t} -E\,dt + m\omega A\cos(\omega t+\varphi)\,A\omega\cos(\omega t+\varphi)\,dt \\ 35.5 \qquad &= \int_{t_0}^{t} -E\,dt + 2E\cos^2(\omega t+\varphi)\,dt \\ &= E\int_{t_0}^{t} \cos 2(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{E}{2\omega}\left\{\sin 2(\omega t+\varphi) - \sin 2(\omega t_0+\varphi)\right\} \end{aligned}$$

waarna E en φ met behulp van (34.4a,c) en

$$35.6 \qquad q_0 = A\sin(\omega t_0 + \varphi)$$

in q, t, q_0 en t_0 moeten worden uitgedrukt. Wij vinden dan

$$35.7 \qquad \mathring{R}(q,t,q_0,t_0) = \frac{m}{2}\omega^2\left[\frac{(q-q_0)^2}{\sin\omega(t-t_0)} - (q^2+q_0^2)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\omega(t-t_0)\right].$$

Men kan deze betrekking $\frac{\partial \mathring{R}}{\partial q_0}$ =constant en $\frac{\partial \mathring{R}}{\partial t} = -H$ verifieeren.

3) Kogelbanen.

$$\begin{aligned} &x = q^1, \quad y = q^2 \\ &T = \tfrac{1}{2}m\left\{(\dot q^1)^2 + (\dot q^2)^2\right\} \\ &P = mgq^2 \\ 35.8 \qquad &\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m\left\{(\dot q^1)^2 + (\dot q^2)^2\right\} - mgq^2 \\ &p_1 = m\dot q^1; \quad p_2 = m\dot q^2 \\ &H = \frac{1}{2m}\left\{(p_1)^2 + (p_2)^2\right\} + mgq^2. \end{aligned}$$

Beginvoorwaarden: $t = t_o$, $q^1 = q^1_o$, $q^2 = q^2_o$, $p^o_1 = m v^o_1$, $p^o_2 = m v^o_2$.

Oplossing:

36.1

$$a] \quad q^1 = q^1_o + v^o_1 (t - t_o)$$

$$b] \quad q^2 = q^2_o + v^o_2 (t - t_o) - \tfrac{1}{2} g (t - t_o)^2$$

Eerste integralen:

$$1] \quad \varphi = p_2 - c_1 = 0$$

36.2

$$2] \quad \psi = p_2 + mgt - c_2 = 0$$

$$3] \quad \Omega = (p_1)^2 + (p_2)^2 + 2m^2 g q^2 - c_3 = 0$$

(φ) en (ψ) zijn in involutie, eveneens (φ) en (Ω). Niet in involutie zijn (ψ) en (Ω):

36.3

$$\frac{\partial \psi}{\partial q^1}\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial p_1} + \frac{\partial \psi}{\partial q^2}\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial p_2} - \frac{\partial \Omega}{\partial q^1}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial q^2}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} =$$

$$= 0.2p_1 + 0.2p_2 - 0.0 - 2m^2 g.1 = -2m^2 g.$$

De uitdrukking $\mathcal{L}\,dt$ wordt

36.4

$$\mathcal{L}\,dt = -H\,dt + p_1\,dq^1 + p_2\,dq^2.$$

Bij gebruikmaking van de eerste integralen (36.3-2) en (36.3-1) gaat deze over in

36.5

$$\mathcal{L}\,dt = -\frac{1}{2m}\left\{c_1^2 + (-mgt + c_1)^2\right\}dt - mgy\,dt + c_1\,dx + (-mgt + c_1)\,dy.$$

Dus

36.6

$$R = \int \mathcal{L}\,dt = -\frac{1}{2m}c_1^2 t - \frac{1}{6}mg^2 t^3 + \frac{1}{2}gc_2 t^2 - \frac{1}{2m}c_2^2 t - mgyt + c_1 x + c_2 y + C.$$

Inderdaad vormen de vergelijkingen

36.7

$$\frac{\partial R}{\partial c_1} = -\frac{1}{m}c_1 t + x \qquad = \text{constant}$$

$$\frac{\partial R}{\partial c_2} = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{m}c_2 t + y \qquad = \text{constant}$$

en de oplossing is

36.8

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m}c_1^2 - \frac{1}{2}mg^2 t^2 + gc_2 t - \frac{1}{2m}c_2^2 - mgy$$

$$= -\frac{1}{2m}c_1^2 - \frac{1}{2m}(-mgt + c_2)^2 - mgy = -H.$$

Uit de oplossing der eerste integralen

37.1

$$a]\quad x = x_0 + \frac{c_1}{m}(t - t_0)$$

$$b]\quad y = y_0 + \frac{c_2}{m}(t - t_0) - \tfrac{1}{2} g (t^2 - t_0^2),$$

laten zich c_1 en c_2 vinden als functie van x, y, t, x_0, y_0, t_0

37.2

$$c_1 = m\,\frac{x - x_0}{t - t_0}$$

$$c_2 = m\,\frac{y - y_0 + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2}{t - t_0} + m g t_0 .$$

Worden deze waarden gesubstitueerd in $\int \mathcal{L}\,dt$ en wordt geintegreerd tusschen de grenzen x_0, y_0, t_0, x, y, t, dan ontstaat de eenvoudige eikonaalfunctie

37.3

$$\mathring{R} = m\left\{ \frac{1}{24} g^2 (t - t_0)^3 + \frac{1}{2}\,\frac{(x - x_0)^2}{t - t_0} + \frac{1}{2}\,\frac{(y - y_0)^2}{t - t_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} g\,(t - t_0)(y - y_0) - g y (t - t_0) \right\}.$$

Inderdaad is

37.4

$$\frac{\partial \mathring{R}}{\partial x_0} = -m\,\frac{x - x_0}{t - t_0} = \text{constant}$$

$$\frac{\partial \mathring{R}}{\partial y_0} = -m\left(\frac{y - y_0}{t - t_0} + \frac{1}{2} g (t - t_0)\right) = \text{constant}$$

de oplossing en is

37.5

$$\frac{\partial \mathring{R}}{\partial t} = \frac{m}{2}\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}\right)^2 + \frac{m}{2}\left\{\frac{y - y_0}{t - t_0} - \frac{1}{2} g (t - t_0)\right\}^2 + m g y = -H.$$

4) <u>Punt in een centraal krachtveld recht evenredig met den afstand</u>

$$x = q^1,\quad y = q^2,\quad z = q^3$$

37.6

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$P = \frac{m\mu^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\mathcal{L} = T - P$$

$$p_1 = m\dot{x}\ ;\ \text{cycl.}$$

$$H = \frac{1}{2m}\left\{(p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2\right\} + \frac{m\mu^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Vergelijkingen van de tweede orde:

38.1 $$\ddot{x} + \mu^2 x = 0 \; ; \; \text{cycl.}$$

Oplossing:

38.2 $$x = x_m \sin(\mu t + \alpha_1); \; \text{cycl.}$$

Eerste integralen

38.3

$$\left.\begin{aligned} &1] \; \Phi = H - E = 0 \\ &2] \; \varphi_1 = p_3 q^2 - p_2 q^3 - c_1 = 0 \; ; \; \text{cycl.} \\ &3] \; \psi_1 = \mu^2 m^2 (q')^2 + (p_1)^2 - k_1^2 = 0 \; ; \; \text{cycl.} \\ &4] \; \Omega_1 = p_2 p_3 + m^2 \mu^2 q^2 q^3 - a_1 = 0 \; ; \; \text{cycl.} \end{aligned}\right\} \text{bevatten } t \text{ niet expliciet}$$

$$\left.\begin{aligned} &5] \; \xi_1 = \mu m q' \cos \mu t - p_1 \sin \mu t - b_1 = 0 \; ; \; \text{cycl.} \\ &6] \; \eta_1 = \mu m q' \sin \mu t + p_1 \cos \mu t - a_1 = 0 \; ; \; \text{cycl.} \end{aligned}\right\} \text{bevatten } t \text{ expliciet}$$

Bijgevolg is: (zie 31.5)

38.4 $$\left.\begin{aligned} &(\varphi_1, \Phi) = 0 \; ; \; (\psi_1, \Phi) = 0 \; ; \; (\Omega_1, \Phi) = 0 \\ &(\xi_1, \Phi) = -\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \mu(\eta_1 + a_1) \; ; \; (\eta_1, \Phi) = -\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = -\mu(\xi_1 + b_1) \end{aligned}\right\} \text{cycl.}$$

Voor de haaksymbolen bestaan de volgende betrekkingen:

38.5 $$\begin{aligned} &(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_3 + c_1 \; ; \; \text{cycl.} \\ &(\psi_1, \psi_2) = 0 \qquad ; \; \text{cycl} \end{aligned}$$

38.6 $$\left.\begin{aligned} &(\varphi_1, \psi_1) = 0 \\ &(\varphi_1, \psi_2) = 2(\Omega_1 + a_1) \\ &(\varphi_1, \psi_3) = -2(\Omega_1 + a_1) \end{aligned}\right\} \text{cycl.}$$

38.7 $$(\Omega_1, \Omega_2) = -m\mu^2(\varphi_3 + c_3); \; \text{cycl.}$$

38.8 $$\left.\begin{aligned} &(\varphi_1, \Omega_1) = \psi_3 + k_3^2 - \psi_2 - k_2^2 \\ &(\varphi_1, \Omega_2) = -(\Omega_3 + a_3) \\ &(\varphi_1, \Omega_3) = \Omega_2 + a_2 \end{aligned}\right\} \text{cycl.}$$

39.1
$$\left.\begin{aligned}(\psi_1,\Omega_1)&=0\\(\psi_1,\Omega_2)&=-2m^2\mu^2(\varphi_2+c_2)\\(\psi_1,\Omega_3)&=+2m^2\mu^2(\varphi_3+c_3)\end{aligned}\right\}\ \text{cycl.}$$

39.2
$$(\xi_1,\xi_2)=0\ ;\ \text{cycl.}$$

39.3
$$(\eta_1,\eta_2)=0\ ;\ \text{cycl.}$$

39.4
$$(\xi_1,\eta_1)=-\mu m\ ;\ \text{cycl.}$$
$$(\xi_i,\eta_j)=0\ ;\quad i\neq j$$

39.5
$$\left.\begin{aligned}(\xi_1,\varphi_1)&=0\\(\xi_1,\varphi_2)&=\xi_3+b_3\\(\xi_1,\varphi_3)&=-(\xi_2+b_2)\end{aligned}\right\}\ \text{cycl.}$$

39.6
$$(\xi_1,\psi_1)=\mu m(\eta_i+d_2);\ \text{cycl.}$$
$$(\xi_i,\psi_j)=0\ ;\quad i\neq j$$

39.7
$$\left.\begin{aligned}(\xi_1,\Omega_1)&=0\\(\xi_1,\Omega_2)&=\mu m(\eta_3+d_3)\\(\xi_1,\Omega_3)&=\mu m(\eta_2+d_2)\end{aligned}\right\}\ \text{cycl.}$$

39.8
$$\left.\begin{aligned}(\eta_1,\varphi_1)&=0\\(\eta_1,\varphi_2)&=\eta_3+d_3\\(\eta_1,\varphi_3)&=-\eta_2+d_2\end{aligned}\right\}\ \text{cycl.}$$

39.9
$$(\eta_1,\psi_1)=-2\mu m(\xi_1+b_1);\ \text{cycl.}$$
$$(\eta_i,\psi_j)=0\ ;\quad i\neq j$$

39.10
$$\left.\begin{aligned}(\eta_1,\Omega_1)&=0\\(\eta_1,\Omega_2)&=-\mu m(\xi_3+b_3)\\(\eta_1,\Omega_3)&=-\mu m(\xi_2+b_2)\end{aligned}\right\}\ \text{cycl.}$$

De 16 hier aangegeven eerste integralen zijn natuurlijk niet alle onafhankelijk, aangezien er niet meer dan 6 onafhankelijke bestaan kunnen (blz.). Bijvoorbeeld is φ_1 afhankelijk van φ_2 en φ_3 en Φ van ψ_1, ψ_2 en ψ_3.

De uitdrukking $\mathcal{L}\,dt$ wordt

$$40.1 \qquad \mathcal{L}\,dt = -H\,dt + p_1\,dx + p_2\,dy + p_3\,dz.$$

Men kan nu op tal van verschillende wijzen drie onafhankelijke eerste integralen nemen, die in involutie zijn. Kiezen wij ψ_1, ψ_2 en ψ_3, dan gaat $\mathcal{L}\,dt$ over in

$$40.2 \qquad \mathcal{L}\,dt = -\frac{1}{2m}\left(k_1^2+k_2^2+k_3^2\right)dt + \sqrt{k_1^2-\mu^2m^2x^2}\,dx + \sqrt{\quad}\,dy + \sqrt{\quad}\,dz$$

waaruit volgt

$$40.3 \qquad R = \int \mathcal{L}\,dt = -\frac{1}{2m}\left(k_1^2+k_2^2+k_3^2\right)t + \frac{x}{2}\sqrt{k_1^2-\mu^2m^2x^2} + \text{cycl.} + \frac{k_1^2}{2\mu m}\,\mathrm{bg\,sin}\,\frac{\mu m}{k_1}x + \text{cycl.}$$

Inderdaad is

$$40.4 \qquad \frac{\partial R}{\partial k_1} = -\frac{k_1}{m}t + \frac{x}{2}\,\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2-\mu^2m^2x^2}} + \frac{k_1}{\mu m}\,\mathrm{bg\,sin}\,\frac{\mu m}{k_1}x - \frac{x}{2}\,\frac{1}{\sqrt{k_1^2-\mu^2m^2x^2}}\,\frac{k_1^2\mu m}{k_1\mu m} =$$
$$= -\frac{k_1}{m}t + \frac{k_1}{\mu m}\,\mathrm{bg\,sin}\,\frac{\mu m}{k_1}x = C;\ \text{cycl.}$$

gelijkwaardig met

$$40.5 \qquad x = \frac{k_1}{\mu m}\sin\left(\mu t - \frac{\mu m}{k_1}C\right);\ \text{cycl.}$$

de oplossing van het probleem en

$$40.6 \qquad \frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(k_1^2+k_2^2+k_3^2\right) = -H.$$

Uit de vergelijkingen

$$40.7 \qquad \left.\begin{aligned} x &= x_m \sin\left(\mu t + \alpha_1\right) \\ x_0 &= x_m \sin\left(\mu t_0 + \alpha_1\right) \end{aligned}\right\}\ \text{cycl.}$$

en

$$40.8 \qquad k_1^2 = \mu^2 m^2 x_m^2;\ \text{cycl.}$$

moeten nu de k_1 , k_2 en k_3 als functies van x , y , z , t , x_0 , y_0 , z_0 en t_0 worden bepaald en gesubstitueerd in $\int_{q_0 t_0}^{qt} \mathcal{L}\, dt$. Men vindt tenslotte

41.1 $$\mathring{R} = \frac{\mu m}{2 \sin \mu (t-t_0)} \left\{ (r^2 + r_0^2) \cos \mu (t-t_0) + 2 \bar{r} \cdot \bar{r}_0 \right\}.$$

Naderen x , y , z , t dicht tot x_0 , y_0 , z_0 , t_0 dan wordt

41.2 $$\mathring{R} = \mu m \frac{(\Delta r)^2}{2 \Delta t}$$

en dit nadert zooals het behoort tot nul voor $\Delta r \to 0$ en $\Delta t \to 0$, daar $\frac{dt}{dr} = 0$ een oneindig groote snelheid zou geven en dus geen richting van een werkelijke wreldlijn kan bepalen.

De vergelijkingen

41.3 $$\frac{\partial \mathring{R}}{\partial x_0} = \frac{\mu m}{\sin \mu (t-t_0)} \left(x_0 \cos \mu (t-t_0) - x \right) = C_1' \text{ ; cycl.}$$

of

41.4 $$x = -\frac{C_1'}{\mu m} \sin \mu (t-t_0) + x_0 \cos \mu (t-t_0) \text{ ; cycl.}$$

vormen de oplossing en

41.5 $$\frac{\partial \mathring{R}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\mu^2 m (r^2 + r_0^2)}{\sin^2 \mu (t-t_0)} + \frac{\mu^2 m (x x_0 + y y_0 + z z_0) \cos \mu (t-t_0)}{\sin \mu (t-t_0)} =$$
$$= \frac{1}{2} m \mu^2 \left[-r^2 - \frac{\Sigma \left\{ x_0 - x \cos \mu (t-t_0) \right\}^2}{\sin \mu (t-t_0)} \right],$$

of met behulp van (40.7)

$$\frac{\partial \mathring{R}}{\partial t} = \frac{1}{2} m \mu^2 \left[-\Sigma x_m^2 \sin^2 (\mu t + \alpha_1) - \Sigma x_m^2 \cos^2 (\mu t + \alpha_1) \right]$$
$$= -\frac{1}{2} m \mu^2 \Sigma x_m^2 = -H.$$

Homogene formuleering van een mechanisch probleem.

We hebben gezien dat het probleem neerkomt op de bepaling der extremalen van de uitdrukking $\mathcal{L}dt$, d.w.z. de kromme in de filmruimte waarvoor de uitdrukking $\int \mathcal{L}(q^k, \dot{q}^k, t)dt$ een extreme waarde heeft. Nu is

42.1 $$d\mathcal{R} = \mathcal{L}dt = -\mathcal{H}dt + p_\lambda dq^\lambda$$

en het is de bedoeling dat in deze uitdrukking de p_λ en daarmede ook $\mathcal{H}$ met behulp van de vergelijking $p_\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\lambda}$ worden uitgedrukt als functies van q^k, t en de verhouding $dq^1 : dq^2 : \ldots dq^n : dt$. De variabele t treedt bij deze formuleering op precies dezelfde wijze op als de variabele q^k en men kan dit nog sterker laten spreken door $t = q^{n+1}$; $-\mathcal{H} = p_{n+1}$ te stellen en de indices $\alpha, \beta, \gamma \ldots \omega$ te laten loopen van $1, \ldots, n+1$. Dan hebben we te zoeken de extremalen van de uitdrukking $p_\alpha dq^\alpha$ in de ruimte der q^α , waarbij de p_α gegeven zijn als functies der q^α en der verhouding der dq^α . Uitgaande van dit standpunt kan men zelfs de vergelijkingen van Lagrange en ook die van Hamilton homogeniseeren d.w.z. in q^α en p_β schrijven zoodat de t geen bijzondere rol meer speelt. We passen hier alleen de mogelijkheid der homogene formuleering toe om verband te leggen tusschen twee schijnbaar geheel verschillende onderwerpen: de cyclische coordinaten en de en de variatievergelijking van Mauportuis.

Cyclische coordinaten (ignorable coordinates = coordinaten die weggewerkt kunnen worden).

Bevat de uitdrukking voor $\mathcal{L}$ een bepaalde coordinaat bijv q^n niet, dan heet q^n een cyclische coordinaat. De vergelijkingen van Lagrange leeren dan dat

42.2 $$\dot{p}_n = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^n} = 0.$$

Hetzelfde volgt ook uit de vergelijkingen van Hamilton omdat in dit geval ook $\mathcal{H} = -\mathcal{L} + p_\lambda \dot{q}^\lambda$ den coordinaat q^n niet bevat en dus

42.3) $$\dot{p}_n = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^n} = 0.$$

Uit (1) volgt

43.1 $$p_n = c_n = \text{constant}$$

en een cyclische coordinaat geeft dus onmiddelijk aanleiding tot de vorming van een eerste integraal. De eerste $2(n-1)$ vergelijkingen van Hamilton luiden nu

43.2 $$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}(p_i, c_n, q^k, t)}{\partial p_k} &= \dot{q}^k \\ \frac{\partial \mathcal{H}(p_i, c_n, q^k, t}{\partial q^i} &= -\dot{p}_i \end{aligned}\right\} i,k = 1, \cdots, n-1$$

en de twee overige leveren de verhouding $dq^n : dt$:

43.3 $$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c^n} = \dot{q}^n \qquad\qquad 0 = -\dot{p}_n .$$

De eerste $2(n-1)$ vergelijkingen bevatten alleen de variabelen p_i, q^k en hebben den kanonischen vorm. Deze vergelijkingen staan dus ook weer in verband met een variatievergelijking in de „verkorte" filmruimte van $q^1, \cdots, q^{n-1}$ en t , en wel vindt men den integrand van deze nieuwe variatievergelijking uit de gewone betrekking die altijd tusschen $\mathcal{H}dt$ en $\mathcal{L}dt$ moet bestaan en die hier luidt, wanneer wij $\mathcal{L}^*$ schrijven voor de nieuwe functie van Lagrange (in q^k , $\dot{q}^k$ en t) en $\mathcal{R}^*$ voor de nieuwe eikonaalfunctie die in de verkorte filmruimte

43.4 $$d\mathcal{R}^* = \mathcal{L}^* dt = -\mathcal{H}(p_i, c_n, q^k, t)dt + p_i dq^i = \mathcal{L}dt - c_n dq^n ; \; i,k = 1, \cdots, n-1$$

waaruit volgt

43.5 $$\mathcal{L}^*(q^k, \dot{q}^k, t) = \mathcal{L}(q^k, \dot{q}^k, \dot{q}^n, t) - c_n \dot{q}^n$$

in welke uitdrukking $\dot{q}^n$ als functie van q^k , $\dot{q}^k$, c_n en t moet worden geschreven met behulp van de vergelijking

43.6 $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^n} = c_n$$

of ook met behulp van de daarmede gelijkwaardige vergelijking

43.7 $$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_n} = \dot{q}^n$$

in welk laatste geval de p_i als functie van q^k , $\dot{q}^k$, c_n en

t geschreven moeten worden met behulp van de vergelijkingen

44.1 $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = p_i \qquad ; \quad i = 1, \cdots, n-1.$$

De nieuwe functie van Hamilton $\mathcal{H}^*(p_i, q^k, t)$ wordt gevonden door in de oude functie $\mathcal{H}$, die q^n al niet meer bevat $p_n = c_n$ te stellen:

44.2 $$\mathcal{H}^*(p_i, q^k, t) = \mathcal{H}(p_i, c_n, q^k, t).$$

Het nieuwe variatieprobleem levert de extremalen in de verkorte filmruimte der $q^1, \cdots, q^{n-1}, t$ In die ruimte bestaan dus voor iedere waarde, die men aan c_n toekent $\infty^{2(n-1)}$ extremalen. De wereldlijnen in de onverkorte filmruimte voldoen in de eerste plaats aan de $2(n-1)$ nieuwe vergelijkingen van Hamilton en bovendien aan de vergelijking $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_n} = \dot{q}^n$ welke vergelijking links q^n niet meer bevat. Hieruit volgt

1° de extremalen in de verkorte filmruimte zijn de „projecties" in de richting van de coordinaat q^n van de wereldlijnen in de onverkorte filmruimte

2° is

44.3 $$q^k = f^k(t) \qquad ; \quad k = 1, \cdots, n$$

een wereldlijn, dan is

44.4 $$q^k = f^k(t) \qquad ; \quad k = 1, \cdots, n-1$$

de genoemde projectie, dus een extremaal in de verkorte filmruimte.

3°

44.5 $$q^k = f^k(t)$$
$$q^n = f^n(t) + \text{constante}$$

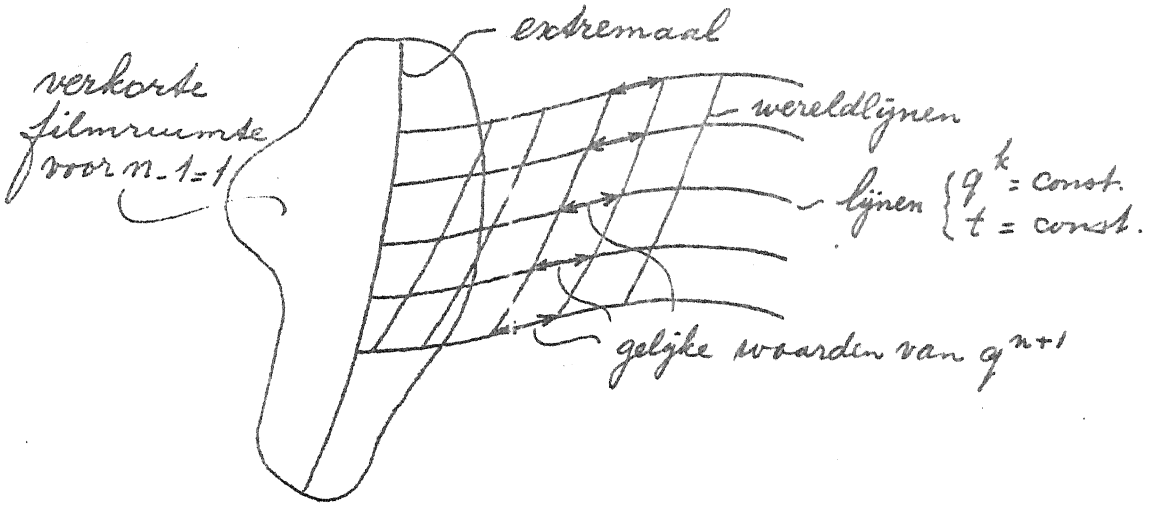
is eveneens een wereldlijn, want de vergelijkingen voldoen zoowel aan de nieuwe vergelijkingen van Hamilton als aan $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_n} = \dot{q}^n$ en dit laatste omdat $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_n}$ de q^n niet meer bevat. Bij elke extremaal hooren dus ∞^1 wereldlijnen, zoodat er in totaal voor alle waarden van c_n ∞^{2n} wereldlijnen zijn zooals het behoort.

4e. De wereldlijnen gaan dus in elkaar over bij de transformatie $q^n \rightarrow q^n + \text{constante}$.

5e. Aangezien

45.1 $$\mathcal{R} = \int -\mathcal{H}dt + \int p_i dq^i + c_n q^n = \int \mathcal{L}^* dt + c_n q^n = \mathcal{R}^* + c_n q^n$$

gaan de hyperoppervlakken $\mathcal{R} = const$ eveneens in elkaar over bij de transformatie $q^n \rightarrow q^n +$ constante. Zij snijden de verkorte filmruimte $q^n = 0$ in de $\mathcal{X}_{n-1}$: $\mathcal{R}^* = const$. De $(n-1)$-richting hoorende bij een punt van een extremaal in de verkorte filmruimte is dus de doorsnede van deze met de n-richting der bijbehoorende wereldlijn door dat punt.



Zijn er meer cyclische coordinaten, $q^{m+1}, \ldots, q^n$ dan zijn er $n-m$ eerste integralen

45.2 $$p_{m+1} = c_{m+1}, \ldots, p_n = c_n$$

en de nieuwe functie van Lagrange is

45.3 $$\mathcal{L}^*(q^k, \dot{q}^k, t) = \mathcal{L}(q^k, \dot{q}^k, \dot{q}^{m+1}, \ldots, \dot{q}^n, t) - c_{m+1}\dot{q}^{m+1} - \ldots - c_n \dot{q}^n ; \quad k = 1, \ldots, m$$

in welke uitdrukking $\dot{q}^{m+1}, \ldots, \dot{q}^n$ als functies van q^k, $\dot{q}^k$, $c_{m+1}, \ldots, c_n$ en t moeten worden geschreven met behulp van de vergelijkingen

45.4 $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{m+1}} = c_{m+1} ; \ldots ; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^n} = c_n$$

of ook met behulp van de daarmede gelijkwaardige vergelijkingen

45.5 $$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_{m+1}} = \dot{q}^{m+1} ; \ldots ; \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_n} = \dot{q}^n$$

in welk laatste geval de p_i $(i = 1, \cdots, m)$ als functies van $q^k, \dot{q}^k, c_{m+1}, \cdots, c_n$ en t geschreven moeten worden met behulp van de vergelijkingen

46.1 $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = p_i \quad ; \quad i = 1, \cdots, m. \text{ 1)}$$

De nieuwe functie van Hamilton $\mathcal{H}^*(p_i, q^k, t)$; $i, k = 1, \cdots, m$ wordt gevonden door in de oude functie $\mathcal{H}$, die $q^{m+1}, \cdots, q^n$ al niet meer bevat, $p_{m+1} = c_{m+1}, \cdots, p_n = c_n$ te stellen

46.2 $$\mathcal{H}^*(p_i, q^k, t) = \mathcal{H}(p_i, q^k, c_{m+1}, \cdots, c_n, t).$$

Nemen we als voorbeeld het eenvoudige geval van een gewoon mechanisch systeem zonder bewegenden dwang met één cyclische coordinaat

46.3 $$\mathcal{T} = \tfrac{1}{2} \mathcal{M} g_{\lambda k}(q^k) \dot{q}^\lambda \dot{q}^k \quad ; \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}(q^k) \quad ; \quad \begin{matrix} k, \lambda = 1, \cdots, n \\ i, k = 1, \cdots, n-1. \end{matrix}$$

(De constante $\mathcal{M}$ met dimensie $[\mathcal{M}]$ dient om aan $g_{\lambda k} dq^\lambda dq^k$ de dimensie $[\mathcal{L}^2]$ te geven).

Dan is:

46.4 $$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} \mathcal{M} g_{\lambda k}(q^k) \dot{q}^\lambda \dot{q}^k - \mathcal{P}(q^k)$$

en

46.5 $$\mathcal{L}^* = \tfrac{1}{2} \mathcal{M} g_{ij}(q^k) \dot{q}^i \dot{q}^j + \mathcal{M} g_{in}(q^k) \dot{q}^i \dot{q}^n + \tfrac{1}{2} \mathcal{M} g_{nn}(q^k) \dot{q}^n \dot{q}^n - \mathcal{P}(q^k) - c_n \dot{q}^n$$

waarin de waarde van $\dot{q}^n$ moet worden gesubstitueerd, die gevonden wordt uit

46.6 $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^n} = \mathcal{M} g_{ni}(q^k) \dot{q}^i + \mathcal{M} g_{nn}(q^k) \dot{q}^n = c_n$$

zoodat

46.7 $$\mathcal{L}^* = \tfrac{1}{2} \left(\mathcal{M} g_{ij} - \mathcal{M} \frac{g_{ni} g_{nj}}{g_{nn}} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{c_n}{g_{nn}} g_{ni} \dot{q}^i - \tfrac{1}{2} \frac{c_n^2}{\mathcal{M} g_{nn}} - \mathcal{P}$$

---

1) De overgang van $\mathcal{L}$ tot $\mathcal{L}^*$ heet in Engeland „transformatie van Routh", in Duitschland „transformatie van Helmholz".

en daaruit volgt, dat het probleem van het wegwerken van den cyclischen coordinaat (the ignoration of the ignorable coordinate) in de uitdrukking xxx voor $\mathcal{L}^*$ ook termen van den eersten graad in de flucties bevat en er dus uitziet als een probleem met bewegenden dwang (moving constraint). Een cyclische coordinaat introduceert dus schijnbaar bewegenden dwang. Bovendien komt er nog een term bij die de flucties niet bevat, en die men dus bij $-\mathcal{P}$ kan voegen. Men zou dus ook kunnen trachten $\mathcal{P}$ weg te werken door het invoeren van cyclische hulpcoordinaten d.w.z. de krachten weg te werken (of te „verklaren") met behulp van verborgen bewegingen. Dit idee van Hertz heeft alleen formeel succes gehad.

De eerste integraal $\mathcal{H} = \mathring{\mathcal{H}}$.

Bestaat er een eerste integraal $\mathcal{H} = \mathring{\mathcal{H}}$ dan bevatten zowel $\mathcal{L}$ als $\mathcal{H}$ den tijd t niet expliciet (zie blz. en)

47.1 $$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

Aangezien t op denzelfden voet behandeld mag worden als de q^k volgt daaruit nu dus onmiddelijk dat de t zich laat wegwerken en dat de integrand der variatievergelijking der extremalen in de coordinatenruimte wordt

47.2 $$d\mathcal{R}^* = -\mathcal{H}dt + p_\lambda dq^\lambda + \mathring{\mathcal{H}}dt = p_\lambda dq^\lambda.$$

Deze extremalen worden dus gevonden uit de variatievergelijking

47.3) $$\delta \int p_\lambda dq^\lambda = 0 \quad (\text{of } \delta \int (\mathcal{L} + \mathring{\mathcal{H}})dt = 0)$$

met de bijconditie

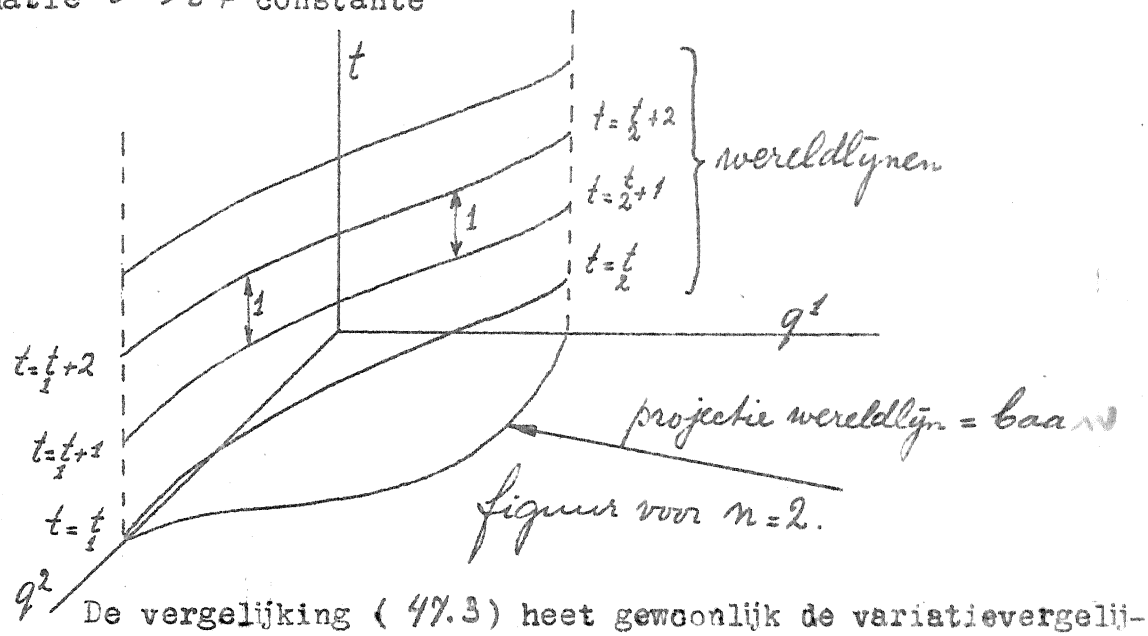
47.4) $$\mathcal{H}(p_\lambda, q^\lambda) = \mathring{\mathcal{H}}.$$

Deze extremalen zijn de projecties van de wereldlijnen op de coordinatenruimte, dat zijn dus de banen. Worden de p_λ in (47.4) met behulp van

47.5. $$p_\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\lambda}$$

uitgedrukt in q^k en $\dot{q}^\lambda$ (t komt hier niet meer voor), dan

geeft deze vergelijking aan hoe de banen in den tijd doorloopen worden. De wereldlijnen zelf gaan in elkaar over bij de transformatie $t \to t +$ constante



De vergelijking (47.3) heet gewoonlijk de variatievergelijking van Maupertuis en is gevonden door Euler. Aangezien $p_\lambda dq^\lambda$ de dimensie van een werking heeft (ML^2T^{-1}) spreekt men ook wel van het „principe" van de kleinste werking. De variatievergelijking (47.3) brengt dus tot uitdrukking dat langs de werkelijke wereldlijn de lijnintegraal van de „werking" extreem (in werkelijkheid minimum) is, wanneer tot vergelijking alleen wereldlijnen worden toegelaten, waarvoor $\mathcal{H}$ de constante waarde $\mathring{\mathcal{H}}$ heeft. Schrijft men $\mathcal{S}$ voor $\int p_\lambda dq^\lambda$ wanneer t uit deze uitdrukking met behulp van (47.4) geelimineerd is, dan volgt

48.1 $$\mathcal{R} = -\mathring{\mathcal{H}} t + \mathcal{S}.$$

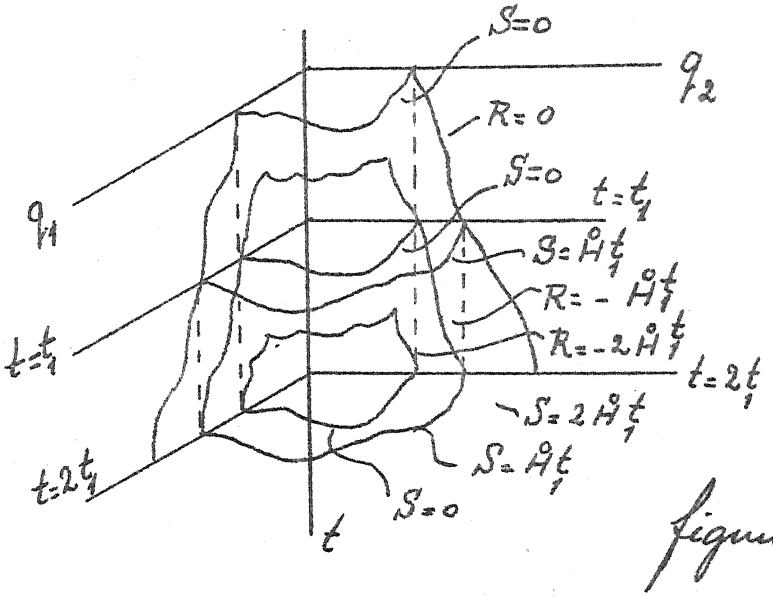
$\mathcal{R}$ bevat dus t alleen in den eersten term en daaruit volgt dat de hyperoppervlakken $\mathcal{R}$ =constant in elkaar overgaan bij de transformatie $t \to t+$const. en dat deze hyperoppervlakken de coordinatenruimte snijden in de $\mathcal{X}_{n-1}$'s $S =$ constant. Naast $\mathcal{R}$ wordt $\mathcal{S}$ ook wel eens „eikonaalfunctie" genoemd. Daar $\mathcal{R}$ aan de vergelijking van Hamilton-Jacobi voldoet, voldoet $\mathcal{S}$ dus aan de vergelijking

48.2 $$\mathcal{H}\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q^\lambda}, q^k\right) = \mathring{\mathcal{H}}.$$

De vergelijking (48.1) drukt uit, dat de coordinatenruimte $\mathcal{X}_n$ (t = constant) door deze $\mathcal{X}_n$ gesneden wordt in een

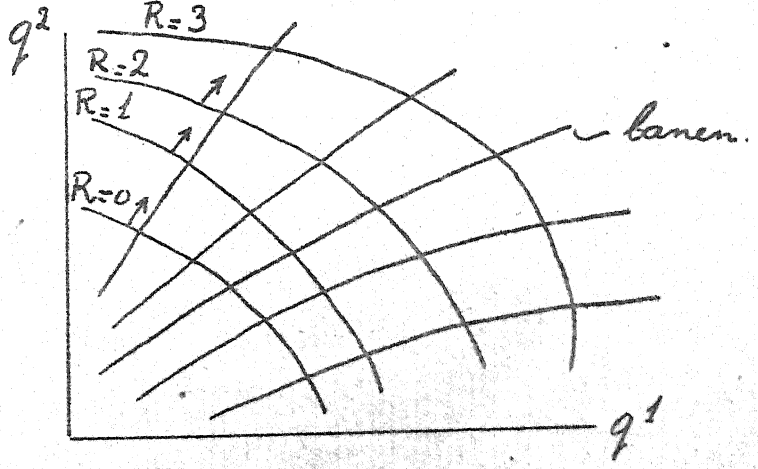
stelsel van $\mathcal{X}_{n-1}$, dat als stelsel invariant is en waarvan de exemplaren opschuiven en elkaars plaats innemen, wanneer de coordinatenruimte in den tijd opschuift door de filmruimte. De figuur is uitgevoerd voor $n = 2$, de ∞-$\mathcal{X}_{n-1}$ zijn krommen. De bij elke kromme van het stelsel behoorende waarde van $\mathcal{R}$ verandert echter met den tijd. Vervolgen we met het oog de kromme, die bijvoorbeeld bij $\mathcal{R}=0$ hoort, dan zien we de kromme bewegen.

† $\mathcal{X}_n$ de q_1 q_2-ruimte is het stelsel dezer krommen invariant.



figuur voor $n=2$.

Combineeren we nu beide figuren in de coordinaten $\mathcal{X}_n$, dan komt er een stel van ∞^{n-1} vaste krommen, de banen, en een stel van ∞^1 $\mathcal{X}_{n-1}$, waarvan elk exemplaar indinvidueel beweegt, maar dat als stelsel onverandert blijft. De $\mathcal{X}_{n-1}$ waarvoor $\mathcal{R} = 0$ is, is ten tijde $t = o$ gegeven door de vergelijking $\mathcal{S} = 0$ en ten tijde $t = t_1$ door $\mathcal{S} = \mathcal{H} t_1$ en neemt dan de plaats in waar voor $t = 0$ de kromme lag waarvoor $\mathcal{R} = \mathcal{H} t_1$ was.



Als voorbeeld kiezen we weer de kogelbanen:

50.1 $$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left\{(p_1)^2+(p_2)^2\right\} + mg\,q^2$$

en de eerste integralen

$$a)\quad p_1 = m\dot{x} = c_1 \;;\; [c_1] = [M L T^{-1}]$$

50.2

$$b)\quad \mathcal{H} = \mathcal{E} = \text{constant. (Hier bestaat een energieintegraal).}$$

In $\mathcal{E}$ zit een willekeurige constante, die hier is vastgelegd door $\mathcal{P} = 0$ te nemen voor $q^2 = 0$, d.w.z. $y = 0$.
Dan is

$$\mathcal{L}\,dt = -\mathcal{E}\,dt + p_1\,dq^1 + p_2\,dq^2$$

50.3

$$= -\mathcal{E}\,dt + c_1\,dx + \sqrt{2m}\sqrt{\mathcal{E} - \frac{1}{2m}c_1^2 - mgy}\,dy$$

en

50.4 $$\mathcal{R} = -\mathcal{E}t + c_1 x - \frac{2\sqrt{2m}}{3mg}\left(\mathcal{E}' - mgy\right)^{3/2} \;;\; \mathcal{E}' = \mathcal{E} - \frac{1}{2m}c_1^2$$

is dus een oplossing van de vergelijking van Hamilton Jacobi.
Het is een andere oplossing als (36.6), we hebben hier echter ook andere eerste integraal genomen. Voor een bepaalde waarde van c_1 en $\mathcal{E}$, dat is dus voor een bepaalde x -snelhei en een bepaalde totale energie, geeft de vergelijking $\mathcal{R} = C$ een stelsel van ∞^1 x_2 in de filmruimte x_3 met de vergelijking

50.5 $$(c_1 x - \mathcal{E}t - C)^2 = \frac{8}{9mg^2}\left(\mathcal{E}' - mgy\right)^3 \;;\; C \text{ is parameter}$$

en deze snijden de xy -ruimte voor $t = t_1$ in het stelsel van ∞^1 krommen van den derden graad met de vergelijking

50.6 $$(c_1 x - \mathcal{E}t_1 - C)^2 = \frac{8}{9mg^2}\left(\mathcal{E}' - mgy\right)^3.$$

Deze krommen zijn allen congruent (dat is een bijzonderheid va dit speciale vraagstuk) en ontstaan uit elkaar door transla in de richting van de x -as. Neemt t_1 toe, dan verplaat de krommen zich allen tegelijk met een snelheid $\frac{\mathcal{E}}{c_1}$ in de ting van de positieve x -as. $\mathcal{E}'$ is het totale arbeidsver

van beweging uitsluitend voor de beweging in de x-richting. Het stelsel bijbehoorende wereldlijnen is gegeven door:

51.1
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = \frac{1}{m} p_1 = \frac{c_1}{m} = \dot{x}$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2} = \frac{1}{m} p_2 = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\mathcal{E}' - mgy} = \dot{y};$$

de banen dus door

51.2
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2m}}{c_1} \sqrt{\mathcal{E}' - mgy},$$

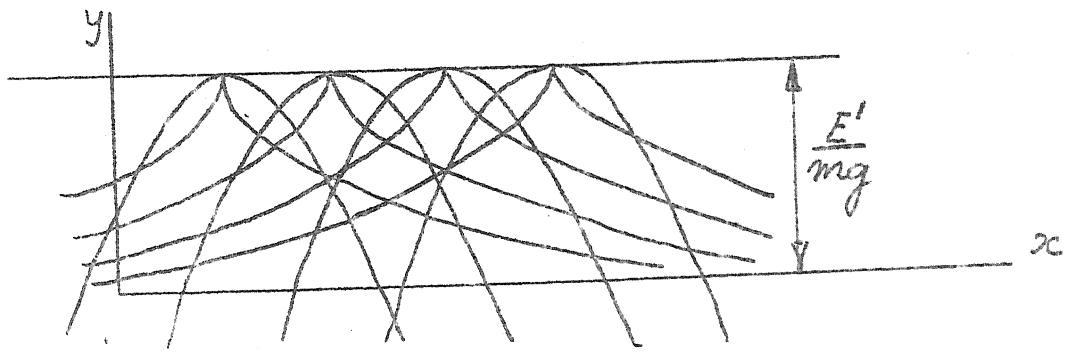
waaruit volgt

51.3
$$x = \frac{c_1}{\sqrt{2m}} \int \frac{dy}{\sqrt{\mathcal{E}' - mgy}} = -\sqrt{\frac{2}{m}} \frac{c_1}{mg} (\mathcal{E}' - mgy)^{1/2} + C',$$

of

51.4
$$(x - C')^2 = -\frac{2c_1^2}{m^2 g} \left(y - \frac{\mathcal{E}'}{mg}\right).$$

Dit is een bundel parabolen. Het zijn de banen voor al die bewegingen waarbij de x-snelheid een gegeven constante $\frac{c_1}{m}$ is en (de totale energie een gegeven constante $\mathcal{E}$ is. Al deze parabolen zijn gelijkvormig en raken aan de as $y = \frac{\mathcal{E}'}{mg}$, de meetkundige plaats der hoogste punten die bij de x-snelheid $\frac{c_1}{m}$ en de totale energie $\mathcal{E}$ te bereiken zijn. De snijkromme (50.6) zijn de orthogonale trajectorien van deze parabolen.



Inderdaad volgt uit (50.6)

51.5
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{c_1}{\sqrt{2m}} (\mathcal{E}' - mgy)^{-1/2}.$$

De orthogonaliteit der beide stelsels volgt dan uit (51.2) e

(51.5). Het is van belang op te merken, dat beide stelsels nie veranderen, wanneer men de willekeurige constante die in $\mathcal{E}$ zit anders kiest.

De waarnemer in de x, y ruimte ziet de snijkromme (50.6) met een constante snelheid $\frac{\mathcal{E}}{c_1}$ in de richting van de positieve x-as loopen, terwijl de banen (51.4) vast blijven staan.

De integratietheorie van Hamilton - Jacobi.

Bij de integratie der kanonische vergelijkingen

52.1
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\lambda} = -\dot{p}_\lambda$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = \dot{q}^k$$

ligt het voor de hand te trachten de integratie te vereenvoudigen door van de q^k over te gaan op handig gekozen andere noodzakelijke coordinaten $\mathcal{Q}^k$, die functies zijn der q^k en eventueel van t . Men kan echter veel verder gaan en vragen of men ook de q^k en de p_λ tegelijk kan transformeeren tot $\mathcal{Q}^k$ en $\mathcal{P}_\lambda$ op zoodanige wijze dat er in die nieuwe variabelen ook weer vergelijkingen van den kanonischen vorm bestaan, waarin dan inplaats van $\mathcal{H}(p,q,t)$ een nieuwe functie $\mathcal{K}(\mathcal{P},\mathcal{Q},t)$ optreedt en wanneer dat mogelijk is gebleken, trachten die transformatie zoo uit te voeren dat de functie $\mathcal{K}$ zoo eenvoudig mogelijk wordt.

Eerst toonen we aan dat er inderdaad transformaties bestaan die den vorm der kanonische vergelijkingen invariant laten. Deze laatste, zijn aequivalent met de variatie vergelijking van Hamilton

52.2
$$\delta \int \{p_\lambda \dot{q}^\lambda - \mathcal{H}(p,q,t)\}\,dt = 0$$

waarbij de trajectorie gevarieerd wordt in de $\mathcal{X}_n$.

We zullen eerst aantoonen, dat de kanonische vergelijkingen evenzeer aequivalent zijn met (52.2), wanneer men de variatie uitgevoerd denkt in de $2n$-dimensionale ruimte $\mathcal{X}_{2n}$ der p_λ en q^k . Deze ruimte heet de phasenruimte (Gibbs) en in die ruimte bepalen opvolgende waarden van p_λ en q^k als functie van t eveneens ee

laatste zijn aequivalent met de variatievergelijking van Hamilton

$$53.1 \qquad \delta \int \{ p_\lambda \dot{q}^\lambda - \mathcal{H}(p, q, t) \} dt = 0$$

waarbij de trajectorie gevarieerd wordt in de X_n

We zullen eerst aantoonen, dat de kanonische vergelijkingen even-zeer aequivalent zijn met (53.1), wanneer men de variatie uitgevoerd denkt in de $2n$-dimensionale ruimte X_{2n} der p_λ en q^κ

Deze ruimte heet de <u>phasenruimte</u> (Gibbs) en in die ruimte bepalen de opvolgende waarden van p_λ en q^κ als functie van t eveneens een kromme, de <u>phasenbaan</u> In die phasenruimte worden p_λ en q^κ <u>onafhankelijk van elkaar</u> gevarieerd waarbij t constant gehouden wordt. Dan is

$$53.2 \qquad \delta \int (p_\lambda \dot{q}^\lambda - \mathcal{H}) dt = \int \delta p_\lambda \dot{q}^\lambda dt + p_\lambda \delta dq^\lambda - \frac{\partial H}{\partial q^\kappa} \delta q^\kappa dt - \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} \delta p_\lambda dt$$

$$= \int \left(\dot{q}^\kappa - \frac{\partial H}{\partial p_\kappa} \right) \delta p_\kappa dt - \int \left(\dot{p}_\lambda + \frac{\partial H}{\partial q^\lambda} \right) \delta q^\lambda dt$$

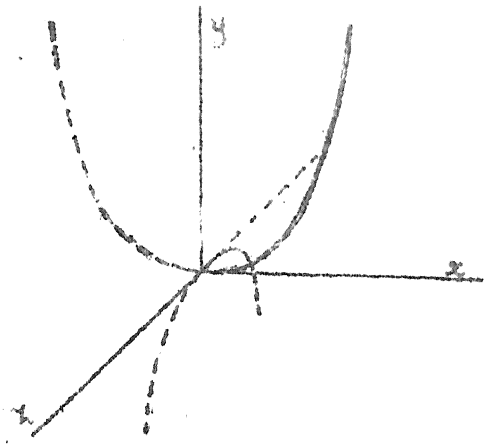
waaruit volgt, dat deze variatie dan en alleen dan steeds verdwijnt wanneer de kanonische vergelijkingen

$$53.3 \qquad \frac{\partial H}{\partial q^\lambda} = - \dot{p}_\lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\kappa} = \dot{q}^\kappa$$

gelden.

Uit het verdwijnen der variatie mag men nog niet besluiten, dat $\int f dt$ nu ook in de <u>phasenruimte</u> een minimum is. Zelfs behoeft dit niet het geval te zijn als $\int f dt$ in de <u>coördinatenruimte</u> een minimum is. Immers in de phasenruimte hebben we veel meer mogelijkheden van variatie, daar p_λ en q^κ daar onafhankelijk van elkaar worden gevarieerd. Eerst de bijvoorwaarde $p_\lambda = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^\lambda}$ beperkt deze mogelijkheden. Dat een maximum of minimum door het opheffen van bijvoorwaarden bedorven kan worden is een gewoon verschijnsel. Op het oppervlak $x^2 - z^2 - 2py = 0$ is in $x = 0$, $y = 0$ $z = 0$ weliswaar $dy = 0$ maar er is geen maximum van y (zadelpunt)



De bijvoorwaarde $x = o$ voert tot een maximum, $z = o$ daarentegen tot een minimum; voor de bijvoorwaarde $x = z$ is er noch maximum noch minimum.

We gaan dus nu uit van vergelijkingen van den vorm

54.1
$$P_\lambda = P_\lambda(p, q, t)$$
$$Q^\kappa = Q^\kappa(p, q, t)$$

en eischen, dat uit (53.1) volgt

54.2
$$\delta \int \left(P_\lambda \dot{Q}^\lambda - \mathcal{K}(P, Q, t) \right) dt = o$$

en omgekeerd. Drukken we alles in P_λ, Q^κ en t uit, dan wordt het verschil van (53.1) en (54.2) een functie van P_λ Q^κ en t waarvoor we schrijven

54.3
$$\psi(P, Q, t) = p_\lambda \dot{q}^\lambda - \mathcal{H}(p, q, t) - P_\lambda \dot{Q}^\lambda + \mathcal{K}(P, Q, t)$$

en de eisch is dus dat

54.4
$$\delta \int \psi \, dt = o$$

d.w.z. dat $\int \psi \, dt$ voor alle krommen tusschen twee willekeurig gekozen punten dezelfde waarde heeft. Dit is echter dan en alleen dan mogelijk wanneer $\psi \, dt$ een volledig differentiaal is en er dus een functie $\Phi(P, Q, t)$ bestaat, zoo dat

54.5
$$\psi = \frac{d\Phi}{dt}$$

Dit, gesubstitueerd in (54.3) leidt tot

54.6
$$p_\kappa \, dq^\kappa - \mathcal{H} \, dt = P_\kappa \, dQ^\kappa - \mathcal{K} \, dt + d\Phi(P, Q, t).$$

We gaan nu alles uitdrukken in de $2n+1$ variabelen q^κ, Q^κ en t en schrijven

54.7
$$\Phi(P, Q, t) = V(q, Q, t)$$

Dan gaat (54.6) over in

$$55.1 \qquad p_\kappa dq^\kappa - P_\kappa d\varphi^\kappa + (K - \mathcal{H})dt = \frac{\partial V}{\partial q^\kappa} dq^\kappa + \frac{\partial V}{\partial \varphi^\kappa} d\varphi^\kappa + \frac{\partial V}{\partial t} dt,$$

waaruit volgt

$$p_\lambda = \frac{\partial V}{\partial q^\lambda}$$

$$55.2 \qquad P_\lambda = -\frac{\partial V}{\partial \varphi^\lambda}$$

$$K = \mathcal{H} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

uit welke $2n+1$ vergelijkingen men de P_λ en de φ^κ als functies van de p_λ, de q^κ en t en K als functie van de P_λ, de φ^κ en t kan oplossen.

Daarmee is de stelling bewezen.

Men kan een transformatie van p_λ, q^κ in P_λ, φ^κ, die den vorm der kanonische vergelijkingen invariant laat verkrijgen, door, uitgaande van een willekeurige functie $V(q, \varphi, t)$ de vergelijkingen (55.2) op te schrijven en uit deze P_λ, φ^κ als functies van p_λ, q^κ en t, en K als functie van P_λ, φ^κ en t te berekenen.

Men noemt dergelijke transformaties contacttransformaties.

De contacttransformaties vormen een groep, d w z het stelsel van alle contacttransformaties voldoet aan de eischen:

1. De resultante van twee na elkaar uitgevoerde transformaties van het stelsel is weer een transformatie van het stelsel.

2. De identische transformatie behoort tot het stelsel.

3. De omkeering van iedere transformatie van het stelsel is weer een transformatie van het stelsel.

Het spreekt vanzelf, dat de φ^κ niet meer de beteekenis van noodzakelijke koordinaten van het mechanische probleem hebben, dan zouden ze immers functies van de q^κ en eventueel van t moeten zijn. Zulke eenvoudige transformaties, die Koordinatentransformaties in de χ_n zijn, zijn natuurlijk een bijzonder geval van con-

tacttransformaties.

Bij de afleiding hebben we alles in q^κ , Q^κ en t uitgedrukt en zijn dienovereenkomstig ook tot een functie $V(q,Q,t)$ gekomen. Dit is niet noodig, men kan ook alles uitdrukken in n willekeurige der variabelen p_λ , q^κ en n willekeurige der variabele P_λ , Q^κ en krijgt dan de volgende stelling:

Zijn y^κ willekeurige uit p_λ , q^κ , dus in het algemeen ten deele coordinaten, ten deele impulsies en x_λ de bijbehoorende impulsies resp. coordinaten en verdeelt men evenzoo willekeurig P_λ , Q^κ over y^κ en x_λ en is tenslotte $V(y^\kappa, Y^\kappa, t)$ een functie van y^κ , Y^κ en t , dan is

$$x_\lambda = \pm \frac{\partial V}{\partial y^\lambda}$$

$$X_\lambda = \mp \frac{\partial V}{\partial Y^\lambda} \qquad \text{§ 6.1}$$

$$K = \mathcal{H} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

een contacttransformatie, d.w.z. voor X_λ , Y^κ gelden de kanonische vergelijkingen

$$\frac{\partial K}{\partial Y^\lambda} = \mp \dot{X}_\lambda \qquad \text{(teken als vroeger)}$$

$$\frac{\partial K}{\partial X_\kappa} = \mp \dot{Y}^\kappa \qquad \text{§ 6.1}$$

Voorbeeld 1 :

Neem voor de y^κ de q^κ
voor de x_λ de p_λ
voor de Y^κ de Q^κ
voor de X_λ de P_λ

dan keeren we terug tot het boven omschreven geval.

Voorbeeld 2 :

Neem voor de y^κ de q^κ
voor de x_λ de p_λ
voor de Y^κ de P_λ
voor de X_λ de Q^λ

Er is dan een functie $V(q^\kappa, P_\lambda, t)$ en we hebben

$$p_\lambda = \frac{\partial V}{\partial q^\lambda}$$

57.1
$$Q^\kappa = \frac{\partial V}{\partial P_\kappa}$$

$$K = H + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Dat we inderdaad een contacttransformatie hebben volgt uit

$$p_\kappa dq^\kappa - H dt - P_\kappa dQ^\kappa + K dt =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial q^\kappa} dq^\kappa + \frac{\partial V}{\partial t} dt - d(P_\kappa Q^\kappa) + \frac{\partial V}{\partial P_\kappa} dQ^\kappa =$$

$$= d(V - P_\kappa Q^\kappa) = \text{volledige differentiaal}$$

Nemen we speciaal

57.3
$$V = P_\lambda F^\lambda(q)$$

dan ontstaat de transformatie

$$p_\lambda = P_\kappa \frac{\partial F^\kappa(q)}{\partial q^\lambda}$$

57.4
$$Q^\kappa = F^\kappa(q)$$

$$K = H$$

die een zuivere punttransformatie is de X_n is, omdat de Q^κ geen functies der p_λ zijn.

De identische transformatie ontstaat voor $F^\lambda(q) = q^\kappa$, dus voor $V = P_\kappa q^\kappa$.

Voorbeeld 3. Neem voor de y^λ de p_λ
voor de x_κ de q^κ
voor de y^κ de Q^κ
voor de X_λ de P_λ

Er is dan een functie $V(p_\lambda, Q^\kappa, t)$ en we hebben

$$q^\kappa = -\frac{\partial V}{\partial p_\kappa}$$

57.5
$$P_\lambda = -\frac{\partial V}{\partial Q^\lambda}$$

$$K = H + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Ook hier hebben we inderdaad een contacttransformatie:

58.1 $$p_\kappa dq^\kappa - H dt - P_\kappa d\mathcal{Q}^\kappa + K dt = d(p_\kappa q^\kappa) + \frac{\partial V}{\partial p_\kappa} dp_\kappa + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial \mathcal{Q}^\kappa} d\mathcal{Q}^\kappa = d(V + p_\kappa q^\kappa)$$

Nemen we speciaal

58.2 $$V = - p_\kappa f^\kappa(\mathcal{Q}),$$

dan ontstaat de zuivere puntransformatie

58.3 $$q^\kappa = f^\kappa(\mathcal{Q})$$
$$\mathcal{P}_\lambda = p_\kappa \frac{\partial f^\kappa(\mathcal{Q})}{\partial \mathcal{Q}^\lambda}$$
$$\mathcal{K} = H$$

die voor $f^\kappa(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}^\kappa$ in de identische transformatie overgaat.

De bedoeling is nu zoodanige contacttransformaties te vinden, die K zoo eenvoudig mogelijk maken. Het mooiste is $K = 0$ te maken. De kanonische vergelijkingen zouden dan luiden

58.4 $$\dot{P}_\lambda = 0 \quad ; \quad \dot{\mathcal{Q}}^\kappa = 0$$

en de oplossing ware door onmiddelijke integratie te vinden

58.5 $$\mathcal{P}_\lambda = \text{constant} \; ; \; \mathcal{Q}^\kappa = \text{constant}$$

Een functie V die dit doel doet bereiken zullen we $R(q, \mathcal{Q}, t)$ noemen.

Dan geldt:

58.6 $$p_\lambda = \frac{\partial R}{\partial q^\lambda}$$
$$P_\lambda = - \frac{\partial R}{\partial \mathcal{Q}^\lambda}$$
$$\frac{\partial R}{\partial t} = - \mathcal{H}(q, p, t)$$

De laatste vergelijking is echter, wanneer we de waarde van p_λ uit de eerste vergelijking substitueeren een differentiaalvergelijking voor R, <u>die uitsluitend</u> q, $\mathcal{Q}$ <u>en</u> t <u>bevat</u>:

58.7 $$\boxed{\frac{\partial R}{\partial t} = - \mathcal{H}\left(q^\kappa, \frac{\partial R}{\partial q^\lambda}, t\right)}$$

en waarin de Q_λ als onafhankelijke variabelen, die niet gedifferentieerd worden, de rol van n onafhankelijke parameterr spelen. Wij komen hier weer uit op de differentiaalvergelijking van Hamilton-Jacobi, en het blijkt derhalve, dat R niets anders is als een eikonaalfunctie, of eigenlijk ∞^n eikonaalfuncties, omdat er nog n willekeurig te kiezen onafhankelijke parameters in zitten.

Nu hebben we vroeger gevonden dat een oplossing voor (58.7) met n integratieconstanten e^λ voert tot de oplossing der kanonische vergelijkingen

59.1 $$\frac{\partial R}{\partial e^\lambda} = b_\lambda = \text{constant}.$$

Dit is precies wat we hier terugvinden:

59.2 $$\frac{\partial R}{\partial Q^\lambda} = P_\lambda = \text{constant}$$

want

59.3 $$\dot{P}_\lambda = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q^\lambda} = 0$$

De parameters Q^κ spelen hier de rol van de constanten e^λ, zij zijn inderdaad constant, want

59.4 $$\dot{Q}^\kappa = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\kappa} = 0$$

We hebben dus de stelling verkregen:

Is $R(q^\kappa, t, Q^\kappa)$ een oplossing van de vergelijking van Hamilton - Jacobi met n onafhankelijke integratieconstanten Q^κ en is dientengevolge

59.5 $$\frac{\partial R}{\partial Q^\lambda} = P_\lambda = \text{constant}$$

de oplossing der kanonische vergelijkingen, dan gaan de kanonische vergelijkingen door de contacttransformatie

59.6 $$p_\lambda = \frac{\partial R}{\partial q^\lambda}$$
$$P_\lambda = -\frac{\partial R}{\partial Q^\lambda}$$

over in de kanonische vergelijkingen waarin P_λ, Q^κ optreden in plaats van p_λ en q^κ en waarbij H nul gevonden is:

59.7 $$0 = \dot{P}_\lambda$$
$$0 = \dot{Q}^\kappa$$

Gebruiken we de oplossing om de eenvoudige eikonaalfunctie $\mathring{R}(q^\kappa, t, \mathring{q}^\kappa, \mathring{t})$ te construeeren dan hebben we vroeger gevonden, dat

$$p_\lambda = \frac{\partial \mathring{R}}{\partial q^\lambda}$$

$$\mathring{p}_\lambda = -\frac{\partial R}{\partial \mathring{q}^\lambda}$$

Vergelijking met (55.2) leert dat dit een contacttransformatie van $\mathring{p}_\lambda, \mathring{q}^\kappa$ in p_λ, q^κ voorstelt. De overgang van den bewegingstoestand ten tijde $t = \mathring{t}$ naar den bewegingstoestand op een willekeurigen tijd t is dus een contacttransformatie.

We zullen nog laten zien, dat dit precies de beteekenis is van de kanonische vergelijkingen. Neemt men in de vergelijking (57.1) van het tweede voorbeeld op blz. 57

$$p_\lambda = \frac{\partial V(q, P, t)}{\partial q^\lambda}$$

60.2

$$Q^\kappa = \frac{\partial V(q, P, t)}{\partial P_\kappa}$$

met

60.3 $$V = P_\lambda q^\lambda + \varphi(q, P, t)\, dt,$$

dan wordt

$$p_\lambda = P_\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial q^\lambda} dt$$

60.4

$$Q^\kappa = q^\kappa + \frac{\partial \varphi}{\partial P_\kappa} dt$$

een infinitesimale contacttransformatie, die slechts infinitesimaal van de identische verschilt (zie blz. 57)

Schrijven we dus $P_\lambda = p_\lambda + dp_\lambda$ en $Q^\kappa = q^\kappa + dq^\kappa$, dan is

$$dp_\lambda = -\frac{\partial \varphi}{\partial q^\lambda} dt$$

60.5

$$dq^\kappa = \frac{\partial \varphi}{\partial p_\kappa} dt$$

en dit zijn juist de kanonische vergelijkingen voor $H = \varphi$. De geheele beweging van een mechanisch systeem is dus niets anders als de geleidelijke zelfontvouwing van een contactransformatie (Whittaker blz 304).

Bijzondere gevallen van integratie volgens Hamilton - Jacobi.

Indien H uitgedrukt in p_λ en q^κ niet expliciet t bevat bestaat er een eerste integraal

61.1 $$H = \mathring{H}$$

en we hebben gezien, dat de oplossing van de vergelijking van Hamilton - Jacobi

61.2 $$\frac{\partial R}{\partial t} = -\mathcal{H}\left(q^\kappa, \frac{\partial R}{\partial q^\lambda}\right)$$

dan van den vorm

61.3 $$R = -\mathring{H} t + S(q^\kappa)$$

is, waar S voldoet aan de vergelijking

61.4 $$\mathcal{H}\left(q^\kappa, \frac{\partial S}{\partial q^\lambda}\right) = \mathring{H}$$

Men behoeft dus nu nog slechts een functie $S(q^\kappa)$ te bepalen, die $n-1$ verdere constanten bevat.

Iets dergelijks treedt nu ook op wanneer één der noodzakelijke coördinaten cyclisch is, d.w.z. in de uitdrukking voor $\mathcal{L}$ in $\dot{q}^\kappa$, q^κ en t niet voorkomt (de afgeleide naar t mag wel voorkomen) Is q^1 die cyclische coördinaat, dan is de bijbehoorende vergelijking van Lagrange

61.5 $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^1} = 0 \qquad \text{of} \qquad p_1 = \text{constant}$$

en daaruit volgt, dat ook $\mathcal{H}$ niet van q^1 afhangt:

61.6 $$\frac{\partial H}{\partial q^1} = -\dot{p}_1 = 0$$

Er is dus een eerste integraal en men kan voor R nemen

62.1 $$R = \beta_1 q^1 + R'(q^2, \ldots, q^n)$$

Gesubstitueerd in de vergelijking van Hamilton - Jacobi levert dit

62.2 $$\frac{\partial R'}{\partial t} = -\mathcal{H}\left(q^1, \ldots, q^n, \beta_1, \frac{\partial R'}{\partial q^2}, \ldots, \frac{\partial R'}{\partial q^n}\right)$$

In het geval dat $\mathcal{H}$ niet expliciet van t afhangt en $q^1, \ldots, q^{n-s}$ alle cyclisch zijn, zijn er n eerste integralen (van een zeer bijzonder soort) en men kan voor R nemen

62.3 $$R = -\mathring{H}t + \beta_1 q^1 + \ldots + \beta_{n-1} q^{n-1} + R''(q^n),$$

waaruit bij substisutie volgt

62.4 $$\mathring{H} = \mathcal{H}\left(q^n, \frac{dR''}{dq^n}\right)$$

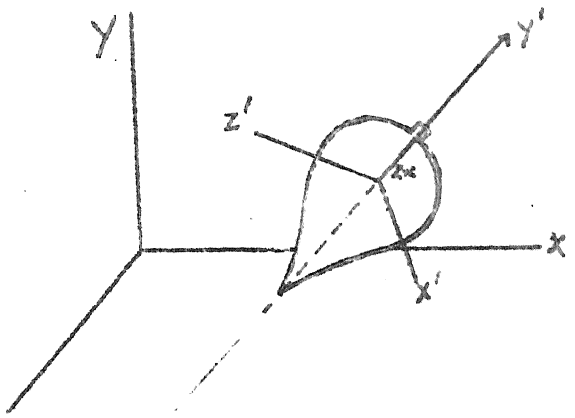
uit welke vergelijking zich $\frac{dR''}{dq^n}$ laat oplossen:

62.5 $$\frac{dR''}{dq^n} = \varphi(q^n)$$

en welke oplossing dus met één quadratuur gevonden kan worden Een probleem met $n-1$ cyclische coordinaten komt dus neer op één quadratuur

Voorbeeld

Als voorbeeld behandelen we de beweging van een tol over een volkomen glad horizontaal vlak. De tol is een homogeen omwentelingslichaam en de afstand van het zwaartepunt tot de punt is ℓ. X, Y, Z is een vast coördinatenstelsel, X', Y', Z' een stelsel dat met de tol meebeweegt. We voeren de drie



hoeken van Euler θ, φ, ψ in (zie vraagstukkenboek blz. 69) Noodzakelijke coördinaten zijn dan x, r, φ, ψ en θ Schrijven we A voor $J_{x'} = J_{z'}$ en B voor $J_{y'}$, dan is

63.1 $$T = \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} m \dot{z}^2 + \tfrac{1}{2} m l^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} A w_1^2 + \tfrac{1}{2} B w_2^2 + \tfrac{1}{2} A w_3^2$$

$$= \tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + l^2 \sin^2\theta\, \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2} A (\dot{\psi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \tfrac{1}{2} B (\dot{\psi}^2 \cos^2\theta + \dot{\varphi}^2 + 2 \dot{\psi} \dot{\varphi} \cos\theta)$$

(zie voor de herleiding van w_1, w_2 en w_3 het vraagstukkenboek).

$$P = m g l \cos\theta$$

63.2 $$\mathcal{H} = T + P = E = \tfrac{1}{2} m \dot{x}^2 + \tfrac{1}{2} m \dot{z}^2 + (\tfrac{1}{2} m l^2 \sin^2\theta + \tfrac{1}{2} A)\, \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} (A \sin^2\theta + B \cos^2\theta)\, \dot{\psi}^2 + \tfrac{1}{2} B \dot{\varphi}^2 + B \cos\theta\, \dot{\varphi} \dot{\psi} + m g l \cos\theta$$

$$\mathcal{L} = T - P$$

Nu is

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

$$p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m \dot{z}$$

63.3 $$p_3 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = B \dot{\varphi} + B \cos\theta\, \dot{\psi}$$

$$p_4 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = (A \sin^2\theta + B \cos^2\theta)\, \dot{\psi} + B \cos\theta\, \dot{\varphi}$$

$$p_5 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = (m l^2 \sin^2\theta + A)\, \dot{\theta}$$

waaruit volgt dat

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p_1$$

$$\dot{z} = \frac{1}{m} p_2$$

63.4 $$\dot{\varphi} = \frac{p_3}{B} - \cos\theta\, \frac{p_4 - p_3 \cos\theta}{A \sin^2\theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{p_4 - p_3 \cos\theta}{A \sin^2\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_5}{m l^2 \sin^2\theta + A}$$

Dit geeft gesubstitueerd in (63.2)

63.5 $$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m} p_1^2 + \frac{1}{m} p_2^2 + \frac{p_3^2}{B} + \frac{(p_4 - p_3 \cos\theta)^2}{A \sin^2\theta} + \frac{p_5^2}{m l^2 \sin^2\theta + A} \right\} + m g l \cos\theta$$

en de vergelijking van Hamilton - Jacobi luidt dus

$$64.1 \quad \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{m}\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{m}\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{B}\left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{A\sin^2\theta}\left(\frac{\partial R}{\partial \psi} - \frac{\partial R}{\partial \varphi}\cos\theta\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{ml^2\sin^2\theta + A}\left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2\right\} + mgl\cos\theta = 0$$

De coordinaten x , z , φ en ψ zijn dus cyclisch en R is derhalve van den vorm

$$64.2 \quad R = -Et + a_1 x + a_2 z + a_3 \varphi + a_4 \psi + f(\theta),$$

waarin E, a_1, a_2, a_3 en a_4 constanten zijn. Substitueert men dit in (64.1), dan volgt

$$64.3 \quad -E + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{m}a_1^2 + \frac{1}{m}a_2^2 + \frac{1}{B}a_3^2 + \frac{1}{A\sin^2\theta}(a_4 - a_3\cos\theta)^2 + \right.$$

of:

$$\left. + \frac{1}{ml^2\sin^2\theta + A}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2\right\} + mgl\cos\theta = 0$$

$$64.4 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 = (ml^2\sin^2\theta + A)\left(2E - 2mgl\cos\theta - \frac{1}{m}a_1^2 - \frac{1}{m}a_2^2 - \frac{a_3^2}{B} - \frac{(a_4 - a_3\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}\right)$$

$$= (ml^2\sin^2\theta + A)\,\Omega(E, a_1, a_2, a_3, a_4, \theta),$$

zoodat

$$64.5 \quad f = \int \sqrt{ml^2\sin^2\theta + A}\,\sqrt{\Omega}\,d\theta$$

en

$$64.6 \quad R = -Et + a_1 x + a_2 z + a_3 \varphi + a_4 \psi + f(E, a_1, a_2, a_3, a_4, \theta)$$

Hier hebben we nu een oplossing met 5 integratieconstanten. Derhalve luidt de oplossing

$$64.7 \quad \frac{\partial R}{\partial E} = -t + \int \sqrt{ml^2\sin^2\theta + A}\;\Omega^{-\frac{1}{2}}\,d\theta = b_0 ; \quad \text{want } \frac{\partial \Omega}{\partial E} = 2$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_1} = x - \frac{a_1}{m}\int \sqrt{ml^2\sin^2\theta + A}\;\Omega^{-\frac{1}{2}}\,d\theta = b_1 ; \quad \text{want } \frac{\partial \Omega}{\partial a_1} = -\frac{2a_1}{m}.$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_2} = z - \frac{a_2}{m}\int \sqrt{\quad}\;\Omega^{-\frac{1}{2}}\,d\theta = b_2$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_3} = \varphi + \int \sqrt{ml^2\sin^2\theta + A}\;\Omega^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{a_3}{B} + \frac{\cos\theta}{A\sin^2\theta}(a_4 - a_3\cos\theta)\right)d\theta ; \quad \text{want } \frac{\partial \Omega}{\partial a_3} = \dots$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_4} = \psi - \int \sqrt{\quad}\;\Omega^{-\frac{1}{2}}\,\frac{a_4 - a_3\cos\theta}{A\sin^2\theta}\,d\theta ; \quad \text{want } \frac{\partial \Omega}{\partial a_4} = -\frac{2(a_4 - a_3\cos\theta)}{A\sin^2\theta}$$

Daarnaast vinden we nog 5 eerste integralen

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = a_1 = p_1 = m\dot{x}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{z}} = a_2 = p_2 = m\dot{z}$$

65.1
$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}} = a_3 = p_3 = B\dot{\varphi} + B\cos\theta\,\dot{\psi}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\psi}} = a_4 = p_4 = 2\left(A\sin^2\theta + B\cos^2\theta\right)\dot{\psi} + 2B\cos\theta\,\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = \sqrt{m l^2 \sin^2\theta + A}\,\sqrt{\Omega} = p_5 = \left(m l^2 \sin^2\theta + A\right)\dot{\theta}$$

Problemen met een P afhankelijk van q^κ, $\dot{q}^\kappa$ en t.

De splitsing van $\mathcal{L}$ in twee stukken waarvan het eene, T, het arbeidsvermogen van beweging en het tweede, $-P$, het negatieve arbeidsvermogen van plaats voorstelt is tot hier eigenlijk alleen in het speciale geval gebruikt dat er een energieintegraal was, dat is dus het geval waar T quadratisch in de $\dot{q}^\kappa$ is met coëfficiënten, die niet van t afhangen en P tenminste niet van $\dot{q}^\kappa$ of van t afhangt. (Vgl. blz. 3 [1]).

We gaan nu het algemeenere geval beschouwen, waarbij alleen verlangt wordt, dat T quadratisch is in de $\dot{q}^\kappa$

65.2
$$T = \tfrac{1}{2} M g_{\lambda\kappa} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\kappa \qquad (\text{vgl. blz. } 45)$$

en P lineair maar niet noodzakelijk homogeen in de $\dot{q}^\kappa$ is:

65.3
$$P = \pi_\lambda \dot{q}^\lambda + \mathring{\pi}.$$

Dan wordt $\mathcal{L}$ een niet homogene functie der $\dot{q}^\kappa$ van den graad 2 met coëfficiënten $g_{\lambda\kappa}$, π_λ en $\mathring{\pi}$, die van q^κ en t afhangen:

65.4
$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2} M g_{\lambda\kappa} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\kappa - \pi_\lambda \dot{q}^\lambda - \mathring{\pi}$$

Verder is

---

1) Op blz. 3 is een fout te corrigeeren. We hebben $H = T + P$, wanneer T quadratisch in de $\dot{q}^\kappa$ is met coëfficiënten, die niet van t afhangen, en P alleen van q^κ en t afhangt. Er is een energieintegraal $H = E$ = constant, wanneer bovendien P niet van t afhangt.

66.1 $$p_\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^\lambda} = M g_{\lambda\kappa}\dot q^\kappa - \pi_\lambda$$

en dus

66.2 $$\dot q^\kappa = \frac{1}{M} g^{\kappa\lambda}(p_\lambda + \pi_\lambda). \qquad g^{\kappa\mu} g_{\mu\lambda} = \begin{cases} 0, & \kappa \neq \lambda \\ 1, & \kappa = \lambda \end{cases} \quad (\text{zie } 66.51)$$

Uit de laatste vergelijking volgt, dat

66.3 $$T = \frac{1}{2M} g^{\kappa\lambda}(p_\kappa + \pi_\kappa)(p_\lambda + \pi_\lambda)$$

en dus

66.4 $$\mathcal{H} = -\mathcal{L} + p_\kappa \dot q^\kappa = -\tfrac{1}{2} M g_{\lambda\kappa}\dot q^\lambda \dot q^\kappa + \pi_\lambda \dot q^\lambda + \dot\pi + \frac{1}{M} g^{\kappa\lambda} p_\kappa (p_\lambda + \pi_\lambda)$$
$$= \frac{1}{2M} g^{\kappa\lambda}(p_\kappa p_\lambda + 2 p_\kappa \pi_\lambda + \pi_\kappa \pi_\lambda) + \dot\pi$$

We zullen voor de berekining aannemen dat de $g_{\lambda\kappa}$ en dus ook de $g^{\kappa\lambda}$ constanten zijn, het algemeene geval voert tot het zelfde resultaat maar eischt meer rekenwerk. De kanonische vergelijkingen luiden dan:

66.5 $$\dot q^\kappa = \frac{\partial H}{\partial p_\kappa} = \frac{1}{M} g^{\kappa\lambda}(p_\lambda + \pi_\lambda)$$

$$\dot p_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial q^\lambda} = -\frac{1}{M} g^{\kappa\mu}\frac{\partial \pi_\kappa}{\partial q^\lambda}\pi_\mu - \frac{1}{M} g^{\kappa\mu} p_\mu \frac{\partial \pi_\kappa}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial \dot\pi}{\partial q^\lambda} =$$
$$= -\dot q^\kappa \frac{\partial \pi_\kappa}{\partial q^\lambda} - \frac{\partial \dot\pi}{\partial q^\lambda}$$

De eerste van deze vergelijkingen levert niets nieuws op, de laatste geeft echter in verband met (66.1)

66.6 $$M\ddot q^\kappa - g^{\kappa\lambda}\dot q^\mu \frac{\partial \pi_\lambda}{\partial q^\mu} - g^{\kappa\lambda}\frac{\partial \pi_\lambda}{\partial t} = -g^{\kappa\lambda}\dot q^\mu \frac{\partial \pi_\mu}{\partial q^\lambda} - g^{\kappa\lambda}\frac{\partial \dot\pi}{\partial q^\lambda}$$

of

66.7 $$M\ddot q^\kappa = g^{\kappa\lambda}\dot q^\mu\left(\frac{\partial \pi_\lambda}{\partial q^\mu} - \frac{\partial \pi_\mu}{\partial q^\lambda}\right) + g^{\kappa\lambda}\left(\frac{\partial \pi_\lambda}{\partial t} - \frac{\partial \dot\pi}{\partial q^\lambda}\right)$$

Nemen we het geval dat q^1, q^2 en q^3 orthogonale cartesische coördinaten in de gewone ruimte zijn en dat dus $T = \frac{1}{2} m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$ is, dan gaat de vergelijking over in

66.8 $$m\ddot x = v_2\left(\frac{\partial \pi_3}{\partial y} - \frac{\partial \pi_2}{\partial z}\right) - v_3\left(\frac{\partial \pi_3}{\partial x} - \frac{\partial \pi_1}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \pi_1}{\partial t} - \frac{\partial \dot\pi}{\partial x}\right); \text{ enz.}$$

Schrijven we nu

66.9 $$\pi_1 = -\frac{e}{c}\varphi_1 \; ; \quad \dot\pi = -e\varphi_4$$

e = electrische lading.
c = lichtsnelheid.

dan ontstaat

vgl. 1 $$m\ddot{x} = \frac{e}{c}\left\{v_2\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right) - v_3\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\right) + e\left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right)\right.$$; cycl.

de bekende vergelijking voor de beweging van massapunt met electrische lading e in een electromagnetisch veld met vectorpotentiaal φ_1 , φ_2 , φ_3 en scalaire potentiaal φ_4 . Schrijft men

vgl. 2
$$\mathcal{E}_x = \frac{\partial \varphi_4}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 1\text{-componente electrisch veld}$$
$$B_x = \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 1\text{-componente magnetisch veld}$$

dan ontstaat de bekende vorm

vgl. 3 $$m\ddot{x} = e\,\mathcal{E}_x + \frac{e}{c}\left(v_2 B_z - v_3 B_y\right)$$; cycl.

Gaat men derhalve uit van $\mathcal{L}$, die quadratisch maar niet homogeen in de snelheden is en met name ook termen van den eersten graad in de snelheden bevat, dan verkrijgt men bewegingsvergelijkingen, die voor $n = 3$ en een gewoon rechthoekig coordinatenstelsel, juist den vorm hebben van de electrodynamische bewegingsvergelijkingen voor een geladen massapunt. De electrodynamica in den klassieken, niet relativistischen vorm blijkt dus een bijzonder geval te zijn van de gewone klassieke mechanica.

De uitdrukking voor $\mathcal{L}$ wordt

vgl. 4 $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{e}{c}\left(\varphi_1\dot{x} + \varphi_2\dot{y} + \varphi_3\dot{z}\right) - e\varphi_4$$

voor de impulsies vinden we

vgl. 5 $$p_x = m\dot{x} + \frac{e}{c}\varphi_x$$; cycl

en voor H

vgl. 6 $$H = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + e\varphi_4$$
$$= \frac{1}{2m}\left(p_x - \frac{e}{c}\varphi_x\right)^2 + \text{cycl.} + e\varphi_4$$

Uit (67.2) volgt het eerste stel van vergelijkingen van Maxwell:

68.1
$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} + c^{-1}\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$
$$-\frac{\partial B_x}{\partial x} - \frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

maar niet het tweede stel

68.2
$$c^{-1}\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial x} = -\frac{\rho}{c}u_x \quad ; \quad \rho = \text{ladingsdichtheid}$$
$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = +\rho \quad ; \quad u = \text{snelheid van de lading met dichtheid } \rho$$

want de puntvormige lading e van het massadeeltje heeft niet te maken met een eventueel ~~verschillen~~ aanwezig continu verdeelde lading in het veld.

Homogeniseering.

Beschouwt men de vergelijking

68.3
$$\mathcal{L}\,dt = -H\,dt + p_\lambda\,dq^\lambda = -H\,dt + p_1\,dq^1 + \cdots + p_n\,dq^n$$

voor den integrand in de integraal $\int \mathcal{L}\,dt$ dan valt op, dat H hier eenzelfde rol spoelt als een p en t eenzelfde rol als een q. De overeenkomst tusschen de t en de q^κ komt ook sterk uit in de filmruimte, waarin we eigenlijk altijd werken en waarvan t en q^κ de coördinaten zijn. Een methode waarbij t op denzelfden voet behandeld wordt als de q^κ wordt een dringende eisch wanneer de q^κ de x, y en z van de gewone ruimte zijn en wanneer we een probleem relativistisch willen behandelen, d.w.z. zoo dat de behandeling invariant is bij alle transformaties, die $-x^2 - y^2 - z^2 + c^2t^2$ invariant laten.

De homogene methode begint nu met q^{n+1} te schrijven inplaats van t en p_{n+1} inplaats van $-H$. Verder spreken we dan af dat de indices $\kappa, \lambda, \mu, \rho, \sigma, \tau$ van 1 tot n loopen, de indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \vartheta, \iota$ daarentegen van 1 tot $n+1$. Ten

slotte voeren we, om met differentiaalquotienten in plaats van met differentialen te kunnen werken een nieuwen parameter τ in, die al naar den aard van het probleem op geschikte wijze gekozen kan worden (bijv. $d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ bij een relativistisch te behandelen probleem), maar die we voorloopig geheel vrij laten.

Dan voeren we een nieuwe functie $\mathcal{H}$ van q^α en $\frac{dq^\alpha}{d\tau}$ in, gedefinieerd door de vergelijking

$$\text{Vg. 1} \qquad \mathcal{H} = p_\alpha \frac{dq^\alpha}{d\tau} = \frac{dq^{n+1}}{d\tau} \mathcal{L},$$

waaruit volgt

$$\text{Vg. 2} \qquad \mathcal{H}\, d\tau = \mathcal{L}\, dt$$

en

$$\text{Vg. 3} \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \frac{dq^\alpha}{d\tau}} = p_\alpha$$

Opmerking verdient dat $\mathcal{H}$ homogeen van den eersten graad is in $\frac{dq^\alpha}{d\tau}$ zoodat volgens Euler inderdaad

$$\text{Vg. 4} \qquad \frac{dq^\alpha}{d\tau} p_\alpha = \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \frac{dq^\alpha}{d\tau}} = \mathcal{H}$$

Uit de vergelijkingen van Lagrange

$$\text{Vg. 5} \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\varkappa} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\varkappa}$$

geschreven in den vorm

$$\text{Vg. 6} \qquad d \frac{\partial \mathcal{L}\, dt}{\partial\, dq^\varkappa} = \frac{\partial (\mathcal{L}\, dt)}{\partial q^\varkappa}$$

volgt dan direct

$$\text{Vg. 7} \qquad \frac{dp_\varkappa}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \frac{dq^\varkappa}{d\tau}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\varkappa}$$

Verder is

$$\text{Vg. 8} \qquad d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^\varkappa} dq^\varkappa + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}^\varkappa} d\dot{q}^\varkappa + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

$$= \dot{p}_\varkappa\, dq^\varkappa + p_\varkappa\, d\dot{q}^\varkappa + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

$$70.1 \qquad dH = \frac{\partial H}{\partial q^\kappa} dq^\kappa + \frac{\partial H}{\partial p_\lambda} dp_\lambda + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$= -\dot{p}_\kappa dq^\kappa + \dot{q}^\kappa dp_\lambda + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$-d(p_\kappa \dot{q}^\kappa) = -p_\kappa d\dot{q}^\kappa - \dot{q}^\kappa dp_\kappa$$

waaruit bij optelling volgt

$$70.2 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} ,$$

waarin bij differentiatie van $\mathcal{L}$ de q^κ en $\dot{q}^\kappa$ en bij differentiatie van H de q^κ en p_λ constant gehouden worden. Daar verder

$$70.3 \qquad \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\kappa} \dot{p}_\kappa + \frac{\partial H}{\partial q^\kappa} \dot{q}^\kappa + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

is

$$70.4 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{d\mathcal{H}}{dt} = +\frac{dp_{n+1}}{dt}$$

en uit (69.3) volgt dus

$$70.5 \qquad \frac{dp_{n+1}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{dq^{n+1}}{d\tau}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^{n+1}}$$

welke vergelijking met (69.7) kan worden samengevat tot

$$70.6 \qquad \boxed{\frac{dp_\alpha}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha}}$$

waarin $\dot{q}^\alpha$ nu staat voor $\frac{dq^\alpha}{d\tau}$ (en niet meer voor $\frac{dq^\alpha}{dt}$).

Dit is de vergelijking van Lagrange in den homogenen vorm. Bij homogene behandeling is er natuurlijk geen Hamiltonsche functie meer in den ouden zin, want $-H$ is een van de impulsies geworden, de impulsie, die bij de coördinaat t behoort. Maar er is **wel een** <u>vergelijking</u> van Hamilton, namelijk de vergelijking

$$70.7 \qquad p_{n+1} = -H(p_\kappa, q^\alpha) \quad ; \quad \begin{cases} \kappa = 1, \ldots, n \\ \alpha = 1, \ldots, n+1. \end{cases}$$

die we ook maar liever in een vorm schrijven waarbij alle impulsies aan denzelfden kant staan:

γ1.1 $$f'(p_\alpha, q^\alpha) = \rho\left(H(p_\kappa, q^\alpha) + p_{n+1}\right) = 0$$

Hierin is ρ de een of andere onbepaalde functie van p_α en q^α

Voor f' geldt

$$\frac{\partial f'}{\partial p_\kappa} = \rho\frac{\partial H}{\partial p_\kappa} = \rho\dot{q}^\kappa = \rho\frac{dq^\kappa}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}$$

γ1.2
$$\frac{\partial f'}{\partial p_{n+1}} = \rho = \rho\frac{dq^{n+1}}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}$$
$$\frac{\partial f'}{\partial q^\kappa} = \rho\frac{\partial H}{\partial q^\kappa} = -\rho\dot{p}_\kappa = -\rho\frac{dp_\kappa}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}$$
$$\frac{\partial f'}{\partial q^{n+1}} = \rho\frac{\partial H}{\partial t} = -\rho\frac{dp_{n+1}}{dt} = -\rho\frac{dp_{n+1}}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}$$

Nu kan $\frac{dt}{d\tau} = \frac{dq^{n+1}}{dt}$ met behulp van de $n+1$ vergelijkingen

γ1.3 $$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{dq^\alpha}{d\tau}} = \text{functie van } q^\alpha \text{ en } \frac{dq^\alpha}{d\tau}$$

met als de $\frac{dq^\kappa}{d\tau}$ $(\kappa = 1, \ldots, n)$ worden uitgedrukt als functie van de q^α en p_α. Men kan dus voor ρ nemen

γ1.4 $$\rho = \frac{dt}{d\tau}$$

waardoor de f' genormeerd wordt. Voor deze genormeerde $\bar{f}$ schrijven we $\bar{f}$

γ1.5 $$\bar{f}(p_\alpha, q^\alpha) = \frac{dt}{d\tau}H + \frac{dt}{d\tau}p_{n+1}$$
$$= -\frac{dq^{n+1}}{d\tau}\mathcal{L} + \frac{dq^{n+1}}{d\tau}p_\kappa\frac{dq^\kappa}{dt} + p_{n+1}\frac{dq^{n+1}}{dt},$$

of anders geschreven

γ1.6 $$\boxed{\bar{f} = -\mathcal{L} + p_\alpha\dot{q}^\alpha \;;\; \dot{q}^\alpha = \frac{dq^\alpha}{d\tau}}$$

waarin de punt differentiatie naar τ beteekent.

Voor deze genormeerde $\bar{f}$ gelden dan de vergelijkingen

γ1.7 $$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial \bar{f}}{\partial p_\alpha} = \dot{q}^\alpha \qquad \dot{p}_\beta = \frac{dp_\beta}{d\tau} \;;\; \dot{q}^\alpha = \frac{dq^\alpha}{d\tau}\\ &\frac{\partial \bar{f}}{\partial q^\beta} = -\dot{p}_\beta\end{aligned}}$$

Dit zijn de gehomogeniseerde en genormeerde vergelijkingen van Hamilton. Deze genormeerde ξ is overigens niet de eenige, die de kanonische vergelijkingen vervult. Is bijvoorbeeld $\xi = F(\xi)$ een functie van ξ, die nul wordt voor $\xi = 0$ waarvan de afgeleide naar ξ (voor $\xi = 0$) gelijk aan 1 is (Bijv. $a\xi^3 + b\xi^2 + \xi$, a en b constanten) dan is $\frac{\partial \xi}{\partial \cdot} = F'(\xi)\frac{\partial \xi}{\partial \cdot} = \frac{\partial \xi}{\partial \cdot}$, zoodat ook ξ de kanonische vergelijkingen vervult.

~~De 3 genormaliseerde vergelijkingen (70,6), (71,6) en (71,7) hebben dezelfden Als toepassing zullen we de vergelijkingen voor de beweging normalen vorm van het electron homogeniseeren. Nemen we voor :~~

Hebben we nu op deze wijze een ξ verkregen, waarvoor de kanonische vergelijkingen gelden, dan is de vraag te beantwoorden hoe nu de vergelijkingen van Hamilton - Jacobi er uit zien. Vroeger hadden we

$$\gamma 2.1 \qquad H\left(\frac{\partial R}{\partial q^\lambda}, q^\kappa, t\right) + \frac{\partial R}{\partial t} = 0$$

en dat wordt nu

$$\gamma 2.2 \qquad H\left(\frac{\partial R}{\partial q^\lambda}, q^\kappa, q^{n+1}\right) + \frac{\partial R}{\partial q^{n+1}} = 0$$

of

$$\gamma 2.3 \qquad \xi^n\left(\frac{\partial R}{\partial q^\lambda}, q^\kappa\right) = 0$$

voor genormeerde ξ. Aangezien echter iedere andere ξ een functie van ξ^n is die nul wordt voor $\xi^n = 0$, kan men evengoed schrijven

$$\gamma 2.4 \qquad \boxed{\xi\left(\frac{\partial R}{\partial q^\lambda}, q^\kappa\right) = 0}$$

en daarmede is dan ook de vergelijking van Hamilton - Jacobi gehomogeniseerd.

Als toepassing zullen we de vergelijkingen voor de beweging van het electron homogeniseeren. Nemen we voor $d\tau$:

$$\gamma 2.5 \qquad d\tau = \frac{1}{e}\sqrt{e^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

dan wordt $\mathcal{L}$ (verg.bldz. 67)

$$\gamma 3.1 \qquad \mathcal{L} = \tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \frac{1}{\dot{t}} + \frac{e}{c}(\varphi_1 \dot{x} + \varphi_2 \dot{y} + \varphi_3 \dot{z} - \varphi_4 c \dot{t})$$

waarin de punt differentiatie naar τ beteekent.

Deze uitdrukking ziet er wat den eersten term betreft niet mooi uit, maar wordt onmiddellijk beter wanneer men uitgaat van de formule voor de energie van een bewegend massapunt uit de relativiteitsmechanica. Men onderscheidt daar de rustmassa $\mathring{m}$, die constant is en de gewone massa m, die veranderlijk is, gebonden door de betrekking

$$\gamma 3.2 \qquad \mathring{m} = m \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \; ; \quad c = \text{lichtsnelheid}$$

en beschouwt $m c^2$ als de totale energie. Voor snelheden, klein ten opzichte van c is dan

$$\gamma 3.3 \qquad m c^2 = \mathring{m} c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \mathring{m} c^2 + \tfrac{1}{2} \mathring{m} v^2 + \cdots$$
$$= \mathring{m} c^2 + \tfrac{1}{2} m v^2 + \cdots$$

In deze uitdrukking is $\mathring{m} c^2$ als een potentiële energie op te vatten en $m c^2 - \mathring{m} c^2$ als de kinetische energie. In plaats van $\frac{1}{2} m v^2$ moet dus in $\mathcal{L}$ komen

$$\gamma 3.4 \qquad \tfrac{1}{2} m v^2 - \mathring{m} c^2 = m v^2 - m c^2$$

en, daar $\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ is, komt nu in $\mathcal{L}$

$$\gamma 3.5 \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m (v^2 - c^2) = - m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = - \mathring{m} c^2 ,$$

zoodat

$$\gamma 3.6 \qquad \mathcal{L} = - \mathring{m} c^2 + \frac{e}{c}(\varphi_1 \dot{x} + \varphi_2 \dot{y} + \varphi_3 \dot{z} - \varphi_4 c \dot{t})$$

($\cdot$ betekent diff. naar τ)

Nu is deze uitdrukking nog niet lineair homogeen in de fluxies, maar dat kan in orde gemaakt worden door den eersten term met

$$\gamma 3.7 \qquad \varphi = \frac{1}{c} \sqrt{-\dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 + c^2 \dot{t}^2} = 1$$

te vermenigvuldigen:

$$\gamma 3.8 \qquad \mathcal{L} = - \varphi \mathring{m} c^2 + \frac{e}{c}(\varphi_1 \dot{x} + \varphi_2 \dot{y} + \varphi_3 \dot{z} - \varphi_4 c \dot{t})$$

Daar

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = -\dot{x}\, e^{-2} \;;\; \text{cycl.}$$

74.1

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e\dot{t}} = +\dot{t}\, e^{-2}$$

is dan inderdaad

$$74.2 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{e}{c}\varphi_1 - m\frac{dx}{dt} + \frac{e}{c}\varphi_1 = p_1 \;;\; \text{cycl}$$

hetgeen klopt met (67.5) en

$$74.3 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e\dot{t}} = -m\dot{e}t - \frac{e}{c}\varphi_4 = -me - \frac{e}{c}\varphi_4 = p_4$$

hetgeen klopt met (67.6) omdat nu natuurlijk in H de totale energie me^2 in de plaats moet komen van $\frac{1}{2}mv^2$ en er bovendien een factor $\frac{1}{c}$ bij moet komen, omdat we et als vierde coördinaat genomen hebben en niet t .

Voeren we de notatie $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = et$, en $g_{11} = -1$, $g_{22} = -1$, $g_{33} = -1$, $g_{44} = +1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ voor $\alpha \neq \beta$ in, dan gaan (73.7 - 74.3) over in

$$\mathcal{L} = \frac{1}{c}\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} = 1$$

$$74.4 \qquad \mathcal{L}_h = -mc\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} + \frac{e}{c}\varphi_\alpha \dot{x}^\alpha$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = c^{-1} g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta$$

zoodat

$$\frac{\partial \mathcal{L}_h}{\partial \dot{x}^\alpha} = -m g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta + \frac{e}{c}\varphi_\alpha = p_\alpha$$

$$74.5 \qquad \dot{x}^\alpha = -\frac{1}{m} g^{\alpha\beta}\left(p_\beta - \frac{e}{c}\varphi_\beta\right)$$

Verder is

$$0 = \ddot{\eta} = -\mathcal{L}_h + p_\alpha \dot{x}^\alpha$$

$$74.6 \qquad = +\mathcal{L} m c^2 - \frac{e}{c}(\varphi_1 \dot{x} + \varphi_2 \dot{y} + \varphi_3 \dot{z} - \varphi_4 e\dot{t}) +$$

$$+ m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - c^2\dot{t}^2) + \frac{e}{c}(\varphi_1 \dot{x} + \varphi_2 \dot{y} + \varphi_3 \dot{z} - \varphi_4 e\dot{t})$$

$$= mc\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} - \frac{e}{c}\varphi_\alpha \dot{x}^\alpha + \frac{e}{c}\varphi_\alpha \dot{x}^\alpha - m g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

γ5.1 $= \dot{m} c \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} - \dot{m} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \dot{m} c^2 \varphi - \dot{m} c^2 \varphi^2 ; \quad (\varphi = 1)$

We gaan nu direct tot een andere eenvoudiger f over Daar

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_\alpha} = \dot{m} c^2 - 2 \dot{m} c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_\alpha}$$

γ5.2

$$= -\dot{m} c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_\alpha} = -\frac{\partial \dot{m} c^2 \varphi}{\partial \dot{x}_\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \dot{m} c^2 \varphi^2}{\partial \dot{x}_\alpha}$$

kunnen we eenvoudiger nemen

γ5.3 $$f_3 = -\tfrac{1}{2} \dot{m} c^2 \varphi^2 + \tfrac{1}{2} \dot{m} c^2 = -\tfrac{1}{2} \dot{m} c\, g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \tfrac{1}{2} \dot{m} c^2$$

(men overtuige zich er door uitschrijven van, dat f_3 op grond van de identiteit γ2.5 nul is) of

γ5.4 $$\boxed{f_3 = \tfrac{1}{2} \dot{m} c^2 - \tfrac{1}{2\dot{m}} g^{\alpha\beta} (p_\alpha - \tfrac{e}{c} \varphi_\alpha)(p_\beta - \tfrac{e}{c} \varphi_\beta)}$$

(schrijven we f_3 als functie van f, dan blijkt dat $\frac{\partial f_3}{\partial f} = 1$ is, verg. blz. γ2).

Op gewone rechthoekige coördinaten luidt de uidrukking voor f_3 :

γ5.5 $$f_3 = \tfrac{1}{2} \dot{m} c^2 - \frac{1}{2\dot{m}} \left\{ -(p_1 - \tfrac{e}{c} \varphi_1)^2 - (p_2 - \tfrac{e}{c} \varphi_2)^2 - (p_3 - \tfrac{e}{c} \varphi_3)^2 + (p_4 - \tfrac{e}{c} \varphi_4)^2 \right\}$$

en deze uitdrukking ontstaat dus uit het linker lid van de identiteit

γ5.6 $$\tfrac{1}{2} \dot{m} c^2 - \frac{1}{2\dot{m}} m^2 \left\{ -\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 + c^2 \right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \dot{m} c^2 - \tfrac{1}{2} \dot{m} \left(\frac{m}{\dot{m}}\right)^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 0$$

indien men $m \frac{dx}{dt}$ vervangt door $p_1 - \frac{e}{c} \varphi_1$; cycl. en $-me$ door $p_4 - \frac{e}{c} \varphi_4$ (verg. γ4.3).

Dan is inderdaad

γ5.7 $$\frac{\partial f_3}{\partial p_\alpha} = -\frac{1}{\dot{m}} g^{\alpha\beta} (p_\beta - \tfrac{e}{c} \varphi_\beta) = \dot{x}^\alpha$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\dot{m}} g^{\gamma\beta} (p_\beta - \tfrac{e}{c} \varphi_\beta) \tfrac{e}{c} \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x^\alpha} = -\dot{p}_\alpha$$

welke laatste vergelijking zich laat schrijven

$$\gamma 6.1 \qquad -\frac{e}{c}\dot{x}^{\beta}\frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = -\mathring{m} g_{\alpha\beta}\ddot{x}^{\beta} + \frac{e}{c}\dot{x}^{\beta}\frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$$

of

$$\gamma 6.2 \qquad \mathring{m}\ddot{x}^{\alpha} = \frac{e}{c} g^{\alpha\beta}\dot{x}^{\delta}\left(\frac{\partial \varphi_{\delta}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x^{\delta}}\right)$$

Uitgeschreven geeft dit

$$\gamma 6.3 \qquad \mathring{m}\ddot{x} = -\frac{e}{c}\dot{y}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right) - \frac{e}{c}\dot{z}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\right) - \frac{e}{c}\dot{t}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_4}{\partial x}\right); \quad \text{cycl}$$

$$\gamma 6.4 \qquad \mathring{m}\ddot{t} = -\frac{e}{c}\dot{x}\left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial ct}\right) - \frac{e}{c}\dot{y}\left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial ct}\right) - \frac{e}{c}\dot{z}\left(\frac{\partial \varphi_4}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial ct}\right)$$

(punten beteekenen hier Differentiatie naar τ ,niet naar t).

Daar

$$\gamma 6.5 \qquad \mathring{m}\frac{dx}{d\tau} = m\frac{dx}{dt}$$ =impulsie in de x-richting.

is het linker lid van ($\gamma 6.3$) $\frac{d}{d\tau} m \frac{dx}{dt}$,en die vergelijking klopt dus formeel met ( ),maar ook alleen formeel want m is geen constante meer.Daarin bestaat juist de relativistische correctie.Dat m niet constant is,volgt ook nog uit ($\gamma 6.4$),want het linker lid daarvan laat zich schrijven

$$\gamma 6.6 \qquad \frac{d}{d\tau}\mathring{m}\frac{dt}{d\tau} = \frac{dm}{d\tau}$$

en ($\gamma 6.4$) geeft dus juist de verandering van m aan.(Overigens is ($\gamma 6.4$) van ($\gamma 6.3$) afhankelijk en dus eigenlijk geen nieuwe vergelijking).De vergelijkingen van Hamilton - Jacobi voor een bewegende lading luiden

$$\gamma 6.7 \qquad \boxed{\frac{1}{2}\mathring{m}c^2 - \frac{1}{2\mathring{m}} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial R}{\partial x^{\alpha}} - \frac{e}{c}\varphi_{\alpha}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial x^{\beta}} - \frac{e}{c}\varphi_{\beta}\right) = 0}$$

Het is van belang nog eenige opmerkingen te maken over de uitdrukking van $\mathcal{H}$

$$\gamma 6.8 \qquad \mathcal{H} = \frac{1}{2}\mathring{m}c^2 - \frac{1}{2\mathring{m}} g^{\alpha\beta}\left(p_{\alpha} - \frac{e}{c}\varphi_{\alpha}\right)\left(p_{\beta} - \frac{e}{c}\varphi_{\beta}\right)$$