Stelsels van partiele differentiaalvergelijkingen
(Pfaffs probleem enz.)

Cursus 1948-1949 Amsterdam.

Zie voor notaties en methoden:

College tensorrekening voor physici M.C. '47-'48 bl. 1-39
Regular systems of equations
and supernumerary coordinates M.C. '47
Einführung in die neueren Methoden, Noordhof Groningen.

§ 1. Veralgemeningen Pfaffschprobleem

Eenvoudig Pfaffs probleem (1814). Gegeven covariant vectorveld w_λ in X_n analytisch in $\mathfrak{N}(\overset{\circ}{\xi}{}^\kappa)$. Of ook differentiaalvorm $w_\lambda d\xi^\lambda$, dit is alleen verschil in notatie. De vergelijking

1.1) $$w_\lambda d\xi^\lambda = 0$$ [1]

stelt voor een $\mathfrak{E}_{n-1}$-veld in $\mathfrak{N}(\overset{\circ}{\xi}{}^\kappa)$. Gevraagd de X_m's wier tangerende $\mathfrak{E}_m$ overal in de lokale $\overset{\circ}{\mathfrak{E}}_{n-1}$ ligt en dit voor de hoogste waarde van m genaamd $\nu = m_{max}$. Met name vragen we naar de systemen van ∞^{n-m} X_m's zo dat er door elk punt één X_m gaat (normaalsystemen van X_m's). Deze omhulde X_m's of integraal-X_m's bestaan altijd voor m = 1 omdat

1.2) $$w_\lambda \frac{d\xi^\lambda}{dt} = 0$$

een (niet lineair) simultaan stelsel van gewone differentiaalvergelijkingen is. Is w_λ van de vorm

1.3) $$w_\lambda = q\,\partial_\lambda p$$

dan is blijkbaar $\nu = n \quad 1$

Bepaling van ν:

Vorm de comitante van w_λ

1.4) $$\mathfrak{W}_{\mu\lambda} = 2\partial_{[\mu} w_{\lambda]}$$ (rotatie van w_λ)

Bepaal 1^e^. rang 2ρ van $\mathfrak{W}_{\mu\lambda}$ (altijd even daar $\mathfrak{W}_{\mu\lambda}$ alternerend)
2^e^. λ-rang $\mathcal{R}$ van het stelsel w_λ $\mathfrak{W}_{\mu\lambda}$. Dit is de rang van de matrix

1.5) $$\| \mathfrak{W}_{\mu\lambda} \; w_\lambda \|$$

en ook het aantal lineair onafhankelijke vectoren onder $\mathfrak{W}_{1\lambda}, \dots, \mathfrak{W}_{n\lambda}, w_\lambda$

Altijd geldt $\mathcal{R} = 2\rho + \varepsilon$, $\varepsilon = 0$ of 1. Dan is

1.6) $$\nu = n - \rho - \varepsilon$$

in ieder gebied waar 2ρ en $\mathcal{R}$ constant zijn.

Eerste uitbreiding. Neem stelsel van Pfaffse vormen

1.7) $$C_\lambda^x d\xi^\lambda = 0 \; ; \; x = p+1, \dots, n$$

d.w.z. n - p covariante vectoren C_λ^x. Stelt voor een $\mathfrak{E}_p$-veld in $\mathfrak{N}(\overset{\circ}{\xi}{}^\lambda)$

---

[1]) N.B. $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau, \omega$ lopen altijd van $1, \dots, n$ (cursieve cijfers)

Hetzelfde ook te geven door p contravariante vectoren B^κ_b ; $b = 1,\dots,p$
met

1.8) $B^\kappa_b C^x_\kappa = 0$

Twee problemen:

1. <u>Inwendig probleem:</u> De $X'_m s$ met raak- $\mathcal{E}_m$ <u>in</u> $\mathcal{E}_p$ voor m maximaal $\leq$ p. (<u>omhulde</u> $X'_m s$)

a. Eerste formulering. Zij

1.9) $F^e(\xi^\kappa) = \text{const.}$; $e = m+1,\dots,n$

een normaalsysteem van omhulde X_m's, dan is

1.10) $d\xi^\mu \partial_\mu F^e = 0$

n.e.v. voor $d\xi^\kappa$ rakende aan X_m en

1.11) $d\xi^\mu C^x_\mu = 0$

n.e.v. voor $d\xi^\kappa$ liggende in $\mathcal{E}_p$. Dus n.e.v. voorwaarde is dat

(11) $\subset$ (10).

b. Tweede formulering. Een normaalsysteem van X_m's kan gegeven worden in de parametervorm

1.12) $\xi^\kappa = \phi^\kappa(\eta^\alpha, p^e)$; $\alpha = 1,\dots,m$; $e = m+1,\dots,n$

Lijnelement der X_m voor iedere waarde der p^e :

1.13) $d\xi^\kappa = (\partial_\alpha \phi^\kappa)\, d\eta^\alpha$

N.e.v. voorwaarde dus

1.14) $C^x_\mu\, \phi^\kappa(\eta^\alpha, p^e)\, \partial_\beta \phi^\mu = 0$ voor alle waarden van p^e

Dit is een stelsel <u>niet lineaire partiele differentiaalvergelijkingen</u> voor de onbekenden ϕ^κ.

2. <u>Uitwendig probleem</u>. De X_m's met raak- $\mathcal{E}_m$ <u>door</u> $\mathcal{E}_p$ voor m minimaal $\geq$ p. (<u>omhullende X_m's</u>)

a. eerste formulering: (10) $\subset$ (11)

b. tweede formulering

(1.15) $B^\mu_b \partial_\mu F^e = 0$; $e = m+1,\dots\dots n$.

Dit is stelsel <u>lineaire homogene partiele differentiaalvergelijkingen</u> voor de $F^e(\xi^\kappa)$

Schema:

stelsels partiele differentiaalvergelijkingen.

Cauchy

oplossing alleen in een $\mathfrak{U}(\xi^\kappa_0)$ gezocht.

Dirichlet

oplossing gezocht onder eindige randvoorwaarden

uitwendig probleem

theorie der lin. part. diff. verg.

Jacobi, Lie, Mayer.

inwendig probleem

theorie der algemene stelsels

Cartan, Goursat, Kähler

Algemene formulering (omvat uit- en inwendig probleem). Beschouw zeker soort geometrische objecten ($\mathcal{E}_m$'s of vectoren of tensoren of erger)
Veld A = verzameling van ∞^{nd} van deze objecten in de punten van $\mathfrak{N}(\underset{0}{\xi}^k)$
Klasse B, enigerlei wel gedefinieerde klasse van velden van dezelfde objecten (bijv. alle $\mathcal{E}_m$'s die aan een X_q raken)
Vraag: Bestaan er in A velden van klasse B..

We gaan nu door met het uitwendig probleem.

§ 2. Stelsels van homogene lineaire differentiaalvergelijkingen.

Ga uit van

2.1) $B^\mu_b \partial_\mu f = 0 \; ; \; b = 1, \dots m$

en vorm.

2.2) $B^\nu_{[c} (\partial_{|\nu|} B^\mu_{b]}) \partial_\mu f = 0$

Iedere oplossing van (2.1) voldoet aan (2.2). Stel onder (2.2) juist μ_1 vergelijkingen lineair onafhankelijk van (2.1). Dan is μ_1 arithmetische invariant. We hebben nu $m+\mu_1$ vergelijkingen

2.3) $B^\mu_{b_1} \partial_\mu f = 0 \; ; \; b_1 = 1, \dots m + \mu_1$

Ga zo door tot stelsel

2.4) $B^\mu_{b_\omega} \partial_\mu f = 0 \; ; \; b_\omega = 1, \dots, m + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\omega$

en dat op deze manier niet meer te verenigen is. Dit stelsel heet volledig. (2.1) is volledig als $B^\nu_{[c} (\partial_{|\nu|} B^\kappa_{b]}$ lineair van B^κ_b afhangt, dus

2.5) $B^\nu_{[c} (\partial_{|\nu|} B^\kappa_{b]}) C^z_\kappa = 0$

of ook

2.6) $B^\nu_{[c} (\partial_{|\nu|} B^\kappa_{b]}) = \sigma^a_{cb}(\xi^k) B^\kappa_a$

Allereenvoudigste vorm van existentietheoreem Cauchy-Kowalewski 1874.
Stel 1 onbekende $f(\xi^k)$ en 1 vergelijking, oplosbaar naar $\partial_1 f$:

2.7) $\partial_1 f = \Phi(\xi^k, f, \partial_\alpha f) \; ; \; \alpha = 2, \dots n$

waar Φ analytisch is in een $\mathfrak{N}(\underset{0}{\xi}^k, \underset{0}{c}, \underset{0}{c}_\alpha) ; \alpha = 2, \dots, n$. Zij verder gegeven 1 functie $\varphi(\xi^\alpha) ; \alpha = 2, \dots n$, analytisch in een $\mathfrak{N}(\underset{0}{\xi})$ zo dat

2.8)
a) $\varphi(\underset{0}{\xi}^\alpha) = \underset{0}{c}$

b) $(\partial_\beta \varphi)_{\xi^\alpha = \underset{0}{\xi}^\alpha} = \underset{0}{c}_\beta \; ; \; \alpha, \beta = 2, \dots, n$

dan bestaat er één enkele oplossing $f(\xi^k)$, analytisch in een $\mathfrak{N}(\underset{0}{\xi})$ zo dat

2.9) $f(\underset{0}{\xi}^1, \xi^\alpha) = \varphi(\xi^\alpha) \; ; \; \alpha = 2, \dots n$

Geval van één vergelijking

2.10) $B^\mu \partial_\mu f = 0$

Kies de coordinaten zo dat $\beta^1 \neq 0$. Normeer zo dat $\beta^1 = 1$. Dan krijgt de vergelijking de vorm

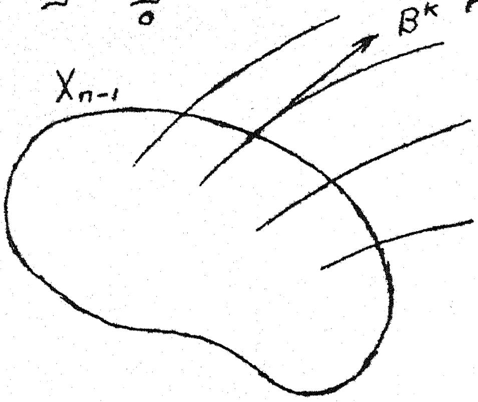
2.11) $\partial_1 f = \lambda^\alpha \partial_\alpha f \; ; \alpha = 2, \dots n$

(λ^α anal. in een $\mathfrak{N}(\underset{\circ}{\xi}{}^\kappa)$)

Geef dus nu een functie $\varphi(\xi^\alpha)$ in een $\mathfrak{N}(\underset{\circ}{\xi}{}^\alpha)$, dan bestaat er een oplossing $f(\xi^\kappa)$, analytisch in een $\mathfrak{N}(\underset{\circ}{\xi}{}^\kappa)$ zo dat

2.12) $f(\underset{\circ}{\xi}{}^1, \xi^\alpha) = \varphi(\xi^\alpha) \; ; \alpha = 2, \dots, n$

Neem voor $\varphi(\underset{\circ}{\xi}{}^\alpha)$ achtereenvolgens n-1 onafhankelijke functies dan ontstaan n-1 onafhankelijke oplossingen en iedere oplossing is een functie van deze n-1. De <u>principale oplossingen t.o. van</u> $\xi^1 = \underset{\circ}{\xi}{}^1$, zijn die, die voor $\xi^1 = \underset{\circ}{\xi}{}^1$ overgaan in $\xi^2, \dots, \xi^n$.



Andere vorm van het hoofdresultaat. Neem willekeurige X_{n-1} die de stroomlijnen van β^κ elk in een punt snijdt. Geef op X_{n-1} een functie ϕ van de plaats. Er bestaat slechts één oplossing f die op X_{n-1} met ϕ samenvalt.

Eén enkele oplossing dus, vastgelegd door een functie van n-1 variabelen.

ϕ = const. stelt $\infty^1 X_{n-2}$'s in X_{n-1} voor. Elke X_{n-1} is een omhullende van β^κ. Eén zo'n omhullende kan gegeven worden door 1 functie van n-2 variabelen.

<u>Bepaling van de kosten</u>. Bij (2.10) behoort het geadjungeerde systeem van totale differentiaalvergelijkingen

2.13) $d\xi^\mu C_\mu^x = 0$

of

2.14) $d\xi^\kappa :: \beta^\kappa$ (:: = evenredig met)

Dit zijn echter n-1 gewone differentiaalvergelijkingen van de eerste orde met n-1 onbekenden (simultaanstelsel). De bepaling van 1 oplossing gelijkstaande met de bepaling van 1 oplossing van 1 vergelijking van de (n-1)-de orde met onbekende heet naar Lie een <u>operatie n-1</u>, kort O_{n-1} (O_0 = quadratuur).

Eén oplossing van (2.10) (ook <u>integraalfunctie</u> van (2.13) genoemd) kost dus een O_{n-1}. Neem nieuwe variabelen $\xi^{\kappa'}$ en $\xi^{1'}$ = deze oplossing Dan gaan de vergelijkingen over in

2.15)
a) $\beta^{1'} = 0$
b) $\beta^{\alpha'} \partial_{\alpha'} f(\xi^{1'}, \xi^{\beta'}) \; ; \alpha', \beta' = 2', \dots, n'$

Beschouw nu in (2.15 b) de ξ'' als parameter. Dan kost één oplossing van (2.15 b) een O_{n-2} enz. Totaal hebben we n-1 operaties $O_{n-1}, \dots, O_1$ nodig. Kennen we toevallig al m onafhankelijke oplossingen dan zijn nog nodig $O_{n-m-1}, \dots, O_1$

Eén niet homogene lineaire vergelijking.

2.16) $$v^\mu \partial_\mu f = \phi(\xi^\kappa) \quad (v^\kappa, \phi \text{ anal. in een } \mathfrak{N}(\overset{0}{\xi}{}^\kappa))$$

Stel een oplossing gegeven in de vorm

2.17) $$F(f, \xi^\kappa) = 0 \; ; \; \frac{\partial F}{\partial f} \neq 0 \text{ (anders niet oplosbaar naar } f)$$

dan volgt

2.18) $$v^\mu \partial_\mu F + \phi(\xi^\kappa) \frac{\partial F}{\partial f} = 0$$

maar dit is een homogene lineaire vergelijking met n+1 onafhankelijke variabelen ξ^κ, f. Heeft dus n onafhankelijke oplossingen. Eén ervan moet zeker f bevatten en daarnaast kunnen er dan n-1 zijn die van f vrij zijn. Deze zijn oplossingen der gereduceerde vergelijking

2.19) $$v^\mu \partial_\mu f = 0 ,$$

Dus: bepaal n-1 oplossingen $\overset{1}{f}, \dots, \overset{n-1}{f}$ van (2.19) en één oplossing $\overset{0}{f}$ van (2.16) (met behulp van (2.18)). Dan is de algemene oplossing

2.20) $$f = \overset{0}{f} + \psi(\overset{1}{f}, \dots, \overset{n-1}{f})$$ (ψ = willekeurige anal. functie)

Jacobische systemen. Stel dat

2.21) $$B^\mu_b \partial_\mu f = 0 \; ; \; b = 1, \dots, p$$

volledig is. Dan geldt

2.22) $$B^\mu_{[c|\mu|} B^\kappa_{b]} = \sigma^a_{cb}(\xi^\kappa) B^\kappa_a$$

Men kan dan bewijzen dat er een stel van p lineaire combinaties der B^κ_b bestaat

2.23) $$B^\kappa_{b'} = B^b_{b'} B^\kappa_b \; ; \; \mathrm{Det}(B^b_{b'}) \neq 0 \; ; \; \begin{matrix} b = 1, \dots, p \\ b' = 1', \dots, p' \end{matrix}$$

zodat de $\sigma^{a'}_{c'b'}$ alle nul zijn:

2.24) $$B^\kappa_{[c'|\mu|} B^\kappa_{b']} = 0$$

Men noemt dan

2.25) $$B^\mu_{b'} \partial_\mu f = 0$$

een Jacobisch systeem.

<u>De vorm van een Jacobisch systeem is invariant bij coordinatentransformatie doch niet bij b. transformaties.</u>

<u>Speciale Jacobische sustemen</u>. Men kan bewijzen dat de b-transformatie, gegeven een <u>bepaald</u> coordinatenstelsel K zo kan worden ingericht dat

2.26) $$B_b^{\alpha} = \delta_b^{\alpha}\ ; \quad b = 1,\dots,m\ ; \quad \alpha = \mathit{1},\dots,\mathit{m}.$$

Voor deze speciale waarden die dus aan (K) zijn aangepast gebruiken we in plaats van b ook griekse indices en vaste indices $\mathit{1},\dots\dots,\mathit{m}$ in plaats van $1,\dots\dots,m$, dus

2.27) $$B_{\beta}^{\alpha} \overset{*}{=} \delta_{\beta}^{\alpha}$$

De matrix van B_{β}^{κ} ziet er dan als volgt uit

2.28) $$\begin{array}{c|c} & \overset{\longleftarrow p \longrightarrow}{} \quad \overset{\longleftarrow n-p \longrightarrow}{} \\ p\updownarrow & \left\| \begin{matrix} 1 & & 0 & B_1^{p+1} & \dots\dots & B_1^{n} \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & B_p^{p+1} & \dots\dots & B_p^{n} \end{matrix} \right\| \end{array}$$

en de vergelijkingen (2.21) krijgen de vorm

2.29) $$\boxed{\partial_{\beta} f + B_{\beta}^{\vartheta}\, \partial_{\vartheta} f \overset{*}{=} 0}$$

De speciale Jacobische vorm is <u>niet</u> invariant bij coordinatentransformaties.
Dit duiden we aan met $\overset{*}{=}$. Dit teken drukt uit dat de aandacht wordt gevestigd op het feit dat de vergelijking niet meer invariant is bij coordinatentransformaties. Het gebruik van $\overset{*}{=}$ is niet verplicht, men gebruikt het alleen als het gewenst voorkomt de aandacht te vestigen. Maar er zijn wel gevallen waarin dit zo gewenst is dat men beter doet niet $=$ te gebruiken, bijv. in $\underset{\lambda}{e}^{\kappa} \overset{*}{=} A_{\lambda}^{\kappa}$, en dergelijke formules waar levende indices aan de ene kant corresponderen met dode indices aan de andere kant. (2.29) is <u>wel</u> invariant voor transformaties van de vorm

2.30) $$\begin{aligned} \xi^{\alpha'} &= \delta_{\alpha}^{\alpha'}\, \xi^{\alpha} \qquad \alpha = 1,\dots,p\ ; \ \alpha' = 1',\dots\dots,p' \\ \xi^{\vartheta'} &= \xi^{\vartheta'}(\xi^{\alpha}, \xi^{\eta}) \quad \vartheta = p+1,\dots,n\ ; \ \vartheta' = (p+1)',\dots\dots,n' \end{aligned}$$

Voor een Jacobisch systeem neemt de volledigheidsvoorwaarde de vorm aan

2.31) $$\boxed{\partial_{[\gamma} B_{\beta]}^{\vartheta} + B_{[\gamma}^{\eta}\, \partial_{|\eta|} B_{\beta]}^{\vartheta} \overset{*}{=} 0}$$

Men kan tegelijk het <u>geadjungeerde systeem</u>

2.32) $$C^x_\mu \, d\xi^\mu$$

aan een zodanige x-transformatie onderwerpen dat ook dit stel zeer eenvoudig wordt. Men moet dus n-p vectoren $C^\varphi_\mu ; \varphi = p+1,\dots,n$ bepalen zo dat

2.33) $$C^\varphi_\mu B^\mu_\beta = 0 \; ; \; \beta = 1,\dots p \; ; \; \varphi = p+1,\dots n$$

Men ziet direct dat

2.34)
$$a) \; C^\varphi_\eta = \delta^\varphi_\eta$$
$$b) \; C^\varphi_\beta = -B^\varphi_\beta$$

voldoen. Met deze waarden krijgt (2.32) de vorm

2.35) $$\boxed{C^\varphi_\beta \, d\xi^\beta + d\xi^\varphi \overset{*}{=} 0}$$

met de voorwaarde (zie (2.31))

2.36) $$\boxed{\partial_{[\gamma} C^\varphi_{\beta]} - C^\eta_{[\gamma} \partial_{|\eta|} C^\varphi_{\beta]} \overset{*}{=} 0}$$

N.B. De Jacobische vorm en de speciale Jacobische vorm kunnen steeds worden gevonden zonder integraties.

§ 3. <u>De oplossingen van een volledig systeem</u>.

Breng het systeem in de vorm (2.29). Dan zien we dat $\xi^1,\dots,\xi^p$ alvast zeker <u>geen</u> oplossingen zijn. Neem nu de <u>eerste</u> vergelijking

3.1) $$\partial_1 f + B_1^\varphi \partial_\varphi f = 0$$

dan zijn $\xi^2,\dots,\xi^p$ hiervan zeker <u>wel</u> oplossingen. Er zijn dus nog n-p andere oplossingen, te verkrijgen door $O_{n-p},\dots,O_1$. Neem de <u>principale</u> d.z. die, die voor $\xi^1 = \xi^1_0$ overgaan in $\xi^2,\dots,\xi^n$. Daaronder bevinden zich alvast $\xi^2,\dots,\xi^p$. Ga nu over tot nieuwe coordinaten $\xi^{k'}$ en richt het zo in $\xi^{1'},\dots,\xi^{p'}$ juist $\xi^1,\dots,\xi^p$ zijn en dat $\xi^{(p+1)'},\dots,\xi^{n'}$ juist die andere n-p principale oplossingen zijn. Dan weten we dat $\xi^{2'},\dots,\xi^{n'}$ allemaal oplossingen van (3.1) zijn en verder dat

3.2) $$A^{\alpha'}_\beta \overset{*}{=} \delta^{\alpha'}_\beta \; ; \; A^\alpha_{\beta'} \overset{*}{=} \delta^\alpha_{\beta'} \; ; \; A^{\alpha'}_\eta = 0 \; ; \; A^\alpha_{\eta'} = 0$$

De vergelijkingen (2.29) gaan nu over in

3.3) $A_{\beta}^{\beta'} \partial_{\beta'} f + A_{\beta}^{\varphi'} \partial_{\varphi'} f + B_{\beta}^{\varphi} A_{\varphi}^{\varphi'} \partial_{\varphi'} f = 0 ; \beta = 1,\ldots,p ; \beta' = 1',\ldots,p' ; \varphi = p+1,\ldots,n ; \varphi' = (p+1)',\ldots,n'$

of

3.4) $\partial_{\beta'} f + B_{\beta'}^{\varphi'} \partial_{\varphi'} f = 0$

naar

3.5) $\boxed{B_{\beta'}^{\varphi'} = \delta_{\beta'}^{\beta} (A_{\beta}^{\varphi'} + B_{\beta}^{\varphi} A_{\varphi}^{\varphi'})}$

Van de nieuwe vergelijkingen

3.6) $\partial_{\beta'} f + B_{\beta'}^{\varphi'} \partial_{\varphi'} f = 0 ; \beta' = 1',\ldots p' ; \varphi' = (p+1)',\ldots n'$

zijn nu $\xi^{2'},\ldots,\xi^{n'}$ oplossingen en daaruit volgt dat

3.7) $B_{1'}^{\varphi'} = 0 \qquad ; \varphi' = (p+1)',\ldots,n'$

zodat de vergelijkingen (3.6) overgaan in

3.8) a) $\partial_{1'} f = 0$

b) $\partial_{\gamma'} f + B_{\gamma'}^{\varphi'} \partial_{\varphi'} f = 0 ; \gamma' = 2',\ldots,p' ; \varphi' = (p+1)',\ldots,n'$

Laat de accenten nu voor het gemak weer vallen

3.9) a) $\partial_1 f = 0$

b) $\partial_{\gamma} f + B_{\gamma}^{\varphi} \partial_{\varphi} f = 0$

dan zijn de condities nu

3.10) a) $B_{[\delta}^{\eta} \partial_{|\eta|} B_{\gamma]}^{\varphi} + \partial_{[\delta} B_{\gamma]}^{\varphi} ; \gamma,\delta = 2,\ldots,p ; \varphi,\eta = p+1,\ldots,n$

b) $B_{[1}^{\eta} \partial_{|\eta|} B_{\gamma]}^{\varphi} + \partial_{[1} B_{\gamma]}^{\varphi} = \partial_{[1} B_{\gamma]}^{\varphi} = \frac{1}{2} \partial_1 B_{\gamma}^{\varphi} = 0$

Bijgevolg is nu (3.9 b) een stel van p-1 vergelijkingen in de n-1 onafhankelijke variabelen $\xi^2,\ldots\xi^n$. Met dat stel gaat men door. Kosten van de tweede trap wederom $O_{n-p},\ldots,O_1$. Dit p maal, totale kosten dus

3.11) $p \times (O_{n-p},\ldots,O_1)$

Na teruggang tot de oorspronkelijke coordinaten gaan de n-p aldus gevonden oplossingen voor $\xi^{\alpha} = \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}$ juist over in $\xi^{p+1},\ldots\xi^n$. Het zijn derhalve <u>principale oplossingen t.o. van</u> $\xi^{\alpha} = \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}$. Zijn

$\overset{p+1}{f}, \ldots, \overset{n}{f}$ deze oplossingen, dan is $\mathcal{F}(\overset{p+1}{f}, \ldots, \overset{n}{f})$ eveneens een oplossing, voor $\xi^\alpha = \underset{0}{\xi}^\alpha$ overgaande in $\mathcal{F}(\overset{p+1}{\xi}, \ldots, \overset{n}{\xi})$.

§ 4. Niet homogene lineaire systemen.

4.1) $$\underset{b}{v}^\mu \partial_\mu f = \varphi_b(\xi^\kappa) \; ; \; b = 1, \ldots, p$$

Voorwaarden: $\underset{b}{v}^\kappa$ en φ_b analytisch in een $\mathfrak{N}(\underset{0}{\xi}^\kappa)$ verder

4.2) $$\left\| \underset{b}{v}^\mu \; \varphi_b \right\| \text{ rang } p \; ; \; \left\| \underset{b}{v}^\mu \right\| \text{ rang } p$$

(anders waren de vergelijkingen afhankelijk of onoplosbaar). Zij

4.3) $$\mathcal{F}(f, \xi^\kappa) = 0 \; ; \; \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f} \neq 0$$

een oplossing. Dan ontstaan de p homogene vergelijkingen

4.4) $$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f} \varphi_b + \underset{b}{v}^\mu \partial_\mu \mathcal{F} = 0$$

in n+1 onafhankelijke veranderlijken ξ^κ, f. Dit stelsel is volledig mits (schrijft voor het gemak eerst even $\varphi_b = \underset{b}{v}^0 ; f = \xi^0$)

4.5)
a) $$\underset{[c}{v}^\mu \partial_{|\mu|} \underset{b]}{v}^\kappa = \sigma_c{}^a{}_b(\xi^\kappa) \underset{a}{v}^\kappa$$
b) $$\underset{[c}{v}^\mu \partial_{|\mu|} \varphi_{b]} = \sigma_c{}^a{}_b(\xi^\kappa) \varphi_a$$

Men noemt dan ook het niet homogene stelsel (4.1) volledig. N.e.v. zijn (4.2),(4.5),(4.5b).

Is (4.4) niet volledig dan gaat men (4.4) verlengen tot er een volledig systeem komt:

4.6) $$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial f} \varphi_z + \underset{z}{v}^\mu \partial_\mu \mathcal{F} = 0 \; ; \; z = 1, \ldots, p + \mu_1 + \cdots + \mu_\omega$$

en daarbij hoort dan

4.7) $$\underset{z}{v}^\mu \partial_\mu \mathcal{F} = \underset{z}{\varphi}(\xi^\kappa)$$

Is nu voldaan aan de voorwaarden:

4.8) $$\left\| \underset{z}{v}^\mu \; \varphi_z \right\| \text{ rang } p + \mu_1 + \cdots + \mu_\omega \; ; \; \left\| \underset{z}{v}^\mu \right\| \text{ rang } p + \mu_1 + \cdots + \mu_\omega$$

en bovendien natuurlijk aan de voorwaarden dat (4.6) volledig is, dan heeft (4.1) oplossingen. In het andere geval niet.

§ 5. Mayer systemen.

Bij het systeem in de speciale Jacobische vorm

5.1) (I) $\boxed{\partial_\beta f + B_\beta^\varphi \partial_\varphi f \overset{*}{=} 0}$; $\beta = 1, \ldots p$; $\varphi = p+1, \ldots, n$

hoort het geadjungeerde systeem

5.2) (II) $\boxed{d\xi^\varphi \overset{*}{=} -C_\beta^\varphi d\xi^\beta}$

Beschouw nu de ξ^φ als onbekende functies der ξ^α ; $\alpha = 1, \ldots, p$, dan is (II) equivalent met

5.3) (III) $\boxed{\partial_\beta \xi^\varphi \overset{*}{=} -C_\beta^\varphi(\xi^\gamma, \xi^\eta)}$; $\beta, \gamma = 1, \ldots p$; $\varphi, \eta = p+1, \ldots n$

Als de voorwaarden van het volledig zijn van (I) (cf II) vermeld zijn:

5.4) $\boxed{\partial_{[\gamma} C_{\beta]}^\varphi \overset{*}{=} C_{[\gamma}^\eta \partial_{|\eta|} C_{\beta]}^\varphi}$

(ook wel genoemd integrabiliteitsvoorwaarden van (III) dan noemt men III een Mayer systeem.

Stel eens dat $f^\varphi(\xi^\kappa)$ de principale oplossingen zijn van (I) t.o. van $\xi^\alpha = \overset{\circ}{\xi}{}^\alpha$, dan zijn

5.5) $$f^\varphi(\xi^\kappa) = C^\varphi \qquad (C^\varphi = \text{constanten})$$

n-p onafhankelijke integralen van II (de principale integralen t.o. van $\xi^\alpha = \overset{\circ}{\xi}{}^\alpha$) (5.5) stelt een stelsel van ∞^{n-p} X_p's voor. Vraag: welke dezer X_p's gaat door $\overset{\circ}{\xi}{}^\kappa$? Schrijf de vergelijking eerst op voor $\xi^\alpha = \overset{\circ}{\xi}{}^\alpha$ dan krijft (5.5) de som

5.6) $$f^\varphi(\overset{\circ}{\xi}{}^\alpha, \xi^\varphi) = \xi^\varphi = C^\varphi$$

en men krijgt dus de gezochte X_p indien men voor de C^φ de waarden $\overset{\circ}{\xi}{}^\varphi$ neemt.

Los nu de ξ^φ op uit (5.5) (dit kan altijd omdat $Det(\partial_\eta f^\varphi) \neq 0$) dan komt er

5.7) $$\xi^\varphi = \phi^\varphi(\xi^\alpha, C^\varphi)$$

maar dit zijn n-p oplossingen van (III) die afhangen van n-p constanten. Zet men $C^\varphi = \xi^\varphi$ en $\xi^\alpha = \overset{\circ}{\xi}{}^\alpha$ dan moet de linkerzijde in $\overset{\circ}{\xi}{}^\varphi$ overgaan, bijgevolg is

5.8) $$\xi^\varphi = F^\varphi(\xi^\alpha) \overset{\text{def}}{=} \phi^\varphi(\xi^\alpha, \overset{\circ}{\xi}{}^\varphi)$$

een stel oplossingen van (III) dat voor $\xi^\alpha = \overset{\circ}{\xi}{}^\alpha$ overgaat in de constanten $\overset{\circ}{\xi}{}^\varphi$. Dit stel oplossingen heet het stel der principale oplossingen van III t.o. van $\xi^\alpha = \overset{\circ}{\xi}{}^\alpha$ .We hebben nu voor (I),(II) en (III) elk principale oplossingen resp. integralen die uit elkaar kunnen worden afgeleid.

De integratie van (I) of van (II) of van (III) zijn dus (mits de volledigheisvoorwaarden vervuld zijn) gelijkwaardige problemen.

Ga nu uit van (III) en neem de $t < p$ eerste vergelijkingen

$$5.9)\qquad \partial_b \xi^\kappa = -C_b^\kappa(\xi^\alpha, \xi^\eta);\; b = 1,\dots,t;\; \kappa,\eta = p+1,\dots,n$$

en beschouw $\xi^{t+1},\dots\xi^p$ als parameters.Dan hebben we weer een stel dat er net uitziet als een Mayer systeem met t onafhankelijke veranderlijken. En aangezien inderaad uit (5.4) volgt dat

$$5.10)\qquad \partial_{[c} C_{b]}^\kappa = C_{[c}^\eta \partial_{|\eta|} C_{b]}^\kappa;\; b,c = 1,\dots t;\; \kappa,\eta = p+1,\dots,n.$$

is(5.9) inderdaad een Mayer systeem. Dit heet de verkorting van III t.o. van $\xi^1,\dots,\xi^t$.

Om (III) op te lossen verkorten er naar ξ^1 :

$$5.11)\qquad \partial_1 \xi^\kappa = -C_1^\kappa(\xi^1, \xi^\varphi, \xi^\eta);\; \varphi = 2,\dots,p;\; \kappa,\eta = p+1,\dots n$$

en hierin zijn nu de ξ^φ parameters. ξ^1 is de onafhankelijke variabele en dus is (5.11) een simultaan systeem van n-p gewone differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. We bepalen de principale oplossingen t.o. van ξ^1 , dat zijn dus die, die overgaan in $\overset{\circ}{\xi}{}^\kappa$ voor alle willekeurige waarden der ξ^φ:

$$5.12)\qquad \xi^\kappa = F^\kappa(\xi^1, \xi^\varphi);\quad F^\kappa(\overset{\circ}{\xi}{}^1, \xi^\varphi) = \overset{\circ}{\xi}{}^\kappa;\quad \varphi = 2,\dots,p;\; \kappa = p+1,\dots,n$$

(Dit kost overigens een O_{n-p}). Nu gaan we nieuwe variabelen $\xi^{\kappa'}$ invoeren:

$$5.13)\qquad \begin{aligned} \xi^{\alpha'} &= \delta_\alpha^{\alpha'} \xi^\alpha \\ \xi^{\kappa'} &= \delta_\kappa^{\kappa'}(\xi^\kappa - F^\kappa(\xi^\alpha)) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\alpha = 1,\dots p; \\ &\alpha' = 1',\dots p'; \\ &\kappa = p+1,\dots n;\; \kappa' = (p+1)',\dots,n' \end{aligned}$$

De transformatie is van de vorm (2.30) zodat de speciale Jacobische vorm gehandhaafd blijft. Bovendien weten we uit (3.5) hoe de B_β^κ en dus ook hoe de $C_\beta^\kappa = -B_\beta^\kappa$ zich transformeren

5.14) $$C^{\varphi'}_{\beta'} = \delta^{\beta}_{\beta'}(C^{\eta}_{\beta}\delta^{\varphi'}_{\eta} - A^{\varphi'}_{\beta})$$

De nieuwe vergelijkingen

5.15) $$\partial_{\beta'}\xi^{\varphi'} = -C^{\varphi'}_{\beta'}$$

luiden dus uitgeschreven als volgt:
de eerste:

5.16) $$\partial_{1'}\xi^{\varphi'} = -C^{\varphi'}_{1'} = -\delta^{1}_{1'}C^{\eta}_{1}\delta^{\varphi'}_{\eta} - \delta^{1}_{1'}\delta^{\varphi'}_{\varphi}\partial_{1}F^{\varphi} = 0$$

(omdat F^{φ} een oplossing van (5.11) is en dus $\partial_1 F^{\varphi} = -C^{\varphi}_{1}$)
de andere:

5.17) $$\partial_{\varphi'}\xi^{\varphi'} = -C^{\varphi'}_{\varphi'}(\xi^{1'}, \xi^{\psi'}, \xi^{\eta'}); \quad \varphi', \psi' = 2', \dots, p'; \quad \varphi', \eta' = (p+1)', \dots, n'$$

In de vergelijkingen (5.17) v ; nu echter de $\xi^{1'}$ weg omdat volgens de integrabiliteitsvoorwaarden

5.18) $$\partial_{[1'}C^{\varphi'}_{\varphi']} = C^{\eta'}_{[1'}\partial_{|\eta'|}C^{\varphi'}_{\varphi']} = 0$$

nul is en bovendien $C^{\varphi'}_{1'} = 0$ is. Alles valt dus weg behalve

5.19) $$\partial_{1'}C^{\varphi'}_{\varphi'} = 0; \quad \varphi' = 2', \dots, p'; \quad \varphi' = (p+1)', \dots, n'$$

waaruit blijkt, dat $C^{\varphi'}_{\varphi'}$ alleen van $\xi^{\psi'}$ en $\xi^{\eta'}$ afhangt. We hebben dus het probleem verlaagd tot een Mayer systeem met n-p ombekenden en p-2 onafhankelijke variahelen. Daarmee gaan we door en wel p maal. Elke stap kost $O_{n-p}, \dots, O_1$. Dus tot nu hebben we nog niets gewonnen.

We zouden echter winnen indien na de <u>eerste</u> stap eens mocht blijken dat de $C^{\varphi'}_{\varphi'}$ alle nul waren. Want dan was er in (5.17) niets te integreren, we konden direct de oplossingen opschrijven: $\xi^{\varphi'} = \underset{0}{\xi}{}^{\varphi'}$.

We gaan nu bewijzen dat deze uitzonderlijke gunstige omstandigheid zich steeds voordoet indien in III toevallig

5.20) $$\{C^{p}_{\varphi}(\xi^{k})\}_{\xi' = \underset{0}{\xi}'} = 0$$

Inderdaad volgt dan uit (5.14)

$$C^{\xi'}_{\varphi'}(\xi^{\varphi'},\xi^{\eta'}) = \delta^{\beta}_{\varphi'}\,\delta^{\xi'}_{\xi}C^{\xi}_{\beta} - \delta^{\beta}_{\varphi'}A^{\xi'}_{\beta}$$

5.21)
$$= \delta^{\varphi}_{\varphi'}\,\delta^{\xi'}_{\xi}C^{\xi}_{\varphi} + \delta^{\varphi}_{\varphi'}\,\delta^{\varphi'}_{\xi}\,\partial_{\varphi}F^{\xi}$$

$$\kappa = 1,\dots,p;\ \varphi = 2,\dots,p;\ \xi = p+1,\dots n;$$
$$\varphi',\psi' = 2',\dots p';\ \xi' = (p+1)',\dots,n'$$

en indien men in deze vergelijkingen $\xi^{\varrho''} = \xi' = \xi'_0$ zet verandert de linkerzijde niet en komt er rechts ingevolge (5.12) en (5.20)

5.22)
$$\delta^{\beta}_{\varphi'}\,\delta^{\xi'}_{\xi}C^{\xi}_{\beta}(\xi^{\varphi'},\xi^{\eta'}) + \delta^{\varphi}_{\varphi'}\,\delta^{\varphi'}_{\xi}(\partial_{\varphi}F^{\xi})_{\xi'=\xi'_0} =$$
$$= \delta^{\beta}_{\varphi'}\,\delta^{\xi'}_{\xi}C^{\xi}_{\beta}(\xi^{\varphi'},\xi^{\varphi}_0,\xi^{\eta}) = 0$$

Daarmede is nu bewezen:

<u>Indien de</u> $C^{\xi}_{\varphi};\ \varphi = 2,\dots,p$ <u>uit het Mayer systeem</u>

5.23)
$$\partial_{\beta}\,\xi^{\xi} = -C^{\xi}_{\beta}(\xi^{\kappa});\ \beta = 1,\dots,p;\ \xi = p+1,\dots n$$

<u>identiek nul zijn in</u> $\xi^2,\dots\xi^p$ <u>voor</u> $\xi' = \xi'_0$, <u>dan zijn de principale oplossingen met betrekking tot</u> $\xi' = \xi'_0$ <u>aan het verkorte systeem</u>

5.24)
$$\partial_1\,\xi^{\xi} = -C^{\xi}_1(\xi^{\kappa}),$$

<u>waarin</u> $\xi^2,\dots\xi^p$ <u>als parameters worden opgevat, tevens de principale oplossingen van het systeem (5.24) met betrekking tot</u> $\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}_0;\ \alpha = 1,\dots,p,$ <u>indien</u> $\xi^1,\dots\xi^p$ <u>in deze oplossingen weer als gewone variabelen worden opgevat.</u>

In dit speciaal geval komen we dus uit met één enkel stel operaties $O_{n-p},\ \dots O_1$

Nu kan men altijd zorgen dat dit geval optreedt en wel door een coordinatentransformatie. Opdat de speciale Jacobische vorm gehandhaafd blijft zal in elk geval moeten gelden

5.25)
$$\xi^{\alpha'} = f^{\alpha'}(\xi^{\alpha});\ \alpha = 1,\dots p;\ \alpha' = 1',\dots,p'$$

Laten we daarnu bij nemen

5.26)
$$\xi^{\xi'} = \delta^{\xi'}_{\xi}\,\xi^{\xi};\ \xi = p+1,\dots n;\ \xi' = (p+1)',\dots,n'$$

Dan is

5.27)
$$C^{\xi'}_{\beta'} = A^{\xi'}_{\xi}C^{\xi}_{\beta}A^{\beta}_{\beta'} = \delta^{\xi'}_{\xi}C^{\xi}_{\beta}A^{\beta}_{\beta'}$$

en dus

5.28)
$$C^{\xi'}_{\varphi'} = \delta^{\xi'}_{\xi}C^{\xi}_{\beta}A^{\beta}_{\varphi'};\ \varphi' = 2',\dots,p'$$

We verlangen nu dat

5.29) $$C^{\varphi'}_{\psi'}(\underset{0}{\xi}^{1'}, \xi^{\psi'}, \xi^{\eta'}) = 0 \; ; \; \varphi', \psi' = 2', \dots, p' ; \quad \zeta', \eta' = (p+1)', \dots, n'$$

zal zijn. Wil dit <u>algemeen</u> gelden, d.w.z. voor iedere keuze van de functies C^{φ}_{β} dan moet er dus in $A^{\beta}_{\varphi'}$ een factor $\xi^{1'} - \underset{0}{\xi}^{1'}$ zitten.

Neem nu met Lie de tranformatie

5.30) $$\xi^{1} = \underset{0}{\xi}^{1} + \xi^{1'} \; ; \; \xi^{\varphi} = \underset{0}{\xi}^{\varphi} + \xi^{1'} \delta^{\varphi}_{\varphi'} \xi^{\varphi'} \; ; \; \xi^{\zeta} = \delta^{\zeta}_{\zeta'} \xi^{\zeta'}$$

$$(\text{dus } \underset{0}{\xi}^{1'} = 0) \qquad \varphi = 2, \dots, p ; \; \varphi' = 2', \dots, p' ; \quad \zeta = p+1, \dots, n ; \; \zeta' = (p+1)', \dots, n'$$

dan is

5.31) $$A^{1}_{\varphi'} = 0 \; ; \; A^{\varphi}_{\varphi'} = \xi^{1'} \delta^{\varphi}_{\varphi'} = (\xi^{1'} - \underset{0}{\xi}^{1'}) \delta^{\varphi}_{\varphi'}$$

en we hebben

5.32) $$C^{\varphi'}_{\psi'} = \delta^{\varphi'}_{\varphi} \delta^{\psi}_{\psi'} C^{\varphi}_{\psi} (\xi^{1'} - \underset{0}{\xi}^{1'})$$

zodat inderdaad nu aan de gestelde voorwaarde voldaan is.

Maar nu is de moeilijkheid dat de transformatie (5.30) geen ordelijke coordinatentransformatie meer is omdat de functionaaldeterminant voor $\xi^{1'} = \underset{0}{\xi}^{1'}$ nul wordt. Inderdaad is immers de determinant van $A^{\beta}_{\beta'}$

5.33) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \xi^{1'} & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \xi^{1'} \end{vmatrix} = 0 \text{ voor } \xi^{1'} = \underset{0}{\xi}^{1'} (=0)$$

Dat betekent dus dat we de op de nieuwe coordinaten verkregen oplossing niet terug kunnen transformeren. Niettegenstaande dat gaan we die oplossing toch maar eens bepalen. We bepalen dus van het verkorte systeem (in de nieuwe coordinaten)

5.34) $$\partial_{1'} \xi^{\psi'} = -C^{\psi'}_{1'}(\xi^{1'}, \xi^{\varphi'}, \xi^{\zeta'})$$

de principale oplossingen t.o.v. $\xi^{1'} = \underset{0}{\xi}^{1'} (=0)$ met de $\xi^{\varphi'}$ als parameters:

5.35) $$\xi^{\psi'} = F^{\psi'}(\xi^{1'}, \xi^{\varphi'})$$

met de voorwaarde

5.36) $$\underset{0}{\xi}^{\psi'} = F^{\psi'}(\underset{0}{\xi}^{1'}, \xi^{\varphi'})$$

Waaruit blijkt dat dit nu vanzelf ook de oplossingen zijn van

5.37) $$\partial_{\beta'}\xi^{\gamma'} = -C^{\gamma'}_{\beta'}$$

mits men de $\xi^{\rho'}$; $\rho' = 1, \ldots, p'$ weer als variabelen opvat. Wat we nu willen hebben zijn de ξ^{γ} uitgedrukt in de ξ^{α}. We kunnen nu wel zulke uitdrukkingen halen uit (5.35), namelijk, ingevolge (5.30)

5.38) $$\xi^{\gamma} = \delta^{\gamma}_{\gamma'} F^{\gamma'}\left(\xi^{1} - \overset{\circ}{\xi}{}^{1}, \frac{\xi^{\rho} - \overset{\circ}{\xi}{}^{\varphi}}{\xi^{1} - \overset{\circ}{\xi}{}^{1}}\right)$$

maar wie garandeert dat ook de oplossing van het oorspronkelijke gegeven Mayer systeem is. We hebben immers op ongeoorloofde wijze teruggetransformeerd wat zich dan ook wreekt dat in (5.32) juist $\xi^{1} - \overset{\circ}{\xi}{}^{1}$ in de noemer voorkomt. Dat zou alleen niet hinderen indien in $F^{\gamma'}$ de $\overset{\circ}{\xi}{}^{\varphi'}$ alleen zouden voorkomen in de combinatie $\xi^{1'}\xi^{\rho'}$, immers dan zou er uit $F^{\gamma'}$ een ordelijke functie van de ξ^{α} kunnen ontstaan. Men ziet dan ook daaraan dat de transformatie van ξ^{κ} in $\xi^{1'}, \xi^{\rho'}, \xi^{\gamma'}$ niet ordelijk is maar die van ξ^{κ} in de variabelen $\xi^{1'}, \xi^{1'}\xi^{\rho'}, \xi^{\gamma'}$ wel. Nu kunnen we eenvoudig bewijzen dat inderdaad deze gunstige omstandigheid optreedt. Immers, het gegeven Mayer systeem heeft zeker principale oplossingen t.o.v. $\xi^{\alpha} = \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha}$. Zijn deze

5.39) $$\xi^{\gamma} = \phi^{\gamma}(\overset{\circ}{\xi}{}^{1}, \xi^{\varphi})\ ;\ \overset{\circ}{\xi}{}^{\gamma} = \phi^{\gamma}(\overset{\circ}{\xi}{}^{1}, \overset{\circ}{\xi}{}^{\varphi})$$

dan kunnen we deze transformeren in

5.40) $$\xi^{\gamma'} = \delta^{\gamma'}_{\gamma}\phi^{\gamma}(\overset{\circ}{\xi}{}^{1} + \xi^{1'}, \overset{\circ}{\xi}{}^{\varphi} + \delta^{\varphi}_{\varphi'}\xi^{1'}\xi^{\rho'})$$

en dit zijn principale oplossingen t.o.v. $\xi^{\alpha'} = \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha'}$ van het getransformeerde systeem (5.31). Nu heeft (5.31) echter slechts één stel principale oplossingen t.o.v. $\xi^{\alpha'} = \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha'}$ en uit een vergelijking van (5.32) en (5.34) volgt dus, dat de $\overset{\circ}{\xi}{}^{\varphi'}$ in $F^{\gamma'}$ alleen voorkomen in de verbindingen $\xi^{1'}\xi^{\varphi'}$.

Het is onfraai dat in de transformatie van Lie (5.30) de variabele ξ^{1} wordt bevoorrecht. Mayer gaf een fraaiere transformatie waarbij echter overgegaan wordt tot n + 1 overtallige coordinaten $\eta^{\circ}; \eta^{\kappa}$:

5.41) $$\xi^{\alpha} = \overset{\circ}{\xi}{}^{\alpha} + \eta^{\circ}\eta^{\alpha}\ ;\ \alpha = 1, \ldots, p\ ;\ \gamma = p+1, \ldots, n$$
$$\xi^{\gamma} = \eta^{\gamma}$$

De bewijzen verlopen voor deze coordinaten op overeenkomstige wijze.

§ 6. Het covariante vectorveld of de Pfaff'sche vorm.

Heeft men een enkel vectorveld w_{λ} dan kan men daaruit de rotatie vormen

6.1) $$W_{\mu\lambda} \overset{\text{def}}{=} 2\,\partial_{[\mu}w_{\lambda]}$$

Op dezelfde wijze kan men, als een p-vectorveld $w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ gegeven is de rotatie vormen gedefinieerd door

6.2) $$W_{\mu\lambda_1 \ldots \lambda_p} = (p+1)\, \partial_{[\mu}\, w_{\lambda_1 \ldots \lambda_p]}$$

Verkorte notaties zijn

6.3) $$W = \mathrm{Rot}\, w = (p+1)\, \Pi w$$

Men kan bewijzen dat Rot Rot steeds nul oplevert.

Beschouwen we nu bij het veld w_λ de volgende stelsels vanlineaire totale differentiaalvergelijkingen

		μ-rang
	S) $w_\mu\, d\xi^\mu = 0$	c
	S_1) $W_{\mu\lambda}\, d\xi^\mu = 0$	2ρ = rotatie klasse
6.4)	S_2) $w_\mu\, d\xi^\mu = 0,\ W_{\mu\lambda}\, d\xi^\mu = 0$	K = klasse
	S_3) $W_{\mu[\lambda} w_{\nu]}\, d\xi^\mu = 0$ of $W_{\mu\lambda}\, d\xi^\mu :: w_\lambda$	c_3
	S_4) $w_\mu\, d\xi^\mu = 0,\ W_{\mu\lambda}\, d\xi^\mu = 0$	k = gelijkvormigheidsklasse

De invariant k ontleent zijn naam aan het feit dat S_4 invariant is bij de gelijkvormigheidstransformaties $w_\lambda \rightarrow \sigma w_\lambda$. Men ziet gemakkelijk in dat c = 1 of c = 0 en dat

6.5) $$\begin{array}{ccccc} n & \geqq & K & \geqq & k \\ & & \vee\!\!\parallel & & \vee\!\!\parallel \\ & & 2\rho & \geqq & c_3 \geqq 0 \end{array}$$

De volgende beschouwingen hebben betrekking op een"gebied van constante klasse", dat is een gebied waar al deze arithmetrische invarianten constant zijn.

Om de geadjungeerde systemen behorende bij (6.4) te bepalen vormen we de rij

6.6) $$w_\lambda \quad W_{\mu\lambda} \quad w_{[\nu} W_{\mu\lambda]} \quad W_{[\kappa\mu} W_{\lambda\nu]} \quad w_{[\omega} W_{\kappa\mu} W_{\lambda\nu]} \text{ enz.}$$

of kort symbolisch

6.7) $$\overset{1}{\mathcal{J}} = w \quad \overset{2}{\mathcal{J}} = W \quad \overset{3}{\mathcal{J}} = wW \quad \overset{4}{\mathcal{J}} = WW \quad \overset{5}{\mathcal{J}} = wWW, \text{ enz.}$$

Dan is in elk geval

6.8) $$\overset{2\sigma}{\mathcal{J}} \begin{cases} = 0 & \text{voor } \sigma > \rho \\ \neq 0 & \text{voor } \sigma \leqq \rho \end{cases}$$

Verder is

6.9) $$\overset{2\sigma}{\mathcal{J}} = 2\, \Pi\, \overset{2\sigma-1}{\mathcal{J}}$$

en daaruit volgt alvast dat $\overset{2\rho-1}{\mathcal{J}} \neq 0$. Nu moeten we twee gevallen onderscheiden:

I. W_λ ligt niet in het gebied van $W_{\mu\lambda}$. Dit is echter hetzelfde als het gebied van $\overset{2\rho}{\mathcal{J}}$, waaruit volgt dat $\overset{2\rho+1}{\mathcal{J}} = w\overset{2\rho}{\mathcal{J}} \neq 0$ is en $K = 2\rho+1$.

In § 2 zagen we dat bij het systeem

$$6.10)\quad C^x_\mu \, d\xi^\mu = 0 \; ; \; x = p+1, \ldots, n$$

behoort het geadjungeerde systeem

$$6.11)\quad B^\mu_b \, \partial_\mu f = 0 \; ; \; b = 1, \ldots p$$

met

$$6.12)\quad B^\mu_b \, C^x_\mu = 0$$

Nu is (6.11) equivalent met

$$6.13)\quad B^{\mu_1}_{[1} \ldots B^{\mu_p}_{p]} \, \partial_{\mu_1} f = 0$$

of ook

$$6.14)\quad C^{p+1}_{[\mu_{p+1}} \ldots C^n_{\mu_n} \partial_{\mu]} f = 0$$

en evenzo (6.10) equivalent met

$$6.15)\quad C^{p+1}_{[\mu_{p+1}} \ldots C^n_{\mu_n]} \, d\xi^{\mu_n} = 0$$

of ook

$$6.16)\quad B^{[\mu_1}_1 \ldots B^{\mu_p}_p \, d\xi^{\mu]} = 0$$

Bijgevolg is S_1 gelijkwaardig met

$$6.17)\quad \overset{2\rho}{\mathcal{J}}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{2\rho}} \, d\xi^{\lambda_1} = 0$$

en is dus het geadjungeerde systeem S_1'

$$6.18)\quad S_1' \quad \boxed{\overset{2\rho}{\mathcal{J}} \bar{f} = 0}$$

(symbolisch voor

$$\overset{2\rho}{\mathcal{J}}_{[\mu_1 \ldots \mu_{2\rho}} \partial_{\mu]} f = 0$$

Evenzo is S_2 gelijkwaardig met

$$\overset{2\rho+1}{\mathcal{J}}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{2\rho+1}} \, d\xi^{\lambda_1} = 0$$

en het geadjungeerde systeem S_2' dus

$$6.19)\quad S_2' \quad \boxed{\overset{2\rho+1}{\mathcal{J}} \bar{f} = 0}$$

(voor $K = 2\rho + 1$)

Aangezien w_λ niet in het gebied van $W_{\mu\lambda}$ ligt hebben $W_{\mu\lambda}$ en $W_{\mu[\lambda} w_{\nu]}$ hetzelfde μ -gebied, zodat $S_1 = S_3$ en $S_2 = S_4$. Bijgevolg is in dit geval $C_3 = 2\rho$ en $k = 2\rho+1 = K$

II. w_λ ligt in het gebied van $\overset{2\rho}{\mathcal{J}}$. Dan is $S_1 = S_2$. Verder is $W_{\mu\lambda}$ te ontbinden in

6.20) $$W_{\mu\lambda} = 2\, u_{[\mu} w_{\lambda]} + \overset{*}{W}_{\mu\lambda}$$

waarin $\overset{*}{W}_{\mu\lambda}$ van de rang $2\rho - 2$ is en de gebieden van $2u_{[\mu} w_{\lambda]}$ en $\overset{*}{W}_{\mu\lambda}$ geen vector gemeen hebben. Uit (6.20) volgt

6.21) $$\overset{2\rho-1}{\mathcal{J}} = w\, W \ldots W = w\, \overset{*}{W} \ldots \overset{*}{W} \neq 0 \; (\rho - 1 \text{ factoren})$$

en dus is het gebied van $\overset{2\rho-1}{\mathcal{J}}$ hetzelfde als het gebied van het stelsel $w, \overset{*}{W}$. Nu volgt uit S_3

6.22) $$W_{\mu[\lambda} w_{\nu]}\, d\xi^\mu = 0$$

en (6.20) dat

6.23) $$\left\{ - w_\mu\, u_{[\lambda} w_{\nu]} + \overset{*}{W}_{\mu[\lambda} w_{\nu]} \right\} d\xi^\mu = 0$$

Vermenigvuldiging met u_ω geeft

6.24) $$\overset{*}{W}_{\mu[\lambda} w_\nu u_{\omega]}\, d\xi^\mu = 0$$

maar wegens het buiten elkaar liggen van de gebieden van $\overset{*}{W}_{\mu\lambda}$ en $u_{[\mu} u_{\lambda]}$ kan dit alleen als $\overset{*}{W}_{\mu\lambda}\, d\xi^\mu = 0$. Bijgevolg is S_3 equivalent met

6.25) $$\begin{aligned} \overset{*}{W}_{\mu\lambda}\, d\xi^\mu &= 0 \\ w_\mu\, d\xi^\mu &= 0 \end{aligned}$$

en dat wil zeggen dat het gebied van $W_{\mu[\lambda} w_{\nu]}$ samenvalt met het gebied van $\overset{2\rho-1}{\mathcal{J}}$. Het geadjungeerde S_3' is dus

6.26) $$S_3' \quad \overset{2\rho-1}{\mathcal{J}}\, \bar{f} = 0 \quad (\text{voor } K = 2\rho)$$

Verder blijkt dat $S_3 = S_4$ en $S_3' = S_4'$ zodat $K = C_3 = 2\rho - 1$. Hieris een overzicht:

$$\text{I} \quad \begin{cases} S_3 = S_1 : \; W_{\mu\lambda}\, d\xi^\mu = 0 & S_4 = S_2 : \begin{cases} w_\mu\, d\xi^\mu = 0 \\ W_{\mu\lambda}\, d\xi^\mu = 0 \end{cases} \\ S_3' = S_1' : \; \overset{2\rho}{\mathcal{J}}\, \bar{f} = 0 & S_4' = S_2' : \; \overset{2\rho+1}{\mathcal{J}}\, \bar{f} = 0 \\ \qquad \overset{2\rho}{\mathcal{J}} \neq 0 \; ; \quad \overset{2\rho+1}{\mathcal{J}} \neq 0 & \overset{2\rho+2}{\mathcal{J}} = 0 \\ C_3 = 2\rho & k = K = 2\rho + 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\ \begin{cases} S_2 = S_1 : W_{\mu\lambda}^{2p}\, d\xi^\mu = 0 & S_4 = S_3 : W_{\mu[\lambda}^{2p-1} w_{\nu]}\, d\xi^\mu = 0 \\ S_2' = S_1' : \overset{2p}{\mathcal{J}} f = 0 & S_4' = S_3' : \mathcal{J} f = 0 \\ \overset{2p}{\mathcal{J}} \neq 0 \;;\; \overset{2p+1}{\mathcal{J}} = 0 & \\ K = 2p & k = c_3 = 2p-1 \end{cases}$$

De belangrijkste stelling is nu, dat S_1, S_2, S_3 en S_4 steeds volledige systemen zijn. Voor een stelsel $B^\mu_\ell \partial_\mu f = 0$ hadden we in §2 als n.e.v. voorwaarde voor volledigheid gevonden

6.27) $$B^\mu_{[c} B^\lambda_{\ell} \partial_{[\mu} C^x_{\lambda]} = 0 \;;\; b,c = 1,\ldots,p \;;\; x = p+1,\ldots,n$$

en hieruit kan men nu gemakkelijk een andere vorm van de n.e.v. voorwaarden afleiden:

6.28) $$w_{[\omega|\lambda_1\ldots\lambda_q|} \partial_\mu w_{\nu_1\ldots\nu_q]} = 0 \;;\; q = n-p$$

waarin

6.29) $$w_{\lambda_1\ldots\lambda_q} = C^{p+1}_{[\lambda_1} \ldots C^n_{\lambda_q]}$$

Hieruit volgt dat volledigheid zeker optreedt als $w_{\lambda_1\ldots\lambda_q}$ rotatievrij is. De multivectoren $\overset{2p}{\mathcal{J}}$ en $\overset{2p+1}{\mathcal{J}}$ zijn nu enkelvoudig en beide rotatievrij en daarmede is de volledigheid van S_1 en van S_4 voor het geval I al bewezen. Voor het geval II is $\overset{2p-1}{\mathcal{J}}$ enkelvoudig en zijn rotatie is $\overset{2p}{\mathcal{J}}$ zodat hier ook (6.28) geldt. De volledigheid van $\overset{2p}{\mathcal{J}}$ wil zeggen dat de E_{n-2p} van deze $2p$-vector X_{n-2p}-vormend is. Er bestaan dus $\infty^{2p} X_{n-2p}$'s, de rotatiedragers van het veld w_λ. Evenzo behoren bij S_2' $\infty^K X_{n-K}$'s, de dragers van het veld w_λ en bij S_4' $\infty^k X_{n-k}$'s, de charakteristieken van het veld w_λ, waartussen het volgende verband bestaat:

6.30) I) $k = K = 2p+1$ char. = dragers $\subset$ rotatiedragers
II) $k = 2p-1$ $K = 2p$ char. $\supset$ dragers = rotatiedragers

§ 7. Klasseverlaging bij doorsnijdingen.

Is een q-vector $w_{\lambda_1\ldots\lambda_q}$ gegeven en een X_m

7.1) $$\xi^\kappa = \xi^\kappa(\eta^\alpha) \;;\; \alpha = 1,\ldots,m$$

dan is

7.2) $$'w_{b_1\ldots b_q} = B^{\lambda_1}_{b_1} \ldots B^{\lambda_q}_{b_q} w_{\lambda_1\ldots\lambda_q} \;;\; B^\kappa_b \overset{\mathrm{def}}{=} \partial_b \xi^\kappa;$$

de doorsnede van $w_{\lambda_1\ldots\lambda_q}$ met de X_m. Deze doorsnede is een q-vector en dus steeds nul als $q > m$. Nu geldt de stelling:

rotatiedoorsnede = doorsnede rotatie

inderdaad is

7.3) $$\partial_{[b}\,{}'w_{b_1\ldots b_q]} = (\partial_{[b}B^{\lambda_1}_{b_1}\ldots B^{\lambda_q}_{b_q]})w_{\lambda_1\ldots\lambda_q} + B^{\lambda_1}_{[b_1}\ldots B^{\lambda_q}_{b_q}B^{\lambda}_{b]}\partial_{[\lambda}w_{\lambda_1\ldots\lambda_q]}$$

en de eerste term rechts is nul omdat $\partial_{[b}B^{\kappa}_{c]} = 0$

Stel nu dat X_m als volgt gegeven is

7.4) $$\overset{m+1}{f}(\xi^{\kappa}) = \overset{m+1}{c}\,;\ \ldots\ ;\ \overset{n}{f}(\xi^{\kappa}) = \overset{n}{c}$$

dan stellen deze vergelijkingen bij veranderlijke waarden der c's een stel van $\infty^{n-m}\ X_n$'s voor. Kiest men nu de coordinaten zo dat

7.5) $$\xi^{m+1} = \overset{m+1}{f}\,;\ \ldots\ldots\ ;\ \xi^{n} = \overset{n}{f}$$

dan de X_m's de coordinaten X_m's van dit coordinatenstelsel in elk der X_m's ~~kan~~ men $\xi^1, \ldots \xi^m$ als coordinaten gebruiken. Wordt dit gedaan dan treden dus $\xi^1 \ldots \xi^m$ in de plaats van $\eta^1, \ldots, \eta^m$ en de doorsnede wordt nu

7.6) $$'w_{\beta_1\ldots\beta_q} = B^{\lambda_1}_{\beta_1}\ldots B^{\lambda_q}_{\beta_q}w_{\lambda_1\ldots\lambda_q} = w_{\beta_1\ldots\beta_q}(\xi^1,\ldots\xi^m, \overset{m+1}{c},\ldots,\overset{n}{c})$$

Dat geeft het recept:

<u>Om de doorsnede van</u> $w_{\lambda_1\ldots\lambda_q}$ <u>te verkrijgen laat men eerst alle termen vallen die een of meer der</u> (<u>nieuwe</u>) <u>maatvectoren</u> $\overset{m+1}{e}_{\lambda},\ldots,\overset{n}{e}_{\lambda}$ <u>bevatten en in de overblijvende als functies van</u> $\xi^1 \ldots \xi^n$ <u>beschouwd vervangt men</u> $\xi^{m+1},\ldots,\xi^{n}$ <u>door de constanten</u> $\overset{m+1}{c},\ldots\overset{n}{c}$.

Wordt van een vector w_{λ} van de klasse K de doorsnede met X_m gevormd dan ontstaat aldus een vector $'w_{\beta}$ van een klasse K$'$ in $'X_m$. Het verschil k = K - K$'$ heet de <u>index</u> van het functiesysteem $\overset{m+1}{f},\ldots,\overset{n}{f}$, t.o.v. w_{λ}. Om K$'$ te berekenen hebben we nodig $'w$, de rotatie $'W$ en de uit $'w$ en $'W$ te berekenen rij der $'\mathcal{J}$'s. Haar $'w$ is de doorsnede van w , $'W$ de doorsnede van W en dus iedere $'\mathcal{J}$ de doorsnede van de overeenkomstige $\mathcal{J}$. Om dus zulk een $'\mathcal{J}$ te berekenen laten we uit de overeenkomstige $\mathcal{J}$ alle termen met $\overset{m+1}{e}_{\lambda},\ldots\overset{n}{e}_{\lambda}$ vallen en vervangen in de overige $\xi^{m+1},\ldots\xi^{n}$ door $\overset{m+1}{c},\ldots,\overset{n}{c}$. Let men nu op dat $\overset{m+1}{e}_{\lambda} = \partial_{\lambda}\overset{m+1}{f}$ enz., dan volgt dat $'\mathcal{J}$ dan en alleen dan nul is wanneer

7.7) $$\tilde{\mathcal{J}}_{[\lambda_1\ldots\lambda_\sigma}\,\partial_{\lambda_{m+1}}\overset{m+1}{f}\cdots\partial_{\lambda_n]}\overset{n}{f} = 0$$

Neem eerst het geval m = n - 1, dus slechts één functie f.

Dan is dus ${}'\mathcal{J}^{\sigma}=0$ alleen indien $\mathcal{J}^{\sigma}\bar{f}=0$. Er zijn de volgende gevallen

I K oneven)

a) $\mathcal{J}^{2\rho+1}\bar{f} \neq 0$, dus $\mathcal{J}^{2\rho}\bar{f} \neq 0$

f geen opl. van $S_2' = S_4'$ en <u>dus</u> geen opl. van $S_1' = S_3'$

${}'K = K$; $k = 0$

7.8) b) $\mathcal{J}^{2\rho+1}\bar{f} = 0$, maar $\mathcal{J}^{2\rho}\bar{f} \neq 0$

f een opl. van $S_2' = S_4'$ maar geen opl. van $S_1' = S_3'$

$K' = K - 1$; $k = 1$

c) $\mathcal{J}^{2\rho+1}\bar{f} = 0$ omdat $\mathcal{J}^{2\rho}\bar{f} = 0$

f een opl. van $S_1' = S_3'$ en <u>dus</u> een opl. van $S_2' = S_4'$

${}'K = K - 2$; $k \geq 2$ (zie echter later)

II k even)a) $\mathcal{J}^{2\rho}\bar{f} \neq 0$, dus $\mathcal{J}^{2\rho-1}\bar{f} \neq 0$

f geen op. van $S_1' = S_2'$ en <u>dus</u> geen opl. van $S_3' = S_4'$

${}'K = K$; $k = 0$

7.9) b) $\mathcal{J}^{2\rho}\bar{f} = 0$, maar $\mathcal{J}^{2\rho-1}\bar{f} \neq 0$

f een opl. van $S_1' = S_2'$ maar geen opl. van $S_3' = S_4'$

${}'K = K - 1$; $k = 1$

c) $\mathcal{J}^{2\rho}\bar{f} = 0$ omdat $\mathcal{J}^{2\rho-1}\bar{f} = 0$

f een opl. van $S_3' = S_4'$ en <u>dus</u> een opl. van $S_1' = S_2'$

${}'K \leq K - 2$; $k \geq 2$ (zie echter later)

We gaan nu bewijzen dat in <u>alle</u> gevallen ${}'K \geq K - 2$ is, indien f een oplossing van S_2' is. Neem het coordinatenstelsel zo dat $\xi^n = f$, dan is dus ξ^n een oplossing van S_2' en $\xi^n =$ const. een integraal van S_2. Bijgevolg neemt S_2 de vorm aan

$$
\begin{aligned}
&d\xi^n = 0 \longleftarrow \\
S_2) \quad &w_\beta\, d\xi^\beta = 0 \\
&w_{\beta\alpha}\, d\xi^\beta = 0 \\
&w_{\beta n}\, d\xi^\beta = 0 \longleftarrow \qquad \beta = 1, \dots, n-1
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Dit zijn de vergelijkingen van ${}'S_2$ horende bij de doorsnede ${}'w_\beta$;

We weten nu dat S_2 volledig is, dus dit moeten precies $2\rho+1$ onafhankelijke vergelijkingen zijn. Laat men twee met pijl aangeduide, die zeker onafhankelijk zijn weg dan moeten er dus een aantal $\geq 2\rho - 1$ onafhankelijke overblijven. Bijgevolg is ${}'K \geq 2\rho - 1$ d.w.z. ${}'K \geq K - 2$.

Hieruit volgt dus nu dat in de gevallen Ie en IIe juist $'K = K-2$ en $k = 2$.

Samenvattend hebben we dus nu verkregen

$k = 0$ als f geen opl. is van S_2' en <u>dus</u> ook niet van S_3'
$k = 1$ als f een opl. is van S_2', maar <u>niet</u> van S_3'
7.11) $k = 2$ als f een opl. is van S_3' en <u>dus</u> van S_2'

Een functie met index 0 behoeft slechts aan ongelijkheden te voldoen en kan dus <u>zonder integratie</u> bepaald worden. Voor een functie met index 1 is integratie van S_2' nodig, dat is van een volledig systeem van n − K vergelijkingen. Dat kost in het algemeen een operatie O_K. Evenzo is voor een functie met index 2 integratie van S_3' nodig dus in het algemeen een O_{K-1}. Maar er zijn uitzonderingen. Is K = 1 dan is $f = \int \omega_\lambda d\xi^\lambda$ een functie met index 1 en kunnen we dus met een O_0 uit. Is K = 2 dan kunnen we met een O_1 eenfunctie s met index 2 bepalen. Dan is $\omega_{[\mu}\partial_{\lambda]}s = 0$ en dus is ω_λ van de vorm $\omega_\lambda = z\,\partial_\lambda s$. s gevonden zijnde kan z zonder integratie bepaald worden en z heeft dan index 1. We hebben dus volgende kostentabel voor één enkele functie

index 0	geen integraties, bestaat alleen voor $K < n$	
index 1	O_K	voor $K > 2$
7.12)	O_1	voor K = 2
	O_0	voor K = 1
index 2	O_{K-1}	

Zijn er meerdere functies $\overset{m+1}{f}, \dots, \overset{n}{f}$, dan is de index t.o.v. ω_λ zeker $\leq 2(n-m)$ omdat de doorsnijding na elkaar uit kan voeren en iedere functie ten hoogste een klasseverlaging 2 kan geven. Is inderdaad $k = 2(n-m)$ dan heet het functiesysteem <u>geconjugeerd t.o.v.</u> ω_λ. Elke functie <u>moet</u> dan index 2 hebben. Om een geconjugeerd functiesysteem te bepalen zodat men dus eerst een oplossing van S_3':

7.13) $$\overset{K-1}{\mathcal{Y}}\bar{f} = 0$$

Dit kost een O_{K-1}. Stel $\overset{m+1}{f}$ is die oplossing, zoek dan een f die tezamen met $\overset{m+1}{f}$ met 4 verlaagt:

7.14) $$\overset{K-3}{\mathcal{Y}}\overset{m+1}{f}\bar{f} = 0$$

Maar dit is equivalent met een S_3' − vergelijking in de X_{n-1}, $\overset{m+1}{f} =$ constant. Dus kan zeker met een operatie O_{K-3} worden opgelost. Noem die oplossing $\overset{m+2}{f}$ en ga zo door. In totaal zijn de operaties

7.15) $\quad O_{K-1}, O_{K-3}, \dots, O_{K-2(n-m)+1}$

nodig om één geconjugeerd functiesysteem vast te leggen.

Indien $k = 2(n-m) - 1$ dan heet het functiesysteem semigeconjugeerd. Elke functie moet dan òf index 1 òf index 2 hebben anders kwamen we niet uit. Men kan dus beginnen met een functie van index 1, dat kost oplossing van S_2':

7.16) $\quad \overset{K}{\mathcal{J}} \bar{f} = 0$

dus een O_K. Noem deze $\overset{m+1}{f}$. De verdere verlagen alle telkens met 2. Los dus eerst op

7.17) $\quad \overset{K-2}{\mathcal{J}} \overset{m+1}{f} f = 0$

enz. In totaal is er nodig

$O_K, O_{K-2}, \ldots\ldots, O_{K+2-2(n-m)}$

Maar het kan ook anders. Verlaag eerst n-m-1 maal met 2, dat geeft $\overset{m+1}{f}, \ldots, \overset{n-2}{f}$ met behulp van de operaties

7.18) $$O_{K-1}, O_{K-3}, \ldots\ldots, O_{K+3-2(n-m)}$$

en de klasse is nu gedaald tot $K-2(n-m-1)$. Nu willen we nog één verder naar beneden en dus moet $\overset{n}{f}$ een oplossing zijn van

7.19) $$\overset{K-2(n-m-1)}{y} \; \bar{f} = 0$$

die zich afspeelt in de X_{m+1} met de vergelijkingen $\overset{n+1}{f} = \text{const}; \ldots; \overset{n-1}{f} = \text{const}$.

Om die oplossing is nu nog nodig een

7.20) $$\begin{array}{lll} O_{K+2-2(n-m)} & \text{voor} & K > 2(n-m) \\ O_1 & " & K = 2(n-m) \\ O_0 & " & K = 2(n-m)-1 \end{array}$$

§ 8. Het theorema der Klasseverhoging

Wij bewijzen het theorema

Opdat bij een gegeven veld w_λ van klasse K juist een systeem van S functies kan worden gevonden met index k is noodzakelijk en voldoende dat

8.1) $$\begin{array}{c} 0 \leq k \leq K \\ 2S \geq k \\ K-k \leq n-S \end{array}$$

De noodzakelijkheid der voorwaarden is triviaal. Het bewijs van de onvoldoendheid wordt geleverd door inderdaad S functies te construeren. We doen dat dan zo dat er zoveel mogelijk functies zonder integraties bepaald worden, en bepalen tegelijk voor de anderen de ten hoogste nodige operaties.

u willekeurige functies bepalen een systeem van $\infty^u \; X_{n-u}$'s en de doorsneden van deze met w_λ hebben zeker een klasse $\leq n-u$. Is nu $n-u \leq K$ maak dan dat deze klasse $n-u$ wordt.

Daarvoor is n.e.v. dat

8.2) $$\overset{\sigma}{y} \; \bar{f} \ldots\ldots \overset{u}{\bar{f}} \begin{cases} = 0 & \text{voor } \sigma > n-u \\ \neq 0 & \text{voor } \sigma \leq n-u \end{cases}$$

en hier blijven alleen de ongelijkheden omdat een alternerend product van meer dan n factoren altijd 0 is. Is $n-u \geq K$ maak dan dat de klasse van de doorsneden precies K is. Daarvoor is n.e.v. dat

8.3) $$\overset{\sigma}{y} \; \bar{f} \ldots\ldots \overset{u}{\bar{f}} \begin{cases} = 0 & \text{voor } \sigma > K \\ \neq 0 & \text{voor } \sigma \leq K \end{cases}$$

maar ook hier valt de gelijkheid weg, omdat $J^{\sigma}=0$ voor $\sigma > K$. De functies hoeven dus alleen maar aan ongelijkheden te voldoen en kosten geen integraties. Ga door met het <u>eerste</u> geval. De klasse is nu $n-u$ in een X_{n-u} en deze moet gereduceerd worden tot $K-k$. Dat kan altijd met behulp van

8.4) $\frac{1}{2}(n-u-K+k+\eta)$ $\qquad \eta = 0$ of 1

functies en het totaal aantal functies is S, dus

8.5) $u+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\eta = S$

of

8.6) $u = 2S+K-k-n-\eta$

Nu willen we het aantal u maximaal hebben en kiezen dus $\eta = 0$. Dan is

8.7) $u = 2S+K-k-n$

en omdat hier $n-u \leq K$ is

8.8) $\boxed{2K-2n+2S \geq k}$

Nu het <u>tweede</u> geval. Hier blijft de klasse eerst K in een X_{n-u}. Dan zijn er nog nodig $\frac{1}{2}k$ of $\frac{1}{2}(k+1)$ functies die de klasse op $K-k$ brengen. Het totaal aantal functies is dus

8.9)
$$S = \begin{cases} u+\frac{1}{2}k & (k \text{ even}) \\ u+\frac{1}{2}(k+1) & (k \text{ oneven}) \end{cases}$$

dus

8.10)
$$u = \begin{cases} S-\frac{1}{2}k & (k \text{ even}) \\ S-\frac{1}{2}(k+1) & (k \text{ oneven} \end{cases}$$

en aangezien $n-u \geq K$ is hebben we nu

8.11) $\boxed{2K-2n+2S \leq k+1}$

Dus, recapitulerend:

Voor $2K-2n+2S \geq k$

Bepaal eerst $u = 2S+K-k-n$ functies zonder integratie, die de klasse brengen op

$n-u = 2n-2S-K+k$

Bepaal daarna nog $n-S+k-K$ functies die de klasse op $K-k$ brengen. Hiervoor nodig de operaties $O_{2n-2S-K+k-1}, O_{2n-2S-K+k-3}, \ldots\ldots, O_{K-k+1}$

Voor $2K-2n+2S \leq k+1$

Bepaal eerst $S-\frac{1}{2}k$ of $S-\frac{1}{2}(k+1)$ functies zonder integratie die de klasse onveranderd laten en daarna $\frac{1}{2}k$ of $\frac{1}{2}(k+1)$ functies die de klasse op $K-k$ brengen. Dit kost:

k even: $O_{K-1}, O_{K-3}, \ldots, O_{K-k+1}$

k oneven:
$$\begin{cases} K > k+1 & : O_{K-1}, O_{K-3}, \ldots, O_{K-k+2}, O_{K-k+1} \\ K = k+1 & : O_{K-1}, O_{K-3}, \ldots, O_1 \\ K = k & : O_{K-1}, O_{K-3}, \ldots, O_0 \end{cases}$$

§ 9. <u>Kanonische vormen van</u> w_λ <u>en</u> $w_\lambda d\xi^\lambda$

Zij $2\rho+\varepsilon$ de klasse van w_λ en $\overset{1}{s},\dots,\overset{\rho}{s}$ een systeem van ρ functies met index 2ρ. Kies de ξ^k dan zo, dat $\overset{1}{s},\dots,\overset{\rho}{s},\xi^{\rho+1},\dots,\xi^n$ onafhankelijk zijn. $w_\lambda d\xi^\lambda$ kan dan als volgt worden uitgeschreven

$$9.1)\quad w_\lambda d\xi^\lambda = \overset{1}{u}\,d\overset{1}{s}+\dots+\overset{\rho}{u}\,d\overset{\rho}{s}+\overset{\rho+1}{u}\,d\xi^{\rho+1}+\dots+\overset{n}{u}\,d\xi^n$$

waarin $\overset{1}{u},\dots,\overset{n}{u}$ functies van $\overset{1}{s},\dots,\overset{\rho}{s},\xi^{\rho+1},\dots,\xi^n$ zijn. Daar de index 2ρ is ontstaat uit (9.1) een vorm van de klasse ε indien $\overset{1}{s},\dots,\overset{\rho}{s}$ door constanten worden vervangen. Bijgevolg is voor $\varepsilon=1$

$$9.2)\quad \overset{\rho+1}{u}\,d\xi^{\rho+1}+\dots+\overset{n}{u}\,d\xi^n$$

een volledige differentiaal indien in deze uitdrukking $\overset{1}{s},\dots,\overset{\rho}{s}$ als parameters worden beschouwd. Er bestaat dus een scalar $p(\xi^\kappa)$ zo dat

$$9.3)\quad \overset{\rho+1}{u}\,d\xi^{\rho+1}+\dots+\overset{n}{u}\,d\xi^n = dp-\frac{\partial p}{\partial \overset{1}{s}}d\overset{1}{s}-\dots-\frac{\partial p}{\partial \overset{\rho}{s}}d\overset{\rho}{s}$$

Uit (9.1) en (9.3) volgt echter dat $w_\lambda d\xi^\lambda$ kan worden geschreven

$$9.4)\quad w_\lambda d\xi^\lambda = dp+\overset{1}{z}\,d\overset{1}{s}+\dots+\overset{\rho}{z}\,d\overset{\rho}{s}$$

Op dezelfde wijze wordt bewezen, dat voor $\varepsilon=0$ een vorm bestaat

$$9.5)\quad w_\lambda d\xi^\lambda = \overset{1}{z}\,d\overset{1}{s}+\dots+\overset{\rho}{z}\,d\overset{\rho}{s}$$

Men noemt (9.4) en (9.5) <u>kanonische vormen</u> van $w_\lambda d\xi^\lambda$. Het is interessant voor kanonische vormen de vergelijkingen der dragers, rotatiedragers en charakteristieken te kennen:

$$9.6)\quad \begin{cases} K=2\rho+1 & \begin{cases} \text{char.=dragers:}\ (X_{n-k}=X_{n-K}) & \begin{cases} p=\text{const.};\ \overset{1}{s}=\text{const.};\dots;\ \overset{\rho}{s}=\text{const.} \\ \overset{1}{z}=\text{const.};\dots;\ \overset{\rho}{z}=\text{const.} \end{cases} \\ \text{rotatiedragers:}\ (X_{n-2\rho}) & \begin{cases} \overset{1}{s}=\text{const.};\dots;\ \overset{\rho}{s}=\text{const.} \\ \overset{1}{z}=\text{const.};\dots;\ \overset{\rho}{z}=\text{const.} \end{cases} \end{cases} \\ K=2\rho & \begin{cases} \text{char.}\ (X_{n-k}) & \begin{cases} \overset{1}{s}=\text{const.};\dots;\ \overset{\rho}{s}=\text{const.} \\ \overset{1}{z}:\overset{2}{z}:\ \dots\ :\overset{\rho}{z}=\text{const.} \end{cases} \\ \text{dragers=rotatiedragers}\ (X_{n-K}=X_{n-2\rho}) & \begin{cases} \overset{1}{s}=\text{const.};\dots;\ \overset{\rho}{s}=\text{const.} \\ \overset{1}{z}=\text{const.};\dots;\ \overset{\rho}{s}=\text{const.} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

In de kanonische vormen verschijnt w_λ als een veld van de klasse K in de X_K van de variabelen $\varepsilon p,\overset{1}{s},\dots,\overset{\rho}{s},\overset{1}{z},\dots,\overset{\rho}{z}$ dat ontstaat wanneer de X_n wordt samengelegd naar het normaalprobleem X_{n-K}'s met de vergelijkingen

$$9.7)\quad \varepsilon p=\text{const.};\quad \overset{1}{s}=\text{const.};\dots;\ \overset{\rho}{s}=\text{const.};\quad \overset{1}{z}=\text{const.};\dots;\ \overset{\rho}{z}=\text{const.}$$

Dit zijn precies de dragers van w_λ

Voor $\varepsilon = 1$ is

9.8) $$\overset{2\rho}{y}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{2\rho}} = 2^\rho \, \overset{1}{z}_{[\lambda_1} \overset{1}{s}_{\lambda_2} \cdots\cdots \overset{\rho}{z}_{\lambda_{2\rho-1}} \overset{\rho}{s}_{\lambda_{2\rho}]}$$

$$\overset{2\rho+1}{y}_{\lambda_1 \ldots \lambda_{2\rho+1}} = 2^\rho \, \overset{1}{z}_{[\lambda_1} \overset{1}{s}_{\lambda_2} \cdots\cdots \overset{\rho}{z}_{\lambda_{2\rho-1}} \overset{\rho}{s}_{\lambda_{2\rho}} p_{\lambda_{2\rho+1}]}$$

en daaruit volgt dat voor K even een veld in den kanonische vorm nergens een punt van verminderde klasse heeft waar die vorm geldt.

Een veld van even klasse in de kanonische vorm heeft echter punten van verminderde klasse gegeven door

9.9) $$\overset{1}{z} = 0 \; ; \cdots\cdots ; \overset{\rho}{z} = 0$$

In die punten is $c = 0$, $K = 2\rho$, $c_3 = 0, k = 0$

Heeft men twee velden $\overset{1}{w}_\lambda$ en $\overset{2}{w}_\lambda$ die in de punten $\underset{1}{\xi}^k$ en $\underset{2}{\xi}^k$ niet van verminderde klasse en van dezelfde klasse K zijn, dan kan men twee coordinatenstelsels $\xi^{k'}$ en $\xi^{k''}$ invoeren, zo dat $\overset{1}{w}_\lambda$ in een $\mathfrak{N}(\underset{1}{\xi}^k)$ in de coordinaten $\xi^{k'}$ en $\overset{2}{w}_\lambda$ in een $\mathfrak{N}(\underset{2}{\xi}^k)$ in de coordinaten $\xi^{k''}$ den kanonische vorm heeft waarin de eerste K coordinaten voorkomen en de andere ontbreken. De velden hebben nu elk op hun eigen coordinatensysteem en in hun eigen gebied precies dezelfde vorm en kunnen dus zonder meer op elkaar worden afgebeeld. Men zegt dat zij isomorph zijn. Twee covariante vectorvelden zijn dus dan en alleen dan in de omgevingen van twee gewone punten isomorph indien zij van dezelfde klasse zijn. Een enkel veld is autoisomorph in ieder gebied van constante klasse. Men make zich duidelijk dat bijv. een scalarveld nooit autoisomorph kan zijn wanneer het niet constant is.

§ 10. Eigenschappen der functies p, $\overset{\alpha}{s}$ en $\overset{\alpha}{z}$; $\alpha = 1, \ldots, \rho$

Wanneer kan een functie van ξ^k de rol van een veld p spelen voor K oneven? Daarvoor is n.e.v. dat

10.1) $$'w_\lambda \overset{\text{def}}{=} w_\lambda - \partial_\lambda p$$

een veld van de klasse 2ρ is. Nu is echter

10.2) $$'\overset{2\rho+1}{y} = \overset{2\rho+1}{y} - \overset{2\rho}{y}\,\bar{p}$$

en dus is n.e.v. dat p een oplossing is van het niet homogene lineaire partiele systeem van differentiaalvergelijkingen

10.3) $$\boxed{\overset{2\rho+1}{y} - \overset{2\rho}{y}\,\bar{p} = 0}$$

Uit (10.3) volgt

10.4) $$\overset{2\rho+1}{y}\,\bar{p} = 0 \; ; \; \overset{2\rho}{y}\,\bar{p} \neq 0$$

en p moet dus een oplossing van $S_2' = S_4'$ zijn die niet tevens oplossing van $S_1' = S_3'$ is. Maar deze beide voorwaarden zijn niet voldoende. Brengt men w_λ in de kanonische vorm

10.5) $$w_\lambda = \overset{1}{e}_\lambda + \overset{2}{\xi}\overset{3}{e}_\lambda + \cdots\cdots + \overset{2\rho}{\xi}\overset{K}{e}_\lambda$$

dan neemt (10.3) de vorm aan

10.6) $$\overset{1}{e}_{[\lambda_1} \cdots\cdots \overset{K}{e}_{\lambda_K]} - (\partial_{[\lambda_1} p)\overset{2}{e}_{\lambda_2} \cdots\cdots \overset{K}{e}_{\lambda_K]} = 0$$

en dit is equivalent met

10.7) $$\partial_1 p = 1 \quad ; \; \partial_\omega p = 0 \; ; \quad \omega = K+1, \ldots\ldots, n$$

Bijgevolg is (10.6) of ook (10.3) een volledig niet homogeen systeem met de algemene oplossing

10.8) $$p = \overset{1}{\xi} + \phi(\overset{2}{\xi}, \ldots\ldots, \overset{K}{\xi})$$

bevattende de willekeurige functie ϕ . Is p geen oplossing van (10.3) dan is de klasse van $'w_\lambda$ gelijk aan $2\rho+1$.

Wanneer kan een functie van ξ^k de rol van een veld $\overset{\alpha}{s}$ of $\overset{\alpha}{z}$ spelen voor K oneven? Het is duidelijk, dat iedere $\overset{\alpha}{s}$ is een functie van index 2, dus een oplossing van $S_1' = S_3'$. Ook volgt uit de afleiding van de kanonische vorm dat iedere oplossing de rol van een $\overset{\alpha}{s}$ kan spelen. Nu is

10.9) $$dp + \overset{1}{z}\,d\overset{1}{s} = d(p + \overset{1}{z}\overset{1}{s}) - \overset{1}{s}\,d\overset{1}{z}$$

en daaruit volgt dat $\overset{}{\underset{1}{s}}$ en $\underset{1}{z}$ verwisselbaar zijn. Voor de functies $\overset{\alpha}{z}$ geldt dus dezelfde eigenschap.

Stel nu dat K even is. Dan volgt op dezelfde manier dat voor de functies $\overset{\alpha}{s}$ alleen oplossingen van $S_3' = S_4'$ d.w.z. functies van index 2 in aanmerking komen. Maar de $\overset{\alpha}{s}$ en $\overset{\alpha}{z}$ zijn nu niet meer verwisselbaar. Voor enige functie van het soort z is n.e.v. dat

10.10) $$'w_\lambda \overset{\mathrm{def}}{=} z^{-1} w_\lambda$$

van de klasse $2\rho-1$ is. Nu is

10.11) $$\begin{aligned} '\overset{2\rho}{y} &= z^{-\rho}\,\overset{2\rho}{y} - 2\rho z^{-\rho-1}\,\bar{z}\,\overset{2\rho-1}{y} \\ '\overset{2\rho-1}{y} &= z^{-\rho}\,\overset{2\rho-1}{y} \neq 0 \end{aligned}$$

en dus is n.e.v. dat z een oplossing is van het stelsel niet homogene lineaire partiele differentiaalvergelijkingen

10.12) $$\overset{2\rho}{y} - 2\rho z^{-1}\bar{z}\,\overset{2\rho-1}{y} = 0$$

Uit (10.12) volgt:

10.13) $$\begin{aligned} \overset{2\rho}{y}\,\bar{z} &= 0 \\ \overset{2\rho-1}{y}\,\bar{z} &\neq 0 \end{aligned}$$

Dus moet χ een oplossing zijn van $S'_1 = S'_2$ die geen oplossing is van $S'_3 = S'_4$, d.w.z. χ moet een functie met index 1 zijn. Maar dit is niet voldoende. Wordt w_λ in de kanonische vorm geschreven

10.14) $$w_\lambda = \xi^1 e^2_\lambda + \cdots\cdots + \xi^{K-1} e^{K}_\lambda$$

dan volgt na enig omrekenen dat (10.12) equivalent is met

10.15) $$1 - \chi^{-1}(\xi^1 \partial_1 \chi + \cdots\cdots + \xi^{K-1} \partial_{K-1} \chi) = 0$$
$$\partial_\omega \chi = 0 \qquad ; \omega = K+1, \ldots, n$$

Hieruit volgt, dat iedere functie van $\xi^1, \ldots, \xi^K$ die homogeen is van de graad 1 in $\xi^1, \xi^3, \ldots \xi^{K-1}$ een oplossing van (10.12) is en omgekeerd. Is χ geen oplossing van (10.12) dan is de klasse van $'w_\lambda$ gelijk aan 2ρ.

Samenvatting:

K oneven:
- p : functie met index 1 die een oplossing is van het niet homogene stelsel (10.3);
- s en χ : functies met index 2;

K even:
- s : functie met index 2;
- χ : functie met index 1 die een oplossing is van het niet homogene stelsel (10.12)

Heeft men eenmaal een kanonische vorm dan kan men gemakkelijk een stelsel van S functies met index k zonder integratie vinden, mits aan de condities (8.1) is voldaan.

Is $K < n$ dan zijn er behalve εp, $\overset{\alpha}{s}$, $\overset{\alpha}{\chi}$; $\alpha = 1, \ldots, \rho$ nog $n-K$ onafhankelijke functies, noem deze overtallige functies.

Kies nu voor

k even: $\frac{1}{2}k$ van de $\overset{\alpha}{s}$ en $S - \frac{1}{2}k$ uit de tot deze $\overset{\alpha}{s}$ behorende $\overset{\alpha}{\chi}$ en uit de overtallige functies

k oneven: $\frac{1}{2}(k-1)$ van de $\overset{\alpha}{\chi}$;
$S - \frac{1}{2}(k+1)$ uit de $\overset{\alpha}{s}$ behorende tot deze $\overset{\alpha}{\chi}$ en uit de overtallige functies;
de functie p voor K oneven en een der $\overset{\alpha}{s}$ die niet tot de gekozen $\overset{\alpha}{\chi}$ behoort voor K even.

§ 11. Gelijkvormigheidstransformaties en gradienttransformaties.

Bij de gelijkvormigheidstransformatie

11.1) $$'w_\lambda = \sigma w_\lambda$$

is voor iedere waarde van ν

11.2) $$'\overset{2\nu}{y} = \sigma^\nu \overset{2\nu}{y} + 2\nu\sigma^{\nu-1} \bar{\sigma} \overset{2\nu-1}{y}$$

11.3) $$'\overset{2\nu+1}{y} = \sigma^{\nu+1} \overset{2\nu+1}{y}$$

Dus zijn k en de charakteristieken invariant. (Volgt ook uit de invariantie van S_4)

Geval I: $K = 2\rho+1$

$$ {}'\overset{2\rho+1}{y} \neq 0 $$

11.4)

$$ {}'\overset{2\rho+2}{y} = (2\rho+2)\sigma^{\rho}\bar{\sigma}\,\overset{2\rho+1}{y} \quad \begin{cases} \neq 0 \text{ voor } \sigma \text{ index } 0 \\ = 0 \text{ voor } \sigma \text{ index 1 of 2} \end{cases} $$

$$ {}'\overset{2\rho+3}{y} = 0 $$

Voor $K = n$ is de index van σ nooit nul. Dus:

11.5)

$$ \boxed{K = 2\rho+1 \begin{cases} {}'K = K+1 \text{ voor } \sigma \text{ index } 0 \quad (\text{nooit voor } K = n) \\ {}'K = K = k \text{ voor } \sigma \text{ index 1 of 2 (altijd voor } K = n) \end{cases}} $$

Geval II: $K = 2\rho$

11.6)

$$ {}'\overset{2\rho+1}{y} = 0 $$

$$ {}'\overset{2\rho}{y} = \sigma^{\nu}\left(\overset{2\rho}{y} + 2\rho\sigma^{-1}\bar{\sigma}\,\overset{2\rho-1}{y}\right) \quad \begin{cases} \neq 0 \text{ indien } \sigma \text{ geen oplossing is van (10.12)} \\ = 0 \text{ indien dit wel het geval is.} \end{cases} $$

Dus:

11.7)

$$ \boxed{K = 2\rho \begin{cases} {}'K = K & \text{indien } \sigma \text{ geen oplossing van (10.12) is} \\ {}'K = K-1 = k & \text{indien } \sigma \text{ een oplossing van (10.12) is.} \end{cases}} $$

Door een gelijkvormigheidstransformatie kan de klasse dus altijd tot k worden verminderd maar niet verder. Hieruit volgt dat k het minimum aantal variabelen is waarin zich de vergelijking $w_\lambda d\xi^\lambda$ laat schrijven

Bij de gra dienttransformatie

11.8) $$ {}'w_\lambda = w_\lambda + \partial_\lambda u $$

is voor iedere waarde van 2ν :

11.9) $$ {}'\overset{2\nu}{y} = \overset{2\nu}{y} $$

11.10) $$ {}'\overset{2\nu+1}{y} = \overset{2\nu+1}{y} + \bar{u}\,\overset{2\nu}{y} $$

Dus zijn 2ρ en de rotatiedragers invariant (Volgt o)k uit de invariantie van S_1)

Geval I: $K = 2\rho+1$

$$ {}'\overset{2\rho}{y} \neq 0 $$

11.11)

$$ {}'\overset{2\rho+1}{y} = \overset{2\rho+1}{y} + \bar{u}\,\overset{2\rho}{y} \quad \begin{cases} \neq 0 \text{ indien geen oplossing is van (10.3)} \\ = 0 \text{ indien dit wel het geval is} \end{cases} $$

$$ {}'\overset{2\rho+2}{y} = 0 $$

Dus:

11.12)

$$ \boxed{K = 2\rho+1 \begin{cases} {}'K = K & \text{indien } \sigma \text{ geen opl. van (10.3) is} \\ {}'K = K-1 & \text{indien } \sigma \text{ een opl. van (10.3) is.} \end{cases}} $$

Geval II: $\mathcal{R} = 2\rho$

11.13) $\overset{,2\rho}{\mathcal{Y}} \neq 0$, $\overset{,2\rho+1}{\mathcal{Y}} = \bar{u}\, \overset{2\rho}{\mathcal{Y}} \rightarrow$. $\begin{cases} \neq 0 \text{ voor } \sigma \text{ index } 0 \text{ (nooit voor } \mathcal{R}=n) \\ = 0 \text{ voor } \sigma \text{ index } 1 \text{ of } 2 \text{ (altijd voor } \mathcal{R}=n) \end{cases}$

Dus

11.14 $\mathcal{R} = 2\rho \begin{cases} \mathcal{R}' = \mathcal{R}+1 \text{ voor } \sigma \text{ index } 0 \text{ (nooit voor } \mathcal{R}=n), \\ {}'\mathcal{R} = \mathcal{R} \text{ voor } \sigma \text{ index } 1 \text{ of } 2 \text{ (altijd voor } \mathcal{R}=n) \end{cases}$

§ 12. Het inwendige probleem voor $q = n - \rho = 1$

Gegeven een $\mathcal{E}_{n-1}$-veld door de vergelijking

12.1) $$w_\lambda \, d\xi^\lambda = 0$$

waarin w_λ een veld is van de klasse $\mathcal{R}$. Men zoekt de omhulde $X_m'^s$ voor de maximale waarde van m . De doorsnede van w_λ met een dergelijke X_m is nul. Het probleem is dus equivalent met de constructie van alle stelsels van $n-m$ functies met index $\mathcal{R}$. Nu gaan de condities (8.1) voor $k = \mathcal{R}$, $S = n-m$ over in

(12.2) $$2(n-m) \geq \mathcal{R} = 2\rho + \varepsilon$$

en daaruit volgt voor de maximale waarde ν van m

(12.3) $$\nu = n - \rho - \varepsilon = n - \mathcal{R} + \rho$$

Om nu een dergelijk stel van $\rho + \varepsilon$ functies werkelijk te bepalen, indien w_λ in de kanonische vorm

12.4) $$w_\lambda = \varepsilon \, \partial_\lambda x^0 + p_i \, \partial_\lambda x^i \, ; \; i = 1, \ldots, \rho \, ; \; \varepsilon = 1 \text{ of } 0$$

gegeven is, passen we de regels toe van § 10 en vinden de $\rho + \varepsilon$ vergelijkingen

12.5) $$\varepsilon x^0 = \text{Const} \; ; \; x^k = \text{Const} \; ; \; k = 1, \ldots, \rho$$

Vergelijken we dit stelsel met de vergelijkingen der dragers, rotatiedragers en charakteristieken, die hier de vorm aannemen (verg. § 9):

12.6 $$\begin{cases} \text{dragers: } (X_{n-\rho}) & \varepsilon x^0 = \text{const.}; \quad x^k = \text{const.}; \quad p_i = \text{const.}; \\ \text{rotatie-dragers } (X_{n-2\rho}) & x^k = \text{const.}; \quad p_i = \text{const.}; \quad k, i = 1, \ldots, \rho \\ \text{characteristieken: } X_{n-k} & \varepsilon x^0 = \text{const.}; \quad x^k = \text{const.}; \\ & \varepsilon p_1 = \text{const.}; \; p_1 : p_2 : \ldots : p_\rho = \text{const.} \end{cases}$$

dan zien wij dat iedere omhulde $X_{n-\rho-\varepsilon}$ bestaat uit:

12.7 $$\begin{cases} \text{voor } \varepsilon = 0 : \infty^\rho \text{ dragers (=rotatiedragers) en } \infty^{\rho-1} \text{ characteristieken.} \\ \text{voor } \varepsilon = 1 : \infty^\rho \text{ dragers (=charakteristieken)} \end{cases}$$

Uitgaande van verschillende kanonische vormen vindt men op deze wijze verschillende stelsels van omhulde X_ν's . Bijv.

12.8) $$\omega_\lambda = \overset{1}{e}_\lambda + \xi^2 \overset{3}{e}_\lambda = \partial_\lambda(\xi^1 + \xi^2 \xi^3) - \xi^3 \overset{2}{e}_\lambda$$

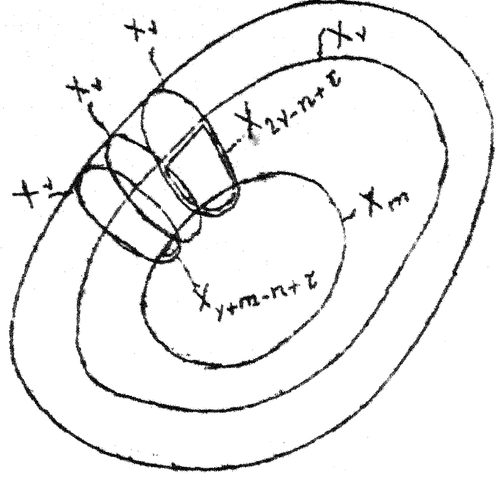
We gaan nu bewijzen dat men <u>alle</u> omhulde X_m's ; $m \leq \nu$ kan bepalen zonder integratie indien men over één kanonische vorm beschikt. Zij

12.9) $$\omega_\lambda = \varepsilon \partial_\lambda x^0 + p_i\, d x_i \;;\quad \varepsilon = 0 \text{ of } 1 \;;\quad i = 1,\dots,\rho$$

de kanonische vorm. Het bijbehorende stelsel van X_ν's omhulde is

12.10) $$\varepsilon x^0 = \text{const.} \;;\qquad x^i = \text{const.}$$

Noem dit stelsel $\mathcal{N}$. Door elk punt van het beschouwde gebied gaat er één. Neem nu een willekeurige omhulde X_m. Dan gaat er door elk punt van X_m (in het beschouwde gebied) één X_ν van $\mathcal{N}$. Deze X_ν heeft met X_m een $X_{\nu+m-n+\tau}$; $1 \leq \tau \leq n-\nu$; $n-\nu-m \leq \tau \leq n-m$,gemeen en dus bepaalt de X_m met al deze ∞ - snijdende X_ν's juist een $X_{n-\tau}$



Het hele geval degenereert voor $\tau = n-\nu$, dit is het uitzonderingsgeval waarbij de X_m juist <u>in</u> een der X_ν's van $\mathcal{N}$ ligt . Laten wij dat geval bijzijde dan bewijzen:

<u>in $X_{n-\tau}$ ligt één en slechts een omhulde X_ν , die X_m bevat en deze behoort niet tot $\mathcal{N}$</u> .

Zijn de vergelijkingen van X_m

12.11) $$\mathcal{H}^\alpha(\varepsilon x^0, x^i, p_i, \xi^{2\rho+\varepsilon+1}, \dots, \xi^n) = 0$$

dan is de rang van dit stelsel $n-m$. De rang ten opzichte van $p_i, \xi^{2\rho+\varepsilon+1}, \dots, \xi^n$ moet minder dan $n-m$ zijn anders zouden $n-m$ dezer variabelen uit (12.11) kunnen worden opgelost en deze oplossingen gesubstitueerd in (12.9) moesten 0 geven. Voor $\varepsilon = 1$ kan dit zeker niet, $\partial_\lambda x^0$ kan immers niet nul gemaakt worden. Voor $\varepsilon = 0$ zou het stelsel (12.11) equivalent zijn met ρ vergelijkingen $p_i = 0$ en nog $n-m-\rho$ verdere vergelijkingen. Dat zou met zich brengen dat het beschouwde gebied zou liggen in het gebied van verminderde klasse (verg. (9.9)) hetgeen we uitgesloten hebben. Dus is de rang van (12.11) t.o.v. $p_i, \xi^{2\rho+\varepsilon+1}, \dots, \xi^n$ gelijk $n-m-\tau'$, $\tau' \geq 1$, en daaruit volgt, dat uit (12.11) juist τ' vergelijkingen kunnen worden ageleid, die $p_i, \xi^{2\rho+\varepsilon+1}, \dots, \xi^n$ <u>niet</u> bevatten (eliminatietheorema).

(12.11) neemt dus de vorm aan

12.12) a) $\mathfrak{F}^{\alpha}(\varepsilon x^0, x^k) = 0$; $\alpha = 1,\dots,\tau'$; $\varkappa = \tau'+1,\dots,n-m$

b) $\mathfrak{F}^{\varkappa}(\varepsilon x^0, x^k, p_i, \xi^{2\rho+\varepsilon+1},\dots,\xi^n) = 0$; $i,k = 1,\dots,\rho$

en daarbij moet de rang van (12.12b) t.o.v. p_i, $\xi^{2\rho+\varepsilon+1},\dots,\xi^n$ juist gelijk $n-m-\tau'$ zijn (in de nulpunten). De doorsnede van de X_m met de vergelijkingen (12.12) en de X_ν's (12.10) verkrijgt men door in (12.12) de x^0, x^k te vervangen door constanten. In elk dezer X_ν's kunnen p_i, $\xi^{2\rho+\varepsilon+1},\dots,\xi^n$ als coordinaten worden gebruikt en (12.12b) stelt dus precies in elke X_ν een $X_{\nu-n+m+\tau'}$ voor. Dat wil dus zeggen dat $\tau = \tau'$ en dat hetzelfde getal dat geometrisch de ligging der X_m t.o.v. de snijdende X_ν's van $\mathfrak{N}$ aangaf, algebraisch het hoogste aantal vergelijkingen in x^0, x^k aangeeft dat uit (12.11) kan worden afgeleid.

De τ vergelijkingen (12.12a) stellen de $X_{n-\tau}$ voor die alle X_ν's van $\mathfrak{N}$ bevat die ten minste een punt met X_m gemeen hebben. We moeten dus bewijzen dat deze τ vergelijkingen op één en slechts één manier kunnen worden gecompleteerd tot $n-\nu$ vergelijkingen, die niet in strijd zijn met (12.12b) en $w_\lambda d\xi^\lambda$ nul maken.

Aangezien de X_m (12.12) omhuld is, is

12.13) $$\varepsilon\, dx^0 + p_i\, dx^i = 0$$

een gevolg van (12.12) en

12.14) $$d\xi^\mu \partial_\mu \mathfrak{F}^\alpha = 0 \;;\; d\xi^\mu \partial_\mu \mathfrak{F}^\varkappa = 0 \;;\; \begin{matrix}\alpha = 1,\dots,\tau \\ \varkappa = \tau+1,\dots,n-m\end{matrix}$$

of in andere vorm

12.15) $$\varepsilon\, dx^0 \frac{\partial \mathfrak{F}^\alpha}{\partial x^0} + dx^k \frac{\partial \mathfrak{F}^\alpha}{\partial x^k} = 0 \;; \qquad k, i = 1,\dots,\rho \;;\; \omega = 2\rho+\varepsilon+1,\dots,n.$$
$$\varepsilon\, dx^0 \frac{\partial \mathfrak{F}^\varkappa}{\partial x^0} + dx^k \frac{\partial \mathfrak{F}^\varkappa}{\partial x^k} + dp_i \frac{\partial \mathfrak{F}^\varkappa}{\partial p_i} + d\xi^\omega \frac{\partial \mathfrak{F}^\varkappa}{\partial \xi^\omega} = 0 \;;$$

Bijgevolg moeten er coefficienten ϕ_α, $\phi_\varkappa$ bestaan zodat

12.16) a) $$\varepsilon = \varepsilon\, \phi_\alpha \frac{\partial \mathfrak{F}^\alpha}{\partial x^0} + \varepsilon\, \phi_\varkappa \frac{\partial \mathfrak{F}^\varkappa}{\partial x^0} \qquad 0 = \phi_\varkappa \frac{\partial \mathfrak{F}^\varkappa}{\partial p_i}$$
$$p_i = \phi_\alpha \frac{\partial \mathfrak{F}^\alpha}{\partial x^i} + \phi_\varkappa \frac{\partial \mathfrak{F}^\varkappa}{\partial x^i} \quad b) \quad 0 = \phi \frac{\partial \mathfrak{F}^\varkappa}{\partial \xi^\omega}$$

geldt ingevolge (12.12). Indien de $\phi_\varkappa$ niet alle nul waren zou (12.16b) uitdrukken dat de rang van het stelsel der $\mathfrak{F}^\varkappa$ t.o.v. de p_i, ξ^ω kleiner ware dan $n-m-\tau$. Aangezien deze rang echter precies $n-m-\tau$ is moet $\phi_\varkappa = 0$ zijn en is (12.16) aequivalent met

$$12.17) \quad \text{a)} \quad \varepsilon = \varepsilon\, \phi_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^0}$$

$$\text{b)} \quad p_i = \phi_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \qquad \begin{array}{l} \alpha = 1, \ldots, \tau ; \\ i = 1, \ldots, \rho \end{array}$$

en dit stelsel moet nu gelden als gevolg van (12.12).

Voor $\varepsilon = 1$ volgt uit (12.17) dat tenminste één der f^α werkelijk x^0 bevat. De rang van het stelsel f^α is τ en men kan dus altijd (12.17a) met $\tau - \varepsilon$ vergelijkingen uit (12.7b) combineren tot een stelsel van τ onafhankelijke vergelijkingen, lineair in de ϕ_α. Uit deze kunnen de ϕ_α worden opgelost. Substituatie in de andere $\rho + \varepsilon - \tau$ vergelijkingen geeft een stelsel van $\rho + \varepsilon - \tau$ vergelijkingen in x^0, x^k, p_i dat moet gelden als gevolg van (12.12). Samen met (12.12a) vormen deze vergelijkingen een stelsel van $\rho + \varepsilon = n - \nu$ vergelijkingen dat de gezochte X_ν voorstelt.

De constructie van een willekeurige omhulde X_m is daarmede teruggebracht tot de constructie van de meest algemene omhulde X_ν. Om die meest algemene omhulde X_ν te vinden hebben we dus het volgende te doen:

<u>Regel</u> I <u>voor de constructie van de meest algemene omhulde</u> X_ν

1) <u>Bepaal een canonische vorm</u> (12.9) <u>van</u> ω_λ ;
2) <u>Kies en getal</u> $\tau \geq 1$ <u>en</u> $\leq n - \nu$;
3) <u>Kies</u> τ <u>willekeurige vergelijkingen</u> (12.12a) <u>in</u> $\varepsilon x^0, x^k$ <u>met analytische functies</u> f^α <u>en zo dat</u> εx^0 <u>en</u> $\tau - \varepsilon$ <u>der</u> x^k <u>kunnen worden opgelost</u>;
4) <u>Schrijf de vergelijkingen</u> (12.17) <u>op</u>;
5) <u>Elimineer de</u> ϕ_α <u>uit</u> (12.17) <u>en voeg de overige vergelijkingen</u> (12.17) <u>na substitutie van de</u> ϕ_α <u>bij</u> (12.12a). <u>Dit geeft de</u> $n - \nu$ <u>vergelijkingen van de</u> X_ν.

De meest algemeene X_ν hangt dus af van τ willekeurige functies. De meest algemene X_m wordt verkregen door $\nu - m$ willekeurige onafhankelijke vergelijkingen toe te voegen.

Uit (12.12a) kunnen εx^0 en $\tau - \varepsilon$ der x^k worden opgelost

$$12.18) \quad \begin{array}{ll} \text{a)} & \varepsilon x^0 = \varepsilon \omega^0 (x^\ell) \\ \text{b)} & x^\alpha = \omega^\alpha (x^\ell) \end{array} \quad ; \begin{array}{l} \alpha = 1, \ldots, \tau - \varepsilon ; \\ \ell = \tau - \varepsilon + 1, \ldots, \rho . \end{array}$$

en dientengevolge neemt (12.17) de vorm aan (schrijf nu $\varphi_{\alpha - 1}$, in plaats van φ_α)

$$12.19) \quad \begin{array}{ll} \text{a)} & \varepsilon = \varepsilon \varphi_0 \\ \text{b)} & p_\alpha = \varphi_\alpha \\ \text{c)} & p_\ell = -\varepsilon \dfrac{\partial \omega^0}{\partial x^\ell} - p_\alpha \dfrac{\partial \omega^\alpha}{\partial x^\ell} \end{array}$$

Het voorschrift luidde: elimineer de φ_α uit (12.19) en voeg de overige vergelijkingen bij (12.18). De vergelijkingen van de X_ν zijn dus (12.18) samen met (12.19c), of ook, indien men invoert:

$$W \overset{\text{def}}{=} -\varepsilon\, \omega^0(x^\ell) - p_\alpha\, \omega^\alpha(x^\ell) \qquad \begin{matrix} \alpha = 1, \dots, \tau - \varepsilon \\ \ell = 1-\varepsilon+1, \dots, \rho \end{matrix} \tag{12.20}$$

in andere vorm

$$\begin{aligned} \varepsilon x^0 &= -W - p_\alpha x^\alpha \\ x^\alpha &= -\frac{\partial W}{\partial p_\alpha} \quad p_\ell = +\frac{\partial W}{\partial x^\ell} \end{aligned} \tag{12.21}$$

Men kan bewijzen dat (12.21) <u>altijd</u> een omhulde X_ν voorstelt ook wanneer W

voor $\varepsilon = 1$ een willekeurige functie van p_α, x^ℓ is

voor $\varepsilon = 0$ een functie van p_α, x^ℓ, homogeen v.d. graad 1 in de p_α is.

Dus:

<u>Regel II voor de constructie van de meest algemene omhulde</u> X_ν:

1) <u>Bepaal een canonische vorm</u> (12.9) <u>voor</u> ω_λ;
2) <u>Kies een getal</u> $\tau \geq 1$ <u>en</u> $\leq \rho + \varepsilon$
3) <u>Kies een functie van</u> $p_1, \dots, p_{\tau-\varepsilon}, x^{\tau-\varepsilon+1}, \dots, x^\rho$, <u>analytisch en voor</u> $\varepsilon = 0$ <u>homogeen v.d. graad</u> 1 <u>in</u> $p_1, \dots, p_{\tau-\varepsilon}$.
4) <u>De vergelijkingen</u> (12.21) <u>stellen de meest algemene omhulde</u> X_ν <u>voor</u>. <u>Men kan zelfs iedere</u> X_ν <u>schrijven wanneer men</u> W <u>lineair in</u> $p_1, \dots, p_{\tau-\varepsilon}$ <u>kiest</u>.

De meest algemene X_m wordt weer verkregen door $\nu - m$ vergelijkingen toe te voegen.

§ 13. <u>Andere geometrische interpretatie</u> (in een $X_{n+\varepsilon}$).

Tot nu toe werkten we in de X_n van

$$x^0,\ x^k,\ p_i,\ \xi^{2\rho+\varepsilon+1}, \dots, \xi^n \tag{13.1}$$

Alle speelt zich echter eigenlijk af in de $X_{2\rho+\varepsilon}$ van x^0, x^k, p_i die uit X_n ontstaat door <u>samenlegging</u> der X_n naar de dragers (dit zijn $X_{n-2\rho-\varepsilon}$'s) van ω_λ. Laat dus voortaan $\xi^{2\rho+\varepsilon+1} \dots \xi^n$ weg of, wat hetzelfde is, neem $n = 2\rho + \varepsilon$.

Nu veranderen we de notatie en schrijven

13.2)
$$\begin{array}{lll} n & \text{inplaats van} & p \\ \xi^0 & " \quad " & x^0 \\ \xi^k & " \quad " & x^k \\ \omega_\lambda & " \quad " & p_i \\ k,\lambda = 1,\dots n & " \quad " & i,k = 1,\dots p \\ 2n+\varepsilon & " \quad " & 2p+\varepsilon \end{array}$$

De canonische vorm (12.9) gaat dus nu over in

13.3)
$$\varepsilon\, d\xi^0 + \omega_\lambda\, d\xi^\lambda$$

Voor $\varepsilon = 0$ beschouwen we nu de ω_λ als kentallen van een covarianten vector in de X_n der ξ^k. Dan stelt de combinatie ξ^k, ω_λ een vectorelement der X_n voor en de combinatie $\xi^k, [\omega_\lambda]$ een element ($\mathcal{E}_{n-1}$) der X_n.

Dus:

Punt der X_m der ξ^k en ω_λ = Vectorelement der X_n der ξ^k
Kromme ξ^k, $[\omega_\lambda]$ in de X_{2n} = $(n-1)$-element der X_n.

Volgens Lie zijn twee vectorelementen ξ^k, ω_λ en $\xi^k + d\xi^k$, $\omega_\lambda + d\omega_\lambda$ en ook de corresponderende $(n-1)$-elementen in verenigde ligging als

13.4)
$$\omega_\lambda\, d\xi^\lambda = 0$$

Dit betekent, dat er tenminste één X_{n-1} bestaat waaraan ze beide raken (slordig: dat punt van de een in $\mathcal{E}_{n-1}$ van de andere en omgekeerd).

$2n-m$ onafhankelijke vergelijkingen in ξ^k, ω_λ bepalen een stelsel van ∞^m vectorelementen of een $\mathfrak{N}_m$. De $\mathfrak{N}_m$ heet homogeen indien de vergelijkingen homogeen zijn in ω_λ. Behoort dan ξ^k, ω_λ tot de $\mathfrak{N}_m$ dan ook ξ^k, $\sigma\omega_\lambda$. In dat geval bepaalt de $\mathfrak{N}_m$ een stelsel van ∞^{m-1} $\mathcal{E}_{m-1}$'s of een $\mathfrak{M}_{m-1}$.

$\mathfrak{N}_m$ wordt genoemd N_m als alle vectorelementen die naburig zijn in verenigde ligging zijn. Evenzo $\mathfrak{M}_{m-1} \to M_{m-1}$

Voorbeeld: De vectoren in één punt der X_n vormen een $\mathfrak{N}_n$ die N_n's. Evenzo vormen de vectoren rakende aan een X_m in X_n een N_n en de $\mathcal{E}_{n-1}$'s rakende aan de X_m een M_{n-1}. Deze speciale N_n en M_{n-1}'s worden genoteerd N_n^m en M_{n-1}^m. Zij zijn volkomen vastgelegd als de X_m gegeven is.

Kan men uit de $2n-m$ vergelijkingen der $\mathfrak{N}_m$ juist $n-t$ onafhankelijke vergelijkingen afleiden die alleen de ξ^k bevatten (n.e.v. is dat de rang t.o.van de ω_λ juist $n-m+t$ is), dan bepalen deze vergelijkingen een X_t, het veldgebied (fieldregion), der $\mathfrak{N}_m$ of $\mathfrak{M}_{m-1}$. t heet de velddimensie van de $\mathfrak{N}_m$ of $\mathfrak{M}_{m-1}$. Men berekent gemakkelijk

13.5)
$$\begin{array}{ll} 0 \leq t \leq n & \\ m-n+1 \leq t \leq m & \text{voor niet homogeen geval.} \\ m-n \leq t \leq m-1 & \text{voor homogeen geval.} \end{array}$$

Voor ditzelfde geval dus voor $\varepsilon = 0$ gebruikt men in de X_{2n} ook graag de coordinaten

13.6) $$X^{\kappa} \stackrel{def}{=} \xi^{k} \; ; \; X^{(\kappa)} \stackrel{def}{=} w_{\kappa} \qquad \kappa = (1), \ldots, (n)$$

Dan neemt $w_{\lambda} d\xi^{\lambda}$ de vorm aan van een differentiaalvorm in X_{2n}

13.7) $$W_{B}\, dX^{B} \; ; \; B = 1, \ldots, n\,(1), \ldots, (n)$$

waarin W_{B} een covariante vector der X_{2n} is met de kentallen

13.8) $$W_{\lambda} \stackrel{def}{=} w_{\lambda} \; ; \; W_{(\lambda)} \stackrel{def}{=} 0$$

In deze X_{2n} stelt iedere $\mathfrak{N}_{m}$ een X_{m} voor. Is de $\mathfrak{N}_{m}$ een N_{m} dan geldt in elk punt dezer X_{m} dat $W_{B} dX^{B} = 0$ is. Een N_{m} is dus een omhulde X_{m}. Van W_{B} kennen we de klasse, namelijk $2n$. Nu weten we dat de maximale waarde van m juist n is (verg.(12.3)). Daaruit volgt dat er geen N_{m}'s met $m > n$ bestaan !

We gaan nu de resultaten van § 12 blz. 29 in X_{2n} geometrisch duiden in X_{n}.

Stel dat de dimensie van een N_{m} gelijk t is. Dan bestaat de N_{n} uit ∞^{n-t} vectorelementen in elk punt van een X_{t} en deze moeten alle aan de X_{t} raken. De N_{n} is dus de N_{n}^{t} die bij de X_{t} behoort. Ga nu uit van de kanonische vorm van $W_{B} dX^{B}$ in X_{2n}

13.9) $$W_{B}\, dX^{B} = W_{\lambda}\, dX^{\lambda} = w_{\lambda}\, d\xi^{\lambda}$$

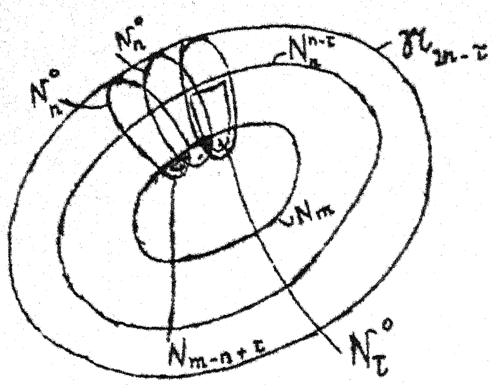
Het bijbehorende stelsel van omhulde X_{n}'s is

13.10) $$\xi^{k} = \text{const.}$$

d.w.z. iedere X_{n} stelt de N_{n}^{0} voor die uit de ∞^{n} vectorelementen in één punt der X_{n} der ξ^{k} bestaat.

Ga nu uit van een willekeurige omhulde X_{m} van het veld W_{B} in X_{2n}. Dan weten we dat uit de $2n-m$ vergelijkingen juist τ vergelijkingen kunnen worden gevormd die alleen de ξ^{k} bevatten. Deze stellen in de X_{n} der ξ^{k} een $X_{n-\tau}$ voor en de X_{m} is het beeld van een N_{m} die deze $X_{n-\tau}$ als gebied heeft en $n-\tau$ als dimensie. In dezelfde X_{n} leggen deze τ vergelijkingen een $\mathfrak{N}_{2n-\tau}$ vast die bestaat uit alle vectoren in de punten van de $X_{n-\tau}$. Deze $\mathfrak{N}_{2n-\tau}$ bestaat dus uit de $\infty^{n-\tau} N_{n}^{0}$'s in de punten der $X_{n-\tau}$. Bij de $X_{n-\tau}$ behoort één en slechts één $N_{n}^{n-\tau}$ en deze bevat de N_{m} omdat de $\mathfrak{N}_{m}$ de conditie $W_{B} dX^{B} = 0$ vervult.

De figuur op blz. 32 wordt nu :



(men bedenke dat
$n \to 2n$
$\nu \to n$
en dat dus degeneratie optreedt voor $\tau = n$)
De stelling op blz. 32 is nu vanzelfsprekend geworden.

Voor $\varepsilon = 1$ beschouwen we $1, w_1, \ldots, w_n$ als componenten van een covarianten vector in de X_{n+1} van ξ^0, ξ^κ en $w_1, \ldots, w_q$ als kentallen van een $\mathcal{E}_n$ in de locale $\mathcal{E}_{n+1}$. We schrijven

13.11) $$X^0 \overset{def}{=} \xi^0 \; ; \; X^\kappa \overset{def}{=} \xi^\kappa \; ; \; X^{(\kappa)} \overset{def}{=} w_\kappa \qquad (\kappa) = (1), \ldots, (n)$$

Dan neemt de Pfaffsche vorm (13.3) de vorm aan

13.12) $$W_B \, dX^B$$

waarin

13.13) $$W_0 \overset{def}{=} 1 \; ; \; W_\lambda \overset{def}{=} w_\lambda \; ; \; W_{(\lambda)} \overset{def}{=} 0 \qquad (\lambda) = (1), \ldots, (n)$$

In de X_{n+1} worden nu alleen covariante vectoren beschouwd waarvan het eerste kental nul is. Homogene $\mathfrak{N}_m$'s komen dus niet voor en er is een eeneenduidige correspondentie tussen de $\mathfrak{N}_m$'s en de $\mathfrak{M}_m$'s .

De figuur op blz. 32 kan voor $\varepsilon = 1$ evenzo aangeduid worden als voor $\varepsilon = 0$.

§ 14. C_1 -transformaties.

C_1 - transformaties (contact-tr. van de 1e soort) zijn die transformaties $\varepsilon \xi^0, \xi^\kappa, w_\lambda \to \varepsilon \,'\xi^0, '\xi^\kappa, 'w_\lambda$ die $\varepsilon \, d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda$ invariant laten op een willekeurige scalaire factor na. Is dus

14.1) $$\begin{aligned} \varepsilon' \xi^0 &= \varepsilon' \phi^0(\varepsilon \xi^0, \xi^\kappa, w_\lambda) \\ '\xi^\kappa &= \, '\phi^\kappa(\quad " \quad) \\ 'w_\lambda &= \, '\psi_\lambda(\quad " \quad) \end{aligned}$$

dan is de eis dat

14.2) $$'\sigma(\varepsilon \, d'\xi^0 + 'w_\lambda d'\xi^\lambda) = \sigma(\varepsilon \, d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda)$$

waarin σ en $'\sigma$ functies zijn van $\varepsilon \xi^0, \xi^\kappa, w_\lambda$, waarvan alleen het quotient

14.3) $$a) \; \frac{'\sigma}{\sigma} = \,'\Omega(\varepsilon \xi^0, \xi^\kappa, w_\lambda) \; ; \; b) \; \frac{\sigma}{'\sigma} = \Omega(\varepsilon' \xi^0, '\xi^\kappa, 'w_\lambda)$$

ons werkelijk interesseren. Er zijn 2 duidingen mogelijk: $\varepsilon\,{}'\xi^0, {}'\xi^\kappa$ en ${}'w_\lambda$ kunnen worden beschouwd als

1° nieuwe coordinaten voor het vectorelement $\varepsilon\xi^0, \xi^\kappa, w_\lambda$

2° een nieuw vectorelement waarin $\varepsilon\xi^0, \xi^\kappa, w_\lambda$ overgaat.

Wij nemen hier altijd de tweede interpretatie. Bij een contacttransformatie worden dus de vectorelementen overgevoerd in andere vectorelementen. N.B.: twee elementen behorende bij hetzelfde punt kunnen na de tranformatie tot verschillende punten behoren.

Daar (14.2) geldt zijn C_1 -transformaties die transformaties der vectorelementen waarbij "verenigde ligging" invariant is.

Er is nog een andere invariantie $\varepsilon\xi^0, \xi^\kappa, w_\lambda$ zijn de coordinaten van een vectorelement in $X_{n+\varepsilon}$. Een bepaald vectorveld (met $\varepsilon w_0 = \varepsilon$)is dus gegeven door de vergelijkingen

14.4)
$$\begin{aligned} \varepsilon w_0 &= \varepsilon \\ w_\lambda &= f_\lambda(\varepsilon\xi^0, \xi^\kappa) \end{aligned}$$

Laten we op dit veld een C_1 -transformatie toepassen. Vóór de transformatie hoorde er bij ieder punt één vectorelement. Na de transformtatie hoeft dat niet meer zo te zijn, meerdere elementen kunnen in één punt bij elkaar gekomen zijn. Dan vernietigt de transformatie het character van de $\mathfrak{X}_n$ vectorveld te zijn. Blijft het veld vectorveld dan heet de C_1 -transformatie t.o.van dit bepaalde veld veld conserverend (field-preserving). N.e.v. voorwaarde is zoals enig gereken leert

14.5)
$$\begin{array}{c|cc|} & 1 & n \\ 1 & \varepsilon(\partial_0\,'\phi^0 + (\partial^\mu\,'\phi^0)\,\partial_0 f_\mu) & \varepsilon(\partial_\lambda\,'\phi^0 + (\partial^\mu\,'\phi^0)\,\partial_\lambda f_\mu) \\ n & \varepsilon(\partial_0\,'\phi^\kappa + (\partial^\mu\,'\phi^\kappa)\,\partial_0 f_\mu) & \partial_\lambda\,'\phi^\kappa + (\partial^\mu\,'\phi^\kappa)\,\partial_\lambda f_\mu \end{array} \neq 0$$

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial\xi^0}\,;\quad \partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial\xi^\lambda}\,;\quad \partial^\kappa = \frac{\partial}{\partial w_\kappa}$$

Dit is een ongelijkheid, dus"in het algemeen" is een C_1-transformatie voor enig veld veld-conserverend, maar er zijn uitzonderingsgevallen.

Stel nu dat (14.1) t.o. van enig veld veld-conserverend is. Dan volgt uit (14.2) dat k en de charakteristieken die C_1-transformatie invariant zijn maar 2ρ en de rotatiedragers in het algemeen niet.

Het doel is nu de meest algemene C_1 -transformatie te vinden. Men kan het geval $\varepsilon=1$ op $\varepsilon=0$ terugvoeren. Maar men kan even gemakkelijk algemeen werken. Voor het gemak schrijven we nu q_λ voor σw_λ , en evenzo ${}'q_\lambda$ voor ${}'\sigma\,{}'w_\lambda$. Dan nemen de voorwaarden (14.2) de prettige vorm aan

14.5)
$$\varepsilon\,{}'\sigma\, d\,{}'\xi^0 + {}'q_\lambda\, d\,{}'\xi^\lambda - \varepsilon\sigma\, d\xi^0 - q_\lambda\, d\xi^\lambda = 0$$

en dat betekent, dat de $2n+\varepsilon+1$ vergelijkingen (14.1) en (14.3a) in de $X_{4n+4\varepsilon}$ der variabelen

$$\text{14.6)} \quad \varepsilon\xi^0,\ \varepsilon'\xi^0,\ \xi^\kappa,\ '\xi^\kappa,\ \varepsilon\sigma,\ \varepsilon'\sigma,\ q_\lambda,\ 'q_\lambda$$

een $X_{2n+3\varepsilon+1}$ voorstellen die omhuld wordt door het vectorveld behorende bij de differentiaalvorm (14.5).

Om dus de meest algemene C_1 -transformatie te vinden hebben we maar de meest algemene omhulde $X_{2n+3\varepsilon+1}$ te bepalen waarvan de vergelijkingen zich naar $\varepsilon\xi^0, \xi^\kappa, '\sigma/\sigma$ en q_λ (en evenzo naar $\varepsilon'\xi^0, '\xi^\kappa, \sigma/'\sigma$, en $'q_\lambda$) laten oplossen.

Daar hebben we nu twee regels voor. Werkende volgens Regel I § 12 (kanonische vorm hebben we al) hebben we τ vergelijkingen te kiezen

$$\text{14.7)} \quad \tilde{F}^\alpha(\varepsilon\xi^0;\ \varepsilon'\xi^0,\ \xi^\kappa,\ '\xi^\kappa) = 0\ ;\ \alpha = 1,\dots,\tau$$

en de volgende $2n+2\varepsilon$ vergelijkingen op te schrijven (we hebben hier het geval van een <u>even</u> klasse en ρ gaat hier over in $2n+2\varepsilon$):

$$\text{14.8)} \quad \begin{aligned} \varepsilon\sigma &= -\varepsilon\chi_\alpha \frac{\partial \tilde{F}^\alpha}{\partial \xi^0} & \varepsilon'\sigma &= -\varepsilon\chi_\alpha \frac{\partial \tilde{F}^\alpha}{\partial '\xi^0} \\ q_\lambda &= -\chi_\alpha \frac{\partial \tilde{F}^\alpha}{\partial \xi^\lambda} & 'q_\lambda &= \chi_\alpha \frac{\partial \tilde{F}^\alpha}{\partial '\xi^\lambda} \end{aligned}$$

Uit (14.8) elimineert men nu de χ_α. Dan blijven er $2n+2\varepsilon-\tau$ vergelijkingen in de $4n+4\varepsilon$ variabelen, maar deze zijn homogeen van de eerste graad in $\varepsilon\sigma$, $\varepsilon'\sigma$, q_λ, $'q_\lambda$. Men kan er dus vergelijkingen van maken die behalve $\varepsilon\xi^0;\ \varepsilon'\xi^0, \xi^\kappa, '\xi^\kappa$ alleen $w_\lambda, 'w_\lambda$ en $'\sigma/\sigma$ bevatten. Met (14.7) samen hebben we dan $2n+2\varepsilon$ vergelijkingen in deze variabelen. We doen nu nog het volgende:

<u>voor</u> $\varepsilon=1$: Elimineer $'\sigma/\sigma$. Geeft $2n+1$ vergelijkingen in de variabelen $\xi^0, '\xi^0, \xi^\kappa, '\xi^\kappa, w_\lambda, 'w_\lambda$ en hieruit moeten $'\xi^0, '\xi^\kappa, 'w_\lambda$ worden opgelost als functies van $\xi^0, \xi^\kappa, w_\lambda$. Dat dit altijd kan moet nog worden verzekerd.

<u>Voor</u> $\varepsilon=0$: Kies voor $'\sigma/\sigma$ een willekeurige functie, analytisch en $\neq 0$ in het beschouwde gebied. Dan hebben we $2n$ vergelijkingen in $\xi^\kappa, '\xi^\kappa, w_\lambda, 'w_\lambda$ waaruit $'\xi^\kappa, 'w_\lambda$ moeten kunnen worden opgelost.

Om die mogelijkheid van oplossing te waarborgen moet men naar de functionaaldeterminant van het stelsel (14.7,8) kijken met betrekking tot $\varepsilon\xi^0;\ \varepsilon\sigma, \xi^\kappa, q_\lambda$ en χ_α. Dat voert tot de conditie dat de determinant

$$
\begin{vmatrix}
\varepsilon \dfrac{\partial f^\alpha}{\partial \xi^0} & \dfrac{\partial f^\alpha}{\partial \xi^\lambda} & 0 \\
\varepsilon \chi_\alpha \dfrac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \xi^0 \partial' \xi^\mu} & \chi_\alpha \dfrac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \xi^\lambda \partial' \xi^\mu} & \dfrac{\partial f^\alpha}{\partial' \xi^\mu} \\
\varepsilon \chi_\alpha \dfrac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \xi^0 \partial' \xi^0} & \varepsilon \chi_\alpha \dfrac{\partial^2 f^\alpha}{\partial \xi^\lambda \partial' \xi^0} & \varepsilon \dfrac{\partial f^\alpha}{\partial' \xi^0}
\end{vmatrix} \tag{14.9}
$$

met $n+\tau+\varepsilon$ rijen en kolommen niet ingevolge (14.7) nul is.

Het getal τ speelt een grote rol. Men noemt $n+\varepsilon-\tau$ de rang van de C_1 -transformatie. Enig element in een punt $\varepsilon \underset{*}{\xi}^0, \underset{*}{\xi}^\kappa$ wordt getransformeerd in een element welks punt in elk geval op de $X_{n+\varepsilon-\tau}$ ligt waar van de vergelijkingen zijn

14.10) $$f^\alpha(\varepsilon \underset{*}{\xi}^0, '\xi^0, \underset{*}{\xi}^\kappa, '\xi^\kappa) = 0 \; ; \; \alpha = 1, \ldots, \tau$$

Aangezien verenigde elementen verenigd blijven raakt het getransformeerde element aan de $X_{n+\varepsilon-\tau}$. De N_n^0 behorende bij $\underset{*}{\xi}^0, \underset{*}{\xi}^\kappa$ gaat dus over in de $N_n^{n+\varepsilon-\tau}$ met $X_{n+\varepsilon-\tau}$ als veldgebied. De omgekeerde C_1 -transformatie doet de $X_{n+\varepsilon-\tau}$ tot een punt samentrekken.

Indien $n+\varepsilon-\tau = 1$ is gaan alle elementen behorende tot één punt over in elementen die weer tot één punt horen. We hebben dus een punt transformatie en uit deze kan de C_1-transformatie eenduidig worden afgeleid voor $\varepsilon = 1$ en op een scalaire factor na voor $\varepsilon = 0$. Dit geval heet de "uitgebreide" (extended, erweitert) punttransformaties.

Zij $\varepsilon = 0$ en zij

14.11) $$f^x(\xi^\kappa) = 0 \; ; \; x = m+1, \ldots, n$$

de vergelijking van een X_m in X_n. Iedere covariante vector, tangerend aan X_m heeft de vorm

14.12) $$w_\lambda = \mathfrak{z}_x \, \partial_\lambda f^x$$

Pas nu de C_1 -transformatie

$$
\begin{aligned}
'\xi^\kappa &= '\phi^\kappa(\xi^\kappa, w_\lambda) \\
'w_\lambda &= '\psi_\lambda(\xi^\kappa w_\lambda)
\end{aligned} \tag{14.13}
$$

toe en zij de rang hiervan $n-\tau$. Dan gaat ieder punt der X_m met zijn bijbehorende N_n^0 over in een $N_n^{n-\tau}$ behorende bij een of andere $X_{n-\tau}$. Substitueert men nu (14.12) in (14.13)

14.14) $$'\xi^{\kappa} = '\phi^{\kappa}(\xi^{\kappa};\ \xi_x \partial_\lambda f^x);\quad x = m+1, \ldots, n$$

en deze vergelijkingen zijn homogeen van de graad nul in de ξ_x omdat de $'\phi^{\kappa}$ homogeen v.d. graad nul in w_λ zijn. Uit de $2n-m$ vergelijkingen (14.11,14) kan men de ξ^{κ} en de $n-m-1$ verhoudingen der ξ_x elimineren.

elimineren en dan blijft er tenminste één vergelijking in de $'\xi^k$ over, voorstellende een X_{n-1}. "In het algemeen" gaan dus de elementen van de N_n^m horende bij X_m over in de elementen van de N_n^{n-1} behorende bij deze X_{n-1}. Voor $m = n-1$ volgt dus dat een C_1-transformatie een X_{n-1} met zijn N_n^{n-1} "in het algemeen" overvoert in een andere X_{n-1} met zijn N_n^{n-1}. Twee ergens aan elkaar rakende X_{n-1}'s gaan dus over in rakende X_{n-1}'s, en dit is de reden waarom de C_1-transformaties contact-transformaties heten.

We kunnen nu ook de regel II gaan toepassen. Schrijven we voor het gemak q_0 en $'q_0$ voor $\varepsilon\sigma$ en $\varepsilon'\sigma$ dan neemt (14.5) den vorm aan

$$14.15)\qquad 'q_\lambda\, d'\xi^\lambda - q_\lambda\, d\xi^\lambda = 0\ ;\qquad \lambda = 0,1,\ldots,n$$

Volgens regel II hebben we nu een functie V van τ der $q_\lambda, 'q_\lambda$ en van $2n+2\varepsilon-\tau$ der $\xi^\lambda, '\xi^\lambda$ (met andere indices) in te voeren, homogeen van de graad 1 de q's en $'q$'s, maar we moeten precies aangeven welke van elk der 4 soorten grootheden voorkomen, dus

$$14.16)\qquad V(q_a, 'q_b, \xi^x, '\xi^y)\qquad \text{(homogeen van de 1e graad in } q_a, 'q_b)$$

$$a = 1-\varepsilon,\ldots,\tau_1-\varepsilon\ ;\quad x = \tau_1-\varepsilon+1,\ldots,n$$

$$b = 1-\varepsilon,\ldots,\tau_2-\varepsilon\ ;\quad y = \tau_2-\varepsilon+1,\ldots,n$$

waarbij men natuurlijk eerst de ξ^k op willekeurige wijze heeft mogen permuteren en de q_λ op precies dezelfde manier, hetgeen eveneens geldt voor de $'\xi^k$ en $'q_\lambda$. Men krijgt dan de volgende vergelijkingen

$$14.17)\qquad a)\ \xi^a - \frac{\partial V}{\partial q_a} = 0 \qquad c)\ q_x + \frac{\partial V}{\partial \xi^x} = 0$$

$$b)\ '\xi^b + \frac{\partial V}{\partial' q_b} = 0 \qquad d)\ 'q_y - \frac{\partial V}{\partial' \xi^y} = 0$$

Dit zijn $2n+2\varepsilon$ vergelijkingen, die in de $X_{4n+4\varepsilon}$ een $X_{2n+2\varepsilon}$ voorstellen, die door de vector van (14.15) omhuld wordt. V is homogeen van de graad 1 in $q_a, 'q_b$ en dus zijn (14.17 a,b) homogeen van de nulden en (14.17 c,d) van de eerste graad.

Voor $\varepsilon = 0$ zijn (14.17) $2n$ vergelijkingen in $\xi^k, \sigma w_\lambda, '\xi^k, '\sigma' w_\lambda$. Voer nu voor $\frac{\sigma'}{\sigma}$ een willekeurige functie in, dan blijven er $2n$ vergelijkingen in $\xi^k, w_\lambda, '\xi^k, w_\lambda$.

Voor $\varepsilon = 1$ zijn (14.17) $2n+2$ vergelijkingen in $\xi^0, \xi^k, w_\lambda, '\xi^0, '\xi^k, 'w_\lambda, \sigma, '\sigma$. Elimineer $\frac{\sigma'}{\sigma}$ dan blijven er $2n+1$ vergelijkingen in $\xi^0, \xi^k, w_\lambda, '\xi^0, '\xi^k, w_\lambda$.

In beide gevallen moeten uit de $2n+\varepsilon$ vergelijkingen de ξ^0, ξ^k, w_λ en evenzo de $'\xi^0, '\xi^k, 'w_\lambda$ kunnen worden opgelost. Daartoe is n.e.v. dat de functionaaldeterminant van (14.17) ongelijk nul is. Dat komt neer op de voorwaarde

---

Noot: Aanvulling bij blz. 41: Bij de oplossing van de $'\xi^k, 'w_\lambda$ voor $\varepsilon = 0$ blijkt dat de $'\phi^k$ in (14.1) homogeen van de graad 0 in w_λ worden en de produkten $'\Omega\, '\psi_\lambda$ (zie (14.1) en (14,3) homogeen van de graad 1 in w_λ.

$$\text{14.18)}\quad \begin{array}{c|c} & \overset{\longleftarrow\ \tau_1\ \longrightarrow}{} \quad \overset{\longleftarrow\ n+\varepsilon-\tau_1\ \longrightarrow}{} \\ \begin{array}{c} \tau_2 \\ \\ n+\varepsilon-\tau_2 \end{array} & \left| \begin{array}{cc} \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_a\, \partial' q_b} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \xi^x\, \partial' q_b} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_a\, \partial' \xi^y} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \xi^x\, \partial' \xi^y} \end{array} \right| \end{array} \neq 0 \qquad \begin{array}{l} a = 1-\varepsilon, \ldots, \tau_1 - \varepsilon \\ x = \tau_1 - \varepsilon + 1, \ldots, n \\ b = 1-\varepsilon, \ldots, \tau_2 - \varepsilon \\ y = \tau_2 - \varepsilon + 1, \ldots, n \end{array}$$

Er zijn 4 verschillende gevallen voor $\varepsilon = 1$. Men heeft immers alvorens V in te voeren eerst de ξ^0, ξ^k op willekeurige wijze mogen permuteren, waarbij dan q_σ, q_λ op dezelfde manier meegepermuteerd mogen worden en precies hetzelfde geldt voor $'\xi^0$, $'\xi^k$ en $'q_0$, $'q_\lambda$. Daarbij kan nu σ in de q_a of in de q_x terechtgekomen zijn en $'\sigma$ in de $'q_b$ of in de q_y. Dat geeft vier verschillende gevallen van een functie V (gewoonlijk <u>genererende functie</u> der C_1-transformatie genoemd). Wij nemen hier als voorbeeld het geval dat σ een van de q_a geworden is en $'\sigma$ een van de $'q_y$. Voor het gemak schrijven we nu τ_1 in plaats van $\tau_1 - 1$, dan zijn de vergelijkingen

$$\text{14.19)}\quad
\begin{array}{ll}
a)\ \begin{cases} \xi^0 - \dfrac{\partial V}{\partial \sigma} = 0 \\[1ex] \xi^\alpha - \dfrac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0;\ \alpha = 1, \ldots, \tau_1 \end{cases} &
c)\ q_{\mathfrak{x}} + \dfrac{\partial V}{\partial \xi^{\mathfrak{x}}} = 0;\ \mathfrak{x} = \tau_1 + 1, \ldots, n \\[3ex]
b)\ {}'\xi^b + \dfrac{\partial V}{\partial' q_b} = 0;\ b = 1, \ldots, \tau_2 &
d)\ \begin{cases} {}'\sigma - \dfrac{\partial V}{\partial' \xi^0} = 0 \\[1ex] {}'q_{\mathfrak{y}} - \dfrac{\partial V}{\partial' \xi^{\mathfrak{y}}} = 0;\ \mathfrak{y} = \tau_2 + 1, \ldots, n \end{cases}
\end{array}$$

($\mathfrak{y}$ = gothische y)

en de condities nemen de vorm aan

$$\text{14.20)}\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial\sigma\, \partial' q_b} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha\, \partial' q_b} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \xi^{\mathfrak{x}}\, \partial' q_b} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial\sigma\, \partial' \xi^0} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha\, \partial' \xi^0} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \xi^{\mathfrak{x}}\, \partial' \xi^0} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial\sigma\, \partial' \xi^{\mathfrak{y}}} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha\, \partial' \xi^{\mathfrak{y}}} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \xi^{\mathfrak{x}}\, \partial' \xi^{\mathfrak{y}}} \end{vmatrix} \neq 0$$

Laten we nu eens proberen een genererende functie te construeren voor de identische transformatie, juist voor <u>dit</u> geval. Dan weten we dat (zie (14.1))

$$\text{14.21)}\quad \begin{array}{ll} \dfrac{\partial V}{\partial \sigma} = \xi^0 & \dfrac{\partial V}{\partial \xi^{\mathfrak{x}}} = -{}'q_{\mathfrak{x}} \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial q_\alpha} = {}'\xi^\alpha & \dfrac{\partial V}{\partial' \xi^0} = \sigma \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial' q_b} = \xi^b & \dfrac{\partial V}{\partial' \xi^{\mathfrak{y}}} = q_{\mathfrak{y}} \end{array}$$

Nu zitten in alleen

$$\text{14.22)}\quad \sigma,\ '\xi^0,\ \xi^{\mathfrak{x}},\ q_\alpha,\ '\xi^{\mathfrak{y}},\ 'q_b \qquad \begin{array}{l} \alpha = 1, \ldots \tau_1;\ \mathfrak{x} = \tau_1 + 1, \ldots n \\ b = 1, \ldots \tau_2;\ \mathfrak{y} = \tau_2 + 1, \ldots n \end{array}$$

De enige mogelijkheid is dus dat de indices $1,\dots,\tau_1$ samenvallen met $\tau_2+1,\dots$ en $1,\dots,\tau_2$ met $\tau_1+1,\dots n$ en dit kan alleen als òf $\tau_1=n,\ \tau_2=0$ òf $\tau_2=n,\ \tau_1=0$

Dat levert twee mogelijkheden voor V

14.23) $$V = \sigma'\xi^0 + q_\lambda{}'\xi^\lambda \ (\tau_1=n,\ \tau_2=0)$$
$$V = -'\sigma\xi^0 - 'q_\lambda\xi^\lambda \ (\tau_1=0,\ \tau_2=n)$$

15. C_3-transformaties

Contact-transformaties van de derde soort zijn C_1-transformaties met $\sigma=1$. Voor ieder vector-veld, waarvoor de C_3-transformatie veldconserverend is, is niet alleen k maar ook 2ρ en dus R invariant, alsmede dragers en rotatiedragers. Er is nog een andere invariantie. Zij een $\mathfrak{M}_1$ met velddimensie 1 gegeven. Vorm dan de integraal

15.1) $$\int \varepsilon\, d\xi^0 + w_\lambda\, d\xi^\lambda$$

tussen twee vaste punten van het veldgebied. Dan is deze integraal invariant bij alle C_3-transformaties, omdat $\varepsilon d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda$ invariant is. Deze integraal is dan en alleen dan nul voor iedere keuze der eindpunten als

$$\mathfrak{M}_1 = N_1$$

Om de meest algemene C_3-transformatie te construeren gebruiken we een van de twee regels voor de constructie van C_1-transformaties met de bijconditie $\sigma=1$.

Regel I wordt erg gemakkelijk voor $\varepsilon=0$ daar dan σ'/σ vrij gekozen mag worden. Schrijven we voor het gemak χ_a voor χ_a/σ dan gaat (14.8) over in

15.2) $$w_\lambda = -\chi_a \frac{\partial F^a}{\partial \xi^\lambda}\ ;\ 'w_\lambda = \chi_a \frac{\partial F^a}{\partial '\xi^\lambda}$$

en elimineren van de χ_a geeft $2n-\tau$ vergelijkingen die tezamen met de τ vergelijkingen $F^a=0$ de C_3-transformatie vastleggen mits de F^a voldoen aan de voorwaarde dat de determinant (14.9) voor $\varepsilon=0$ ongelijk nul is (er valt een rij en een kolom weg). Het is duidelijk dat nu de $'\phi^k$ homogeen van de graad 0 in de w_λ zijn en de $'\psi_\lambda$ homogeen van de graad 1.

Voor $\varepsilon=1$ is er een complicatie omdat de keus van σ'/σ niet vrij is. De F^a mogen dus ook niet vrij gekozen worden maar zo dat σ'/σ net 1 wordt. Uit (14.8) zien we dat daarvoor n.e.v. is dat

15.3) $$\chi_a\left(\frac{\partial F^a}{\partial \xi^0} + \frac{\partial F^a}{\partial '\xi^0}\right) = 0\ ;\ a = 1,\dots,\tau$$

en dat is voor alle waarden van χ_a alleen waar indien de F^a van de ξ^0 en $'\xi^0$ alleen afhangen in de combinatie

15.4) $$Z \overset{\text{def}}{=} {}'\xi^0 - \xi^0$$

De vergelijkingen (14.7,8) gaan nu over in (schrijf weer χ_a voor χ_a/σ)

15.5) $$F^a(Z, \xi^k, '\xi^k) = 0$$

$$15.6)\quad \begin{cases} 1 = \chi_a \dfrac{\partial F^a}{\partial Z} \\ w_\lambda = -\chi_a \dfrac{\partial F^a}{\partial \xi^\lambda} \\ 'w_\lambda = \chi_a \dfrac{\partial F^a}{\partial '\xi^\lambda} \end{cases}$$

en de determinant (14.9) behoudt zijn vorm behalve dat $\varepsilon = 1$ en dat ξ^0 overgaat in Z. Uit deze vergelijkingen laten zich na eliminatie der χ_a de $Z = '\xi^0 - \xi^0_{,\kappa}\,'\xi^\kappa$ en $'w_\lambda$ oplossen als functies van ξ^κ, w_λ.

Gebruiken we regel II voor $\varepsilon = 0$ dan is nu $\sigma' = \sigma$ en dus

$$15.7)\quad V(q_a, 'q_b, \xi^x, '\xi^y) = \sigma V(w_a, 'w_b, \xi^x, '\xi^y)$$
$$a = 1, \ldots, \tau_1 \;;\; x = \tau_1 + 1, \ldots, n$$
$$b = 1, \ldots, \tau_2 \;;\; y = \tau_2 + 1, \ldots, n$$

Bijgevolg krijgen we na invoeren van w_a en $'w_b$ inplaats van q_a en $'q_b$

$$15.8)\quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial q_a} \longrightarrow \dfrac{\partial V}{\partial w_a} \;;\; \dfrac{\partial V}{\partial 'q_b} \longrightarrow \dfrac{\partial V}{\partial 'w_b} \\ \dfrac{\partial V}{\partial \xi^x} \longrightarrow \sigma \dfrac{\partial V}{\partial \xi^x} \;;\; \dfrac{\partial V}{\partial '\xi^y} \longrightarrow \sigma \dfrac{\partial V}{\partial '\xi^y} \end{array}$$

zodat nu (14.17) overgaat in

$$15.9)\quad \begin{array}{ll} a)\;\; \xi^a - \dfrac{\partial V}{\partial q_a} = 0 & c)\;\; q_x + \dfrac{\partial V}{\partial \xi^x} = 0 \\ b)\;\; '\xi^b + \dfrac{\partial V}{\partial 'q_b} = 0 & d)\;\; 'q_y - \dfrac{\partial V}{\partial '\xi^y} = 0 \end{array}$$

De condities voor V hebben de vorm (14.18) maar met w_a en $'w_b$ in plaats van q_a en $'q_b$.

In het geval dat $\varepsilon = 1$ is, is de keuze van σ'/σ niet vrij en om $\sigma' = \sigma$ te krijgen moet V aan zekere voorwaarden voldoen. Men kan bewijzen dat het geval, waarbij σ bij de q_a terechtkomt en $'\sigma$ bij de $'q_b$ hier niet kan voorkomen en de andere 3 gevallen wel. Nemen we wederom het geval σ in de q_a, $'\sigma$ in de $'q_y$ (blz. 44) dan levert $'\sigma = \sigma$ en (14.19 d)

$$15.10)\quad \frac{\partial V}{\partial '\xi^0} = \sigma$$

en dus is V van de vorm

$$15.11)\quad V = \sigma\,'\xi^0 + U(\sigma, q_a, 'q_b, \xi^x, '\xi^y)$$

homogeen van de graad 1 in $\sigma, q_a, 'q_b$, dus

$$15.12)\quad V = \sigma\,'\xi^0 + \sigma W(w_a, 'w_b, \xi^x, '\xi^y)$$

met de voorwaarden voor W

$$
115.13)\qquad \begin{array}{c|cc|} & \xleftrightarrow{\;\tau_1\;} & \xleftrightarrow{\;n-\tau_1\;} \\ \tau_2 & \dfrac{\partial^2 W}{\partial w_\alpha \partial' w_b} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial \xi^{k} \partial' w_b} \\ n-\tau_2 & \dfrac{\partial^2 W}{\partial w_\alpha \partial' \xi^{\eta}} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial \xi^{k} \partial' \xi^{\eta}} \end{array} \neq 0
$$

De vergelijkingen worden:

$$
15.\,4)\qquad \begin{array}{ll} \xi^\alpha - \dfrac{\partial W}{\partial w_\alpha} = 0 & w_k + \dfrac{\partial W}{\partial \xi^k} = 0 \\ {}'\xi^b + \dfrac{\partial W}{\partial' w_b} = 0 & {}'w_\eta - \dfrac{\partial W}{\partial' \xi^\eta} = 0 \end{array}
$$

$$
{}'\xi - \xi^0 = -W - w_\alpha \frac{\partial W}{\partial w_\alpha} - {}'w_b \frac{\partial W}{\partial' w_b}
$$

$$
\alpha = 1,\ldots,\tau_1 \;;\; b = 1,\ldots,\tau_2 \;;\quad k = \tau_1+1,\ldots,n \;;\; \eta = \tau_2+1,\ldots,n
$$

In het speciale geval dat W homogeen is van de graad 1 in $w_\alpha, {}'w_b$ hebben we dat ξ^0 invariant is en dat er alleen een C_3-transformatie in ξ^k, w_λ overblijft.

16. C_2-transformaties

Een C_2-transformatie is een transformatie in $\varepsilon \xi^0, \xi^k, w_\lambda$ die de Pfaffse vorm $\varepsilon\, d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda$ invariant laat op een additieve volledige differentiaal na. Ook deze transformaties werden "contacttransformaties" genoemd, hoewel zij de typische contacteigenschap missen. Er bestaat een zekere dualiteit tussen C_1- en C_2-transformaties. We schrijven de voorwaarde in de symmetrische vorm

$$
16.1)\qquad d's + \varepsilon\, d'\xi^0 + {}'w_\lambda d'\xi^\lambda = ds + \varepsilon\, d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda
$$

en noteren dat s en $'s$ functies zijn van ξ^0, ξ^k, w_λ waarvan ons alleen het verschil interesseert:

$$
16.2)\qquad {}'s - s = {}'\Omega(\varepsilon \xi^0, \xi^k, w_\lambda) = \Omega(\varepsilon, '\xi^0, '\xi^k, 'w_\lambda)
$$

Is een C_2-transformatie veldconserverend t.o. van een veld $\varepsilon w_0 = \varepsilon, w_\lambda = f_\lambda(\xi^k)$ dan volgt uit (16.1) dat de rotatieklasse 2ρ en de rotatiedragers invariant zijn maar k en $\mathfrak{R}$ in het algemeen niet.

C_2-transformaties hebben nog een andere invariantie. Stel het veldgebied van een $\mathfrak{M}_1$ is ééndimensionaal en gesloten. Vormt men dan over dit gebied de integraal $\int \varepsilon\, d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda$ dan is deze integraal invariant bij C_2-transformaties. De integraal is nul wanneer de $\mathfrak{M}_1$ een N_1 is (niet noodzakelijk). Bij een C_2-transformatie blijft die integraal nul maar de N_1 behoeft geen N_1 te blijven. Is de integraal $\neq 0$ dan kan de $\mathfrak{M}_1$ nooit door een C_2-transformatie in een punt worden samengetrokken.

Het is handig om te schrijven

$$
16.3)\qquad \chi \overset{\text{def}}{=} s + \varepsilon \xi^0 \;;\; {}'\chi \overset{\text{def}}{=} {}'s + \varepsilon' \xi^0
$$

Dan gaat (16.2) over in $d'z + 'w_\lambda d'\xi^\lambda = dz + w_\lambda d\xi^\lambda$

Om dus een C_2-transformatie te verkrijgen heeft men maar een C_3-transformatie te construeren in z, w_λ en ξ^k. Is dat gebeurd dan hebben we vergelijkingen van de vorm

$$16.5)\quad \begin{array}{ll} a) & 's - s + \varepsilon'\xi^0 - \varepsilon\xi^0 = \chi(\xi^\mu, w_\nu) \\ b) & '\xi^k = '\phi^k(\xi^\mu, w_\nu) \\ c) & 'w_\lambda = '\psi_\lambda(\xi^\mu, w_\nu) \end{array}$$

Voor $\varepsilon = 0$ stelt (16.5 b,c) de C_2-transformatie voor.
Voor $\varepsilon = 1$ kiezen we voor $'s - s$ een willekeurige functie van ξ^k, w_λ.
Om de C_3-transformatie te verkrijgen kan men één der beide regels toepassen.

§ 17. Infinitesimale punttransformaties in de X_n der ξ^k.

$$17.1)\qquad '\xi^k = \xi^k + X^k dt$$

heet een infinitesimale punttransformatie in X_n. X^k is een contravariant vectorveld en t een hulpvariabele. Met Lie schrijft men

$$(17.2)\qquad X \overset{def}{=} X^\mu \partial_\mu$$

en noemt X het symbool der infin. transformatie. (17.1) kan ook worden geschreven

$$(17.3)\qquad d\xi^k = X^k dt$$

en

$$(17.4)\qquad \frac{d\xi^k}{dt} = X^k(\xi^\mu)$$

is de gewone differentiaalvergelijking van de stroomlijnen van het veld X^k. De oplossing is van de vorm

$$(17.5)\qquad \xi^k = f^k(\overset{0}{\xi}{}^\lambda, t)\ ;\ f^k(\overset{0}{\xi}{}^\lambda, 0) = \overset{0}{\xi}{}^k$$

Deze vergelijking stelt voor een groep van ∞^1 transformaties, die allemaal de stroomlijnen van X^k invariant laten. Maar niet iedere punttransformatie, die ontstaat door alle punten langs die stroomlijnen te verschuiven (natuurlijk continu) behoort tot die groep. Men make zich goed duidelijk en ook dat de groep behorende bij X^k niet dezelfde is als die behorende bij σX^k tenzij σ een constante is. De groep heet de een-parameter groep behorende bij de infinitesimale transformatie

Wij herinneren eraan, dat contacttransformaties in een $X_{n+\varepsilon}$ konden worden geduid als transformaties, die in een $X_{2n+\varepsilon}$ een bepaalde differentiaalvorm (of vectorveld) invariant of op een factor of additieve gradient na invariant laten. Om dus de behandeling van infinitesimale contacttransformaties voor te bereiden moeten we in de X_n der ξ^κ een covariant vectorveld w_λ gaan leggen en bij voorbeeld eisen, dat $w_\lambda d\xi^\lambda$ bij de transformatie (17.2) op een factor, bv. $1+\mu dt$, na invariant is. Daarbij is de getransformeerde waarde $'w_\lambda$ van het veld eenvoudig de veldwaarde in het getransformeerde punt $'\xi^\kappa$:

17.6) $$'w_\lambda = w_\lambda + X^\mu \partial_\mu w_\lambda dt$$

terwijl voor $d'\xi^\kappa$ uit (17.2) volgt

17.7) $$d'\xi^\kappa = d\xi^\kappa + \partial_\omega X^\lambda d\xi^\omega dt$$

Combinerende geeft dit

17.8) $$'w_\lambda d'\xi^\lambda = (w_\lambda + \underset{L}{D}\, w_\lambda dt)\, d\xi^\lambda$$

waarin

17.9) $$\underset{L}{D}\, w_\lambda \overset{def}{=} X^\mu \partial_\mu w_\lambda dt + w_\mu \partial_\lambda X^\mu$$

de bekende Lie'se afgeleide van het veld w_λ is t.o.v. het veld $X^\kappa dt$ (verg. blz. 33 dictaat tensoranalyse en hfdstk II § 13 Pfaffs Problem) $\underset{L}{D}\, w_\lambda$ is een vector en een comitante van w_λ en X^κ.

In het onderhavige geval moet $\underset{L}{D}\, w_\lambda = \mu w_\lambda$ zijn, dus

17.10) $$X^\mu \partial_\mu w_\lambda + w_\mu \partial_\lambda X^\mu = X^\mu W_{\mu\lambda} + \partial_\lambda(w_\mu X^\mu) = \mu w_\lambda$$

<u>le geval</u> $w_\mu X^\mu = 0$, d.w.z. de stroomlijnen van X^κ zijn integraalkrommen van het veld w_λ. Voor $R = 2\rho+1$ kan w_λ niet in het gebied van $W_{\mu\lambda}$ liggen, zodat $\mu = 0$ moet zijn. Voor $R = 2\rho$ drukt (17.10) uit dat $X^\mu W_{\mu\lambda}$ de richting van w_λ heeft. Dus is (17.10) equivalent met

17.11)
a) $\left.\begin{aligned} X^\mu W_{\mu\lambda} &= 0 \\ X^\mu w_\mu &= 0 \end{aligned}\right\}$ voor $R = 2\rho+1$

b) $\left.\begin{aligned} X^\mu W_{\mu[\lambda} w_{\nu]} &= 0 \\ X^\mu w_\mu &= 0 \end{aligned}\right\}$ voor $R = 2\rho$

Vergelijken we (17.11) met de vergelijkingen voor de charakteristieken van w_λ (zie blz. 16, form (6.4) [1])

17.12)
$(S_2=S_4)$ $\left.\begin{aligned} d\xi^\mu W_{\mu\lambda} &= 0 \\ d\xi^\mu w_\mu &= 0 \end{aligned}\right\}$ voor $R = 2\rho+1$

$(S_3=S_4)$ $\left.\begin{aligned} d\xi W_{\mu[\lambda} w_{\nu]} &= 0 \\ d\xi^\mu w_\mu &= 0 \end{aligned}\right\}$ voor $R = 2\rho$

-----

[1]) Verbeter in (6.4) de fout in S_4): $W_{\mu\lambda} d\xi^\mu = 0$ moet zijn $W_{\mu\lambda} d\xi^\mu \mathrel{::} w_\lambda$

ı volgt dat voor $w_\mu X^\mu = o$ aan (17.10) voldaan is <u>indien</u> (n.e.v.) <u>de troomlijnen van</u> X^K <u>liggen in de charakteristieken van</u> w_λ.

<u>2e geval</u>. $w_\mu X^\mu \neq o$ Schrijf $F = w_\mu X^\mu$. Dan worden de vergelijkingen

$$17.13) \quad a) \quad X^\mu W_{\mu\lambda} + \partial_\lambda F = \mu w_\lambda$$

$$b) \quad X^\mu w_\mu = F$$

Voor $\mathfrak{R} = 2\rho+1$ is $\partial_\lambda F$ of nul of liggende in het λ -gebied van $w_\lambda, W_{\mu\lambda}$ en dus is F òf een constante òf een functie 1 òf een functie met index 2. Is F een constante dan is $\partial_\lambda F = o$ en dus $\mu = o$. Is F van index 2 dan ligt $\partial_\lambda F$ in het gebied van $W_{\mu\lambda}$ en is dus eveneens $\mu = o$. Bepalen we eerst de oplossingen van (17.13) voor $F = o$, dan is (17.13) gelijkwaardig met (17.11a) en we weten dat (17.11a) $n - \mathfrak{R}$ onafhankelijke oplossingen heeft. Zijn dit $\underset{1}{X}^K, \ldots, \underset{n-\mathfrak{R}}{X}^K$ dan is de meest algemene oplossing van (17.13) voor $F = o$

$$17.14) \qquad \underset{S}{X}^K = \overset{1}{\alpha} \underset{1}{X}^K + \ldots\ldots \overset{n-\mathfrak{R}}{\alpha} \underset{n-\mathfrak{R}}{X}^K$$

Kiezen we nu voor F een <u>willekeurige</u> constante of functie van index 1 of 2 dan kan μ <u>eenduidig</u> uit (17.13a) worden opgelost en wel onafhankelijk van X^μ omdat w_λ <u>niet</u> in het gebied van $W_{\mu\lambda}$ ligt. Het verschil van twee oplossingen van (17.13) behorende bij dezelfde F -waarde is dus altijd een oplossing van (17.11a). Is dus $\underset{F}{X}^K$ een willekeurige oplossing van (17.13) afhangende van de keuze van F dan is de meest algemene oplossing van (17.13) van de vorm

$$17.15) \qquad \boxed{X^K = \underset{F}{X}^K + \underset{S}{X}^K}$$

Resumerende hebben wij dus:

De meest algemene infinitesimale punttransformatie, die een veld w_λ van de klasse $\mathcal{K} = 2\rho+1$ invariant laat op een factor $1+\mu dt$ na heeft de vorm (17.15) en er zijn 4 gevallen

17.16)

(0) $F = 0$; $X = X_S$; $\mu = 0$, stroomlijnen in dragers (= charakt),

(1) $F =$ constant $\neq 0$; $\mu = 0$, stroomlijnen in rotatiedragers

(2) F index 2 ; $\mu = 0$

(3) F index 1 ; μ kan uit F worden afgeleid.

Voor $\mathcal{K} = n$ worden de dragers punten en vervalt dus het geval (0). We blijven bij dit geval. We gebruiken weer de notatieverandering van § 13 waarbij n overgaat in $2n+1$ en de differentiaalvorm de vorm

17.17)
$$d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda = W_B dX^B$$
$$B = 0, \ldots, n, (1), \ldots, (n)$$

verkrijgt. Dan worden de infinitesimale punttransformaties die door (17.16) gegeven zijn C_1 -transformaties in de X_{n+1} der ξ^0, ξ^κ, W_B en de rotatie W_{CB} hebben nu alleen de kentallen

(17.18)
$$W_{(1)1} = -W_{1(1)} = 1 ; W_\lambda = w_\lambda ; W_{(\lambda)} = 0$$
$$W_{(n)n} = -W_{n(n)} = 1 \quad W_0 = 1$$

en de vergelijkingen (17.13) worden nu

17.19)
$$X^C W_{CB} + \partial_B F = \mu W_B$$
$$X^C W_C = F$$

of

17.20)
$$X^{(\kappa)} + \partial_\kappa F = \mu W_\kappa ; \quad X^0 + X^\kappa w_\kappa = F$$
$$X^\kappa - \partial_{(\kappa)} F = 0$$
$$\partial_0 F = \mu W_0 = \mu$$

waaruit onmiddellijk volgt

17.21)
$$X^\lambda = \frac{\partial F}{\partial w_\lambda} ; \quad X^{(\kappa)} = -\frac{\partial F}{\partial \xi^\kappa} + w_\kappa \partial_0 F$$

De meest algemene infinitesimale C_1 -transformatie in $\xi^0, \xi^\kappa, w_\lambda$ is dus

17.22)
$$\boxed{\begin{aligned} \delta\xi^0 &= -w_\lambda \frac{\partial F}{\partial \xi^\lambda} dt + F dt \\ \delta\xi^\kappa &= \frac{\partial F}{\partial w_\kappa} dt \\ \delta w_\lambda &= -\frac{\partial F}{\partial \xi^\lambda} dt + w_\lambda \frac{\partial F}{\partial \xi^0} dt \qquad ; \mu = \frac{\partial F}{\partial \xi^0} \end{aligned}}$$

waar F een willekeurige functie van $\xi^0, \xi^\kappa, w_\lambda$ is. Er zijn drie gevallen (verg. (17.16))

(1) $F =$ constant $\neq 0$; ξ^κ en w_λ zijn invariant, $\mu = 0$, triviale C_1 -transformatie;

(2) F is onafhankelijk van ξ^0 ; $\mu = 0$, algemene C_3 -transfor-
17.23) matie, tevens in ξ^κ, w_λ algemene C_2 - transformatie.

(3) F algemeen; $\mu = \frac{\partial F}{\partial \xi^0}$, algemene C_1 -transformatie

We keren nu weer terug tot de punttransformatie in X_n die $w_\lambda d\xi^\lambda$ op een factor na invariant laat en beschouwen nu het geval $\mathfrak{R} = 2\rho$.

Voor $F = 0$ en $\mu = 0$ nemen de vergelijkingen (17.13) de vorm aan

17.24)
$$\begin{aligned} X^\mu W_{\mu\lambda} &= 0 \\ X^\mu w_\mu &= 0 \end{aligned}$$

en deze brengen tot uitdrukking dat de stroomlijnen van X^κ in de dragers (= rotatiedragers) van het veld liggen. Zij X^κ de algemene oplossing dan zal het verschil van twee oplossingen dan (17.13) voor dezelfde waarden van F en μ een oplossing van (17.24) zijn, zodat de algemene oplossing van (17.13) de vorm heeft

17.25)
$$\boxed{X^\kappa = \underset{F,\mu}{X^\kappa} + \underset{s}{X^\kappa}}$$

waarin $\underset{F,\mu}{X^\kappa}$ een willekeurige oplossing van (17.13) is. Is $F = 0$ maar $\mu \neq 0$ dan gaat (17.13) over in

17.26)
$$\begin{aligned} X^\mu W_{\mu[\lambda} w_{\kappa]} &= 0 \\ X^\mu w_\mu &= 0 \end{aligned}$$

hetgeen bewijst dat in dat geval de stroomlijnen althans in de karakteristieken liggen. Nu kan men F niet willekeurig kiezen want algemeen geldt dat

17.27)
$$X^\mu w_\mu W_{[\lambda_1\kappa_1} \cdots W_{\lambda_\rho\kappa_\rho]} + 2\rho X^\mu W_{\mu[\lambda_1} w_{\kappa_1} W_{\lambda_2\kappa_2} \cdots W_{\lambda_\rho\kappa_\rho]} =$$
$$= \frac{1}{2\rho+1} X^\mu w_{[\mu} W_{\lambda_1\kappa_1} \cdots W_{\lambda_\rho\kappa_\rho]} = 0$$

omdat $\mathfrak{R} = 2\rho$ is.

Dit laat zich ook als volgt schrijven

17.28) $$\overset{2p}{\mathcal{F}\mathcal{J}} - 2p\, \overset{2p-1}{\overline{\mathcal{F}}\mathcal{J}} = 0$$

en deze vergelijking drukt uit dat $\frac{1}{F} w_\lambda$ voor $F \neq 0$ van de klasse $2p-1$ is (verg. § 10).

Resumerende hebben we dus:

De meest algemene infinitesimale punttransformatie, die een veld w_λ van de klasse $\mathcal{R} = 2p$ invariant laat op een factor $1 + \mu\, dt$ na heeft de vorm (17.25) en er zijn 4 gevallen

17.29)
- (0) $F = 0$; $\mu = 0$; $X = \underset{S}{X}$, stroomlijnen in dragers=rotatiedragers
- (1) $F = 0$; $\mu \neq 0$; stroomlijnen in karakteristieken
- (2) F is een oplossing van (17.28); $\mu = 0$
- (3) F is een oplossing van (17.28); $\mu \neq 0$ en willekeurig.

Voor $\mathcal{R} = n$ vervalt weer het geval (0). We blijven bij dit geval en gebruiken de notatieverandering van § 13 waarbij n overgaat in $2n$ en de differentiaalvorm de vorm

$$w_\lambda\, d\xi^\lambda = W_B\, d\xi^B \qquad B = 1, \ldots, n, (1), \ldots, (n)$$

verkrijgt. Dan worden de infinitesimale punttransformaties die door (17.29) gegeven zijn C_1-transformaties in de X_n. De rotatie W_{CB} heeft alleen de kentallen aangegeven in (17.18) en hetzelfde geldt voor W_B, alleen W_0 vervalt nu.

De vergelijkingen (17.19) worden nu

17.31) $$X^{(\kappa)} + \partial_\kappa F = \mu W_\kappa$$
$$X^\kappa - \partial_{(\kappa)} F = 0$$

waaruit direct volgt

17.32) $$X^\lambda = \frac{\partial F}{\partial w_\lambda} \quad ; \quad X^{(\kappa)} = -\frac{\partial F}{\partial \xi^\kappa} + \mu w_\lambda$$

De meest algemene infinitesimale C_1-transformatie in ξ^κ, w_λ, is dus

17.33) $$\boxed{\begin{aligned} \delta\xi^\kappa &= \frac{\partial F}{\partial w_\kappa}\, dt \\ \delta w_\lambda &= -\frac{\partial F}{\partial \xi^\lambda}\, dt + \mu w_\lambda\, dt \end{aligned} \qquad \delta(w_\lambda\, d\xi^\lambda) = \mu\, dt\, w_\lambda\, d\xi^\lambda}$$

waarin μ een willekeurige functie is en F een willekeurige oplossing van (17.28) is, welke vergelijking hier de vorm

17.34) $$w_\lambda \frac{\partial F}{\partial w_\lambda} = F$$

aanneemt die uitdrukt dat $\mathcal{F}$ homogeen van de eerste graad in w_λ moet zijn (verg. § 10). Er zijn drie gevallen:

17.35)
(1) $\mathcal{F} = 0$; μ willekeurig, gelijkvormigheidstranformatie in w_λ , speciaal C_1 -transformatie ;
(2) $\mathcal{F}$ homogeen graad 1 in w_λ ; $\mu = 0$; algemene C_3 -transformatie
(3) $\mathcal{F}$ dito; μ willekeurig; algemene C_1 -transformatie.

Nu gaan we eisen dat de punttransformatie (17.1) in $X_{n+\varepsilon}$ het veld w_λ op een additieve gradient na invariant laat. Dan moet $\underset{L}{D} w_\lambda$ een gradient zijn, dus (verg. (17.10))

17.36)
$$X^\mu W_{\mu\lambda} + \partial_\lambda (X^\mu w_\mu) = \partial_\lambda s$$

Schrijven we nu

17.37)
$$\mathcal{F} \overset{def}{=} X^\mu w_\mu \,, \quad \mathcal{G} \overset{def}{=} \mathcal{F} - s$$

dan gaat (17.36) over in

17.38)
$$X^\mu W_{\mu\lambda} + \partial_\lambda \mathcal{G} = 0$$
$$X^\mu w_\mu = \mathcal{F} = \mathcal{G} + s$$

Nemen we nu eerst $n = 2\rho + 1$. Dan moet $\partial_\lambda \mathcal{G}$ in het gebied van $W_{\mu\lambda}$ liggen en $\mathcal{G}$ is dus een constante of een functie met index 2. Nemen we nu eerst $\mathcal{G}$ = constant en $s = -\mathcal{G}$ dan drukt (17.38) uit dat X^κ in de dragers moet liggen. Is alleen $\mathcal{G}$ constant dan volgt alleen dat X^κ in de rotatiedragers moet liggen. Zij $\underset{s}{X}{}^\kappa$ de meest algemene oplossing van (17.38) voor $\mathcal{G}$ = constant = $-s$ dan zal het verschil van twee oplossingen voor dezelfde waarden van $\mathcal{G}$ en s een oplossing voor het stelsel met $\mathcal{G}$ = constant = $-s$ zijn. De algemene oplossing van (17.38) is dus van de vorm

17.39)
$$\boxed{X^\kappa = \underset{\mathcal{G},s}{X}{}^\kappa + \underset{s}{X}{}^\kappa}$$

waarin $\underset{\mathcal{G},s}{X}{}^\kappa$ een willekeurige niet speciale oplossing van (17.38) is.
Er zijn vier gevallen:

17.40)
(0) $\mathcal{G}$ =constant; $s = -\mathcal{G}$; $X = \underset{s}{X}$, stroomlijnen in dragers (= karakteristieken)
(1) $\mathcal{G}$ =constant; s willekeurig; stroomlijnen in rotatiedragers
(2) $\mathcal{G}$ index 2; s = constant
(3) $\mathcal{G}$ index 2; s willekeurig .

Voor $\mathfrak{p} = n$ vervalt weer het geval (0). We blijven bij dit geval en gebruiken weer de notatieverandering van § 13 uitgedrukt in (17.18). De vergelijkingen (17.38) worden dan

$$X^C W_{CB} + \partial_B \mathfrak{g} = 0$$

17.41)

$$X^C W_C = \mathfrak{g} + s$$

en deze gaan ingevolge (17.18) over in

17.42) $$X^0 + w_\lambda \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial w_\lambda} = \mathfrak{g} + s \;;\; X^\lambda = \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial w_\lambda} \;;\; X^{(\kappa)} = -\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \xi^\kappa} \;;\; \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \xi^0} = 0$$

De meest algemene C_2-transformatie in $\xi^0, \xi^\kappa, w_\lambda$ heeft dus de vorm

1743) $$\boxed{\begin{aligned} \delta \xi^0 &= -w_\lambda \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial w_\lambda} dt + (\mathfrak{g} + s)\, dt \\ \delta \xi^\kappa &= \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial w_\kappa} dt \qquad \delta(d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda) = ds\, dt \\ \delta w_\lambda &= -\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \xi^\lambda} dt \end{aligned}}$$

waar $\mathfrak{g}$ een willekeurige functie van ξ^κ, w_λ is en s een willekeurige functie van $\xi^0, \xi^\kappa, w_\lambda$. Er zijn drie gevallen (verg. (17.40)

(1) $\mathfrak{g}$ = constant; s willekeurig, ξ^κ en w_λ invariant; triviale C_2 – transformatie

17.44) (2) $\mathfrak{g}$ willekeurige functie van $\xi^\kappa; w_\lambda$; s constant; algemene C_1 -transformatie

(3) $\mathfrak{g}$ dito; s willekeurig; algemene C_2 -transformatie

Is $\mathfrak{p} = 2\rho$ dan ligt blijkens (17.38) $\partial_\lambda \mathfrak{g}$ in het gebied van $W_{\mu\lambda}$ en dus is $\mathfrak{g}$ een functie met index 1 of 2 of een constante. Is $\mathfrak{g}$ een constante dan volgt uit (17.38) dat $s = -\mathfrak{g}$ en dat de stroomlijnen liggen in de dragers (= rotatiedragers). Ingevolge (17.38) is steeds

$$\mathfrak{g}\, W_{[\mu_1\lambda_1} \cdots W_{\mu_p\lambda_p]} - 2\rho\, (\partial_{[\mu_1}\mathfrak{g})\, w_{\lambda_1} W_{\mu_2\lambda_2} \cdots W_{\mu_p\lambda_p]} =$$

17.45) $$= X^\mu w_\mu W_{[\mu_1\lambda_1} \cdots W_{\mu_p\lambda_p]} - s\, W_{[\mu_1\lambda_1} \cdots W_{\mu_p\lambda_p]} -$$

$$+ 2\rho\, X^\mu W_{\mu[\mu_1} w_{\lambda_1} W_{\mu_2\lambda_2} \cdots W_{\mu_p\lambda_p]} = -s\, W_{[\mu_1\lambda_1} \cdots W_{\mu_p\lambda_p]}$$

of

17.46) $$\mathfrak{g} \overset{2\rho}{\mathfrak{J}} - 2\rho\, \bar{\mathfrak{g}} \overset{2\rho-1}{\mathfrak{J}}{}' = -s \overset{2\rho}{\mathfrak{J}}$$

Is dus $\mathfrak{G}$ van de index 2, d.w.z. is $\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{J}^{2\rho-1} = 0$ dan is $s = -\mathfrak{G}$. Voldoet $\mathfrak{G}$ aan de vergelijking (verg. (1728))

17.47) $$\mathfrak{G}\,\mathfrak{J}^{2\rho} - 2\rho\,\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{J}^{2\rho-1} = 0$$

dan is $s = 0$ blijkens (17.46). $\mathfrak{G}$ heeft dan kennelijk de index 1.

Tenslotte kan $\mathfrak{G}$ de index 1 hebben en niet aan (17.47) voldoen. Kiest men $\mathfrak{G}$ dan laat zich uit (17.38) eerst X^κ bepalen op een additief stuk na welks overschuiving met $W'_{\mu\lambda}$ en dus ook met w_λ nul is. Bijgevolg is dan ook $\mathfrak{G} + s$ en daarmede s bekend. Zij de algemene oplossing van (17.38) voor $\mathfrak{G} = 0$ en dus $s = 0$ aangeduid met $\underset{s}{X}^\kappa$ dan is weer de algemene oplossing van (17.38) van de vorm

17.48) $$\boxed{X^\kappa = \underset{\mathfrak{G}}{X}^\kappa + \underset{s}{X}^\kappa}$$

waarin X^κ een willekeurige niet speciale oplossing van (17.38) is. Er zijn 4 gevallen:

17.49)
(0) $\mathfrak{G}$ = constant; $s = -\mathfrak{G}$; $X = \underset{s}{X}$, stroomlijnen in dragers (rotatiedragers)
(1) $\mathfrak{G}$ index 2; $s = -\mathfrak{G}$
(2) $\mathfrak{G}$ index 1, oplossing van (17.47); $s = 0$
(3) $\mathfrak{G}$ index 1, geen oplossing van (17.47); s uit $\mathfrak{G}$ af te leiden.

Voor $R = n$ vervalt weer het geval (0). We blijven bij dit geval, en gebruiken weer de rotatievergelijking van § 13. De vergelijkingen (17.38) krijgen dan weer de vorm (17.41) en deze gaan over in

17.50) $$X^\lambda = \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial w_\lambda} \quad ; \quad X^{(\kappa)} = -\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \xi^\kappa}$$

terwijl (17.46) overgaat in

17.51) $$w_\lambda \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial w_\lambda} = \mathfrak{G} + s$$

De meest algemene C_2-transformatie in ξ^κ, w_λ heeft dus de vorm

17.52) $$\boxed{\begin{aligned} \delta \xi^\kappa &= \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial w_\kappa}\,dt & \qquad \delta(w_\lambda\, d\xi^\lambda) &= ds\,dt \\ \delta w_\lambda &= -\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \xi^\lambda}\,dt & \qquad w_\lambda \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial w_\lambda} &= \mathfrak{G} + s \end{aligned}}$$

waarin $\mathfrak{G}$ een willekeurige functie van ξ^κ, w_λ is. Er zijn drie gevallen:

(1) $\mathcal{G}$ homogeen graad 0 in w_λ ; $S = -\mathcal{G}$; speciale C_2-transformatie, $\delta\xi^\kappa$ ligt namelijk in de (n-1)- richting van w_λ

17.53)

(2) $\mathcal{G}$ homogeen van de graad 1 in w_λ ; $S = 0$; algemene C_3-transformatie

(3) $\mathcal{G}$ willekeurig; $S = w_\lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial w_\lambda} - \mathcal{G}$; algemene C_2-transformatie.

De C_3-transformaties zijn in (17.22, 33, 43 en 52) valzelf mee voor de dag gekomen.

Hier volgt een overzicht van alle infinitesimale contacttransformaties:

$\varepsilon = 0$

$$\delta \xi^\kappa = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w_\kappa} dt$$

$$\delta w_\lambda = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi^\lambda} dt + \mu w_\lambda dt$$

$$\delta(w_\lambda d\xi^\lambda) = \{(\mathfrak{F}) - \mathfrak{F}\} dt + \mu dt\, w_\lambda d\xi^\lambda$$

$$(\mathfrak{F}) \overset{\mathrm{def}}{=} w_\lambda \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w_\lambda}$$

$C_1 : (\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$; μ willekeurig
($\mathfrak{F}$ en μ geven)

$C_2 : \mu = 0$; $\mathfrak{F}$ willekeurig
(alleen $\mathfrak{F}$ geven)

$C_3 : (\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$; $\mu = 0$
(alleen $\mathfrak{F}$ geven)

$\varepsilon = 1$

$$\delta \xi^0 = -w_\lambda \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w_\lambda} dt + (\mathfrak{F} + s) dt$$

$$\delta \xi^\kappa = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w_\kappa} dt$$

$$\delta w_\lambda = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi^\lambda} dt + w_\lambda \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi^0} dt$$

$$\delta(d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda) =$$

$$= \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi^0} dt\, (d\xi^0 + w_\lambda d\xi^\lambda) + ds\, dt.$$

$C_1 : s = 0$; $\mathfrak{F}$ willekeurig; $\mu = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi^0}$
(alleen $\mathfrak{F}$ geven)

$C_2 : \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi^0} = 0$; s willekeurig
($\mathfrak{F}$ en s geven)

$C_3 : s = 0$ $\mu = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \xi^0} = 0$
(alleen $\mathfrak{F}$ geven)

$\mathfrak{F}$, μ en s heten voorzover zij gegeven moeten worden om de contacttransformatie vast te leggen de <u>charakteristieke</u> functies der infinitesimale C -transformatie.

§ 18 Haaksymbolen van Poisson en van Lagrange

Zijn v_1 en v_2 functies van de ξ^k en w_λ dan is

18.1)
$$(v_1, v_2) \stackrel{def}{=} \frac{\partial v_1}{\partial w_\lambda} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial \xi^\lambda} - \frac{\partial v_2}{\partial w_\lambda} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \xi^\lambda} = -(v_1, v_2)$$

het haaksymbool van Poisson. Is $(v_1, v_2) = 0$ dan heten v_1 en v_2 in involutie.

Zijn ξ^k en w_λ functies van v_1, v_2 en nog andere variabelen, dan is

18.2)
$$\{v_1, v_2\} = \frac{\partial w_\lambda}{\partial v_1} \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial v_2} - \frac{\partial w_\lambda}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial \xi^\lambda}{\partial v_1}$$

het haaksymbool van Lagrange. Zijn er 2n variabelen $v_\mathfrak{b}$; $\mathfrak{b} = 1, \ldots\ldots, 2n$ dan volgt gemakkelijk

18.3)
$$(v_\alpha, v_c)\{v_\mathfrak{b}, v_c\} = \delta_{\alpha\mathfrak{b}} \; ; \alpha, \mathfrak{b}, c = 1, \ldots, 2n$$

Door uitschrijven bewijst men de identiteit van Jacobi voor ( )

18.4)
$$(v_1, (v_2, v_3)) + (v_2, (v_3, v_1)) + (v_3, (v_1, v_2)) = 0$$

Een dergelijke identiteit geldt niet voor $\{ \}$.

Bekijk nu een willekeurige transformatie in ξ^k, w_λ:

18.5)
$$\begin{aligned} {}'\xi^\kappa &= {}'\phi^\kappa(\xi^k, w_\lambda) \\ {}'w_\lambda &= {}'\psi_\lambda(\xi^\kappa, w_\lambda) \end{aligned}$$

die omkeerbaar verondersteld wordt. Dit is dan en alleen dan een C_2- transformatie indien er een functie $\Omega({}'\xi^\kappa, {}'w_\lambda)$ bestaat zo dat

18.6)
$$w_\lambda d\xi^\lambda = {}'w_\lambda d{}'\xi^\lambda + d\Omega({}'\xi^\kappa, {}'w_\lambda)$$

of ook

18.7)
$$w_\mu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial {}'\xi^\lambda} = {}'w_\lambda + \frac{\partial \Omega}{\partial {}'\xi^\lambda} \; ; \; w_\mu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial {}'w_\kappa} = \frac{\partial \Omega}{\partial {}'w_\kappa}$$

Door differentiatie van (18.7) vindt men

18.8)
$$\begin{aligned} &\{{}'\xi^\mu, {}'\xi^\kappa\} = 0 \\ &\{{}'w_\lambda, {}'\xi^\kappa\} = \delta^\lambda_\kappa \\ &\{{}'w_\lambda, {}'w_\mu\} = 0 \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen brengen tot uitdrukking dat in de X_{2n} der ${}'\xi^\kappa$, ${}'w_\lambda$ de vector met de 2n kentallen:

$$w_\mu \frac{\partial \xi^\mu}{\partial' \xi^\lambda} - {}'w_\lambda \quad ; \quad w_\mu \frac{\partial \xi'^\mu}{\partial' w_k}$$

n rotatie heeft. Maar dat is precies wat (18.7) ook uitdrukt. Bijge g is ook (18.8) een stelsel condities, n.e.v. opdat (18.5) een C_2-transformatie is. De matrix van de Lagrange-haken van ${}'\xi^1, \ldots, {}'\xi^n, {}'w_1, \ldots, {}'w_n$ in <u>deze</u> volgorde is

18.10)

$$\left\| \begin{matrix} & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & -1 & 0 \\ & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & & & 0 & -1 & & \\ & & & -1 & 0 & & \\ & & 0 & +1 & & & \\ & & +1 & 0 & & & \\ 0 & +1 & & & & & \\ +1 & 0 & & & & & \end{matrix} \right\|$$

Dus heeft de omkering <u>dezelfde</u> vorm en dat wil zeggen (ingevolge (18.3)) dat

18.11)

$$\begin{aligned} ({}'\xi^\mu, {}'\xi^k) &= 0 \\ ({}'w_\lambda, {}'\xi^k) &= \delta^\lambda_k \\ ({}'w_\lambda, {}'w_\mu) &= 0 \end{aligned}$$

eveneens een stelsel van n.e.v. voorwaarden is opdat (18.5) een C_2-transformatie is.

Gebruik makende van (18.8) en (18.11) kan men eenvoudig door uitschrijven bewijzen dat voor twee willekeurige v_1 en v_2 de <u>beide</u> haaksymbolen (v_1, v_2) en $\{v_1, v_2\}$ invariant zijn voor C_2-transformaties van ξ^k, w_λ.

We werken bijna altijd met de Poissonse haaksymbolen. De haaksymbolen van Lagrange komen minder voor, tengevolge van (18.3) zijn zij echter soms gemakkelijk voor berekeningen.

Naast (F, G) treedt nog een ander haaksymbool op

18.12)

$$(F) = w_\lambda \frac{\partial F}{\partial w_\lambda}$$

Dit symbool is niet invariant voor C_2-transformaties maar wel voor C_3-transformaties van ξ^k, w_λ. Voor de haaksymbolen met betrekking tot ${}'\xi^k, {}'w_\lambda$ schrijven we $(F,G)'$ en $(F)'$, dus

18.13)

$$\begin{aligned} (F,G)' &= (F,G) \text{ als } \xi^k, w_\lambda \to {}'\xi^k, {}'w_\lambda \text{ een } C_2\text{-transf. is} \\ (F)' &= (F) \text{ als } \xi^k, w_\lambda \to {}'\xi^k, {}'w_\lambda \text{ een } C_3\text{-transf. is} \end{aligned}$$

Meer algemeen geldt het volgende:

18.14)

	C_1-transformatie	C_2-transformatie	C_3-transformatie
$w_\lambda d\xi^\lambda$	$\mu\, w_\lambda\, d\xi^\lambda$	$w_\lambda d\xi^\lambda + d\Omega$	$w_\lambda\, d\xi^\lambda$
$(F;G)$	$\frac{1}{\mu}(F,G) - (F)'(G,\frac{1}{\mu}) + (G)'(F,\frac{1}{\mu})$	(F, G)	(F, G)
(F)	$\frac{(F)}{1+(\log\mu)} = (F)(1-(\log\mu)')$	$(F) + (\Omega, F)$	(F)

§ 19. Vectoruitgebreidheden

Het stelsel van 2n-m onafhankelijke vergelijkingen

19.1)

$$F^x(\xi^k, w_\lambda) = 0 \;;\; x = m+1, \ldots, 2n$$

minimaal regulair in $\mathfrak{N}(\overset{\circ}{\xi}{}^k, \overset{\circ}{w}_\lambda)$; $\overset{\circ}{w}_\lambda \neq 0$ stelt een systeem van ∞^m covariante vectoren in X_n voor. Dit heet een $\mathfrak{W}_m$ = m-dimensionale vectoruitgebreidheid. Zijn de vergelijkingen homogeen in w_λ dan heet de $\mathfrak{W}_m$ homogeen. Een homogene $\mathfrak{W}_m$ bevat naast een element ξ^k, w_λ ook alle elementen van de vorm $\xi^k, \sigma w_\lambda$. Uit een homogene $\mathfrak{W}_m$ kan men door op continue wijze in elk punt één element uit te zoeken een niet-homogene $\mathfrak{W}_{m-1}$ maken. Dit niet eenduidig bepaalde proces heet dishomogenisatie. Omgekeerd kan men uit een niet homogene $\mathfrak{W}_{m-1}$ op één en slechts één wijze een homogene $\mathfrak{W}_m$ maken. Dit proces heet homogenisatie. Behalve door de nulvorm (19.1) kan een $\mathfrak{W}_m$ ook gegeven worden in parametervorm

19.2)

$$\text{a)} \quad \xi^k = \xi^k(\eta^\alpha) \qquad\qquad ; \quad \alpha = 1, \ldots, m$$

$$\text{b)} \quad w_\lambda = w_\lambda(\eta^\alpha)$$

minimaal regulair in $\mathfrak{N}(\eta^\alpha_0)$ waarin bij $\overset{\circ}{\eta}{}^\alpha$ de waarden $\overset{\circ}{\xi}{}^k$, $\overset{\circ}{w}_\lambda$ behoren. Is de $\mathfrak{W}_m$ homogeen dan kan men de parameters altijd zo kiezen dat de ξ^k homogeen van de graad 0 en de w_λ homogeen van de graad 1 in η^α zijn.

Is r de w_λ-rang van (19.1) (= de rang van de matrix der afgeleiden naar w_λ) dan kan (1.1) altijd vervangen worden door een stelsel van de vorm

19.3)

$$\text{a)} \quad F_\beta(\xi^k, w_\lambda) = 0 \qquad ; \quad \beta = 1, \ldots, r;\ \omega = r+1, \ldots, 2n-m$$

$$\text{b)} \quad G^\omega(\xi^k) = 0$$

De F_β hebben een rang r t.o. van w_λ en de G^ω een rang 2n-m-r t.o. van ξ^k. Dus is $2n-m-r \leq n$ en dus $r \geq n-m$

(19.3b) stelt een X_t; $t = m-n+r$ voor, het veldgebied der $\mathfrak{W}_m$. Buiten dit gebied zijn er geen elementen van $\mathfrak{W}_m$. t heet de dimensie van $\mathfrak{W}_m$. In elk punt van X_t zijn er $\infty^{m-t} = \infty^{n-r}$ covariante vectoren. Deze vormen in dit punt wat men een $\mathfrak{Y}_{m-t}$ noemt. Dus is een $\mathfrak{W}_m$ een $\mathfrak{Y}_{m-t}$-veld over een X_t. In de parametervorm (19.2) is t de rang van de ξ^k ten opzichte van de η^α omdat dan en alleen dan uit (19.2a) precies n-t vergelijkingen tussen de ξ^k kunnen worden afgeleid. (eliminatie theorema).

Uit de aard der zaak is t geen invariante bij C_3-transformaties.

Uit de F^x in (19.1) kan men de volgende uitdrukkingen vormen in alle nulpunten van (19.1) (d.z. alle waarden ξ^κ, w_λ, die aan (19.1) voldoen):

19.4)

$$\left.\begin{aligned} K^x &\stackrel{def}{=} w_\lambda \frac{\partial F^x}{\partial w_\lambda} = (F^x) \\ K^{xy} &\stackrel{def}{=} (F^x, F^y) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{voor } F^x = 0 \\ &x, y = m+1, \ldots, 2n \end{aligned}$$

Gaat men over tot een equivalent stelsel $F^{x'}=0$ (basistransformatie) dan is (basisstelling)

19.5)

$$(F^{x'}) = C_x^{x'}(F^x) \quad (\text{mod.} F^x)$$
$$(F^{x'}, F^{y'}) = C_x^{x'} C_y^{y'} (F^x, F^y) \quad (\text{mod.} F^x)$$

waarin de $C_x^{x'}$ functies van ξ^κ, w_λ zijn. Aangezien K^x en K^{xy} alleen maar voor elementen der $\mathfrak{M}_m$ gedefinieerd zijn en voor deze $F^x = 0$ volgt dus

19.6)

$$K^{x'} = C_x^{x'} K^x \qquad x, y = m+1, \ldots\ldots, 2n;$$
$$K^{x'y'} = C_x^{x'} C_y^{y'} K^{xy} \qquad x', y' = (m+1)', \ldots\ldots, (2n)',$$

K^{xy} heet de Poissonbivector van de $\mathfrak{M}_m$ en ook van (19.1). $K^x = 0$ wanneer de $\mathfrak{M}_m$ homogeen is. Uit K^x en K^{xy} worden de volgende invarianten voor <u>coördinatentransformaties</u> en <u>basistransformaties</u> afgeleid

19.7)

<u>rotatieklasse</u>	2ρ	:	rang van K^{xy}
<u>klasse</u>	K	:	x-rang van K^x, K^{xy}
<u>gelijkvormigheidsklasse</u>	k	:	het grootste oneven getal $\leq$ K
de <u>index</u>	l	:	de rang van K^x, dus l=1 voor $K^x \neq 0$ en l=1 voor $K^x=0$

Indien m=n en t=n is de $\mathfrak{M}_m$ een gewoon vectorveld in X_n. Dan gaan 2ρ, K en k over in de gelijkvormige invarianten van dit veld en is l=1.

Het gedrag der invarianten bij C-transformaties kan nu gemakkelijk worden afgeleid uit (19.4) en (18.14). Men vindt dan

19.8)

	C_1-transformatie	C_2-transformatie	C_3-transformatie
	$'w_\lambda d'\xi^\lambda = \mu w_\lambda d\xi^\lambda$	$'w_\lambda d'\xi^\lambda = w_\lambda d\xi^\lambda + d\Omega$	$'w_\lambda d'\xi^\lambda = w_\lambda d\xi^\lambda$
K_{xy}	$\frac{1}{\mu}(K^{xy} + 2\mu v^{[x} K^{y]}$ waarin: $v^x \stackrel{def}{=} \lambda(F^x, \frac{1}{\mu})$, $\lambda \stackrel{def}{=} 1 - {'w_\lambda} \frac{\partial \log \mu}{\partial' w_\lambda}$	K^{xy}	K^{xy}
K^x	λK^x	$K^x + (\Omega, K^x)$	K^x

en hieruit volgt:

	C_1-transformatie		C_2-transformatie		C_3-transformatie
	K even	K oneven	K even	K oneven	
K	K of K-1	K of K+1	K of K+1	K of K-1	K
2ρ	2ρ of $2\rho-2$	2ρ of $2\rho+2$	2ρ	2ρ	2ρ
k	k	k	k of k+2	k of k-2	k
1	1	1	1 of 0	1 of 0	1
= 0	0	0	0 of 1	0 of 1	0

We kunnen nu ook arithmetische invarianten gaan afleiden uitgaande van de parametervergelijkingen (19.2). In X_m der η^b definiëren we het covariante vectorveld

19.10)
$$\mathfrak{U}_b \overset{\text{def}}{=} w_\lambda \partial_b \xi^\lambda \; ; \; b = 1, \dots, m$$

Dan is

19.11)
$$w_\lambda d\xi^\lambda = w_\lambda (\partial_b \xi^\lambda) d\eta^b = \mathfrak{U}_b d\eta^b$$

De rotatie van het veld $\mathfrak{U}_b$ is

19.12)
$$\mathfrak{U}_{cb} \overset{\text{def}}{=} 2\partial_{[c}\mathfrak{U}_{b]} = 2(\partial_{[c} w_{|\lambda|})\partial_{b]}\xi^\lambda = \{\eta^c, \eta^b\}$$

Uit het vectorveld $\mathfrak{U}_b$ vormen we de gewone invarianten en duiden deze aan met $\bar{K}$, $2\bar{\rho}$ en $\bar{k}$. Men kan dan bewijzen dat

19.13)
$$\bar{K} = K + 2(m-n)$$
$$2\bar{\rho} = 2\rho + 2(m-n)$$
$$\bar{k} = k + 2(m-n)$$

en dit zowel voor $m \geq n$ als voor $m<n$. De betekenis van het nul wor- den van K^x, K^{xy}, $\mathfrak{U}_b$ of $\mathfrak{U}_{cb}$ is de volgende

19.14)

$K^x = 0$ in het definitiegebied: de $\mathfrak{M}_m$ is homogeen (...

$\mathfrak{U}_b = 0$ in de X_m der η^b en dus $\mathfrak{U}_{cb} = 0$: de $\mathfrak{M}_m$ is een $N_{...}$

$K^{xy} = 0$: $(F^x, F^y) = 0$ ingevolge ...

$\mathfrak{U}_{cb} = 0$: $\{\eta^c, \eta^b\} = 0$ ingevolge (19...

Uit (19.13) volgt voor $m<n$ dat $K \geqq 2(n-m)$ is daar K niet nega- tief kan zijn. Is dus het systeem (19.1) in involutie, d.w.z. K=1 of K=0 dan is altijd $m \geq n$.

Voor $m > n$ volgt dat $\bar{K} \geqq 2(m-n)$ omdat K niet negatief zijn kan. Is dus de $\mathfrak{V}_m$ een N_m, d.w.z. is $\bar{K} = 0$, dan is altijd $m \leqq n$.

§ 20. Integrabiliteitstheorie der vectoruitgebreidheden.

Een $\mathfrak{V}_{m'}$, $m' \leqq n$ waarvan alle elementen behoren tot een $\mathfrak{V}_m$ heet een integraal-$\mathfrak{V}_m$ van deze $\mathfrak{V}_{m'}$.

Een $\mathfrak{V}_m$ heet volledig integrabel voor integraal $\mathfrak{V}_{m'}$'s van een klasse K' en een dimensie t', immersens voor elk element der $\mathfrak{V}_m$ tenminste één $\mathfrak{V}_{m'}$ van die klasse en die dimensie bestaat, die dat element bevat.

Een integraal $\mathfrak{V}_{m'}$ waarvoor $m' = n$ en $t' = n$ is en $K' = 1$ is een gradientveld $\partial_\lambda p$, dat aan de ferentiaalvergelijkingen

20.1) $$F^{\varkappa}(\xi^{\kappa}, \partial_{\lambda} p) = 0 \; ; \; \varkappa = m+1, \ldots\ldots, 2n \qquad 2n - m < n$$

voldoet. Het vinden van een oplossing van dit stelsel staat dus gelijk met de bepaling van een integraal-$\mathfrak{N}_n$ van de klasse 1 en de dimensie n. Het meer algemene type oplossing dat door Lie werd beschouwd komt overeen met een integraal $\mathfrak{N}_n$ van de klasse 1 en een dimensie $< n$.

We gaan nu de vragen stellen:

1. Voor welke waarden van m', K' en t' is de $\mathfrak{N}_m$ volledig integrabel?
2. Hoe vindt men de integraal-$\mathfrak{N}_{m'}$'s bij volledige integrabiliteit?
3. Bestaan er integraal - $\mathfrak{N}_{m'}$'s van de klasse K' en dimensie t' ook wanneer er geen volledige integrabiliteit is?
4. Hoe bepaalt men deze $\mathfrak{N}_{m'}$'s?

<u>Vraag 1</u>. We laten eerst t' vrij en bepalen de integraal - $\mathfrak{N}_{m'}$'s van een gegeven klasse K'. Men moet dus bij (19.1) juist $m-m'$ vergelijkingen toevoegen. Deze bepalen in de X_m der parameters η^a een $X_{m'}$ en in deze $X_{m'}$ bepaalt $\mathfrak{N}_{m'}$ een vectorveld dat de doorsnede is van het veld $\mathfrak{U}_b$ met de $X_{m'}$. Dit veld moet de klasse $\bar{K}' = K' + 2(m'-n)$ hebben. De klasse van $\mathfrak{U}_b$ was $\bar{K} = K + 2(m-n)$. Dus is

20.2) $$\bar{K}' = \bar{K} - (K - K' + 2m - 2m')$$

en het komt er dus op neer dat in de X_m een $X_{m'}$ moet worden geconstrueerd die een klasseverlaging $K - K' + 2(m-m')$ geeft. Anders gezegd er moeten $m-m'$ functies der η^a worden gevonden die een index $K - K' + 2(m-m')$ ten opzichte van het veld $\mathfrak{U}_b$ hebben. Nu herinneren we aan de voorwaarde (8.1). Deze vertalen we:

20.3) $$\begin{aligned} n &\longrightarrow m \\ K &\longrightarrow \bar{K} = K + 2(m-n) \\ \ell &\longrightarrow \bar{K} - \bar{K}' = K - K' + 2(m-m') \end{aligned}$$

dan krijgen we het <u>integrabiliteitstheorema der $\mathfrak{N}_m$</u>:

<u>Een $\mathfrak{N}_m$ van de klasse K is dan en alleen dan volledig integrabel voor integraal - $\mathfrak{N}_{m'}$'s van de klasse K', indien</u>

20.3) $$K \leq K' \leq K + 2(m-m')$$
$$2n - 2m' \leq K' \leq 2n - m'$$

Dat de voorwaarden noodzakelijk zijn is triviaal (dit na te gaan!). Wat nu de integraal $\mathfrak{N}_{m'}$'s betreft voor het niet integrabele geval, het is duidelijk dat altijd

$$K' > K + 2(m-m')$$

want een doorsnijding met $\mathfrak{U}_b$ kan wel klasseverlaging maar geen klasseverhoging geven. Men lette er op dat de klassen in X_m (de gestreep-

e) verlaagd worden en die welke uit de nulvergelijkingen afgeleid zijn (de ongestreepte) <u>dus</u> verhoogd worden.

Gaat men nu ook de t' in beschouwing nemen dan krijgt men een aantal theorema's. Het belangrijkste hiervan luidt:

<u>Iedere $\mathfrak{M}_m$ van de klasse</u> K <u>is volledig integrabel voor integraal - $\mathfrak{M}'_{m'}$s van de klasse</u> K' <u>en dezelfde dimensie als $\mathfrak{M}_m$ indien de integrabiliteitsvoorwaarden</u> (20.3) <u>gelden en indien bovendien</u> $n \leq m' < m$ <u>is en voor een homogene $\mathfrak{M}_m$ niet tegelijk</u> $K' = K$ en $m' = n$.

2. De bepaling der $\mathfrak{M}_{m'}$'s in het integrabelgeval. Men heeft in de X_m der η^a $(m-m')$ functies te bepalen met index $(\bar K - K') + 2(m-m')$. Dit kost voor $K' - K$ even volgens §7 de operaties

20.4) $$O_{\bar K-1},\ O_{\bar K-3},\ \dots\ ,\ O_{\bar K-K+K'-2(m-m')+1}$$
of anders geschreven

20.5) $$O_{K+2(m-n)-1},\ O_{K+2(m-n)-3},\ \dots,\ O_{K'+2(m'-n)+1}$$
Voor $K' - K$ oneven kost het wegens § 7 de operaties

20.6) $$O_{K+2(m-n)-1},\ O_{K+2(m-n)-3},\ \dots,\ O_{K'+2(m'-n)+2}$$
en een operatie.

20.7) $$\begin{array}{lll} O_{K'+2(m'-n)+1} & \text{voor} & K'+2(m'-n) > 1 \\ O_1 & \text{voor} \quad " & = 1 \\ O_0 & \text{voor} \quad " & = 0 \end{array}$$

Tot nu werkten we in de X_m. Men kan dit nu terug vertalen naar de X_n. In het geval dat $(\bar K - K') + 2(m-m') = 1$ is hebben we een functie met index 1 te bepalen. In alle andere gevallen beginnen we het proces met de bepaling van een functie van index 2.

Beschouwen we hier nu alleen die gevallen en zij $f(\eta^a)$ die functie. Dan stelt

20.8) $$f(\eta^a) = \text{constant}$$

een normaalsysteem van X_{m-1}'s in X_m voor wier doorsnede met het veld $\mathfrak{U}_b$ de klasse $\bar K - 2$ heeft. Lossen we nu de η^a op uit (19.2) en substitueren we deze waarden in (20.8) dan ontstaat een vergelijking

20.9) $$F^0(\xi^k, w_\lambda) = 0$$

die tezamen met (19.1) een $\mathfrak{M}_{m-1}$ voorstelt van de klasse K. Men lette er op dat de klasseverlaging in X_m en de klasseverhoging in X_n tengevolge van één functie $f(\eta^a)$ resp. $F^0(\xi^k, w_\lambda)$ als volgt gecoördineerd zijn:

20.10) $$\bar K \to \begin{array}{l}\bar K - 2\\ \bar K - 1\\ \bar K\end{array} \qquad K \to \begin{array}{l} K\\ K+1\\ K+2\end{array}$$

F° kan nu ook anders worden bepaald. Aangezien $\mathfrak{M}_{m-1}$ de klasse K moet hebben en we voor K oneven weten dat

$$20.11)\quad \begin{array}{l} (F^{[x_1}, F^{x_2}) \ldots (F^{x_{K-2}}, F^{x_{K-1}})(F^{x_K]}) \not\equiv 0 \pmod{F^x} \\ (F^{[x_1}, F^{x_2}) \ldots (F^{x_K}, F^{x_{K+1}]}) \equiv 0 \pmod{F^x} \end{array}$$

moet F° voor K oneven een oplossing zijn van de congruentie

$$20.12)\quad (F^{[x_1}, F^{x_2}) \ldots (F^{x_K}, F^{\circ]}) \equiv 0 \pmod{F^x, F^\circ}$$

Voor K even weten we al dat

$$20.13)\quad \left.\begin{array}{l} (F^{[x_1}, F^{x_2}) \ldots (F^{x_{K-1}}, F^{x_K}) \not\equiv 0 \\ (F^{x_1}, F^{x_2}) \ldots (F^{x_{K-1}}, F^{x_K})(F^{x_{K+1}]}) \not\equiv 0 \\ (F^{[x_1}, F^{x_2}) \ldots (F^{x_{K+1}}, F^{x_{K+2}}) \not\equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{F^x}$$

en dus is F° een oplossing der congruenties

$$20.14)\quad \left.\begin{array}{l} (F^{[x_1}, F^{x_2}) \ldots (F^{x_{K-1}}, F^{x_K})(F^{\circ]}) \equiv 0 \\ (F^{[x_1}, F^{x_2}) \ldots (F^{x_{K+1}}, F^\circ) \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{F^x, F^\circ}$$

Het is onaangenaam dat F° door congruenties wordt vastgelegd terwijl f door vergelijkingen bepaald werd. Het is echter altijd mogelijk de vergelijkingen van de $\mathfrak{M}_m$ zo te schrijven dat er voor F° vergelijkingen in plaats van congruenties komen.

§21. Toepassing op de oplossing van stelsels differentiaalvergelijkingen.

Beschouw het stelsel

$$21.1)\quad F^x(\xi^\kappa, \partial_\lambda p) = 0 \; ; m \geq n$$

Neem aan dat dit stelsel in involutie is, d.w.z. alle haaksymbolen (F^x, F^y) zijn nul. Dan stelt

$$21.2)\quad F^x(\xi^\kappa, w_\lambda) = 0$$

een $\mathfrak{M}_m$ in X_n voor van de klasse 0 als de F^x alle homogeen in w_λ zijn en van de klasse 1 als er tenminste één niet homogeen is. Integreren van (21.1) wil zeggen een integraal-$\mathfrak{M}_n$ van de klasse 1 te bepalen, want dit is een gradiëntveld voldoende aan (21.1). In het niet homogene geval is $K=1$ en $K'=1$ en $m'=n$. Voor het niet homogene geval zijn dus de operaties

$$21.3)\quad O_{2(m-n)},\ O_{2(m-n-1)}, \ldots, O_2$$

en voor het homogene geval

$$21.4)\quad O_{2(m-n)-1},\ O_{2(m-n-1)-1}, \ldots, O_1$$

Deze methode is in de literatuur bekend als de tweede methode van Jacobi.

Omdat $K'=1$ is, is de $\mathfrak{M}_n$ een N_n. Het kan zijn dat de dimensie an $\mathfrak{M}_m$ gelijk n is en men kan dit altijd bereiken dan is N_n een gewoon gradiëntveld $\partial_\lambda p$ en p kan bepaald worden door een operatie O_0. Bij deze laatste integratie treedt nog één integratieconstante op. Zijn $F^m, \ldots, F^{n+1}$ de functies die achtereenvolgens (aan) de F^x worden toegevoegd dan is de N_n gegeven door de vergelijkingen

$$F^x = 0\ ;\ F^{n+1} = c^{n+1}\ ;\ \ldots\ ;\ F^m = c^m \tag{21.5}$$

en hier treden dus $m-n$ integratieconstanten op. Totaal zitten er dus in p juist $m-n+1$ integratieconstanten. Men noemt dat een volledige oplossing.

Gaat men niet verder dan $\partial_\lambda p$ dan stelt een volledige oplossing een stelsel van ∞^{m-n} $\mathfrak{N}_n$'s d.w.z. ∞^{m-n} stellen van ∞^n vectorelementen, bij elkaar constituerende de ∞^n vectorelementen van de gegeven $\mathfrak{M}_m$. Laten we nu de conditie $t' = n$ vallen dan krijgen we toch ∞^{m-n} N_n's maar elke N_n is een $\mathfrak{H}^{n-t'}$-veld over een $X_{t'}$. Totaal hebben we weer de ∞^m vectorelementen der $\mathfrak{M}_m$. Men noemt nu zulk een stelsel van ∞^{m-n} N_n's, elk van willekeurige dimensie een volledige oplossing in de zin van Lie. Belangrijk is dat zulk een volledige oplossing invariant is bij C_3 - transformaties. Dat is een volledige oplossing in engere zin niet, omdat de dimensie n niet invariant blijft.

Is $K = 1$ (niet homogeen geval) dan moet de eerst ingevoerde functie voldoen aan

$$(F^x, F) = 0 \tag{21.6}$$

is F^m zulk een oplossing dan gaat men door en bepaalt een oplossing van

$$(F^x, F) = 0\ ;\ (F^m, F) = 0 \tag{21.7}$$

enz. Maar nu zou het kunnen zijn dat men van (21.6) toevallig meer dan één oplossing heeft. Volgens de normale gang van de tweede methode van Jacobi hebben we daar niets aan, we kiezen er eenvoudig een uit en laten de andere lopen. Lie heeft nu echter een methode ontwikkeld (de methode der functiegroepen) om van zulke meerdere oplossingen profijt te trekken en het aantal en de orde der benodigde operaties te verlagen.

§ 22. Bepaling der integraal - $\mathfrak{M}_m'$s voor $K' < K$.

Dit is de derde vraag opgeworpen in § 20. Aan de vergelijkingen

$$F^x(\xi^\kappa, w_\lambda) = 0\ ;\ x = m+1, \ldots, 2n \tag{22.1}$$

voegen we nu de conditie toe

$$K^{[x_1 x_2} \ldots K^{x_{K'} x_{K'+1}]} = 0 \quad \text{voor } K' \text{ oneven}$$

$$\left.\begin{aligned} K^{[x_1 x_2} \ldots K^{x_{K'-1} x_{K'}} K^{x_{K'+1}]} &= 0 \\ K^{[x_1 x_2} \ldots K^{x_{K'+1} x_{K'+2}]} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{voor } K' \text{ even} \tag{22.2}$$

Zij het aantal onafhankelijke vergelijkingen in (22.1,2) gelijk $2n-m^*$, $m^* < m$. Dan stellen (22.1,2) een $\mathfrak{M}_{m^*}$ voor die integraal-$\mathfrak{M}_{m^*}$ van $\mathfrak{M}_m$ is. Iedere integraal-$\mathfrak{M}_{m'}$ van de klasse K' van de $\mathfrak{M}_m$ is ook integraal-$\mathfrak{M}_{m'}$ van $\mathfrak{M}_{m^*}$ en omgekeerd omdat $\mathfrak{M}_{m^*}$ in $\mathfrak{M}_m$ vervat is. Is nu

22.3)
$$K^* \leq K' \leq K^* + 2(m^* - m') \qquad m' \leq m^*$$
$$2n - 2m' \leq K' \leq 2n - m'$$

dan is $\mathfrak{M}_{m^*}$ volledig integrabel voor integraal $\mathfrak{M}_{m'}$'s van de klasse K'. Dan bepaalt men de integraal-$\mathfrak{M}_{m'}$'s der $\mathfrak{M}_{m^*}$ en het probleem is opgelost. Is $K' > K^* + 2(m^*-m')$ of is $m' > m^*$ dan heeft $\mathfrak{M}_{m^*}$ en dus ook $\mathfrak{M}_m$ geen integraal-$\mathfrak{M}_{m'}$'s van de klasse K'. In de resterende gevallen gaat men met $\mathfrak{M}_{m^*}$ op dezelfde wijze door en vindt ten slotte na een eindig aantal stappen een vectoruitgebreidheid die dezelfde integraal $\mathfrak{M}_{m'}$'s van de klasse K' bezit als $\mathfrak{M}_m$ en waarvan vaststaat òf dat zij voor deze $\mathfrak{M}_{m'}$'s volledig integrabel is òf dat zij dergelijke integraal $\mathfrak{M}_{m'}$'s niet bezit.

Voor $K > 1$ en $K' = 1$, $m' = n$ is dit de welbekende methode om een systeem van $2n-m$ partiële differentiaalvergelijkingen

22.4)
$$F^{x}(\xi^{\kappa}, w_{\lambda}) = 0 \,;\; w_{\lambda} = \partial_{\lambda} p \,;\; x = m+1, \ldots, 2n.$$

over te voeren in een systeem in involutie. Men voegt toe de vergelijkingen

22.5)
$$(F^{x}, F^{y}) = 0 \,;\; x, y = m+1, \ldots, 2n$$

Als hierdoor een systeem in involutie met $2n - m^* < n$ verkregen is stopt men. Is weliswaar nog $2n - m^* < n$ maar het systeem nog met in involutie dan gaat men door. Tenslotte ontstaat een systeem in involutie met een aantal vergelijkingen $< n$ of een systeem van n of meer vergelijkingen dat geen oplossing toelaat.