STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 12e

Colloquium asymptotische ontwikkelingen 1947-1950,3e;

Methode van Darboux.

(J.G.van der Corput.)

1949

ASYMPTOTISCHE ONTWIKKELINGEN.

Methode van DARBOUX. [1]

Oct. 1949

Indien de functie $f(z)=\sum_{n} a_n z^n$ binnen een cirkel C met eindige convergentiestraal R analytisch is, kan onder zeer algemene voorwaarden uit het functietheoretisch karakter van de functie f(z) het gedrag van de coëfficient a_n voor grote waarden van n worden bepaald. Daartoe voeren we een hulpfunctie

$$g_n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

in, die eveneens binnen de cirkel C analytisch is en binnen die cirkel betrekkelijk nauw bij de functie f(z) aansluit, terwijl het gedrag van de coëfficient b_n voor grote waarden van n bekend verondersteld wordt. Onder bepaalde voorwaarden blijkt dan a_n voor grote waarden van n bij benadering gelijk te zijn aan b_n. De eerste opgave is dan ook uit het feit, dat de functie

$$v(z) = f(z) - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \text{ waarin } c_n=a_n-b_n,$$

binnen de eenheidscirkel in het algemeen een niet al te grote modulus bezit, af te leiden, dat de coëfficienten c_n voor grote waarden van n, absoluut genomen, betrekkelijk klein blijven. Om onze gedachten te bepalen zullen wij aannemen, dat op of buiten een cirkel C een eindig aantal verschillende punten $s_1, \ldots, s_t$ liggen zodanig, dat alle binnen C gelegen punten z voldoen aan de ongelijkheid

$$|v(z)| \leqq \sum_{\tau=1}^{t} M_\tau |s_\tau - z|^{-\beta_\tau}, \quad \text{waarin } \beta_\tau > 0.$$

Onder die voorwaarden is voor $n \geqq 1$

$$|c_n| \leqq \sum_{\tau=1}^{t} M_\tau C_n(\beta_\tau)\, R^{-n-\beta_\tau}.$$

Hierin is

$$C_n(\beta) = \frac{2^{2-\beta}}{\sqrt{\pi}} \, \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}\beta)}, \quad \text{indien } \beta<1;$$

$$C_n(\beta) = \frac{2\beta}{\beta-1}\,(n+1)^{\beta-1}+2^{1+\frac{1}{2}\beta}, \quad \text{indien } \beta>1;$$

$$C_n(\beta) = 4 + 2 \log 2n, \quad \text{indien } \beta=1.$$

Voor het bewijs van de stelling hebben wij de volgende hulpstelling nodig.

[1] Litteratuur:

H. Bateman 1944'. Note on the function F(a,b;c-n;z). Proc Nat Ac Sci USA 30 (1944) 28-30.
G. Darboux 1878'. Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres et sur une classe étendue de développements en série. Journ. Math. Pures et appliquées, serie 3, bd 4, p. 5-56; 377-416 (1878).
A. Haar 1926'. Ueber asymptotische Entwicklungen. Math. Ann. 96 (1926) 69-107.
S. O. Rice. 1940'. Some properties of ${}_3F_2(-n,n+1,z;1,p;v)$. Duke Math. J. 6 (1940) 108-119.
Meissel 1891. Astr. Nachr. CXXVII (1891), col. 359-362; CXXVIII (1891) 145-154.
Szegö 39. Orthogonal Polynomials. p. 200 en 201.

<u>Lemma.</u> Zij $0<r<R$; $|s|\geqq R$ en $\beta>0$. Verder worde gesteld

$$\mathcal{J}=\int_{|z|=r}|s-z|^{-\beta}|dz|.$$

Bewering: 1°: Indien $\beta<1$, dan is

$$|\mathcal{J}|\leqq\sqrt{\pi}\,|2r|^{1-\beta}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}\beta)}.$$

2°: Indien $\beta>1$ en $R\leqq 3r$, dan is

$$|\mathcal{J}|<\left(\frac{3}{\beta-1}+\pi\right)(R-r)^{1-\beta}+2^{2-\frac{1}{2}\beta}r^{1-\beta}.$$

3°: Indien $\beta=1$ en $R\leqq 3r$, dan is

$$|\mathcal{J}|<6+3\log\frac{2r}{R-r}.$$

Bewijs: Stel $|s|=\rho$, dus $\rho\geqq R>r$. Ligt z op de cirkel $|z|=r$, dan heeft de stomphoekige driehoek met hoekpunten $\frac{rs}{\rho}$, z en s de zijden $|s-z|$, $\rho-r$ en $|z-\frac{rs}{\rho}|$, dus

(1) $|s-z|\geqq\rho-r\geqq R-r$ en $|s-z|\geqq\left|\frac{rs}{\rho}-z\right|$.

Indien $\frac{\rho z}{rs}=e^{i\varphi}$ $(0\leqq\varphi<2\pi)$ gesteld wordt, gaat de laatste ongelijkheid over in

(2) $|s-z|\geqq r|1-e^{i\varphi}|=2r\sin\frac{1}{2}\varphi$.

Ik onderscheid twee gevallen, al naar gelang $\beta<$ of $\geqq 1$ is.

1°: Zij $\beta<1$. Dan is volgens (2)

$$\mathcal{J}\leqq(2r)^{1-\beta}\int_0^{\pi}(\sin\tfrac{1}{2}\varphi)^{-\beta}d\varphi=2\,(2r)^{1-\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{-\beta}dt.$$

Door $\sin^2 t=u$ te stellen krijgen we

$$\mathcal{J}\leqq(2r)^{1-\beta}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du=(2r)^{1-\beta}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1-\frac{1}{2}\beta)},$$

waaruit de eerste bewering volgt wegens $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

2°: Zij $\beta\geqq1$ en $R\leqq 3r$. Dan is $\frac{R-r}{2r}\leqq 1$, zodat een geheel getal $\gamma\geqq0$ en $\leqq\pi$ met $\frac{R-r}{2r}=\sin\frac{1}{2}\gamma$ bestaat. Men heeft dan wegens (1) en (2)

$$(3)\begin{cases}\mathcal{J}\leqq 2\int_0^{\gamma}(R-r)^{-\beta}r\,d\varphi+(2r)^{1-\beta}\int_{\gamma}^{\pi}(\sin\frac{1}{2}\varphi)^{-\beta}d\varphi\\ \quad=2\gamma r(R-r)^{-\beta}+(2r)^{1-\beta}\int_{\sin^2\frac{1}{2}\gamma}^{1}u^{-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du.\end{cases}$$

Wegens $0\leqq\frac{1}{2}\gamma\leqq\frac{\pi}{2}$ is $\frac{1}{2}\gamma\leqq\frac{\pi}{2}\sin\frac{1}{2}\gamma=\frac{\pi(R-r)}{4r}$, dus

(4) $2\gamma r(R-r)^{-\beta}\leqq\pi(R-r)^{1-\beta}$.

Men heeft

(5) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}u^{-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du\leqq 2^{\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du=2^{\frac{1}{2}\beta+1}$.

In het geval $\sin^2\frac{1}{2}\gamma\geqq\frac{1}{2}$ is, volgt uit (3), (4) en (5)

$$|\mathcal{J}|\leqq\pi(R-r)^{1-\beta}+2^{-\frac{1}{2}\beta+2}r^{1-\beta}.$$

In dit geval gelden de 2e en 3e bewering wegens $\pi+2\sqrt{2}<6$.

Is echter $\sin^2\frac{1}{2}\gamma < \frac{1}{2}$, dan splitsen we de slotintegraal van (3) met behulp van het punt $\frac{1}{2}$ in twee stukken en daarbij is

(6) $$\int_{\sin^2\frac{\gamma}{2}}^{\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\,du \leqq 2^{\frac{1}{2}}\int_{\sin^2\frac{1}{2}\gamma}^{\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}}\,du.$$

Is $\beta>1$, dan is het rechterlid kleiner dan

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}}\ (\sin\tfrac{1}{2}\gamma)^{1-\beta} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\beta-1}\ \left(\frac{R-r}{2r}\right)^{1-\beta},$$

zodat de tweede bewering dan uit (3),(4) en (5) volgt wegens $2^{\frac{3}{2}}<3$. Is daarentegen $\beta=1$, dan is het rechterlid van (6) kleiner dan

$$2^{\frac{1}{2}}\log(\sin^{-2}\tfrac{1}{2}\gamma) = 2^{\frac{3}{2}}\log\frac{2r}{R-r} < 3\log\frac{2r}{R-r},$$

waaruit de derde bewering volgt.

Na deze hulpstelling is het bewijs van onze stelling eenvoudig. Men heeft voor elk positief getal $r<R$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} v(z)\,z^{-n-1}\,dz,$$

dus

$$|c_n| \leqq \frac{r^{-n-1}}{2\pi}\sum_{\tau=1}^{t}\int_{|z|=r}|s_\tau-z|^{-\beta_\tau}|dz|.$$

Wij kiezen hierin $r=\frac{n}{n+1}R$, zodat zeker $R\leqq 3r$ is. Voor $u>0$ en n geheel positief is

$$(1+u)^n = 1+\binom{n}{1}u+\ \dots\ \geqq 1+nu,$$

dus

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n},$$

waaruit volgt $$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{n-1}{n}\right)^n,$$

zodat

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n-1}$$ voor $n=1,2,\dots$ een afnemende functie van **n is,**

die voor $n=1$ de waarde 4 aanneemt. Voor elk natuurlijk getal n is dus

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n-1} \leqq 4,$$

derhalve

$$r^{-n-1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n-1}R^{-n-1} \leqq 4R^{-n-1}.$$

Aldus vinden we

$$|c_n| \leqq \frac{2\,R^{-n-1}}{\pi}\sum_{\tau=1}^{t}\int_{|z|=r}|s_\tau-z|^{-\beta_\tau}|dz|.$$

Beschouw de bijdrage tot het rechterlid van de verschillende getallen τ, met voortdurende toepassing van het lemma. Die bijdrage is voor $\beta_\tau<1$ wegens $r^{1-\beta_\tau}<R^{1-\beta_\tau}$ kleiner dan

$$\frac{2^{2-\beta_\tau}R^{-n-\beta_\tau}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\beta_\tau)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}\beta_\tau)} = C_n(\tau)\ R^{-n-\beta_\tau}$$

Voor $\beta_\tau>1$ is de bijdrage wegens $3<\pi$ kleiner dan

$$2\,R^{-n-1}\left\{\left(\frac{1}{\beta_\tau-1}+1\right)R^{1-\beta_\tau}(n+1)^{\beta_\tau-1} + \frac{2^{2-\frac{1}{2}\beta_\tau}}{\pi}R^{1-\beta_\tau}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{1-\beta_\tau}\right\}$$

en dit is wegens

$$\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{1-\beta_\tau} < \frac{1}{2}\cdot 2^{\beta_\tau-1} = 2^{\beta_\tau-2}$$

kleiner dan

$$R^{-n-\beta_\tau}\left\{\frac{2\beta_\tau}{\beta_\tau-1}(n+1)^{\beta_\tau-1} + 2^{1+\frac{1}{2}\beta_\tau}\right\} = C_n(\beta_\tau)R^{-n-\beta_\tau}.$$

Voor $\beta_\tau=1$ ten slotte is de genoemde bijdrage wegens $3<\pi$ kleiner dan

$$\frac{2\,R^{-n-1}}{3}\,(6+3\log 2n) = C_n(\beta_\tau)\,R^{-n-\beta_\tau}.$$

Het zou geen moeite kosten om de constante factoren, die in de gevonden bovengrenzen voorkomen, te verkleinen, maar daar hebben wij niet naar gestreefd.

Vaak zullen wij de stelling toepassen in de volgende schijnbaar algemenere vorm.

Stelling. Zij h geheel $\geqq 0$. Indien de functies

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \quad\text{en}\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$$

binnen de cirkel met middelpunt 0 en met positieve eindige straal R analytisch zijn en het verschil $v(z) = f(z) - g(z)$ binnen C voldoet aan de ongelijkheid

$$\left|\frac{d^h v(z)}{dz^h}\right| \leqq \sum_{\tau=1}^{t} M_\tau \left|s_\tau - z\right|^{-\beta_\tau},$$

waarin $\beta_\tau > 0$ en de punten $s_1, \ldots, s_t$ op of binnen C liggen, dan is voor $n \geqq 1$

$$\left|a_{n+h}-b_{n+h}\right| \leqq \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+h)}\sum_{\tau=1}^{t} M_\tau\, C_n(\beta_\tau)\, R^{-n-\beta_\tau},$$

waarin $C_n(\beta_\tau)$ dezelfde betekenis heeft als hierboven.

Deze stelling volgt onmiddellijk uit de andere, waarin f(z) en g(z) door

$$\frac{d^h f(z)}{dz^h} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\ldots(n+h)a_{n+h}z^n \quad\text{en}$$

en

$$\frac{d^h g(z)}{dz^h} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\ldots(n+h)b_{n+h}z^n$$

vervangen worden.

Het gaat in deze paragraaf om de ontwikkeling van $(1+w)^m$, waarin $m=\sigma+i\tau$, naar opklimmende machten van w-a. Om die functie ondubbelzinnig te bepalen, brengen we in het w-vlak een coupure aan van $-\infty$ naar -1. Wij stellen $\arg(1+w)=0$ in het punt $w=0$, zodat $\arg(1+w)$ in het opengesneden w-vlak voortdurend tussen $-\pi$ en π ligt. Ik kies nu in het opengesneden vlak een punt a, zodanig dat het lijnstuk(a,w) geen enkel punt van de coupure bevat. Gevraagd wordt $(1+w)^m$ in een afbrekende reeks naar opklimmende machten van w-a te ontwikkelen, terwijl een bovengrens voor de modulus van de restterm gevraagd wordt.
Van elk geheel getal $r\geqq 0$, dat tevens $\geqq\sigma$ is, zullen we vinden
$(1+w)^m = T_0+T_1+\ldots+T_{r-1}+R$, waarin $T_\rho = \binom{m}{\rho}(1+a)^{m-\rho}(w-a)^\rho$.
Daarbij is

$$|R| \leqq K\left|\binom{m}{r}\right| q^{\sigma-r}\,|w-a|^r,$$

waarin q gelijk is aan de afstand van het punt -1 tot het lijnstuk (a,w) en

$$K = \mathrm{Max}\left\{ e^{-\tau\arg(1+w)}, e^{-\tau\arg(1+a)} \right\}$$

We zullen later, in een paragraaf gewijd aan gegeneraliseerde hypergeometrische functies, een andere, in veel opzichten preferabele bovengrens van $|R|$ vinden.
De formule volgt uit de reeksontwikkelijg van Taylor

$$F(w) = T_0+T_1+\ldots+T_{r-1}+R, \text{ waarin } T_\rho = \frac{F^{(\rho)}(a)}{\rho!}(w-a)^\rho$$

en

$$R = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^w F^{(r)}(t)(w-t)^{r-1}\,dt.$$

Hierin kiezen we $F(w) = (1+w)^m$, zodat T_ρ de aangegeven waarde bevat en

$$R = \binom{m}{r} r \int_a^w (1+t)^{m-r}(w-t)^{r-1}\,dt.$$

Wegens $m = \sigma+i\tau$ is $(1+t)^{m-r} = |1+t|^{\sigma-r}\, e^{-\tau\arg(1+t)}$
Omdat t op het lijnstuk **(a,w)** ligt, is $|1+t|\geqq q$, dus $|1+t|^{\sigma-r}\leqq q^{\sigma-r}$. Doorloopt t monotoon het lijnstuk (a,w), dan doorloopt $\arg(1+t)$ monotoon het interval met de eindpunten arg 1 + t) en $\arg(1+w)$,

dus $e^{-\ \arg(1+t)} \leqq K$.

Hieruit volgt de bewering, wegens

$$r\int_a^w |\ \ -t|^{r-1}\,|dt| = |w-a|^r$$