STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 12c

Colloquium asymptotische ontwikkelingen 1947-1950,3c;

The asymptotic developments of functions defined bij MacLaurin-series.

J.H.B.Kemperman.

1949

De inhoud van het nu volgende wordt gedekt door de titel van het boek:
W.B. Ford: The asymptotic developments of functions defined by MacLaurinseries, 141 blz., 1936,
welk werk hier op de voet zal worden gevolgd. Enkele resultaten van Ford werden gegeneraliseerd.

Theorema 1. Zij G het enkelvoudig samenhangende gebied, dat ontstaat door het complexe w-vlak open te snijden langs een eindig aantal rechtlijnige half-oneindige, elkaar niet kruisende sneden. Neem aan, dat geen geheel getal op een snede ligt. Zij $g(w)=g(x+iy)$ in G een éénduidig reguliere functie zo, dat de machtreeks

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} g(n) z^n = f(z)$$

een positieve convergentiestraal heeft. Zij $0 < \varepsilon < \pi$ en laat voldaan zijn voor $|w| = |x+iy| > R > 0$ *) aan

$$(2) \qquad 1. \; |g(-x+iy)| < C(x) \frac{e^{\varepsilon|y|}}{1+y^2} \qquad \text{voor } x > 0 \quad (C(x) > 0)$$

$$(3) \qquad 2. \; |g(x+iy)| \leq h(x) \cdot g(y)$$

waarin h(x) en g(y) positieve functies voorstellen, integreerbaar over elk eindig interval, en zo dat

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(y)}{\cos h\pi y} \, dy$$

een convergente integraal voorstelt, en positieve constanten A en B bestaan met

$$(5) \qquad h(x) \leq AB^x \qquad \text{voor } x > 0$$

Beschouw een snede, en zij C_m een lusvormige positief omlopen weg langs de snede. Indien de snede geen vertakkingspunten en slechts één pool bevat, laat dan C_m een klein cirkeltje om die pool voorstellen.
Neem aan, dat

$$I_m = \frac{1}{2i} \int_{C_m} \frac{g(w)\,(-z)^w}{\sin \pi w} \, dw$$

*) R denken we zo groot gekozen, dat alle punten van g(w) binnen de cirkel $|w| = R$ vallen.

een convergente integraal is, die een reguliere functie van z voorstelt*) voor elke waarde van z in de sector S in het z-vlak, bepaald door $\varepsilon \leq \arg z \leq 2\pi - \varepsilon$.

In het geval dat enige C_m in het tweede of derde kwadrant naar oneindig gaat, eisen we het bestaan van twee positieve constanten A_1 en B_1 zo, dat voor de in (2) voorkomende grootheid $C(x)$ geldt:

$$(6) \qquad C(x) < A_1 B_1^{\,x} \qquad (x > 0)$$

Onder de gestelde voorwaarden is f(z) in S een reguliere functie, die aldaar asymptotisch ontwikkelbaar is volgens

$$(7) \qquad f(z) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(-n)}{z^n} - \sum I_m$$

Steeds als aan (6) voldaan is, is de in het rechterlid van (7) voorkomende reeks voor $|z| > B_1$ zelfs convergent en geldt formule (7) ook met het gelijkteken.

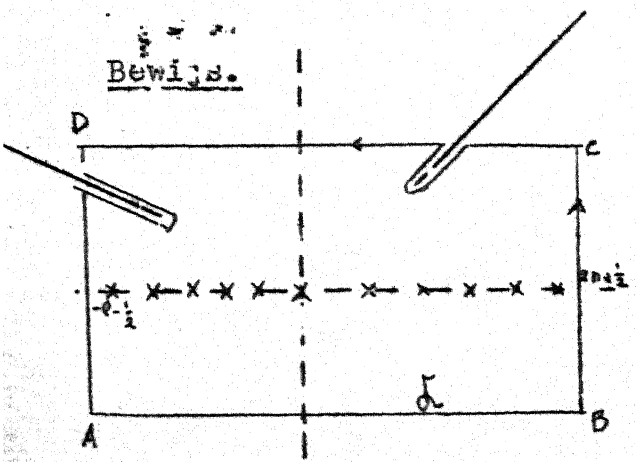
Opm.1. $(-z)^w$ heeft de volgende betekenis (zij $z = \rho e^{i\phi}$ met $0 \leq \phi < 2\pi$)

$$(8) \qquad (-z)^w = e^{w \log(-z)} = e^{w\left[\log\rho + i(\phi - \pi)\right]}$$

Opm.2. Laten we toe, dat een negatief geheel getal $w = -m$ een pool of vertakkingspunt van g(w) is, d.w.z. dat een snede van $w = -m$ uitgaat, dan blijft formule (7) juist, mits we in de eerste som van het rechterlid de term $g(-m)z^{-m}$ weglaten.

Opm.3. Wegens (3) en (5) convergeert de in (1) voorkomende reeks voor $|z| < \frac{1}{B}$. Een positieve convergentiestraal van de machtreeks (1) behoeft dus niet expleciet te worden geëist.

Bewijs.



Zij $\mathcal{K}$ een in positieve zin omlopen assenparalelle rechthoek geheel gelegen buiten de cirkel $|w| = R$ en gevormd door de lijnen
$w = -l - 1/2 + iy \quad w = 2n + 1/2 + iy \quad w = x \pm ip$
waarin $p > 0$, l en n positief geheel. Wanneer sneden zijn aangebracht, dan dient $\mathcal{K}$ te worden gedeformeerd zoals aangegeven in de figuur. Uit de residu-

*) We eisen de convergentie en regulariteit evenwel alleen als voor de richting y van C_m geldt $-\pi/2 \leq y \leq +\pi/2$. Als daarentegen $\pi/2 < y < 3\pi/2$, dan volgt voor $|z| > B_1$ (v.g.l.(6)) en z in S de convergentie en regulariteit uit de andere voorwaarden, doch dit is niet van belang in het bewijs.

rekening volgt nu

$$(9)\quad \frac{1}{2i}\int_{\lambda}\frac{g(w)(-z)^w}{\sin w}\,dw=\sum_{n'=-l}^{2n}g(n')z^{n'}$$

waarin we $(-z)^w$ volgens (8) gedefinieerd denken. We zullen nu de integraal in (9) bestuderen, wat betreft de bijdragen van de vier rechthoekszijden van λ tot deze integraal. Vooreerst stellen we langs het rechte deel CD $w=x+ip$ en dus is door

$\sin\pi w = \sin\pi(x+ip) = (\sin\pi x\coth\pi p + i\cos\pi x)\sinh\pi p$

De bijdrage D_p van CD tot de integraal wordt

$$D_p = \frac{(-z)^{ip}}{2i\sinh\pi p}\int_{2n+\frac{1}{2}}^{-l-\frac{1}{2}}\frac{g(x+ip)\,(-z)^x\,dx}{\sin\pi x\coth\pi p + i\cos\pi x}$$

Nu is $\coth\pi p > 1$, dus

$|\sin\pi x\coth\pi p + i\cos\pi x| = (\sin^2\pi x\coth^2\pi p + \cos^2\pi x)^{1/2} > 1$

Hieruit volgt wegens (2) voor z reëel en negatief

$$|D_p| < \frac{g(p)}{\sinh\pi p}\int_{-l-\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} h(x)\,(-z)^x\,dx$$

Uit de convergentie van de integraal (4) volgt $g(p) = o(e^{\pi p})$ als $p\to+\infty$. Dus $\lim D_{+p} = 0$. Analoog bewijzen we voor de bijdrage D_{-p} van AB, dat $\lim D_{-p} = 0$. Zij in het volgende $p = +\infty$, en beschouw nu de bijdrage D_n van het rechte deel van BC tot de integraal in (9). Hier stellen we $w=2n+1/2 + iy$. Wegens $\sin\pi(2n+1/2+iy)=\cosh\pi y$ en $dw=idy$ vinden we

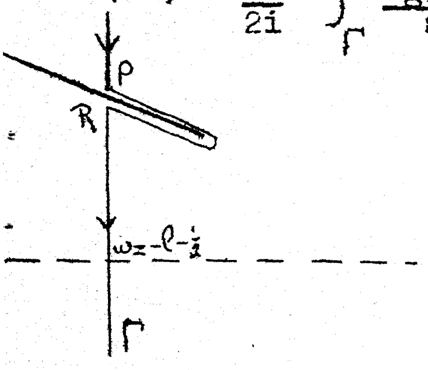
$$(10)\quad D_n = \frac{(-z)^{2n+1/2}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(2n+1/2+iy)\,(-z)^{iy}}{\cosh\pi y}\,dy$$

In verband met (3) en (5) geldt voor $2n > N$ en z reëel negatief

$$(11)\quad |D_n| \leq \frac{A}{2}(-Bz)^{2n+1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(y)}{\cosh\pi y}\,dy$$

We hebben aangenomen, dat de laatste integraal convergeert (en dus ook de integraal (9); het heeft blijkbaar zin D_n te beschouwen). Beperken we ons tot reële waarden van z met $0\leq -z < \frac{1}{B}$, dan volgt uit (11), dat $\lim D_n=0$. Als in (9) het contour λ gewijzigd wordt door de limietovergang $p\to\infty$ en $n\to\infty$ dan resteren van de integratieweg $A\to B\to C\to D$ alleen de negatief omlopen lussen langs de halfoneindige rechtlijnige sneden in een richting met argument $-1/2\pi\leq\varphi\leq+\pi/2$ (zij l zo groot gekozen, dat de betreffende sneden geheel rechts van AD vallen). De overeenkomstige lusintegralen zijn convergent verondersteld. Dus voor $p\to\infty$ en $n\to\infty$ nadert het linkerlid van (9) tot een eindige limiet en convergeert (voor z reëel met $0 \leqq -z < \frac{1}{B}$) de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} g(n) z^n$ (v.g.l. opm.3 bij Theorema 1). Uit (9) volgt nu

$$(12) \qquad \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \frac{g(w)(-z)^w}{\sin w}\, dw = \sum_{-\ell}^{-1} g(n) z^n + \sum{}' I_m + f(z)$$



waarin Γ nevenstaande integratieweg voorstelt (en wel $w = -l-\frac{1}{2}+iy$, $-\infty < y < +\infty$, met eventuele deformatie wegens sneden met richting $\pi/2 < \psi < 3\pi/2$) en de laatste som genomen wordt over de sneden met richting $-\pi/2 \leqq \psi \leqq \pi/2$.
We beweren, dat de integraal in het linkerlid van (12) voor z in S gelijkmatig convergeert. Immers wegens

$$\sin \pi(-l-\tfrac{1}{2}+iy) = (-1)^{l+1} \cosh \pi y$$

geldt

$$K = \frac{1}{2i}\left(\int_{\infty}^{\rho} + \int_{R}^{\infty}\right) \frac{g(w)(-z)^w}{\sin \pi w}\, dw = \frac{(-z)^{-l-1/2}}{2} \cdot (-1)^l \left(\int_{-\infty}^{R} + \int_{\rho}^{\infty}\right) \frac{g(-l-1/2+iy)\ (-z)^{iy}}{\cosh\ y}\, dy$$

en wegens (2) en

$$|(-z)^{iy}| = |e^{iy \log(-z)}| = |e^{iy(\log \rho + i(\phi-\pi))}| = e^{y(\pi-\phi)}$$

volgt nu

$$K \leqq \frac{C(\ell+1/2)}{2|z|^{l+1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\varepsilon|y|}\ e^{(\pi-\phi)y}}{\cosh \pi y} \frac{dy}{1+y^2}$$

Voor z in S geldt $-\varepsilon \leqq \pi - \phi \leqq \varepsilon$ en wegens $|\cosh \pi y|\ \frac{e^{\pi|y|}}{2}$
vinden we

$$(13) \qquad K \leqq \frac{C\ (\ell+1/2)}{|z|^{l+1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi C\ (\ell+1/2)}{|z|^{l+1/2}}$$

Tevens volgt uit deze afschattingen de gelijkmatige convergentie van de integraal in formule (12), en dus stelt deze voor z in S een reguliere functie voor. Ook $\sum{}' I_m$ is aldaar een reguliere functie (v.g.l. Theorema). Voor z reëel met $0 \leqq -z < \frac{1}{B}$ geldt (12), en we concluderen nu, dat f(z) in de hele sector S een reguliere functie voorstelt en wel zo, dat formule (12) geldt.

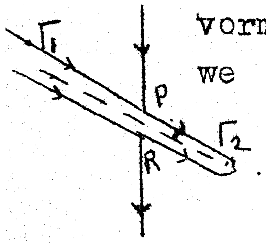
a. Indien geen sneden bestaan, die in het tweede of derde kwadrant naar oneindig gaan, dan volgt uit (13) direct de te bewijzen asymptotische ontwikkeling (7).
Tevens geeft (13) een afschatting van de restterm.

Als constanten A_1 en B_1 bestaan, zo dat

(14) $\quad C(l+1/2) < A_1 B_1^{\,l+1/2}$

dan volgt uit (13), dat voor $|z| > B_1$ en voor $l \to +\infty$ de integraal in (12) tot nul convergeert. Dus convergeert vooreerst de reeks $\sum_{-\infty} g(n) z^n$ en gaat verder formule (7) in een gelijkheid over.

b. Rest ons nog het geval, dat er sneden zijn in een richting ψ met $\pi/2 < \psi < 3.\pi/2$ (een veel voorkomend geval). Zij C_m de lusvormige weg bij zo'n snede. In het linkerlid van (12) schrijven we



(15) $$\int_{\Gamma} = \left(\int_{\infty}^{\rho} + \int_{R}^{-\infty} \right) + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} - \int_{\Gamma_1}$$

Hierin is $\Gamma_1 + \Gamma_2 = -C_m$. Om van (12) tot (7) te komen behoeven we wegens (13) alleen aan te tonen, dat

(16) $$K_1 = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_1} \frac{g(w)\,(-z)^w}{\sin \pi w}\, dw = o(z^{-})$$

We schatten de integrand in (16). Vooreerst is

$$|(-z)^w| = |e^{(x+iy)(\log \rho + i(\phi - \pi))}| = \rho^x \, e^{(\pi - \phi) y}$$

en in verband met $-\pi + \varepsilon \le \pi - \phi \le \pi - \varepsilon$ volgt hieruit

$$|(-z^w)| \le \rho^x \, e^{(\pi - \varepsilon)|y|}$$

als $w = x + iy$. De rechtlijnige snede bij Γ_1 mag niet met de negatieve reële as samenvallen (anders bevat deze snede gehele waarden $w = -n$). Dus voor l voldoende groot bestaat $\delta > 0$ zo dat langs Γ_1 geldt $|y| > \delta$. Dan volgt voor w op Γ_1

$$|\sin \pi w| = |\sin \pi x \cosh \pi y + i \cos \pi x \sinh \pi y| \geqq \sinh \pi |y| \geqq \lambda e^{\pi |y|}$$

waarin $\lambda = \dfrac{1 - e^{-2\pi\delta}}{2}$ gekozen kan worden. Wegens (2) wordt de integrand in (16) nu gemajoreerd door

$$\frac{C(-x) e^{\varepsilon |y|}}{1+y^2} \cdot \frac{\rho^x e^{(\pi - \varepsilon)|y|}}{\lambda \; e^{\pi |y|}} \le \frac{C(-x)}{\lambda} \rho^x \qquad (x < 0)$$

Bij aanwezigheid van een snede met richting ψ waarvoor $\pi/2 < \psi < 3.\pi/2$ geldt (6). Voor het linkerlid K_1 van (16) volgt nu (zij $|z| = \rho > B_1$)

(17) $$K_1 \leqq \frac{2}{2} \frac{A}{\lambda} \int_{l+\frac{1}{2}}^{\infty} B_1^x \rho^{-x} \cdot \frac{dx}{\cos(\pi - \psi)} =$$

$$= \frac{A_1}{\lambda \cos(\pi - \psi)} \left(\frac{B_1}{\rho} \right)^{l+1/2} \frac{1}{\log \dfrac{\rho}{B_1}}$$

waarmee formule (16) bewezen is.

Wegens (13) en)17) naderen voor $\ell \to +\infty$ en $|z| > B_1$ de eerste en derde term in het rechterlid van (15) tot nul en het linkerlid dus tot

$$\frac{1}{2i} \int_{C_m} \frac{g(w)\ (-z)^w}{\sin \pi w}\, dw$$

als C_m de omkering van $\Gamma_1 + \Gamma_2$ voorstelt. Dus limietovergang $\ell \to \infty$ in formule (12) leert, dat de rij $\sum g(n) z^n$ een convergente rij is voor $|z| > B_1$ en dat formule (7) met het gelijkteken geschreven mag worden (weer voor $|z| > B_1$).

Q.E.D.

Enkele opmerkingen.

1. De bewering van opm.2 bij Theorema 1 wordt geheel als boven bewezen. De enigste wijziging is deze, dat in formule (9) de term $g(-m)z^{-m}$ wordt weggelaten.

2. In de ongelijkheid (2) mag men natuurlijk $\frac{1}{1+y^2}$ vervangen door door elke functie $X(y) \geq 0$, waarvoor de integraal $\int_{-\infty}^{+\infty} X(y)\,dy$ convergeert.

3. Vaak bevat een snede geen vertakkingspunt en slechts één pool a . De corresponderende term $\mathfrak{J}_m$ in (7) is dan het residu voor $w = a$ van $\frac{\pi\, g(w)\ (-z)^w}{\sin \pi w}$

4. Om uit (7) een asymptotische ontwikkeling voor f(z) af te leiden, moeten we een methode ontwikkelen om ook de lusintegralen I_m asymptotisch te ontwikkelen. Deze methode zal in de volgende syllabus worden beschreven.

5. Zij g(w) een functie, die voor $\varepsilon > 0$ en willekeurig klein aan alle voorwaarden van theorema voldoet behoudens de ongelijkheden. Als nu positieve constanten B', λ en R te vinden zijn, zo dat

(18) $\quad |g(w)| < B\ |(w)|^{\lambda} \quad$ voor $|w| > R$

dan voldoet g (w) automatisch aan alle in Theoréma 1 geëiste ongelijkheden. Immers

$$|g(w)| < B.(x^2+y^2)^{1/2\lambda} < B\,(x^2+1)^{1/2\lambda}\,(y^2+1)^{1/2\lambda} \qquad w \quad R$$

We vinden zelfs, dat voor $|z| > 1$ *)

(19) $\quad f(z) = - \sum_{1}^{\infty} \frac{g(-n)}{z^n} - \sum I_m$

*) Theorema 1 leert deze gelijkheid alleen voor waarden van z die niet op de positief reële as liggen. Analytische voorstelling leert de juistheid van (19) op de positief reële as (mits I_m daar regulier is).

Theorema 1 is dus zonder meer direct toepasbaar op functies als

$$g(w) = \frac{1}{(\omega+\theta)^{\beta}}$$

en verder op alle rationale functies $g(w)$. In het laatste geval worden de termen I_m in (19) eenvoudig te berekenen residuen. Bijvoorbeeld heeft de functie $g(w) = w^2$ geen polen en dus volgt dat de voor $|z| < 1$ gedefinieerde analytische functie

$$(20) \qquad f(z) = \sum_{0}^{\infty} n^2 z^n$$

voor $|z| > 1$ gegeven wordt door

$$(21) \qquad f(z) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{z^n}$$

Tevens leert het theorema dat $f(z)$ regulier is in het gehele buitengebied van de positieve reële as. In verband met (20) en (21) is $z=1$ het enige singuliere punt, dat mogelijk is. Dit volgt ook uit

$$f(z) = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}$$

Een ander voorbeeld is het volgende: zij θ willekeurig complex doch verschillend van 0, -1, -2, ... en beschouw

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{n+\theta} \qquad (|z| < 1)$$

Als $\theta \neq +1, +2, \ldots\ldots$ dan volgt uit Theorema 1

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\theta) z^n} - I$$

waarin I het residu van $\dfrac{(-z)^w}{(w+\theta)\sin w}$ voor $w = -\theta$

voorstelt. We vinden $I = \dfrac{(-\pi)\ (-z)^{-\theta}}{\sin \pi\theta}$ en dus volgt

$$(22) \quad f(z) = \frac{\pi\,(-z)^{-\theta}}{\sin \pi\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\theta) z^n} \qquad |z| > 1; \quad \theta \neq 1, 2, 3..$$

Als $\theta = m$ = positief geheel, dan volgt in verband met opm.2 bij Theorema 1

$$(23) \quad f(z) = \frac{-\log(-z)}{z^{\theta}} + \sum_{n=1}^{\theta-1} \frac{1}{(n-\theta) z^n} + \sum_{n=\theta+1}^{\infty} \frac{1}{(n-\theta) z^n}$$

waarin de eerste term het residu is van $\dfrac{\pi\ (-z)^w}{(w+\theta)\sin \pi w}$

voor $w = -\theta = -m$ Als boven concluderen we dat $z=1$ het enige mogelijke singuliere punt van $f(z)$ is. In verband met de eerste term in het rechterlid van (22) resp. (23) volgt, dat voor θ niet geheel deze singulariteit algebraïsch is en voor θ = 1, 2, 3, ... logarithmisch. Theorema 1 maakt het dus o.a. mogelijk singulariteiten te onderzoeken. *)

*) 5. Mandelbrojt "Modern researches on the singularities of functions defined by Taylor's Series".

Het theorema van Barnes (vgl."Ford", hoofdst.II en III).

Theorema I liet de vraag open hoe de optredende lusintegralen

(1) $$\mathcal{J} = \frac{1}{2i} \int_{C} \frac{g(w)(-z)^w}{\sin \pi w} dw$$

zich gedragen voor grote waarden van z. We zullen deze vraag bevredigend beantwoorden in het geval, dat de lusvormige integratieweg C zich uitstrekt langs de beide oevers van een halfoneindige rechtlijnige snede, die uitgaande van de singulariteit w_o in het tweede of derde kwadrant naar oneindig gaat. Behalve w_o mag op deze snede geen andere singulariteit van g(w) liggen. Zij tenslotte w_o een pool, of in het algemeen een algebraïsch vertakkingspunt van g(w), d.w.z. g(w) is in een omgeving van w_o te ontwikkelen in een convergente rij van de vorm

$$g(w) = (w - w_o)^{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_o)^n$$

waarin γ een willekeurig complex getal voorstelt verschillend van één der getallen 0, 1, 2, 3 .... Ook $P(w) = \frac{g(w)}{\sin \pi w}$ kent dus een dergelijke ontwikkeling.

Als in Theorema I heeft voor $z = \rho e^{i\phi}$ $(0 \leq \phi < 2\pi)$ de in (1) voorkomende functie $(-z)^w$ de volgende betekenis

(2) $$(-z)^w = e^{w \log(-z)} = e^{w[\log \rho + i(\phi - \pi)]}$$

Theorema van Barnes. Zij gegeven de lusintegraal

(3) $$\mathcal{J}(z,\beta) = \frac{1}{2i} \int_{C} P(w)(-z)^w (w)^{\beta-1} dw$$

waarin β een willekeurige (reële of complexe) constante voorstelt. De integraal zij, voor $|z|$ voldoende groot, convergent.
De lusvormige weg C(doorlopen in positieve zin) omloopt de oorsprong w = 0, en gaat naar oneindig in een richting $\psi = \psi_1$, gelegen in het tweede of derde kwadrant (zij $w = \sigma e^{i\psi}$). De functie P(w) is in een omgeving van de oorsprong ontwikkelbaar volgens een Maclaurin-reeks

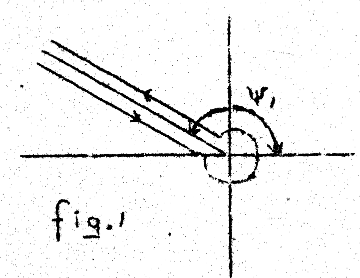


fig.1

(4) $$P(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \; ; \; |w| < l \; ; \; l > 0$$

en kan langs $\psi = \psi_1$ analytisch worden voortgezet. De lusweg C mag geen singulariteiten van P(w) bevatten.

De functie $(-z)^w$ wordt volgens (2) gedefinieerd, waarin $w = \sigma e^{i\psi}$ met $\psi_1 \leq \psi < \psi_1 + 2\pi$. De functie $w^{\beta-1}$ wordt gedefinieerd als volgt

$$(5) \qquad w^{\beta-1} = \exp\left\{(\beta-1)\log w\right\} = \exp\left\{(\beta-1)(\log\sigma + i\psi)\right\}$$

weer met $\psi_1 \leq \psi < \psi_1 + 2\pi$.

Onder deze voorwaarden geldt voor $I(z,\beta)$ en voor grote waarden van z de volgende asymptotische ontwikkeling

$$(6) \qquad \mathcal{J}(z,\beta) \sim \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\left[\log(-z)\right]^{\beta+n}\Gamma(1-\beta-n)}$$

waarin $\log(-z) = \log\rho + i(\phi - \pi)$; $z = \rho e^{i\phi}$; $0 \leq \phi < 2\pi$

Bij het bewijs gebruiken we het volgende Lemma. Voor willekeurige complexe waarden van β geldt

$$(7) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C e^w (w)^{\beta-1}\, dw = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}$$

waarin de lusvormige weg C als in het theorema (vgl.figuur 1) en $(w)^{\beta-1}$ als in (5) zijn gedefinieerd.

Het bewijs is geheel analoog aan dat van het bekende geval waar $\psi_1 = \pi$ (C is een lus om de negatieve reële as). Zie bijvoorbeeld Whittaker-Watson Modern Analysis blz.244.

Bewijs van het theorema. Voer in

$$p = \log(-z) = \log\rho + i(\phi - \pi)$$

In (3) geldt $(-z)^w = e^{wp}$ met

$$(8) \qquad R_e[wp] = R_e[\sigma(\cos\psi + i\sin\psi)(\log\rho + i(\phi-\pi))$$
$$= \sigma\left\{\cos\psi\log\rho - \sin\psi(\phi - \pi)\right\}$$

Voor w op het rechte deel van C ($\psi = \psi_1$) en voor $\rho = |z|$ voldoende groot is, wegens $\cos\psi_1 < 0$, blijkbaar $R_e\,(wp) < 0$.
Dan volgt uit het lemma (zij n geheel ≥ 0)

$$(9) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C (-z)^w\, w^{\beta+n-1}\, dw = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{wp}\, w^{\beta+n-1}\, dw$$
$$= \frac{1}{p^{\beta+n}\,\Gamma(1-\beta-n)}$$

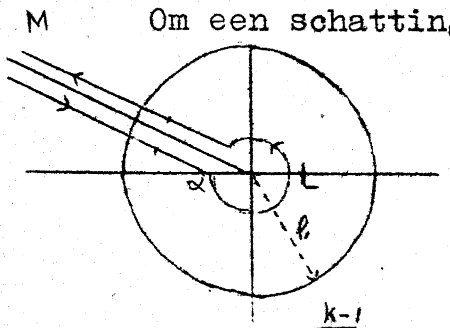
Invulling van (4) in (7) geeft blijkbaar het rechterlid van de te bewijzen asymptotische ontwikkeling (6). We moeten bewijzen dat

$$\lim\ |p|^{\beta+k-1}\left|\mathcal{J}(z,\beta) - \pi\sum_{0}^{k-1}\frac{c_n}{p^{\beta+n}\Gamma(1-\beta-n)}\right.$$

en merken daartoe op, dat wegens (9) geldt

$$(10)\qquad I(z,\beta) - \pi\sum_{0}^{k-1}\frac{c_n}{p^{\beta+n}\Gamma(1-\beta-n)} = $$
$$= \frac{1}{2i}\int_C e^{+wp}\Big\{P(w) - \sum_{n=0}^{k-1} c_n w^n\Big\} w^{\beta-1}\,dw$$

Om een schatting te geven van het rechterlid, verdelen we de lus C in twee delen L en M, waarbij L geheel binnen de cirkel $|w| = 1$ ligt. (Zij $w = \alpha$ het scheidingspunt). Dan is het rechterlid in (10) de som van de corresponderende integralen I_L en I_M.



Voor w op L geldt

$$\Big|P(w) - \sum_{0}^{k-1} c_n w^n\Big| \leqslant A\,|w|^k$$

waarin A een positieve constante voorstelt. Dus is een constante $B > 0$ te vinden, zo dat

$$(11)\qquad |I_L| \leqslant \frac{B}{|p^{\beta+k}|}$$

Zij w een punt op de snede $\psi = \psi_1$ en zij $w^{\beta-1}$ genomen voor w als punt op de onderste oever van de snede. Op de bovenste oever heeft w dan de waarde $e^{2\pi\beta i}\,w^{\beta-1}$

We kunnen dus schrijven

$$(12)\qquad I_M = \frac{e^{+\alpha p}(e^{2\pi\beta i}-1)}{2i}\int_{\alpha}^{\infty} e^{+(w-\alpha)p}\Big\{P(w) - \sum_{n=0}^{k-1} c_n w^n\Big\} w^{\beta-1}\,dw$$

Zij $\alpha = \sigma_0 e^{i\psi_1}$, dan is in (12) $w = \sigma e^{i\psi_1}$ met $\sigma_0 \leq \sigma < \infty$

Verder geldt (vgl.(8))

$R_e[\alpha p] = \sigma_0[\log\rho\cos\psi_1 - (\phi-\pi)\sin\psi_1]$

$R_e[(w-\alpha)p] = (\sigma-\sigma_0)\,[\,\log\rho\cos\psi_1 - (\phi-\pi)\sin\psi_1]$

Wegens $\cos\psi_1 < 0$ kan ρ zo groot gekozen worden, dat een positieve constante a bestaat zo dat

$R_e[\alpha p] < -a\log\rho$

en dat voor een vooraf gegeven positieve constante b voldaan is aan

$R_e[(w-\alpha)p] < -b(\sigma-\sigma_0)$

Dan volgt uit (12)

$$(13)\qquad |I_M| < K\,e^{-a\log\rho}\int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-b(\sigma-\sigma_0)}\Big\{|P(w)| - \sum_{0}^{k-1}|c_n|\sigma^n\Big\}\sigma^{R_e\beta-1}\,d\sigma$$

waarin K een positieve constante voorstelt; daar (3) voor zekere waarde van z convergent is verondersteld, kan b zo groot gekozen worden, dat de integraal in het rechterlid van (13) convergeert. Dus volgt ($p = \log\rho + i(\phi-\pi)$), dat

$$(14)\qquad \lim_{|p|\to\infty}|p^{\beta+k-1}|\,|J_M| = 0$$

Wegens (11) en (14) geldt dus voor het rechterlid $I_L + I_M$ van (10)

$$\lim_{|p| \to \infty} |p^{\beta+k-1}| \, |\mathcal{J}_L + \mathcal{J}_M| = 0$$

waarmee formule (6) bewezen is.

Opm. Als β geheel $\geqslant 1$ is, dan is de integrand in (3) regulier binnen C en dus $I(z,\beta) = 0$. In het rechterlid van (6) zijn dan alle termen nul.

Als β geheel $\leqslant 0$, dan heeft de integrand in (3) in de oorsprong een $(1-\beta)$ -voudige pool (zij $c_0 \neq 0$) en is het rechterlid van (6) staan dan slechts eindig vele termen (formule (6) geldt nu natuurlijk met het gelijkteken).

Toepassing.

We bepalen de asymptotische ontwikkeling van de functie f(z), die voor $|z| < 1$ gedefinieerd wordt door de convergente machtreeks

$$(15) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+\theta)^\beta}$$

waarin β en θ willekeurige complexe getallen voorstellen ($\theta \neq 0, -1, -2, \ldots$). Daar iedere rationale functie in partiaalbreuken gesplitst kan worden, vormt dit geval een basis voor de asymptotische ontwikkeling van functies als

$$\chi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_r n^r + \ldots + \alpha_1 n + \alpha_0}{\beta_s n^s + \ldots + \beta_1 n + \beta_0} z^n \qquad (|z| < 1),$$

hoewel dan alleen reeksen (15) van belang zijn waarin β geheel is. In verband met opm.5 op blz.6 kunnen we dan direct formule (7) van blz.2 toepassen, waarna de termen I_m in deze formule met de residu-rekening worden bepaald. De resulterende formule geldt ook met het gelijkteken. Het theorema van Barnes behoeft niet expleciet te worden toegepast.

Theorema. Laat de analytische functie f(z) voor $|z| < 1$ gedefinieerd zijn door

$$(16) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+\theta)^\beta}$$

waarin θ en β willekeurige complexe getallen voorstellen (evenwel $\theta \neq 0, -1, -2, \ldots$). Dan is f(z) regulier in het hele complexe z-vlak, eventueel met uitzondering van z=1. Als θ geen positief geheel getal voorstelt, dan geldt voor grote waarden van $|z|$ de asymptotische ontwikkeling

$$(17) \qquad f(z) \sim -\sum \frac{1}{(\theta-n)^\beta z^n} + \pi \frac{[\log(-z)]^{\beta-1}}{(-z)^\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n [\frac{1}{s}}{n!\Gamma(\beta-n)}$$

waarin voor $z = \rho e^{i\theta}$ $(0 \leq \phi < 2\pi)$ geldt

$$(-z)^\theta = \exp[\theta \log(-z)] = \exp[\theta \{\log\rho + i(\phi-\pi)\}]$$

Valt daarentegen θ samen met een positief geheel getal, dan geldt

$$(18)\quad f(z) \sim -\sum_{n=1}^{\theta-1} \frac{1}{(\theta-n)^\beta z^n} - \sum_{n=\theta+1}^{\infty} \frac{1}{(\theta-n)^\beta z^n} - \frac{[\log(-z)]^\beta}{z^\theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{\pi w}{\sin \pi w}\right]^{(n)}_{w=0}}{n!\,\Gamma(\beta-n+1)[\log(-z)]^n}$$

Bewijs: Toepassing van Theorema 1 bevat in verband met de opmerkingen 5 en / op blz.6, de formule

$$(19)\quad f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\theta-n)^\beta z^n} - \frac{1}{2i}\int_C \frac{(-z)^w}{(w+\theta)^\beta \sin \pi w} \qquad (|z|>1)$$

in het geval $\theta \neq 1, 2, 3, \ldots\ldots$ en verder.

$$(20)\quad f(z) = -\left(\sum_{n=1}^{\theta-1} + \sum_{n=\theta+1}^{\infty}\right) \frac{1}{(\theta-n)^\beta z^n} - \frac{1}{2i}\int_C \frac{(-z)^w dw}{(w+\theta)^\beta \sin \pi w}$$

als θ samenvalt met één der getallen 1, 2, 3 ......
Hierin is C een positief omlopen lusvormige weg langs een half-oneindige rechtlijnige snede, die uitgaat van het vertakkingspunt $w = -\theta$ voor de functie $g(w) = \frac{1}{(w+\theta)^\beta}$, en in het tweede of derde kwadrant naar oneindig gaat. Behalve eventueel $w = -\theta$ mag de snede geen gehele punten bevatten.

Men overtuigt zich er gemakkelijk van, dat de integralen in (19) en (20) voor $|z| > 1$ reguliere functies voorstellen. Dus blijkt uit (19) resp.(20) dat voor $|z| > 1$ f(z) regulier is. Analoog leert (16) de regulariteit van f(z) in het langs de positieve reële as opengesneden z-vlak. Dus vinden we dat f(z) overal, behalve eventueel in z = 1 een reguliere functie voorstelt.

Om met het theorema van Barnes een asymptotische ontwikkeling te kunnen geven van

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2i}\int_C \frac{(-z)^w dw}{(w+\theta)^\beta \sin \pi w}$$

passen we de transformatie $w + \theta = w'$ toe. We vinden

$$(21)\quad \mathcal{J} = \frac{(-z)^{-\theta}}{2i}\int_{C'} \frac{1}{\sin \pi(w-\theta)} (-z)^w (w)^{-\beta} dw$$

waarin C' nu de oorsprong omloopt, en in het tweede of derde kwadrant naar oneindig gaat.

Zij θ niet geheel. Dan geldt in een omgeving van de oorspr de ontwikkeling

$$P(w) = \frac{1}{\sin \pi(w-\theta)} = \sum_0^\infty c_n w^n$$

met $c_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{\sin \pi(w-\theta)}\right]^{(n)}_{w=0} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\left[\frac{1}{\sin \pi w}\right]^{(n)}_{w=\theta}$

Toepassing van het theorema van Barnes op (21) geeft

$$\mathcal{J} \sim (-z)^{-\theta} \quad \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \left[\frac{1}{\sin \pi w}\right]^{(n)}_{w=\theta}}{n!\,\Gamma(\beta-n)\,[\log - z]^{n-\beta+1}}$$

zodat nu formule (17) direct uit (19) volgt.
De integraal $\mathcal{J}_1$ in (20) schrijven we na transformatie volgens

$$(22) \quad \mathcal{J}_1 = \frac{1}{2\pi i}(-z)^{\theta} \int_{C'} \left[\frac{\pi w}{\sin \pi (w-\theta)}\right] (-z)^{w}\, w^{-\beta-1}\, dw$$

Voor de nu gehele waarde θ is $\frac{1}{\sin \pi (w-\theta)}$ niet regulier in de oorsprong, doch wel

$$P(w) = \frac{\pi w}{\sin \pi (w-\theta)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n w^n$$

met $d_n = (-1)^{\theta} \left[\frac{\pi w}{\sin \pi w}\right]^{(n)}_{w=0}$. Toepassing van het Theorema van Barnes op $\mathcal{J}_1$ geeft nu

$$\mathcal{J}_1 \sim \frac{1}{z^{\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{\pi w}{\sin \pi w}\right]^{(n)}_{w=0}}{n!\,\Gamma(\beta-n+1)\,[\log - z]^{n-\beta}}$$

en formule (18) volgt nu direct uit (20).

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{h(n)\, z^{n}}{\Gamma(n+p)} \sim -\sum_{1}^{\infty} \frac{h(-n)}{\Gamma(p-n)\, z^{n}} + e^{z} z^{1-p} \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n}}$$

$$h(w) \sim c_0 + \frac{c_1}{w+p} + \frac{c_2}{(w+p)(w+p+1)} + \cdots$$

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{h(n)\, z^{n}}{n!} \sim e^{z} \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n}}$$