

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

MC 15

Cursus methoden der mathematische physica, 2.

De golfvergelijking.

R. Timman.



1952

CURSUS

Methoden der mathematische physica, 2.

1951-1952

De golfvergelijking.

R. Timman

TW

1951/52

Cursus:

Methoden der mathematische physica

Deel II. De golfvergelijking.

door
R. Timman.

1. Inleiding.

Na de potentiaalvergelijking, die vroeger behandeld is, treedt de golfvergelijking in tal van problemen op, zoals de voortplanting van trillingen in gassen en vloeistoffen, de electrodynamica, en de voortplanting van oppervlaktegolven op water onder invloed van de zwaartekracht.

1.1 Voortplanting van trillingen in een gas of vloeistof.

De bewegingsvergelijkingen voor de instationnaire beweging van een vloeistof of een gasdeeltje zijn met snelheidscomponenten u , v en w in rechthoekige coördinaat x , y , z

$$\begin{aligned}\rho(u_t + uu_x + vu_y + wu_z) &= -p_x \\ \rho(v_t + uv_x + vv_y + wv_z) &= -p_y \\ \rho(w_t + uw_x + vw_y + ww_z) &= -p_z\end{aligned}\tag{1}$$

die samen met de continuïteitsvergelijking

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0\tag{2}$$

de beweging beschrijven.

Indien de snelheden klein zijn, kunnen wij hiervoor schrijven

$$\begin{aligned}\rho u_t &= -p_x \\ \rho v_t &= -p_y \\ \rho w_t &= -p_z\end{aligned}\tag{3}$$

Ook de druk en de dichtheid zullen slechts kleine afwijkingen vertonen van de waarden in de rusttoestand p_0 en ρ_0 . Indien wij aannemen, dat

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0(1 + s), \text{ waarbij } s \text{ klein is, zal gelden} \\ p &= p_0 + c^2 \rho_0 s\end{aligned}\tag{4}$$

zodat de vergelijkingen worden

$$\begin{aligned}u_t &= -c^2 s_x \\ v_t &= -c^2 s_y \\ w_t &= -c^2 s_z.\end{aligned}\tag{5}$$

Indien de waarden van de snelheid op het tijdstip $t = 0$ gegeven zijn door u_0 , v_0 en w_0 , zal gelden

$$\begin{aligned} u &= -c^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t s dt + u_0, \\ v &= -c^2 \frac{\partial}{\partial y} \int_0^t s dt + v_0, \\ w &= -c^2 \frac{\partial}{\partial z} \int_0^t s dt + w_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Als voor de begintoestand een snelheidspotentiaal ψ_0 bestaat, zodat

$$u_0 = \psi_{0x}, \quad v_0 = \psi_{0y}, \quad w_0 = \psi_{0z} \quad (7)$$

zal gelden

$$u = \psi_x, \quad v = \psi_y, \quad w = \psi_z \quad (8)$$

waarbij

$$\psi = -c^2 \int_0^t s dt + \psi_0 \quad (9)$$

een snelheidspotentiaal is, die gedurende de gehele beweging blijft bestaan. ψ voldoet dus aan de vergelijking

$$\psi_{tt} = -c^2 s. \quad (10)$$

Verder volgt uit de continuïteitsvergelijking, bij verwaarlozing van hogere orde termen

$$s_t + (u_x + v_y + w_z) = a \quad (11)$$

zodat tenslotte ψ blijkt te voldoen aan de vergelijking

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} - c^{-2} \psi_{tt} = 0, \quad (12)$$

die de golfvergelijking wordt genoemd.

1.2 Voortplanting van electro-magnetische golven.

In de electrodynamica gelden als grondvergelijkingen de vergelijkingen van Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

waarbij de vectoren $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{J}$ voorstellen de elektrische veldsterkte, magnetische veldsterkte, magnetische inductie, de elektrische verplaatsing en de stroomdichtheid. De scalar ρ is de ladingsdichtheid.

Indien het medium homogeen en isotroop is, geldt

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (3)$$

waarbij wij veronderstellen, dat ϵ en μ onafhankelijk zijn van de intensiteit van het veld.

Bij afwezigheid van statistische ladingen en van stromen is $\rho = 0$ en $\vec{J} = 0$ en de vergelijkingen worden

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} &= \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{H} &= 0 \\ \text{div } \vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Uit (4) volgt

$$\text{rot rot } \vec{H} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (6)$$

en

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Maar geldt echter de algemene betrekking

$$\text{rot rot } \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \Delta \vec{v} \quad (8)$$

zodat op grond van (5) de vergelijkingen (6) en (7) overgaan in

$$\begin{aligned} \Delta \vec{H} &= \epsilon \mu \vec{H}_{tt} \\ \Delta \vec{E} &= \epsilon \mu \vec{E}_{tt}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ieder der componenten van de elektrische of magnetische veldsterkte voldoet dus afzonderlijk aan de golfvergelijking.

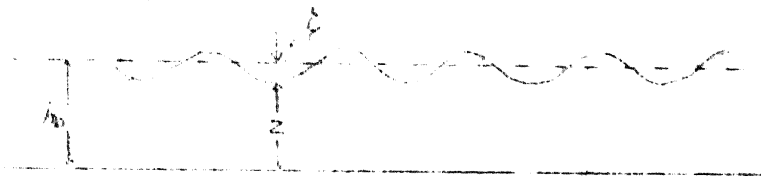
Golven op ondiep water.

Wij beschouwen de beweging van een vlakke laag water van constante diepte en nemen

aan, dat de snelheden

van de beweging zeer

klein zijn. Indien de



hoogte van het ongestoorde oppervlak gegeven is door h , dan duiden wij deze hoogte in de gestoorde toestand aan door $z = h_0 + \zeta$. Als wij verder veronderstellen, dat wij de verticale versnelling van een vloeistofdeeltje op het oppervlak mogen verwaarlozen, geldt voor de druk op een hoogte z

$$p - p_0 = g\rho(h_0 + \zeta - z)$$

zodat

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\rho \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = g\rho \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

onafhankelijk van z , zodat alle deeltjes in dezelfde verticaal dezelfde horizontale versnelling hebben, d.w.z. de horizontale snelheidscomponenten u en v zijn alleen functies van x en y . De bewegingsvergelijkingen worden dus

$$\rho u_t = -p_x,$$

$$\rho v_t = -p_y.$$

of

$$u_t = -g \zeta_x$$

$$v_t = -g \zeta_y.$$

De continuïteitsvergelijking levert ons nu een kolom met grondvlak $dx dy$

$$\frac{\partial}{\partial x}(uh dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(vh dx)dy = + \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\lambda}{g} + h)dx dy$$

of

$$\lambda_t = -h(u_x + v_y).$$

Eliminatie van u en v levert dan direct

$$\lambda_{xx} + \lambda_{yy} = \frac{1}{gh} \lambda_{tt}$$

dus de golfvergelijking in twee dimensies.

2. Algemene eigenschappen van de golfvergelijking.

Wij bewijzen een eigenschap van de oplossingen van de vergelijking

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \varphi_{tt} = 0, \quad (1)$$

die reeds door Poisson was gevonden.

Beschouw daartoe eerst de vergelijking voor bolvormige golven:

$$\varphi_{rr} + \frac{2}{r} \varphi_r - \frac{1}{c^2} \varphi_{tt} = 0 \quad (2)$$

of wel

$$(r\varphi)_{tt} = c^2 (r\varphi)_{rr} \quad (3)$$

met de algemene oplossing

$$r\varphi = f(r - ct) + F(r + ct). \quad (4)$$

Denk nu, dat op het tijdstip $t = 0$ de functies φ en φ_t voorgeschreven zijn

$$\varphi = \psi(r), \quad \varphi_t = \chi(r). \quad (5)$$

Dan is

$$\begin{aligned} f(z) + F(r) &= r\psi(r) \\ -f'(r) + F'(r) &= \frac{r}{c} \chi(r) \end{aligned} \quad (6)$$

zodat

$$-f(r) + F(r) = \frac{1}{c} \int_0^r z \chi(z) dz + c. \quad (7)$$

Wij vinden dus als algemene oplossing:

$$r\varphi = \frac{1}{2}(r-ct) \psi(r-ct) + \frac{1}{2}(r+ct) \chi(r+ct) + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} z \chi(z) dz \quad (8)$$

waarbij wij echter moeten bedenken, dat in (5) ψ en χ alleen gedefinieerd zijn voor positieve waarden van r , dus dat (8) alleen maar geldig is, zolang $r - ct > 0$ is.

Van $r - ct < 0$ kunnen wij direct de voorstelling vinden, indien r de oorsprong geen vloeistof geïmpreëerd wordt. Dan is $r^2 \varphi_r \rightarrow 0$ voor $r \rightarrow 0$, dus

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \left\{ \frac{1}{r} (f'(r-ct) + F'(r+ct)) - \frac{1}{r^2} (f(r-ct) + F(r+ct)) \right\} = 0$$

hetgeen oplevert

$$f(-ct) + F(ct) = 0$$

zodat voor alle waarden van z gelden zal

$$f(-z) + F(z) = 0 \quad (9)$$

Wij vinden zo voor $r-ct < 0$ de uitdrukking

$$r\varphi = -\frac{1}{2}(r-ct)\varphi'(r-ct) + \frac{1}{2}(ct+r)\varphi'(r+ct) + \frac{1}{2c} \int_{ct-r}^{ct+r} z \chi(z) dz \quad (10)$$

In het bijzonder zal in de oorsprong gelden

$$\begin{aligned} \varphi_{r=0} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r-ct) + F(r+ct)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(ct+r) - F(ct-r)}{r} = 2F'(ct) \\ &= \frac{d}{dt} t\varphi(ct) + t\chi(ct) \end{aligned} \quad (11)$$

Om nu het algemeen theorema van Poisson te bewijzen, merken wij eerst op, dat vergelijking (1) lineair is, d.w.z., dat met een stelsel functies $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ook hun gemiddelde een oplossing is. Beschouw nu een punt P als oorsprong van een variabel rechthoekig assenstelsel en beschouw een bepaalde snelheidspotentiaal t.o.v. dat assenkruis x', y', z' . Indien wij nu x', y', z' laten draaien om P, dan zal bij iedere stand een andere snelheidspotentiaal t.o.v. de oorspronkelijke coördinaten behoren. Het arithmetisch gemiddelde van al deze snelheidspotentialen zal dus bolsymmetrie t.o.v. P vertonen, of wel de functie

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi} \iint \varphi' d\omega, \quad (12)$$

waarbij φ' een willekeurige snelheidspotentiaal is en $d\omega$ een element van een ruimtehoek met top in P zal voldoen aan

$$(r\bar{\varphi})_{tt} = c^2(r\bar{\varphi})_{rr} \quad (13)$$

en dus de vorm hebben

$$r\bar{\varphi} = f(r-ct) + F(r+ct) \quad (14)$$

waarbij r de afstand van het beschouwde punt tot $P(x, y, z)$ voorstelt.

Indien nu van een oplossing φ' van (1) voor $t = 0$ de waarde en haar tijdsafgeleide gegeven zijn

$$\varphi = \varphi(x, y, z), \quad \dot{\varphi} = \chi(x, y, z) \quad (15)$$

dan zal voor de middelwaarde $\bar{\varphi}$ over een bol met middelpunt (x, y, z) een straal r gelden

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi} \iint \varphi(x+lr, y+mr, z+nr) d\omega \quad (16)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \iint \chi(x+lr, y+mr, z+nr) d\omega \quad (17)$$

als l, m en n de richtingscosinussen van de straal aanduiden dus in poolcoördinaten

$$l = \sin\theta \cos\vartheta, \quad m = \sin\theta \sin\vartheta, \quad n = \cos\theta$$

en

$$d\omega = \sin\theta d\theta d\vartheta.$$

Uit (11) volgt dan direct, dat

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} t \iint \varphi'(x+ct \sin\theta \cos\vartheta, y+ct \sin\theta \sin\vartheta, z+ \\ &+ ct \cos\theta) \sin\theta d\theta d\vartheta + \frac{t}{4\pi} \iint \chi(x+ct \sin\theta \cos\vartheta, y+ct \sin\theta \sin\vartheta, \\ &+ ct \cos\theta) \sin\theta d\theta d\vartheta. \end{aligned} \quad (18)$$

Dit stelt de genoemde formule van Poisson voor.

Cursus
Methoden der mathematische physica.

De formule van Kirchhoff.

door
R. Timman.

Een generalisatie van de vroeger gegeven formule van Poisson wordt geleverd door de formule van Kirchhoff.

Indien $u(x, y, z, t)$ een oplossing is van de golfvergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$$

waarvan de afgeleiden van de eerste en tweede orde op zeker gesloten oppervlak S continu zijn en indien (x_1, y_1, z_1) een punt is binnen S geldt

$$u(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ [u] \left(\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \right\} ds.$$

Hierin is r de afstand van het punt (x_1, y_1, z_1) tot een punt op S , $\frac{\partial}{\partial n}$ duidt differentiatie langs de normaal op S naar binnen toe en met de notatie $[\psi]$ is bedoeld

$$[\psi] = \psi(x, y, z, t - \frac{r}{c})$$

Om deze formule te bewijzen, berekenen wij eerst de afgeleiden van de functie

$$v = u(x, y, z, t - \frac{r}{c}) = [u]$$

Dan is

$$v_x = [u_x] - \frac{1}{c} r_x [u_t]$$

$$v_{xx} = [u_x]_x - \frac{1}{c} r_{xx} [u_t] - \frac{1}{c} r_x [u_t]_x = [u_{xx}] - \frac{1}{c} r_x [u_{xt}] - \frac{1}{c} r_x [u_t]_x - \frac{r_{xx}}{c} [u_t]$$

en

$$[u_t]_x = [u_{xt}] - \frac{1}{c} r_x [u_{tt}].$$

Verder is dan

$$\begin{aligned} v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} &= [u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}] - \frac{1}{c} \sum r_x [u_{xt}] - \frac{1}{c} \sum r_x [u_t]_x - \frac{[u_t]}{c} \sum r_{xx} = \\ &= - \frac{r_x}{c} \sum r_x \left\{ [u_{xt}] - \frac{1}{c} r_x [u_{tt}] \right\} - \frac{1}{c} \sum r_x [u_t]_x - \frac{[u_t]}{c} \sum r_{xx} = \\ &= - \frac{2}{c} \sum r_x [u_t]_x - \frac{1}{c} \left(\sum r_{xx} \right) [u_t] = - \frac{2}{c} \left\{ \sum r_x [u_t]_x + \frac{1}{r} [u_t] \right\} \end{aligned}$$

daar $\sum r_x^2 = 1$ en $\sum r_{xx} = \frac{2}{r}$.

Om deze uitdrukking verder te herleiden, merken wij op, dat

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{r_x}{r} [u_t] \right\} &= \frac{\sum r_{xx}}{r} [u_t] - \frac{\sum (r_x)^2}{r^2} [u_t] + \frac{\sum r_x [u_t]_x}{r} = \quad [\quad] \\ &= \frac{1}{r^2} [u_t] + \frac{\sum r_x [u_t]_x}{r} \end{aligned}$$

zodat

$$\frac{1}{r} \Delta v = - \frac{2}{c} \sum \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{r_x [u_t]_x}{r} \right\}.$$

Volgens de stelling van Green, toegepast op S en de functies v en $\frac{1}{r}$ geldt, indien P buiten S ligt

$$\iint_S \left\{ v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial v} \right\} dS + \iiint_V \frac{1}{r} \Delta v \, dV = 0$$

die, daar de tweede integrand een divergentie-uitdrukking is, overgaat in

$$\iint_S \left\{ v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{cr} \frac{\partial r}{\partial v} [u_t] \right\} dS = 0$$

of daar

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right] - \frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial v} [u_t]$$

$$\iint_S \left\{ [u] \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right] - \frac{1}{cr} \frac{\partial r}{\partial v} [u_t] \right\} dS = 0.$$

Indien P binnen S ligt, sluiten wij op de bekende wijze P uit door een klein bolletje, waarvan wij de straal tot nul laten naderen en vinden dan de gewenste formule.

Het begrip karakteristieken van een hyperbolische lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde.

Beschouw de lineaire vergelijking van de tweede orde

$$\sum a_{ik} u_{x_i x_k} \leq b_i u_{x_i} + c = 0 \quad (1)$$

in n variabelen $x_1, \dots, x_n$, waarbij de coëfficiënten a_{ik} functies zijn van deze n variabelen.

Voor deze vergelijking denken wij ons het beginwaardeprobleem gesteld. Op een zeker $(n-1)$ oppervlak C_0 zijn de waarden van u en haar eerste afgeleiden u_{x_k} ($k = 1, \dots, n$) voorgeschreven. Wij onderzoeken nu, of het mogelijk is met behulp van (1) langs dit oppervlak de hogere afgeleiden te bepalen. Denk, dat C_0 gegeven is door een parameter-voorstelling

$$x_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}), \dots, x_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$$

en de gegeven waarden van u en u_{xk} eveneens

$$u(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}), u_{x_k}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}),$$

waarbij moet gelden, dat

$$u_{\lambda_\nu} = u_{x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial \lambda_\nu} \quad \nu = 1, \dots, n-1 \quad (2)$$

waarbij de sommatie conventie is aangenomen.

Door eliminatie van de $(n-1)$ parameters ontstaat de vergelijking van het oppervlak $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$. Voer nu als nieuwe variabelen in de grootheden

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \text{ en } \varphi = \lambda_n,$$

waarbij

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \neq 0.$$

Dan wordt

$$u_{x_i} = u_{\lambda_k} \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_i} \quad (3)$$

en

$$u_{x_i x_j} = u_{\lambda_k \lambda_l} \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_l}{\partial x_j} + u_{\lambda_k} \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

De vergelijking gaat dan over in

$$a_{ij} \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_l}{\partial x_j} u_{\lambda_k \lambda_l} + a_{ij} \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial x_i \partial x_j} u_{\lambda_k} + b_i \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_i} u_{\lambda_k} + c = 0 \quad (4)$$

waarbij over alle 2 x voorkomende indices van 1 tot n is gesommeerd. Hier zijn echter alle afgeleiden $u_{\lambda_i \lambda_k}$ waarbij niet i en k beide n zijn, bekend. Immers, indien i en k beide $< n-1$ zijn, volgt de afgeleide direct uit de gegeven functie $u(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ en indien één index de waarde n heeft, is

$$u_{\lambda_\nu \lambda_n} = \frac{\partial}{\partial \lambda_\nu} u_{x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \lambda_n}$$

die, daar op het oppervlak u als functie van $\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$ gegeven is, bekend is.

Zo blijft als enige onbekende afgeleide in (4) over, de afgeleide $u_{\lambda_n \lambda_n}$, die als coëfficiënt heeft

$$\sum a_{ik} \frac{\partial \lambda_n}{\partial x_i} \frac{\partial \lambda_n}{\partial x_k} = \sum a_{ik} \varphi_{x_i} \varphi_{x_k}$$

Indien dus deze coëfficiënt op het oppervlak niet nul is, kunnen wij de naar buiten voerende afgeleide ondubbelzinnig berekenen. Is het oppervlak echter zodanig, dat de coëfficiënt wel nul is, dan is dat niet meer mogelijk. Het oppervlak heet dan ^{een} karakteristiek oppervlak. De functie $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ voldoet dan aan de betrekking

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \varphi_{x_i} \varphi_{x_k} = 0, \quad (5)$$

die in het algemeen echter alleen op C_0 vervuld zal zijn. Wij kunnen dit echter omzetten in een partiële differentiaalvergelijking door als parameters in te voeren $u_1 = x_1, \dots, u_{n-1} = x_{n-1}$ en dan C_1 te schrijven als

$$x_n = \psi(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

In de parameter $x_1, \dots, x_{n-1}$ moet dan $\psi = x_n$ voldoen aan

$$\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik} \psi_{x_i} \psi_{x_k} - 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \psi_{x_i} + a_{nn} = 0. \quad (6)$$

Is nu $\varphi = 0$ een oplossing van (5), opgevat als partiële differentiaalvergelijking, dan kunnen wij de vergelijking $\varphi = c$ naar x_n oplossen

$$x_n = \psi(x_1, \dots, x_{n-1}, c)$$

die voldoet aan (6).

Is omgekeerd $x_n = \psi(x_1, \dots, x_{n-1}, c)$ een schaar van oplossingen van (6), die wij oplossen door $c = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, dan is $\varphi = 0$ een oplossing van (5). Dit levert een mogelijkheid om bij één karakteristiek oppervlak een gehele schaar te vinden.

Voorbeeld: De golfvergelijking in twee dimensies

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0.$$

Beschouw de karakteristieke kegel

$$t^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

De functie $\chi = t^2 - x^2 - y^2$ voldoet echter aan

$$\chi_{tt} - \chi_{xx} - \chi_{yy} = 4\chi$$

zodat alleen nu $\chi = 0$ aan voorwaarde (5) is voldaan. Beschouwen wij echter

$$\varphi = t - \sqrt{x^2 + y^2} = c$$

dan geldt

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0$$

zodat deze schaar wel een schaar karakteristieke oplossingen voorstelt. In het algemeen worden de karakteristieke oppervlakken voor deze vergelijking voorgesteld door de kegels

$$t - t_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

De vraag rijst nu: Wat stellen de beschrijvenden van deze kegels voor? Deze vraag beantwoorden wij algemeen.

Beschouw eerst een oppervlak C_1 in de ruimte $\varphi(x_1, \dots, x_n) = c$. Het raakvlak aan dit oppervlak heeft de n richtingsgetallen φ_{x_k} . Met behulp van de gegeven differentiaalvergelijking voegen wij nu in dit punt aan het raakvlak een vector toe door

$$\frac{dx_i}{ds} = \dot{x}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \varphi_{x_k} \quad (7)$$

Deze richting heet in ieder punt van G de transversaalrichting, die de differentiaalvergelijking aan het raakvlak (of aan de normaal) toevoegt en de differentiatie in die richting heet transversale differentiatie. Het raakvlak aan C_1 en de transversale richting zijn elkaars geconjugeerde t.o.v. het kwadratische oppervlak

$$\sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \xi_k = 0.$$

Het oppervlak C_1 is nu dan en slechts dan een karakteristiek oppervlak, als in ieder punt de transversale richting in het raakvlak valt.

Immers, dan moet

$$\sum x_i \varphi_{x_i} = 0$$

zijn of wel

$$\sum a_{ik} \varphi_{x_i} \varphi_{x_k} = 0.$$

De vergelijkingen (7) kunnen wij voor een gegeven schaar $\varphi = \text{const.}$ als gewone differentiaalvergelijkingen opvatten. Als $\varphi = \text{const.}$ een schaar karakteristieke oppervlakken voorstelt, dus aan (5) voldoet, dan is φ een integraaloppervlak van de gewone differentiaalvergelijkingen (7), dus geheel opgebouwd uit integraalkrommen, immers langs een integraalkromme geldt

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \sum a_{ik} \varphi_{xx} \varphi_{x_i} = 0.$$

De integraalkrommen heten karakteristieke stralen van de differentiaalvergelijking.

In ons voorbeeld worden de stralen opgeleverd, dus de vergelijkingen

$$\dot{x} = + \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{t-c}$$

$$\dot{y} = + \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{y}{t-c}$$

$$\dot{t} = 1$$

dus

$$x = \alpha (t-c)$$

$$y = \beta (t-c),$$

waarbij $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ moet zijn.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m (O).

Cursus:

Methoden der mathematische physica

Deel II. De golfvergelijking.

door

Dr R. Timman.

Op deze wijze kan men in ieder punt van de ruimte een kegel aangeven, waarvan de beschrijvende worden opgeleverd door de dragers van de lijnelementen van de karakteristieke krommen door dat punt.

Indien wij de reciproke matrix van de a_{ik} aanduiden door A_{ik} geldt identiek:

$$\sum a_{ik} \varphi_{xi} \varphi_{xk} = \sum A_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k$$

Indien wij dus in de n dimensionale ruimte een maatbepaling volgens Riemann invoeren door het lijnelement

$$ds^2 = \sum A_{ik} dx_i dx_k$$

dan zijn de karakteristieke stralen de nulllijnen voor deze maatbepaling. Voor de golfvergelijking $U_{xx} + U_{yy} - U_{tt} = 0$ worden de karakteristieke stralen dus opgeleverd door $dx^2 + dy^2 - dt^2 = 0$ en in een punt (a, b, c) wordt de karakteristieke kegel opgeleverd door

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (t-c)^2.$$

Voor de potentiaalvergelijking $U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$ bestaat de karakteristieke kegel in elk punt uit de isotrope kegel en de bijbehorende Riemannse metriek is de gewone Euclidische metriek in de 3-dimensionale ruimte.

Om het beginwaardenprobleem voor de golfvergelijking op te lossen, behandelen wij eerst de integratiemethode van Riemann om hyperbolische vergelijkingen met twee onafhankelijke veranderlijken.

Indien de karakteristieke kegel reëel is in zeker gebied van de ruimte noemt men hier de vergelijking hyperbolisch, is zij imaginair, dan is de vergelijking elliptisch.

3. Hyperbolische differentiaalvergelijkingen met 2 onafhankelijk veranderlijken.

3.1. Herleiding tot de normaalvorm.

Wij beschouwen een differentiaalvergelijking van de tweede orde in twee variabelen

$$a(x,y) U_{xx} + 2b(x,y) U_{xy} + c(x,y) U_{yy} = d(x,y) \quad (1)$$

waarvan, zoals wij weten de bijbehorende karakteristieke vergelijking is

$$a \varphi_x^2 + 2b \varphi_x \varphi_y + c \varphi_y^2 = 0. \quad (2)$$

of wel

$$\varphi_x - \lambda_1 \varphi_y = 0, \quad \psi_x - \lambda_2 \psi_y = 0$$

als λ_1 en λ_2 de wortels aanduiden van de vergelijking

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0,$$

die wij in ieder punt reëel en verschillend veronderstellen.

Zo verkrijgen wij twee scharen integraalkrommen, $\varphi = \text{const}$ en $\psi = \text{const.}$, zodanig, dat door ieder punt één kromme van elke schaar gaat en dat

$$\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x \neq 0 \text{ is.}$$

Beschouw nu $\xi = \varphi(x, y) = \text{const.}$ en $\eta = \psi(x, y) = \text{const.}$, als nieuwe coördinatenlijnen, dan kunnen wij vergelijking (1) op deze nieuwe coördinaten transformeren:

$$u_x = u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x,$$

$$u_y = u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \varphi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \varphi_x \psi_x + u_{\eta\eta} \psi_x^2 + u_\xi \varphi_{xx} + u_\eta \psi_{xx},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \varphi_x \varphi_y + u_{\xi\eta} (\varphi_x \psi_y + \psi_x \varphi_y) + u_{\eta\eta} \psi_x \psi_y + u_\xi \varphi_{xy} + u_\eta \psi_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \varphi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \varphi_y \psi_y + u_{\eta\eta} \psi_y^2 + u_\xi \varphi_{yy} + u_\eta \psi_{yy}.$$

Daar zowel φ als ψ aan de karakteristieke vergelijking (2) voldoen, blijft van de tweede orde termen in u alleen voor de term met $u_{\xi\eta}$

$$2 \left\{ a \varphi_x \psi_x + b \varphi_x \psi_y + b \psi_x \varphi_y + c \varphi_y \psi_y \right\} u_{xy} + \dots = 0$$

Men kan bewijzen, dat daar zowel $ac - b^2 > 0$ en $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \neq 0$, deze coëfficiënt in het gehele gebied $\neq 0$ is.

3.2. De integratiemethode van Riemann.

Wij beschouwen nu de vergelijking in de normaalvorm

$$L[u] = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f$$

waarbij de karakteristieken gegeven zijn door $x = \text{const.}$ en $y = \text{const.}$ en a, b, c en f gegeven functies zijn van x en y , die continu zijn en continue afgeleiden van de eerste orde hebben.

Wij zoeken een oplossing voor deze differentiaalvergelijking met behulp van de stelling van Green, die in de potentiaaltheorie zo'n belangrijke rol speelt. Deze is gebaseerd op de stelling van Gauss

$$\int (lM + mN) ds = \iint \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy \text{ en luidde}$$

$$\int (u v_n - v u_n) ds = \iint (u \Delta v - v \Delta u) d\Omega. \quad (l \text{ en } m \text{ richtingscosinus-}$$

sen van de normaal)

Wij zoeken nu naast $L[u]$ een tweede differentiaaluitdrukking $L(v)$ zodanig, dat de uitdrukking $vL(u) - uL(v)$ een divergentieuitdrukking is.

Dit bereiken wij met

$$\bar{L}[v] = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv$$

Dan is nl.

$$vL[u] - u\bar{L}[v] = vu_{xy} - uv_{xy} + avu_x + bvu_y + cuv + u(av)_x + u(bv)_y - \\ - cuv = (avu)_x + (buv)_y + \frac{1}{2}(vu_y - uv_y)_x + \frac{1}{2}(vu_x - uv_x)_y,$$

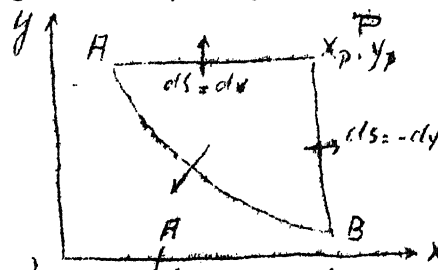
zodat wij kunnen nemen

$$M = \frac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv,$$

$$N = \frac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv.$$

Wij passen nu de stelling van Gauss toe op het gebied G, begrensd door een kromme c met continu variërende raaklijn en twee lijnen door een punt P (x_p, y_p) evenwijdig met de coördinaatassen. Nemen we de normaal naar buiten positief, dan is

$$\iint_G \{vL[u] - u\bar{L}[v]\} dx dy = \int_A^B \left\{ \frac{1}{2}(vu_x - uv_x) + buv \right\} dx - \int_A^B \left\{ \frac{1}{2}(vu_y - uv_y) + auv \right\} dy + \int_B^A (LM + mN) ds$$



Wij beschouwen nu het geval, dat langs de kromme AB, waarvan verondersteld wordt, dat iedere lijn evenwijdig met de coördinaatassen haar in hoogstens één punt snijdt en de waarden van u en de eerste afgeleiden $u_x = p$ en $u_y = q$ gegeven zijn.

Door partiele integratie gaat dan de uitdrukking over in

$$v_p u_p - \frac{1}{2} v_A u_A - \frac{1}{2} v_B u_B - \int_A^P u(v_x - bv) dx + \int_B^P u(v_y - av) dy - \int_B^A (LM + mN) ds = \\ \iint_G \{vL[u] - u\bar{L}[v]\} dO.$$

Indien het nu gelukt om de functie v zo te bepalen, dat zij voldoet aan de volgende eisen:

a) v is een oplossing van de geadjungeerde differentiaalvergelijking

$$\bar{L}[v] = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv = 0.$$

b) op AP voldoet v aan $v_x - bv = 0$, op BP aan $v_y - av = 0$

en tenslotte moet zij in P de waarde 1 hebben;

c) $v_p = 1$.

Deze functie O heet de functie van Riemann, die bij de differentiaalvorm $L[u]$ behoort. Zij is een functie van x en y met de coördinaten x_p en y_p als parameters. Indien zij gevonden kan worden, kunnen wij schrijven

$$2U_p = v_A u_A + u_B v_B + \int_A^B [(vu_y - uv_y + 2auv)l_n + (vu_x - uv_x + 2buv)m_n] ds \\ + 2 \iint_G f v dx dy.$$

waarbij l en m richtingscosinussen van de normaal op de kromme AB voorstellen.

In het algemeen zal natuurlijk de bepaling van een functie van Riemann om een gegeven differentiaalvergelijking niet zo eenvoudig zijn. In het geval van de vergelijking

$$L[u] = u_{xy} + \frac{1}{4}k^2 u = g(x,y), \text{ waarbij } k \text{ een gegeven constante}$$

is (vergelijking van de telegraaf) is dit echter wel het geval.

Wij proberen $v = f(z)$, waarbij $z = (x-x_p)(y-y_p)$.

De geadjungeerde vergelijking is $v_{xy} + \frac{1}{4}k^2 v = 0$.

Nu is $v_x = (y-y_p)f_z$, $v_y = (x-x_p)f_z$, $v_{xy} = f_z + zf_{zz}$, zodat

de vergelijking van f wordt

$$zf'' + f_z + \frac{1}{4}k^2 f = 0,$$

met als oplossing, die aan alle eisen voldoet.

$$f = J_0(k\sqrt{z}) = J_0\left\{k\sqrt{(x-x_p)(y-y_p)}\right\}$$

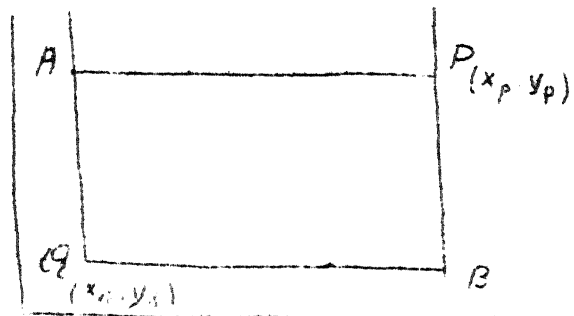
waarbij J_0 de functie van Bessel van de orde nul voorstelt.

Tenslotte bespreken wij nog een merkwaardige eigenschap van de functie van Riemann. Beschouw het geval, dat de kromme $\mathcal{C}$ ontaardt in twee rechte lijnstukken AQ en QB evenwijdig aan de assen. Dan volgt uit de afbeelding, dat onze formule blijft gelden. Daar echter de gegeven kromme bestaat uit karakteristieken, kunnen wij nu niet meer u , u_x en u_y omschrijven, maar allenn u . Dan is immers langs QA met u ook u_y bekend en volgt $u_x = p$ direct uit de gewone differentiaalvergelijking, die door substitutie van u en u_y in $L[u] = f$ (langs BQ) ontstaat.

$$p_y + a(x_Q, y)p + b(x_Q, y) = 0.$$

$$u_y(x_Q, y) + cu(x_Q, y) = f.$$

Analoog langs QB . Nu is, indien wij aannemen, dat $f = 0$ is,



$$\begin{aligned} 2Up &= v_A u_A + v_B u_B - \int_A^Q (vu_y - uv_y + 2auv) dy - \int_A^B (vu_x - uv_x + 2buv) dx = \\ &= v_A u_A + v_B u_B + u_Q v_Q - u_B v_B - 2 \int_A^Q v(u_y + au) dy - v_A u_A + v_Q u_Q + \\ &+ 2 \int_A^B v(u_x + bu) dx. \end{aligned}$$

Indien nu u een oplossing is van de vergelijking $L[u] = 0$, die bovendien op AQ voldoet aan $u_x + bu = 0$ en op BQ aan $u_y + au = 0$, terwijl $u_Q = 1$ is, dan is u een functie van Riemann voor de differentiaalvorm $\bar{L}[v]$ en het punt Q .

Bovendien is dan

$$u(x_p, y_p; x_Q, y_Q) = v(x_Q, y_Q; x_p, y_p), \text{ waarbij in het eerste geval}$$

x_p en y_p de coördinaten en x_Q en y_Q de parameters zijn en in het tweede geval x_Q en y_Q de coördinaten en x_p en y_p de parameters.

De functie van Riemann gaat dus over in die van de geconjugeerde differentiaalvorm, als men parameters en argument verwisselt.

3.3. De methode van Volterra ter oplossing van het beginwaarden probleem voor de golfvergelijking in twee dimensions.

Wij beschouwen nu een analoge methode om de oplossing te bepalen van de golfvergelijking in twee dimensions.

$$\Delta(u) = u_{xx} + u_{yy} - u_{tt}.$$

Gegeven zijn de randwaarden van u en haar afgeleiden op een oppervlak S . Wij stellen nu

$$\xi = x - x_p, \quad \eta = y - y_p, \quad \zeta = t - t_p$$

en construeren de karakteristieke kegel $\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2$, met top in P .

De oplossingsmethode gebaseerd op het theorema van Green voor de golfvergelijking. Wij zoeken dus weer de functie $\tilde{L}(u)$ zodanig te bepalen, dat $vL(u) - u\tilde{L}(v)$ een divergentieuitdrukking wordt. $L(u)$ blijkt zelfgeadjungeerd te zijn.

$$v(u_{xx} + u_{yy} - u_{tt}) - u(v_{xx} + v_{yy} - v_{tt}) = (vu_x - uv_x)_x + (vu_y - uv_y)_y - (vu_t - uv_t)_t.$$

Noemen wij de vector met componenten $vu_x - uv_x, vu_y - uv_y, -(vu_t - uv_t)$ $\vec{a}$, dan levert het divergentietheorema, toegepast op een gebied G , begrensd door een oppervlak O

$$\iiint_O \operatorname{div} \vec{a} \, d\tau = \iint_O \vec{a} \cdot \vec{n} \, dO$$

als $\vec{n}$ de naar $\vec{r}$ buiten gerichte normaal met richtingscosinussen l, m en n is $\iiint_O \{vL(u) - u\tilde{L}(v)\} \, d\tau = \iint_O \{(vu_x - uv_x)l + (vu_y - uv_y)m - (vu_t - uv_t)n\} \, dO = \iint_O (vu_r - uv_r) \, dO.$

Hierbij stelt richting $\vec{r}$ voor een richting met cosinussen l, m en $-n$.

Dit is juist de transversaalrichting van het raakvlak t.o.v. de karakteristieke kegel, want het raakvlak in een punt x_0, y_0, z_0 heeft tot vergelijking $l(x-x_0) + m(y-y_0) + n(z-z_0) = 0$

en tot poollijn tov. de karakteristieke kegel met top in het punt

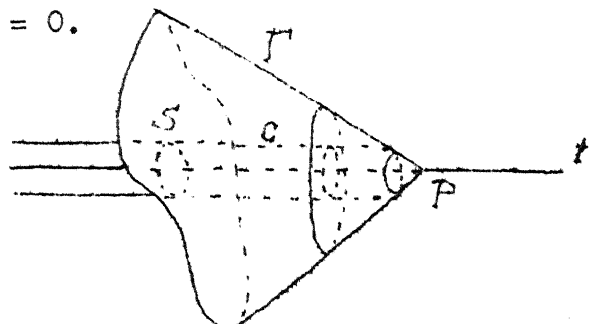
$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{-n}.$$

Indien u en v beide oplossingen zijn van de golfvergelijking wordt de betrekking

$$\iint_O (u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r}) \, dO = 0.$$

Wij nemen nu voor G het gebied enerzijds begrensd door de kegel Γ

en afgesloten door de doorsnijding van Γ met het oppervlak S .



Dan geldt

$$\iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) d\sigma + \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) d\sigma = 0$$

Hierbij zijn de waarden van u en $\frac{\partial u}{\partial r}$ op S gegeven, maar op Γ onbekend.

Volterra kiest voor v een oplossing van de vergelijking $L(v) = 0$, die nul is op Γ en wel de oplossing die uit de elementaire oplossing

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - \xi^2 - \eta^2}} \quad \text{ontstaat door integratie naar } x$$

$$v = a \cosh \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}}$$

Deze oplossing wordt oneindig op de as $\xi = \eta = 0$, zodat deze uitgesloten moet worden door een kleine cylinder C met straal ξ , zodat het gebied G nu wordt begrensd door Γ , S en C .

Daar de transversale richting op Γ langs de beschrijvende valt, is met v ook $\frac{\partial v}{\partial r}$ daar nul, zodat wij krijgen

$$\iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) d\sigma + \iint_C \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) d\sigma = 0.$$

Op C geldt

$$d\sigma = \xi \, d\varphi \, d\xi$$

indien cylindercoördinaten ρ , φ en ξ gebruikt worden.

Verder geldt voor de transversale afgeleide op C

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} = \frac{-\xi}{\rho \sqrt{\xi^2 - \rho^2}} = \frac{-\xi}{\xi \sqrt{\xi^2 - \xi^2}}$$

zodat

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \iint_{S, C} \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) d\sigma = - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\xi} \frac{u(\xi, \xi, \varphi) \xi \, d\varphi \, d\xi}{\sqrt{\xi^2 - \xi^2}} -$$

$$- \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{\xi} \frac{\partial u}{\partial r} \left(\ar \cosh \frac{\xi}{\xi} \right) d\varphi \, d\xi$$

Indien $\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|$ begrensd is, dan wordt de tweede term nul, daar $\ar \cosh \frac{\xi}{\xi} \rightarrow \ln 2 \frac{\xi}{\xi}$ en $\xi \ln \xi \rightarrow 0$.

Verder gaat de eerste term over in $2\pi \int_0^{\xi} u(\xi, 0, 0) d\xi$

zodat wij krijgen

$$-2\pi \int_0^{\xi} u(\xi, 0, 0) d\xi = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) d\sigma$$

of, na differentiatie t.o.v. ξ ,

$$u_p = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right) d\sigma.$$

Dit is de formule van Volterra.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
Amsterdam (0).

Cursus;
Methoden der mathematische physica
Deel II. De golfvergelijking.

door
Dr R. Timman.

3.4. De "afdalingsmethode", (Méthode de descente) van Hadamard.

De formule van Poisson leverde de oplossing van het beginwaarden-probleem van de vergelijking in drie ruimtedimensies

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} - \frac{1}{c^2} \psi_{tt} = 0 \quad (1)$$

Indien n.l. voor $t = 0$ gegeven is

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(x, y, z) \\ \psi_t &= \chi(x, y, z) \end{aligned} \quad (2)$$

is op ieder tijdstip t .

$$\psi(x_p, y_p, z_p, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ t M_{ct}(\psi) \right\} + t M_{ct}(\chi). \quad (3)$$

waarbij het symbool $M_{ct}(\psi)$ betekent, dat gemiddeld moet worden over een boloppervlak met middelpunt x, y, z en straal ct .

Indien ψ en χ alleen functies zijn van x en y , $\psi(x, y)$ en $\chi(x, y)$ kunnen wij de integralen over de gehele bol vervangen door een dubbele integratie over de halve bol met $z > 0$, begrensd door het xy vlak.

$$M_r(\psi) = \frac{1}{2\pi r^2} \iint \psi d\sigma \quad (4)$$

waarbij σ het oppervlakteelement op de bol is. Neem nu x en y als onafhankelijk variabelen dan is

$$\frac{z}{r} d\sigma = dx dy$$

waarbij

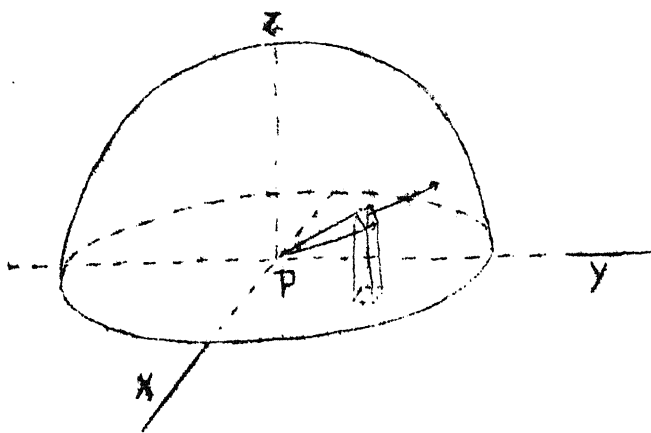
$$r^2 = (x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + z^2.$$

Nu wordt

$$M_r(\psi) = \frac{1}{2\pi r} \iint \frac{\psi(x, y) dx dy}{\sqrt{r^2 - (x-x_p)^2 - (y-y_p)^2}},$$

zodat het resultaat wordt

$$\psi(x_p, y_p, z_p, t) = \frac{1}{2\pi c} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \cdot \iint \frac{\psi(x, y) dx dy}{\sqrt{c^2 t^2 - (x-x_p)^2 - (y-y_p)^2}} + \iint \frac{\chi(x, y) dx dy}{\sqrt{c^2 t^2 - (x-x_p)^2 - (y-y_p)^2}} \right\},$$



waarbij de integraties zijn uitgestrekt over de gehele cirkel

$$(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 \leq c^2 t^2.$$

Evenals bij het resultaat van Volterra treedt hier een differentiatie naar t op, die niet uitgevoerd kan worden door differentiatie onder het integraalteken. Het is direct in te zien, dat er dan divergente integralen ontstaan, terwijl een differentiatie naar de bovengrens ook direct oneindige termen levert.

Het is natuurlijk mogelijk door geschikte substituties deze moeilijkheden te ontgaan maar de methode van Hadamard, die wij nu gaan behandelen, ontgaat ze juist niet. (Vgl. Le problème de Cauchy, Paris, 1932 Courant-Hilbert. Methoden der Mathematische Physik II, 1937).

3.5. Het eindige deel van een enkelvoudige divergente integraal.

Wij beschouwen allereerst een integraal van de vorm

$$\int_a^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

Als wij deze naar x differentieren, komen wij direct voor de bovengenoemde moeilijkheid te staan, immers het resultaat wordt

$$-\frac{1}{2} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{3/2}} + \left[\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} \right]_{t=x}$$

waarbij de eerste integraal divergeert en de tweede uitdrukking oneindig wordt.

Wij kunnen echter direct een limietwaarde berekenen van de uitdrukking $\left(\int_a^y \frac{f(t) dt}{(x-t)^{3/2}} - 2 \frac{f(y)}{\sqrt{x-y}} \right)$

voor $y \rightarrow x$, indien f voldoet aan een Lipschitz voorwaarde in de omgeving van x $|f(y) - f(x)| \leq C(y-x)$.

Het is duidelijk, dat iedere functie $B(y)$, die aan een dergelijke Lipschitz voorwaarde voldoet en waar $B(x) = -2f(x)$ ook aan het doel beantwoordt, immers de limietvoorwaarde verandert niet, als wij de uitdrukking

$$\lim_{y \rightarrow x} \left\{ \int_a^y \frac{f(t) dt}{\sqrt{x-t}^3} + \frac{g(y)}{\sqrt{x-y}} \right\}$$

berekenen.

Wij definiëren nu deze limiet als het eindige deel van de divergente integraal en schrijven dus

$$\int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{3/2}} \equiv \lim_{y \rightarrow x} \left\{ \int_a^y \frac{f(t) dt}{(x-t)^{3/2}} + \frac{g(y)}{\sqrt{x-y}} \right\}.$$

Wij kunnen dit begrip ook uitbreiden tot sterker divergente integralen. Indien $A(t)$ in de omgeving van $t = x$, p keer differentieerbaar is en indien $B(x)$ een zodanige functie is van x , dat de limiet bestaat (hetgeen voorwaarden oplegt aan de eerste p afgeleiden van B) is

$$\int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{p+\frac{1}{2}}} = \lim_{y \rightarrow x} \left\{ \int_a^y \frac{f(t) dt}{(x-t)^{p+\frac{1}{2}}} + \frac{g(y)}{(x-y)^{p+\frac{1}{2}}} \right\}$$

Om de limiet te berekenen, merken wij eerst op, dat

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{3/2}} &= \lim_{y \rightarrow x} \left\{ \int_a^y \frac{dt}{(x-t)^{3/2}} - \frac{2}{(x-y)^{\frac{1}{2}}} \right\} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \left\{ + \frac{2}{(x-y)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{(x-a)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{(x-y)^{\frac{1}{2}}} \right\} = - \frac{2}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

en verder, dat, wegens de Lipschitz voorwaarde, die f vervult, de integraal

$$\int_a^x \frac{f(t) - f(x)}{(x-t)^{3/2}} dt$$

convergeert.

$$\text{Wij krijgen dus: } \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{3/2}} = \int_a^x \frac{f(t) - f(x)}{(x-t)^{3/2}} dt - \frac{2f(x)}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}.$$

Om de meer algemene divergente integraal

$$\int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{p+\frac{1}{2}}}$$

te berekenen, ontwikkelen wij eerst $f(t)$ in een reeks van Taylor in de omgeving van x

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + f''(x) \frac{(t-x)^2}{2!} + \dots + f^{(p-1)}(x) \frac{(t-x)^{p-1}}{(p-1)!} + R^p,$$

$$\text{waarbij } R^p = f^{(p)} \left\{ x + \theta(t-x) \right\} \frac{(t-x)^p}{p!}.$$

Verder berekenen wij de eindige stukken van de integralen

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{q+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{q-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(x-a)^{q-\frac{1}{2}}}.$$

zodat

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{p+\frac{1}{2}}} &= - \frac{f(x)}{(p-\frac{1}{2})(x-t)^{p-\frac{1}{2}}} + \dots - \frac{(-1)^{p-\frac{1}{2}} f^{(p-1)}(x)}{(p-1)! \frac{1}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}}} + \\ &+ \int_a^x \frac{R^{(p)}(t) dt}{(x-t)^{p+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

en de laatste integraal convergeert.

Voor de functie g moeten wij dus nemen:

$$g(x) = \frac{f(x)}{p-\frac{1}{2}} - \frac{f'(x)(x-t)}{(p-\frac{3}{2})} \dots + \frac{(-1)^{p-1} f^{(p-1)}(x)(x-t)^{p-1}}{(p-1)! \frac{1}{2}}.$$

Het is direct duidelijk, dat de additieve eigenschap van de integralen ook gelden voor hun eindige delen, zoals

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

en

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Het is echter belangrijk op te merken, dat men met de waarde van de eindige stukken voorzichtig moet zijn, zie

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} = - \frac{2}{\sqrt{x-a}}.$$

Een belangrijke eigenschap heeft betrekking op de differentiatie naar de bovengrens x .

Men kan n.l. naar x differentieren, maar moet dan niet de bovengrens meenemen, daar deze uit de uitdrukking voor de divergente integraal is wegge gevallen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lim_{y \rightarrow x} \int_a^y \frac{f(t) dt}{(x-t)^{3/2}} - \frac{2 f(y)}{x-y} \right\} = \\ \lim_{y \rightarrow x} \left\{ - \frac{3}{2} \int_a^y \frac{f(t) dt}{(x-t)^{5/2}} + \frac{f(y)}{(x-y)^{3/2}} - \frac{2f'(y)}{\sqrt{x-y}} + \frac{f(y)}{(x-y)^{3/2}} - \frac{f(y)}{(x-y)^{3/2}} \right\} \\ = - \frac{3}{2} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Indien p niet een positief geheel getal is, maar nul of negatief, is de integraal convergent en is het eindige deel juist gelijk aan de waarde van de integraal.

Ook integralen van de vorm $\int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{p+\mu}}$, waarbij $0 < \mu < 1$ is, kunnen

op deze wijze behandeld worden. Ook voor $\mu = 0$, dus voor integralen van de vorm

$$\int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^p} \quad (p \text{ geheel})$$

kan men door logarithmische termen toe te voegen een eindige waarde krijgen

$$\frac{g(t)}{(x-t)^{p-1}} + g_1(t) \log (x-t).$$

Door echter termen in $(x-t)^{-(p-1)}$ toe te voegen, kan men hier het eindresultaat beïnvloeden en dus een waarde krijgen, die niet meer onduidelijk door de oorspronkelijke integraal is bepaald. Wij beperken onze beschouwingen dus alleen tot gebroken exponenten.

3.6. Het eindige deel van meervoudige divergente integralen.

Wij beschouwen nu het geval van een ruimte integraal

$$\iiint_V \frac{f(x,y,z)}{\{g(x,y,z)\}^{p+\frac{1}{2}}} \, dx dy dz$$

waarbij een deel S van het oppervlak, dat het volume V begrenst, gegeven is door $g(x,y,z)=0$, waarbij verondersteld wordt, dat hierop geen singulier punt van het oppervlak ligt en dat voor een naburig punt de afstand tot het oppervlak van dezelfde orde is als de waarde van g . Indien verder gegeven is dat $(\frac{\partial g}{\partial z}) \neq 0$ is, dat iedere rechte evenwijdig aan de z as binnen V het oppervlak S onder een eindige hoek in slechts één punt snijdt en dat de verdere begrenzing bestaat uit cylindervlakken met beschrijvenden evenwijdig aan de z as, afgesloten door een ander oppervlak S' , dan geldt volgens de definitie:

$$\iiint_V \frac{f(x,y,z)}{g(x,y,z)^{p+\frac{1}{2}}} dx dy dz = \iint dx dy \left| \int_{z_1}^z \frac{f(x,y,z) dz}{g(x,y,z)^{p+\frac{1}{2}}} \right| =$$

In dit geval is de definitie dus teruggebracht tot de in de vorige paragraaf behandelde definitie van het eindige stuk van een enkelvoudige integraal. Wij kunnen nu direct een methode aangeven om dit eindige stuk te berekenen door een oppervlak T aan te geven, zodat daar

$$G = \gamma(x, y, z, \xi)$$

waarbij γ met ε naar nul gaat, bijv.

$$J = \int D(x, y, z).$$

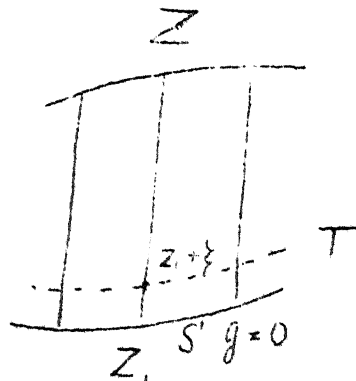
In dit geval berekenen wij eerst

$$\iint dx dy \sqrt{\int_{z_1}^z \frac{f}{p+z} \frac{dz}{(z-z_1)^{p+z}}}$$

waarbij $z = z_1 + \xi$ een punt is van T en ontwikkelen naar ξ .

Trekken wij dan een uitdrukking van de vorm

$$\frac{h(\xi)}{\xi^{p-2}} = \frac{h_0 + h_1 \xi + \dots + h_{p-1} \xi^{p-1}}{\xi^{p-\frac{1}{2}}}$$



van de integraal af, dan zal in de limiet voor $\xi \rightarrow 0$ het eindige stuk overblijven.

Deze vorm van de definitie kunnen wij direct uitbreiden door in de ruimte nieuwe coördinaten in te voeren. Dit kan zelfs in een ruimte van dimensies $x_1, \dots, x_n$, waar S' deel uitmaakt van een oppervlak $g(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Voer dan nieuwe coördinaten in $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n = g$, zodat de functionaaldeterminant niet nul wordt. In dat geval snijden de krommen $\lambda_1 = \text{const}, \dots, \lambda_{n-1} = \text{const}$,

het oppervlak onder eindige hoeken.

Nu veronderstellen wij verder, dat S regulier is, evenals de bijliggende begrenzende oppervlakken en dat deze S onder eindige hoeken snijden.

Dan is:

$$\left| \iiint_{g^{p+z}} \frac{f}{g^{p+z}} dx_1, \dots, dx_n \right| = \left| \iiint \frac{f}{g^{p+z}} J. d\lambda_1 \dots d\lambda_{n-1} dg \right| =$$

$$= \iint d\lambda_1 \dots d\lambda_{n-1} \left| \int \frac{f J}{g^{p+z}} dg \right|,$$

en wij beschouwen het eindige stuk van deze laatste integraal door niet tot aan S maar tot T , waar $g = \gamma$ te integreren, daarna een complementaire term $\frac{k}{\gamma^{p-z}}$ toe te voegen, waarbij k een reguliere functie van $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ en γ is in deze functie k zodanig te bepalen, dat de limiet voor $\gamma \rightarrow 0$ eindig blijft.

Cursus:

Methoden der mathematische physica .

Deel II. De golfvergelijking.

door

Dr R. Timman.

3.7. Oplossing van het probleem van Cauchy volgens de methode van Hadamard.

Het probleem van Cauchy voor een gegeven differentiaalvergelijking in ons geval

$$L(\varphi) = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} - \varphi_{tt} = 0 \quad (1)$$

verlangt een oplossing φ te bepalen, indien op een gegeven oppervlak S (waarvan wij steeds zullen onderstellen, dat de normaal continu varieert) de waarden van φ en haar afgeleiden omschreven zijn (waarbij deze natuurlijk voldoen aan de voorwaarde $d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz$ voor ieder tangentieel lijnelement). Dit betekent, dat naast φ ook de transversale afgeleide $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ is omschreven op S .

Wij beperken onze beschouwingen tot een deelgebied van de ruimte en wel een zodanig deelgebied, dat de één blad van de karakteristieke kegel Γ door ieder punt P uit S een stuk S_0 snijdt, zodanig dat door S_0 en de kegel een deelgebied van de ruimte volledig wordt begrensd en dat nergens deze kegel aan S_0 raakt. Een elementaire oplossing van de vergelijking $L(\varphi) = 0$ wordt geleverd door

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{\sqrt{(t-t_p)^2 - (x-x_p)^2 - (y-y_p)^2}} \quad (2)$$

Toepassing van de formule van Green op het geb. d , begrensd door de kegel Γ en S_0 levert dan, dat iedere oplossing φ van (1) moet voldoen aan

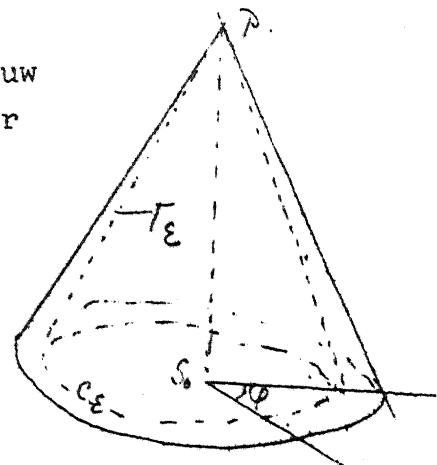
$$\iint_{\Gamma \cup S_0} \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\} = 0 \quad (3)$$

waarbij ∇ de transversale differentiatie voorstelt. Indien wij echter de integralen in (3) nader beschouwen, blijken zij echter op Γ te divergeren, omdat aldaar $r = 0$ is. Het zal hier dus nodig zijn te opereren met het begrip eindige waarde van Hadamard.

Wij beschrijven nu binnen het ruimtestuk een nieuw oppervlak bestaande uit een kegel Γ_ε gegeven door

$$\begin{aligned} t - t_p &= r \\ x - x_p &= r(1 - \mu) \cos \vartheta \\ y - y_p &= r(1 - \mu) \sin \vartheta \end{aligned}$$

waarbij over Γ_ε , $\mu = \varepsilon$ een kleine grootte is en afgesneden door het gebied S_ε dat deze kegel uit S snijdt. De grootheden r , ϑ en μ



beschouwen wij nu als nieuwe coördinaten. Verder snijden wij de top nog af door een plat vlak $D_r = \vartheta$.

De transformatieformules geven nu

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (1-\mu) \cos \vartheta + \frac{\partial}{\partial y} \cdot (1-\mu) \sin \vartheta \\ \frac{\partial}{\partial \mu} &= -\frac{\partial}{\partial x} \cdot r \cos \vartheta - \frac{\partial}{\partial y} \cdot r \sin \vartheta \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= -r(1-\mu) \sin \vartheta + \frac{\partial}{\partial x} + r(1-\mu) \cos \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= -\frac{1}{r} \cdot \left\{ \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\sin \vartheta}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= +\frac{1}{r} \cdot \left\{ -\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\cos \vartheta}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} &= \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \mu}.\end{aligned}$$

Langs een beschrijvende van $\sqrt{\varepsilon}$, die gekarakteriseerd is door $\varphi = \text{const.}$ heeft de normaal de richtingsgetallen

$$\cos \vartheta : \sin \vartheta : -(1-\varepsilon)$$

zodat de conormaal de richtingsgetallen

$$\cos \vartheta : \sin \vartheta : (1-\varepsilon)$$

heeft.

Verder is op $\sqrt{\varepsilon}$ het oppervlakte-element gegeven door

$$d\sigma = -dr \cdot \sqrt{1+(1-\varepsilon)^2} \cdot r(1-\varepsilon) \cdot d\vartheta$$

en de functie $\frac{1}{S}$ heeft de waarde

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{r \sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}} = \frac{1}{r \sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}}.$$

Op $\sqrt{\varepsilon}$ zijn de integratievariabelen r en ϑ . φ loopt van 0 tot 2π en voor elke ϑ loopt r van δ tot $r(\vartheta, \varepsilon)$, waarbij $r(\vartheta, \varepsilon)$ bepaald

wordt door het punt, dat het meridiaanvlak, behorende bij ϑ uit de doorsnijding van $\sqrt{\varepsilon}$ met S , die wij C_ε zullen noemen, insnijdt. Wij kunnen dus op C_ε , ϑ als parameter invoeren en merken verder op, dat r een continu differentieerbare functie is van ϑ voor alle waarden van ε . De bijdrage van $\sqrt{\varepsilon}$ tot de oppervlakteintegraal is nu:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\delta^{r(\vartheta)} \left[\varphi \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \cos \vartheta + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \sin \vartheta + (1-\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{1}{r} \right\} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{r} \left\{ \varphi_x \cos \vartheta + \varphi_y \sin \vartheta + \varphi_r (1-\varepsilon) \right\} \right] \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{1+(1-\varepsilon)^2} dr = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\delta^{r(\vartheta)} \left[-\frac{\varphi(1-\varepsilon)}{r} - \left\{ \varphi_x \cos \vartheta + \varphi_y \sin \vartheta + \varphi_r (1-\varepsilon) \right\} (1-\varepsilon) \right] dr = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left\{ A + B\varepsilon + C\varepsilon^2 + \dots \right\}\end{aligned}$$

Het blijkt, dat, zolang δ eindig blijft de integralen ontwikkeld kunnen worden naar positieve machten van ε , zodat na aftrek van het oneindige stuk $\frac{A}{\sqrt{\varepsilon}}$ een vorm overblijft, die in de limiet van $\varepsilon \rightarrow 0$ naar

nul gaat en dus geen bijdrage levert tot het eindige deel van de integraal. De gehele kegel $\sqrt{\epsilon}$ levert dus geen bijdrage tot het eindige deel van de integraal.

Wij beschouwen nu de integratie over het vlakje D, gekarakteriseerd door

$$r = \nu, \quad \epsilon < \mu < 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Hier is de conormaal langs de t-as gericht,

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = -\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1-\mu}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu}$$

het oppervlakteelement is

$$-\delta^2 \cdot (1-\mu) \cdot d\mu \cdot d\nu$$

en

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{r\sqrt{1-(1-\mu)^2}} = \frac{1}{r\sqrt{\mu(2-\mu)}},$$

dus

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{\delta} = \frac{1}{r^2\sqrt{\mu(2-\mu)}} - \frac{1+\mu}{r^2} \frac{(-1+\mu)}{\mu^{3/2}(2-\mu)^{3/2}} = \frac{1}{r^2\mu^{3/2}(2-\mu)^{3/2}}$$

De bijdrage van D wordt dus

$$-\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\epsilon}^1 \left[\frac{\varphi}{\delta^2} \frac{1}{\sqrt{\mu(2-\mu)}} + \frac{1}{\delta \sqrt{\mu(2-\mu)}} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1+\mu}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\} \right] \delta^2 (1-\mu) d\mu d\nu.$$

Het is duidelijk, dat indien φ eindige afgeleiden heeft naar x , y en t in een omgeving van P, die ook D bevat, dat de tweede term een convergente integraal naar μ levert, die in de limiet voor $\delta \rightarrow 0$ verdwijnt. Wij hebben ons dus uitsluitend bezig te houden met de eerste integraal.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\epsilon}^1 \varphi(\mu, \nu) \frac{(1-\mu)}{\mu^{3/2}(2-\mu)^{3/2}} d\mu$$

Indien wij schrijven $\varphi(\mu, \nu) = \varphi(0, \nu) + \mu \cdot \varphi_1(0, \mu, \nu)$ convergeert de integraal behorende bij de tweede term en bovendien is

$$\varphi_1(0, \mu, t) = -\delta \left\{ \varphi_x \cdot \cos \nu + \varphi_y \sin \nu \right\}$$

d.w.z. deze integraal gaat naar nul voor $\delta \rightarrow 0$.

Verder wordt de eerste integraal

$$-\int_0^{2\pi} \varphi(0, \nu) d\nu \cdot \int_{\epsilon}^1 \frac{(1-\mu)}{\mu^{3/2}(2-\mu)^{3/2}} d\mu$$

Stel $1-\mu = \lambda$, dan wordt

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{(1-\mu)^3}{\mu^{3/2}\sqrt{2-\mu}} d\mu = \int_0^{1-\epsilon} \frac{\lambda d\lambda}{(1-\lambda^2)^{3/2}} = \left[\frac{1}{(1-\lambda^2)^{1/2}} \right]_0^{1-\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-\epsilon)^2}} - 1.$$

Het eindige stuk van deze integraal wordt dus:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(0, \nu) d\nu$$

Indien $\nu \rightarrow 0$ gaat, nadert $\varphi(0, \nu)$ tot φ_p , zodat wij als uiteindelijke bijdrage van D vinden $2\pi \varphi_p$.

Tenslotte rest ons nog de integraal over S_{ϵ} .

Hier voeren wij als nieuwe coördinaten in de grootheden r, μ en ν en denken ons $r(\mu, \nu)$ als vergelijking van het oppervlak in de nieuwe coördinaten. Bij de rand wordt echter de eerste der integralen uit

divergent, zodat hier speciale zorg nodig is. De tweede integraal convergeert steeds, zodat hier geen aandacht aan besteed hoeft te worden. Voor de eerste integraal beschouwen wij de functie

$$\varphi(x, y, t) = \varphi(r(\theta, \mu), \mu, \nu).$$

die, in een omgeving van de rand een continu differentieerbare functie is van x, y en t en dus ook van μ en ν .

Dan geldt in deze omgeving

$$\varphi(r(\theta, \mu), \mu, \nu) - \varphi(r(0, \nu), 0, \nu) = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(r(\theta, \mu), \mu, \nu)$$

waarbij $0 < \theta < 1$ en $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$ continu is.

Verder is

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{s} = l \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{s} + m \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{s} + n \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{s} = \frac{R(\mu, \nu)}{\mu^{3/2}}$$

waarbij $R(\mu, \nu)$ een functie is, die ook voor $\mu = 0$ eindig blijft.

Hieruit volgt, dat de integraal

$$\iint_{S_0} (\varphi - \bar{\varphi}) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{s} d\omega,$$

waarbij $\bar{\varphi} = \varphi(r(0, \nu), 0, \nu)$ convergeert.

Wij moeten dus nog apart beschouwen de integraal

$$\int_{S_0} \bar{\varphi} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{s} d\omega = \int_0^1 \bar{\varphi}(r(0, \nu), 0, \nu) \int_{\varepsilon}^1 \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{s} d\omega.$$

waarbij $d\omega$ het oppervlakteelement, indien de snijkrommen van S_0 met de vlakken $\theta = \text{const.}$ en $\mu = \text{const.}$ als Gaussische coördinaten op S_0 worden beschouwd.

Nu is

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{s} d\omega = \left(l \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{s} + m \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{s} + n \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{s} \right) d\omega =$$

$$= \frac{l(x-x_p) + m(y-y_p) + n(t-t_p)}{\left\{ \sqrt{(t-t_p)^2 + (x-x_p)^2 + (y-y_p)^2} \right\}^3} = \frac{R d\omega}{s^3}$$

waarbij $d\omega$ de ruimtehoek is, waaronder het oppervlakteelement $d\omega$ uit P wordt gezien en R de Euclidische afstand tot P is

$$R = \sqrt{(t-t_p)^2 + (x-x_p)^2 + (y-y_p)^2}.$$

Uitgedrukt in de coördinaten ν en μ wordt

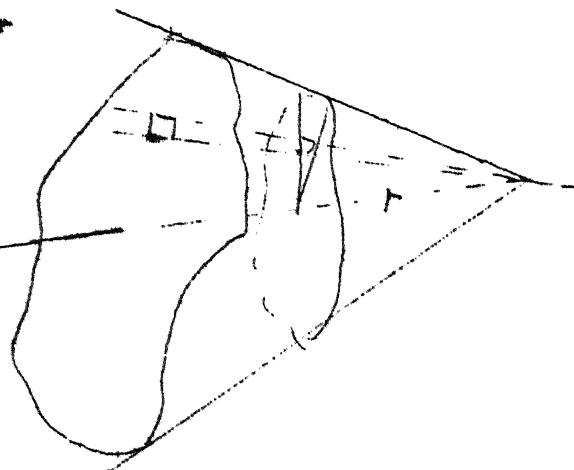
$$d\omega = -r^2 (1-\mu) d\mu d\nu \frac{1}{\sqrt{1+(1-\mu)^2}}$$

terwijl

$$R = r \sqrt{1+(1-\mu)^2} \\ = r \sqrt{1-(1-\mu)^2}$$

De integraal wordt nu

$$-\int_0^{2\pi} \bar{\varphi}(r(0, \nu), 0, \nu) d\nu \int_{\varepsilon}^1 \frac{(1-\mu) d\mu}{\mu^{3/2} (2-\mu)^{3/2}}$$



Stel $1-\mu = \lambda$, dan wordt

$$-\int_{\varepsilon}^{1-\mu} \frac{d\mu}{\mu^{3/2}(2-\mu)^{1/2}} = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\lambda d\lambda}{(1-\lambda^2)^{3/2}} = \left[\frac{1}{(1-\lambda^2)^{1/2}} \right]_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^{1/2}(2-\varepsilon)^{1/2}} - 1$$

zodat het eindige deel van deze integraal de waarde -1 aanneemt en wij dus voor de bijdrage vinden

$$\int_0^{2\pi} \bar{\varphi} \{z(0, v)/0, v\} dv$$

Wij hebben dus voor alle waarden van ε gevonden een identiteit van de vorm

$$\frac{A}{\varepsilon^{1/2}} + B \varepsilon^{1/2} + C + O(\varepsilon) = 0$$

die oplevert na vermenigvuldigen met $\varepsilon^{1/2}$, dat in de limiet $A=0$.

Dan volgt echter ook, dat $C=0$ is, d.w.z. uit de identiteit leiden wij een betrekking tussen de eindige stukken af.

$$2\pi\varphi_P = \iint_S \left[\varphi - \bar{\varphi} \right] \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\} d\sigma + \int_0^{2\pi} \bar{\varphi} \{z(0, v)/0, v\} dv$$

of, in de notatie van Hadamard

$$2\pi\varphi_P = \overline{\iint_S \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\} d\sigma}$$

voor een oppervlak, dat de karakteristieke halve kogel met P als top afsluit.

Deze betrekking geldt voor iedere oplossing van de golfvergelijking, zodat wij haar kunnen gebruiken om de waarde van φ in P uit te drukken in de randwaarden van φ en haar afgeleiden op ∂ .

Cursus:

Methoden der mathematische physica

Deel II. De golfvergelijking.

door

Dr R. Timman.

3.8 De methode van M. Riesz voor het probleem van Cauchy.

3.8.1. Principe van de methode.

Een andere wijze om het resultaat van de vorige paragraaf te vinden en om het begrip "eindig deel" van een divergente integraal, zoals dat door Hadamard is ingevoerd, te definiëren, is gegeven door M. Riesz (Acta Mathematica, 81, 1949, p.1-223).

Wij behandelen hier niet het meest algemene geval, maar hervinden nu volgens de methode van Riesz het resultaat van de vorige keer.

Wij beschouwen weer een oppervlak S en een deel van de x, y, t ruimte, zodanig dat een blad van de karakteristieke kegel Γ door ieder punt P van dat deelgebied door een deel S_0 van S wordt afgesloten.

Op het gebied G_0 begrensd door Γ en S_0 passen wij dan weer de stelling van Green toe

$$\iiint_{G_0} \{ \varphi L(\psi) - \psi L(\varphi) \} dV = \iint_{\Gamma + S_0} \left\{ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\} d\sigma \quad (1)$$

geldig voor ieder paar functies φ en ψ (die aan de nodige eisen van differentieerbaarheid voldoen).

De elementaire oplossing, die wij kiezen is

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{(t-t_0)^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} \quad (2)$$

Zij geeft echter aanleiding tot divergente integralen. Om dit te voorkomen, beschouwen wij eerst de functie

$$\rho = r^{\alpha-1}$$

waarbij $\alpha > \alpha_0$ en α_0 een zodanig positief getal is, dat substitutie in (1) nergens aanleiding geeft tot divergente integralen. Op deze wijze ontstaan links en rechts in (1) functies van α , die voor $\alpha > \alpha_0$ analytisch zijn. Wij zoeken nu de twee leden analytisch voort te zetten naar een uitdrukking, die voor $\alpha = 0$ ook nog analytisch is en verkrijgen op deze wijze de verlangde identiteit.

3.8.2. De definitie van Riesz voor een enkelvoudige divergente integraal.

Riesz stelt

$$\mathcal{I}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t) (x-t)^{\alpha-1} dt \quad x > a \quad (1)$$

Dit is voor $\text{Re } \alpha > 0$ een analytische functie van α .

Indien echter $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$ is, kunnen wij door analytische voortzetting gemakkelijk een waarde van $J^\alpha f(x)$ toekennen, indien $f(x)$ maar een voldoende aantal malen differentieerbaar is. Door middel van partiële integratie vinden wij n.l. direct de identiteit

$$\begin{aligned} J^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x f(t) d(x-t)^\alpha = \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x f'(t) (x-t)^\alpha dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (x-a)^{\alpha+k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{\alpha+n-1} dt = \quad (2) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (x-a)^{\alpha+k} + J^{\alpha+n} f^{(n)}(x) \end{aligned}$$

die een analytische voortzetting mogelijk maakt tot $\operatorname{Re} \alpha > -n$.

Op deze wijze vinden wij niet direct de uitdrukking van Hadamard voor het eindige stuk van de divergente integraal.

Daartoe stellen wij

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t-x)^k \quad (3)$$

en merken op dat

$$\begin{aligned} J^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) (x-t)^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \{f(t) - P(t)\} (x-t)^{\alpha-1} dt + \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x P(t) (x-t)^{\alpha-1} dt \end{aligned}$$

of wel

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \{f(t) - P(t)\} (x-t)^{\alpha-1} dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(x) (x-a)^{k+\alpha}}{(k+\alpha) k!} \quad (4)$$

Door $\alpha = -p + \frac{1}{2}$ en $n=p$ te nemen, vinden wij direct de formule van Hadamard (onder aan bldz. 19).

Verder merken wij nog de bijzondere waarden

$$\begin{cases} J^0 f(x) = f(x) \\ J^{-k} f(x) = f^{(k)}(x) \end{cases} \quad (5)$$

Ook de regel voor de differentiatie naar de bovengrens is nu zeer eenvoudig af te leiden.

Immers, voor $\alpha = 0$ geldt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} J^{\alpha+1} f(x) &= \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x f(t) (x-t)^\alpha dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) (x-t)^\alpha dt = J^\alpha f(x) \end{aligned} \quad (6)$$

en deze regel blijkt direct geldig te blijven bij de analytische voortzetting volgens (2).

3.8.3. Bewijs van de formule van Hadamard voor de oplossing van het probleem van Cauchy.

Wij gaan uit van de formule van Green, toegepast op een oplossing φ van

$$L(\varphi) = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} - \varphi_{tt} = 0$$

en

$$\varphi = \rho^{\alpha-1} = \{(t-t_p)^2 - (x-x_p)^2 - (y-y_p)^2\}^{\frac{\alpha-1}{2}}$$

$$\iiint_{G_p} \varphi \cdot L(\rho^{\alpha-1}) \cdot dV = \iint_{\Gamma_p + S_0} \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial \nu} \rho^{\alpha-1} - \rho^{\alpha-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\} \cdot dS'$$

waarbij G_p het gebied is, begrensd door de kegel Γ_p en S_0 het stuk dat het ene blad van Γ_p uit het gegeven oppervlak S' afsnijdt.

Allereerst is

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho^{\alpha-1}) = (\alpha-1) \rho^{\alpha-2} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = -(\alpha-1) \rho^{\alpha-3} (x-x_p)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho^{\alpha-1}) &= -(\alpha-1) \rho^{\alpha-3} - (\alpha-1)(\alpha-3)(x-x_p) \rho^{\alpha-4} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \\ &= -(\alpha-1) \rho^{\alpha-5} [\rho^2 - (\alpha-3)(x-x_p)^2] \end{aligned}$$

en

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\rho^{\alpha-1}) = -(\alpha-1) \rho^{\alpha-5} [\rho^2 - (\alpha-3)(y-y_p)^2]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho^{\alpha-1}) = +(\alpha-1) \rho^{\alpha-5} [\rho^2 + (\alpha-3)(t-t_p)^2]$$

zodat

$$L(\rho^{\alpha-1}) = -(\alpha-1) \rho^{\alpha-5} [3\rho^2 + (\alpha-3) \cdot \rho^2] = -\alpha(\alpha-1) \rho^{\alpha-3}$$

Indien wij dus $\text{Re } \alpha > 3$ stellen, zien wij dat op Γ_p , waar $\rho = 0$ is, zowel $L(\rho^{\alpha-1})$ als $\frac{\partial \rho}{\partial \nu} \rho^{\alpha-1}$, die een lineaire combinatie is van afgeleiden naar x, y en t , nul zijn, zodat nergens singulariteiten voorkomen.

Wij vinden dus als eerste resultaat voor $\text{Re } \alpha > 3$ de identiteit

$$-\alpha(\alpha-1) \iiint_{G_p} \varphi \rho^{\alpha-3} dV = \iint_{S_0} \left\{ \varphi \frac{\partial \rho}{\partial \nu} \rho^{\alpha-1} - \rho^{\alpha-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\} dS$$

omdat Γ_p geen bijdrage tot de oppervlakteintegraal levert.

Onze taak is nu beide leden zodanig om te vormen, dat voor $\alpha = 0$ zinvolle uitdrukkingen ontstaan.

Daartoe voeren wij weer de coördinaten r, μ en ϑ in

$$t - t_p = r$$

$$x - x_p = r(1-\mu) \cos \vartheta$$

$$y - y_p = r(1-\mu) \sin \vartheta$$

waardoor het linkerlid wordt

$$L.l. = -\alpha(\alpha-1) \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{\mu=0}^1 \int_{r=0}^{r_0} \bar{\varphi}(r, \vartheta, \mu) \rho^{\alpha-3} \cdot dV$$

en het volume-element is

$$dv = dx dy dz = \begin{vmatrix} (1-\mu)\cos\vartheta & (1-\mu)\sin\vartheta & 1 \\ -r\cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \\ -r(1-\mu)\sin\vartheta & r(1-\mu)\cos\vartheta & 0 \end{vmatrix} dr d\mu d\vartheta =$$

en

$$\varphi = r \sqrt{\mu(2-\mu)} \quad = -r^2(1-\mu) dr d\mu d\vartheta$$

zodat wij krijgen

$$+ \alpha(\alpha-1) \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\mu \int_0^{r_0} \varphi(r, \vartheta, \mu) r^{\alpha-1} \mu^{\frac{\alpha-3}{2}} (2-\mu)^{\frac{\alpha-3}{2}} (1-\mu) dr$$

Partiële integratie naar μ levert

$$\begin{aligned} & 2\alpha \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\mu \mu^{\frac{\alpha-1}{2}} (2-\mu)^{\frac{\alpha-3}{2}} (1-\mu) \int_0^{r_0(\vartheta, \mu)} \varphi(r, \vartheta, \mu) r^{\alpha-1} dr = \\ & 2\alpha \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \mu^{\frac{\alpha-1}{2}} (2-\mu)^{\frac{\alpha-5}{2}} \left\{ (2-\mu) + \frac{\alpha-3}{2} (1-\mu) \right\} \int_0^{r_0(\vartheta, \mu)} \varphi(r, \vartheta, \mu) r^{\alpha-1} dr - \\ & - 2\alpha \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \mu^{\frac{\alpha-1}{2}} (2-\mu)^{\frac{\alpha-3}{2}} (1-\mu) \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} r^{\alpha-1} \right\}_{r=0} - 2\alpha \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \mu^{\frac{\alpha-1}{2}} (2-\mu)^{\frac{\alpha-3}{2}} (1-\mu) \varphi(r, \vartheta, \mu) \frac{\partial r}{\partial \mu} r^{\alpha-1} d\mu \end{aligned}$$

Gebruik maken van de eigenschap, dat

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

kunnen wij nu de analytische voortzetting tot $\alpha = 0$ uitvoeren en krijgen dan voor het linkerlid

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \mu^{-1/2} (2-\mu)^{-5/2} (1+\mu) d\mu \varphi(0, \vartheta, \mu) - 2 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \mu^{-1/2} (2-\mu)^{-3/2} (1-\mu) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right)_{r=0} d\mu$$

terwijl de laatste term wegens de factor $\alpha = 0$ geen bijdrage levert.

Nu is verder in P

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right)_{r=0} = \left\{ - \frac{\partial \varphi}{\partial x} r \cos \vartheta - \frac{\partial \varphi}{\partial y} r \sin \vartheta \right\} = 0$$

zodat wij ten slotte alleen overhouden

$$2\pi \cdot \varphi_p \int_0^1 \mu^{-1/2} (2-\mu)^{-5/2} (1+\mu) d\mu = 2\pi \cdot \varphi_p \left[\mu^{1/2} (2-\mu)^{-3/2} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \varphi_p$$

Verder levert de term met $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ in het rechterlid voor $\alpha = 0$ wel een integrand, die plaatselijk oneindig wordt, maar geen divergente integraal.

De term met φ in het linkerlid kan geheel volgens de methode van § 3.7 herleid worden door μ en ϑ op S_0 als coördinaten in te voeren.

$$\begin{aligned} \iint_{S_0} \varphi \frac{\partial \rho^{\alpha-1}}{\partial r} dO &= \iint_0 \varphi(r, \vartheta, \mu) \frac{\partial}{\partial r} \rho^{\alpha-1} dO = \\ &= (1-\alpha) \iint \varphi(r, \vartheta, \mu) \cdot \left(\frac{1}{\rho} \right)^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\rho} dO \end{aligned}$$

Maar wij hebben gezien, dat

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\rho} dO = \frac{R^3 d\omega}{\rho^3} = \frac{(1-\mu) d\mu d\vartheta}{\mu^{3/2} (2-\mu)^{3/2}}$$

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m - O .

Cursus:

Methoden der mathematische physica

Deel II. De golfvergelijking.

door

Dr R. Timman

3.9 Toepassingen van de formule van Hadamard op de supersone aerodynamica.

Een belangrijke toepassing van de voorgaande formules wordt gevonden in de theorie van dunne draagvlakken, die zich met een snelheid groter dan die van het geluid bewegen.

Wij noemen deze snelheid U en duiden de geluidssnelheid aan met c . Noemen wij de snelheidscomponenten die het draagvlak extra aanbrengt in x (richting van U), y en z richting van u , v en w en veronderstellen wij, dat deze klein zijn t.o.v. U , dan nemen de vergelijkingen van Euler

$$\begin{aligned} u_t + (U+u)u_x + vu_y + wu_z &= -\frac{1}{\rho} p_x, \\ v_t + (U+u)v_x + vv_y + wv_z &= -\frac{1}{\rho} p_y, \\ w_t + (U+u)w_x + vw_y + ww_z &= -\frac{1}{\rho} p_z. \end{aligned} \quad (1)$$

bij verwaarlozing van termen van de tweede orde de vorm aan:

$$\begin{aligned} u_t + Uu_x &= -\frac{1}{\rho} p_x = -\frac{c^2}{\rho} \zeta_x \\ v_t + Uv_x &= -\frac{1}{\rho} p_y = -\frac{c^2}{\rho} \zeta_y \\ w_t + Uw_x &= -\frac{1}{\rho} p_z = -\frac{c^2}{\rho} \zeta_z \end{aligned} \quad (2)$$

terwijl de continuïteitsvergelijking wordt

$$\zeta_t + \rho(u_x + v_y + w_z)U \rho_x = 0 \quad (3)$$

Indien de stroming rotatie is, bestaat een snelheidspotentiaal φ , zodat

$$u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y, \quad w = \varphi_z \quad (4)$$

Uit het eerste stel vergelijkingen volgt dan:

$$\varphi_t + U\varphi_x = -c^2 \log \rho + f(t) \quad (5)$$

waarbij $f(t)$ een willekeurige functie is van t , die nul is, indien in het oneindige de stroming ongestoord is.

De continuïteitsvergelijking levert dan:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\delta}{\delta t} (\varphi_t + U\varphi_x) + \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} - \frac{U}{c^2} \frac{\delta}{\delta x} (\varphi_t + U\varphi_x) = 0 \quad (6)$$

of

$$-(M^2 - 1)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} - \frac{2U}{c^2} \varphi_{xt} - \frac{1}{c^2} \varphi_{tt} = 0 \quad (7)$$

Deze vergelijking kan voor de substituties

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda x \\ \eta &= y \\ \zeta &= z \\ \tau &= \lambda t - Mx \end{aligned}$$

getransformeerd worden in de golfvergelijking door geschikte keuze van κ , λ en μ .

$$\begin{aligned}\varphi_x &= \lambda \varphi_\xi - \mu \varphi_\tau \\ \varphi_{xt} &= \kappa \lambda \varphi_{\xi\tau} - \kappa \mu \varphi_{\tau\tau} \\ \varphi_{xx} &= \lambda^2 \varphi_{\xi\xi} - 2\lambda\mu \varphi_{\xi\tau} + \mu^2 \varphi_{\tau\tau} \\ \varphi_{tt} &= \kappa^2 \varphi_{\tau\tau}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\lambda^2(M^2-1)\varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta} + \varphi_{\xi\xi} + \left\{ -\frac{2U}{c^2}\kappa\lambda + 2\lambda\mu(M^2-1) \right\} \varphi_{\xi\tau} + \\ + \left\{ (M^2-1)\mu^2 - \frac{2U}{c^2}\kappa\mu - \frac{\kappa^2}{c^2} \right\} \varphi_{\tau\tau} = 0\end{aligned}$$

Indien

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{\sqrt{M^2-1}}, \text{ dus } \xi = \frac{x}{\sqrt{M^2-1}} \\ \kappa &= c\sqrt{M^2-1} \quad \tau = c\sqrt{M^2-1}t - \frac{Mx}{\sqrt{M^2-1}} \\ \mu &= \frac{M}{\sqrt{M^2-1}}\end{aligned}$$

wordt de vergelijking in de nieuwe coördinaten

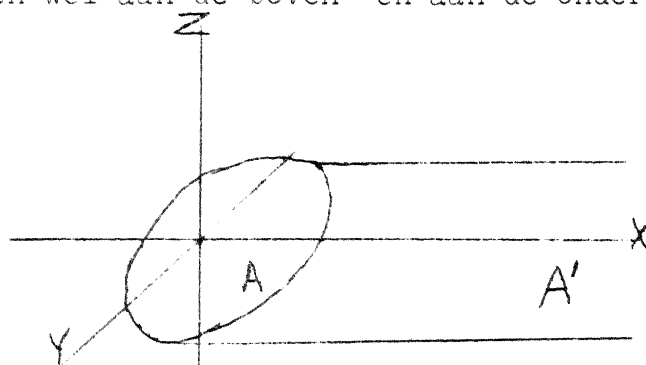
$$-\varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta} + \varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\tau\tau} = 0$$

d.i. de golfvergelijking.

Op het draagvlak moet de normaalsnelheid van de beweging gelijk zijn aan de normaalsnelheid van het oppervlak, d.w.z. op het draagvlak is de afgeleide $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ gegeven.

In de gelineariseerde theorie identificeren wij het dunne draagvlak, dat onder een kleine invalshoek met de stroming staat met zijn projectie op het XOY-vlak en de normaalsnelheid met de snelheidscomponent $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

Wij krijgen nu dus voorgeschreven de waarde van φ_z op een zeker gebied A van het OXY-vlak en wel aan de boven- en aan de onderkant.



Wij kunnen nu, zonder aan de algemeenheid te kort te doen, deze gegeven waarden van $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ splitsen in een symmetrisch deel, waarom dus $(\frac{\partial \varphi}{\partial z})_+ = (\frac{\partial \varphi}{\partial z})_-$ en een antisymmetrische deel, waarom $(\frac{\partial \varphi}{\partial z})_+ = -(\frac{\partial \varphi}{\partial z})_-$.

Het eerste geval correspondeert met een draagvlak zonder dikte, het tweede met een symmetrisch draagvlak. Uit de probleemstelling volgen dan verschillende symmetrie-eigenschappen van de oplossing.

In het eerste geval is φ een oneven functie van z , dus φ is nul overal op het OXY-vlak, waar zij continu is.

Het kan worden aangetoond, dat er een gebied achter het draagvlak is, waar φ discontinu is (de discontinuïteit in φ aan de achterkant van het draagvlak wordt "door de stroming meegevoerd") en dat begrensd wordt door twee lijnen evenwijdig aan de X-as die aan de draagvlakcontour raken. In veel gevallen speelt dit "zog" in de supersone draagvlaktheorie een rol hetgeen een aanzienlijke vereenvoudiging levert in vergelijking met de subsone draagvlaktheorie. Wij gaan er daarom ook niet verder op in. Overal elders in het XOY-vlak is $\varphi = 0$. In het tweede geval is $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ oneven, dus φ een even functie van z , d.w.z. $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ overal buiten het draagvlak. Hier treedt een dergelijk discontinuïteitsgebied buiten het draagvlak niet op.

Wij hebben nu dus (afgezien van het zoggebied) overal op het OXY-vlak randvoorwaarden vastgelegd. Voor wij er echter toe overgaan de formule van Hadamard toe te passen, zullen wij eerst de optredende termen fysisch interpreteren, teneinde een meer aanschouwelijke voorstelling van de speciale merites van de oplossing te krijgen.

Bronnen en dipolen in een supersone stroming.

Wij beschouwen eerst het geval van een stationnaire stroming, waarbij φ onafhankelijk is van t en dus moet voldoen aan

$$-(M^2 - 1)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0,$$

of in de nieuwe coördinaten

$$-\varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta} + \varphi_{\zeta\zeta} = 0$$

De karakteristieke kegel door een punt P is nu

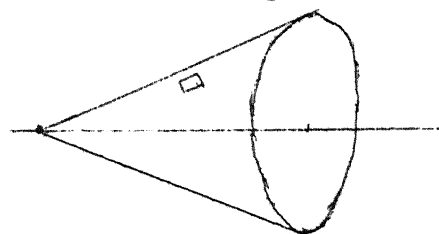
$$(\xi - \xi_P)^2 - (\eta - \eta_P)^2 - (\zeta - \zeta_P)^2 = 0$$

en haar beschrijvende lijnen heten hier de "Lijnen van Mach". De as van de kegel is de lijn door P evenwijdig aan de x-as. Onder een supersone bronstrooming ter sterkte σ verstaan wij de stroming met een snelheidspotentiaal

$$\varphi = \begin{cases} = \frac{\sigma}{\rho} = \frac{\sigma}{\sqrt{(\xi - \xi_P)^2 - (\eta - \eta_P)^2 - (\zeta - \zeta_P)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} & \text{voor } \xi - \xi_P > \sqrt{(\eta - \eta_P)^2 + (\zeta - \zeta_P)^2} \\ = 0 & \text{voor } \xi - \xi_P < \sqrt{(\eta - \eta_P)^2 + (\zeta - \zeta_P)^2} \end{cases}$$

die dus alleen reëel is binnen de kegel van Mach.

Allereerst bewijzen wij, dat het eindige stuk van de integraal, die de flux per seconde door een oppervlak dat de bron omsluit voorstelt, gelijk is aan $\pi\sigma$. Merk hiertoe op, dat de snelheidscomponenten binnen de kegel van een potentiaal $\varphi = \rho^{x-1}$



$$\begin{aligned}
 u = \varphi_x &= \varphi_{\xi} \frac{1}{\sqrt{M^2-1}} = -(\alpha-1)\xi^{\alpha-3}(M^2-1)^{1-\frac{\alpha}{2}} \\
 v = \varphi_y &= \varphi_{\eta} \frac{1}{\sqrt{M^2-1}} = -(\alpha-1)\eta^{\alpha-3}(M^2-1)^{\frac{3-\alpha}{2}} \\
 w = \varphi_z &= \varphi_{\xi} \frac{1}{\sqrt{M^2-1}} = -(\alpha-1)\xi^{\alpha-3}(M^2-1)^{\frac{3-\alpha}{2}}
 \end{aligned}$$

indien wij de bron in de oorsprong plaatsen, terwijl zij buiten de kegel nul zijn. Als oppervlak kiezen wij een stuk van de kegel, afgesloten door een sluitvlak $\xi = a$.

De flux door het oppervlak is dan

$$\iint \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dO,$$

als $\vec{n}$ de naar buiten gerichte eenheidsnormaal voorstelt.

Op de kegel is $\rho = 0$, zodat voor $\alpha > 3$ de bijdrage van de kegelmantel

$$\iint \{u \cdot n_x + v \cdot n_y + w \cdot n_z\} dO$$

nul wordt.

De bijdrage van het sluitvlak is

$$-\frac{\alpha-1}{\sqrt{M^2-1}} \iint \rho^{\alpha-3} \xi \cdot dO = -\frac{(\alpha-1)\xi}{\sqrt{M^2-1}} \int_0^{\xi} \int_0^{2\pi} \rho^{\alpha-3} r \cdot dr \cdot d\theta.$$

indien wij in het sluitvlak poolcoördinaten invoeeren

$$\begin{aligned}
 \eta &= r \cos \sigma \\
 \xi &= r \sin \sigma
 \end{aligned}$$

Dan wordt de integraal

$$\begin{aligned}
 &-\frac{(\alpha-1)\xi \cdot 2\pi\sigma}{\sqrt{M^2-1}} \int_0^{\xi} \left\{ \xi^2 - r^2 \right\}^{\frac{\alpha-3}{2}} (M^2-1)^{1-\frac{\alpha}{2}} r \, dr = \\
 &= -(\alpha-1)\xi \cdot 2\pi\sigma \xi (M^2-1)^{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\alpha-1} \cdot \left(\frac{\xi^2}{\xi^2} \right)^{\frac{\alpha-1}{2}} = -2\pi\sigma \cdot \xi^{\alpha}.
 \end{aligned}$$

Voor $\alpha=0$, dus voor de zuivere bronstrooming wordt dit $-2\pi\sigma$.

Een dipool definiëren wij als het stromingsveld dat voortstaat als van twee gelijke, maar tegengestelde enkele polen de onderlinge afstand in een zekere richting naar nul gaat, terwijl het product van afstand en sterkte constant blijft. Voor een dipool met as in de z-richting wordt dit dus

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial z_p} \cdot \frac{M}{\rho \sqrt{M^2-1}} = \frac{-M}{\sqrt{M^2-1}} \cdot \frac{\xi - \xi_p}{\rho^3}$$

binnen de kegel van Mach en $\varphi = 0$ buiten de kegel van Mach.

De formule van Hadamard

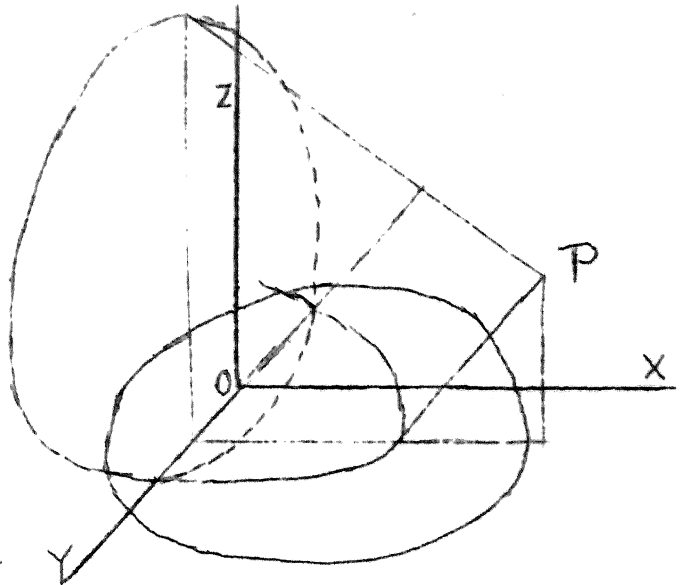
$$2\pi\varphi_p = \iint_S \left\{ \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \cdot \frac{1}{\rho} \right\} dO$$

kunnen wij dus zo interpreteren, dat wij de potentiaal in een zeker punt verkrijgen als som van een belegging van het oppervlak S met dipolen ter sterkte φ en asrichting gelijk aan de richting van de conormaal en enkele polen ter sterkte $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$. Wij beschouwen nu het symmetrische en antisymme-

trische geval afzonderlijk.

a) Draagvlak zonder dikte.

Wij beschouwen een draagvlak van willekeurige vorm en merken allereerst op, dat het XY-vlak, waar de waarden van φ of $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ (die hier met $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ samenvalt) gegeven zijn, de kegel niet afsluit, zodat wij de stelling niet zonder meer kunnen toepassen. Daartoe vullen wij het sluitvlak aan met een oppervlak, bestaande uit de omhullende van alle kegels van Mach (achterwaarts)



door de voorrand. Uit fysische overwegingen kan worden bewezen, dat op dat sluitvlak φ zowel als $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ (de differentiatie is een inwendige differentiatie, daar het oppervlak uit karakteristieken bestaat) nul zijn. Zo verkrijgen wij de formule voor een punt boven het OXY-vlak

$$2\pi\varphi_P = \int_S \left\{ \varphi_+ \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{r} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_+ \cdot \frac{1}{r} \right\} dO,$$

waarbij S hier het deel van het OXY-vlak voorstelt, begrensd door de hyperbolische doorsnijding met de kegel van Mach en de doorsnijding van het sluitvlak met het OXY-vlak. Dit behoeft niet de voorrand van het draagvlak te zijn, zoals wij zien in het geval van een driehoekig draagvlak dat binnen de kegel van Mach door de top ligt. Verder passen wij de stelling toe op het gebied aan de onderkant, begrensd door de kegel van Mach, dus P en het onderste deel van het sluitvlak. Dit levert

$$0 = \int_S \left\{ \varphi_- \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{r} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_- \cdot \frac{1}{r} \right\} dO$$

Door optellen van deze twee identiteiten krijgen wij

$$2\pi\varphi_P = \int_S \left[(\varphi_+ + \varphi_-) \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{r} - \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_+ + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_- \right\} \cdot \frac{1}{r} \right] dO$$

en door aftrekken

$$2\pi\varphi_P = \int_S \left[(\varphi_+ - \varphi_-) \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{r} - \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_+ - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_- \right\} \cdot \frac{1}{r} \right] dO.$$

MATHEMATISCH CENTRUM,
2e Boerhaavestr. 49,
AMSTERDAM - O.

Cursus:

Methoden der mathematische physica.

Deel II. De golfvergelijking.

door

Dr R. Timman.

3.10 De drukverdeling op een rechthoekige vlakke plaat in supersone stroming.

Wij passen de vooraangaande theorie nu toe op het geval van een rechthoekige vlakke plaat, die zich met een constante invalshoek met supersone snelheid in een richting loodrecht op haar voorrand beweegt.

In dit geval is op de plaat $w(\xi, \eta, +0) = w(\xi, \eta, -0)$, de verticale snelheidscomponent w een even functie van ξ , terwijl de snelheidspotentiaal φ en de snelheidscomponent u , die de druk bepaalt, oneven functies zijn van ξ . Beide zijn op het draagvlak discontinu $\varphi(+0) = -\varphi(-0)$ en φ zelfs in het zog er achter, dat echter in een supersone stroming geen invloed heeft op het draagvlak.

In het OXY-vlak hebben wij dus de volgende randvoorwaarden voor de functie $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$:

$$w = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)_{\xi = +0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)_{\xi = -0} = 1 \quad \begin{matrix} 0 < x < a \\ -b < y < +b. \end{matrix}$$

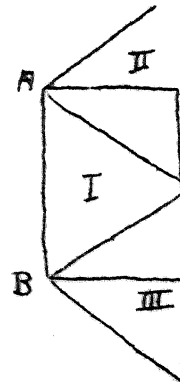
$\varphi = u = 0$ buiten deze rechthoek. Wij passen nu de formule voor de som van blz. 37 toe en vinden dan voor de potentiaal

$$\varphi_P = -\frac{i}{\pi} \iint_D \frac{w(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta$$

waarbij D het gebied is, dat de voorwaartse kegel van Mach met P als top insnijdt uit het OXY-vlak en dat achter de omhullende van de karakteristieken door de voorrand ligt.

Op het draagvlak is w gegeven, echter niet in het wigvormige gebied, dat begrensd wordt door een zijrand van het draagvlak en de karakteristiek door het bijbehorende voorste hoekpunt. Wij moeten dus voor de ligging van P verschillende gebieden onderscheiden, al naarmate het integratiegebied geheel op de rechthoek ligt op een deel van een zijgebied bevat.

I. De projectie van P ligt buiten de wigen van Mach door twee voorste hoekpunten.



II en III. De projectie van P ligt in de wig van Mach behorende bij zo'n hoekpunt.

Als φ bekend is, volgt de drukverdeling direct uit de snelheidscomponent in x richting u.

$$u = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\eta=0}$$

Wij behoeven dus slechts de waarde van u te berekenen voor $\xi = 0$. In geval I is het integratiegebied begrensd door de lijnen

$$\eta - \eta_p = \pm (\xi - \xi_p)$$

en de lijn $\xi = 0$ en

$$\varphi(\xi_p, \eta_p, 0) = \frac{1}{\pi} \int \int_D \frac{\alpha \xi d\eta}{\sqrt{(\xi_p - \xi)^2 - (\eta_p - \eta)^2}}$$

Wij nemen nu karakteristieke coördinaten in

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}(\xi + \eta), & \xi &= \alpha + \beta \\ \beta &= \frac{1}{2}(\xi - \eta), & \eta &= \alpha - \beta \end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_p, \beta_p) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_p}^{\beta_p} \int_{-\beta}^{\alpha_p} d\alpha \frac{1}{\sqrt{(\alpha_p - \alpha)(\beta_p - \beta)}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha_p}^{\beta_p} \alpha \beta \sqrt{\frac{\alpha_p + \beta}{\beta_p - \beta}} = \\ &= -\frac{\alpha_p + \beta_p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{(\alpha_p + \beta_p)}{4} = -\frac{\xi_p}{4} \end{aligned}$$

zodat

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_p} = -\frac{1}{4}$$

en dus op het draagvlak constant is.

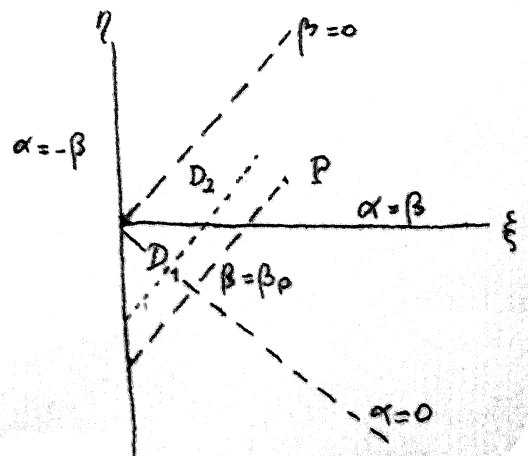
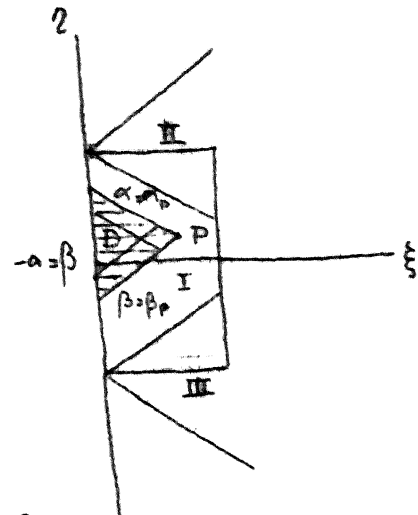
Wij beschouwen nu het gebied bij een hoekpunt en leggen de oorsprong in dit hoekpunt.

Hier geldt

$$\varphi(\xi_p, \eta_p) = \frac{1}{\pi} \int \int_{D_1} \frac{\alpha \xi d\eta}{\sqrt{(\xi_p - \xi)^2 - (\eta_p - \eta)^2}} + \frac{1}{\pi} \int \int_{D_2} \frac{w(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi_p - \xi)^2 - (\eta_p - \eta)^2}}$$

waarbij D_1 het stuk van het integratiegebied op de rechthoek en D_2 het deel daarbuiten is, waar $w(\xi, \eta)$ onbekend is.

Deze onbekende functie wordt nu gevonden uit de voorwaarde, dat buiten het draagvlak $\varphi = 0$ moet zijn, omdat het drukverschil en daarmee $u = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ nul is en omdat langs de voorste karakteristiek $\varphi = 0$ is. Door de formule dus voor een punt P buiten het draagvlak maar binnen de kegel van Mach toe te passen, verkrijgen wij een integratievergelijking voor de onbe-



kende snelheid $w(\xi, \eta)$.

$$0 = \int_0^{\beta_p} d\beta \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_p - \alpha)(\beta_p - \beta)}} + \int_0^{\beta_p} d\beta \int_{\beta}^{\alpha_p} \frac{d\alpha w(\alpha, \beta)}{\sqrt{(\alpha_p - \alpha)(\beta_p - \alpha)}}$$

Aangezien deze vergelijking moet gelden voor alle waarden van β_p moet de integrand in de integratie naar β nul zijn:

$$-\int_{-\beta}^{+\beta} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_p - \alpha}} = \int_{\beta}^{\alpha_p} \frac{d\alpha w(\alpha, \beta)}{\sqrt{(\alpha_p - \alpha)}} = \frac{1}{2} \{ -\sqrt{\alpha_p + \beta} + \sqrt{\alpha_p - \beta} \}$$

Dit is een integraalvergelijking van Abel voor de onbekende functie $w(\alpha; \beta)$ met β als parameter. De oplossing van de vergelijking wordt gevonden door te vermenigvuldigen met $\frac{1}{\sqrt{\lambda - \alpha_p}}$ en te integreren over α_p van β tot λ

$$\int_{\beta}^{\lambda} \frac{d\alpha_p}{\sqrt{\lambda - \alpha_p}} \int_{\beta}^{\alpha_p} \frac{d\alpha w(\alpha, \beta)}{\sqrt{\alpha_p - \alpha}} = - \int_{\beta}^{\lambda} \frac{d\alpha_p}{\sqrt{\lambda - \alpha_p}} \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_p - \alpha}}$$

Verwisseling van de integratievolgorde geeft:

$$\int_{\beta}^{\lambda} w(\alpha, \beta) d\alpha \int_{\alpha}^{\lambda} \frac{d\alpha_p}{\sqrt{(\alpha_p - \alpha)(\lambda - \alpha_p)}} = - \int_{-\beta}^{\beta} d\alpha \int_{\beta}^{\lambda} \frac{d\alpha_p}{\sqrt{(\lambda - \alpha_p)(\alpha_p - \alpha)}}$$

ofwel

$$\pi \int_{\beta}^{\lambda} w(\alpha, \beta) d\alpha = - \int_{-\beta}^{+\beta} d\alpha \int_{\beta}^{\lambda} \frac{d\alpha_p}{\sqrt{(\lambda - \alpha_p)(\alpha_p - \alpha)}} = -2 \int_{-\beta}^{+\beta} d\alpha \cdot \lg \sin \sqrt{\frac{\lambda - \beta}{\lambda - \alpha}}$$

Hieruit volgt

$$\pi w(\lambda, \beta) = - \frac{1}{\sqrt{\lambda - \beta}} \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{d\alpha \sqrt{\beta - \alpha}}{\lambda - \alpha} = - \left[\sqrt{\frac{2\beta}{\lambda - \beta}} - \lg \lg \sqrt{\frac{2\beta}{\lambda - \beta}} \right]$$

Hieruit volgt nu direct de snelheidspotentiaal en daarmee de drukverdeling voor punten op het draagvlak

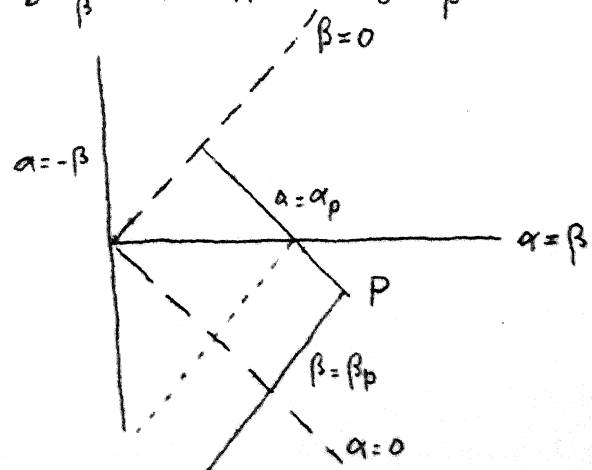
$$\varphi(\alpha_p, \beta_p) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_p}^{\beta_p} d\beta \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_p - \alpha)(\beta_p - \beta)}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_p} d\beta \int_{\beta}^{\alpha_p} \frac{d\alpha w(\alpha, \beta)}{\sqrt{(\alpha_p - \alpha)(\beta_p - \alpha)}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_p} d\beta \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_p - \alpha)(\beta_p - \beta)}}$$

Hierin kan de tweede integraal direct berekend worden, daar immers geldt

$$\int_{\beta}^{\alpha_p} \frac{w(\alpha, \beta) d\alpha}{\sqrt{(\alpha_p - \alpha)}} = - \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_p - \alpha)}}$$

zodat wij de zo juist berekende waarde van w niet eens nodig hebben.

Wij verkrijgen dus



$$\varphi(\alpha_p, \beta_p) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_p}^{\beta_p} d\beta \int_{-\beta}^{\alpha_p} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_p - \alpha)(\beta_p - \beta)}} = \frac{1}{2\pi} \left[(\alpha_p + \beta_p) \log \frac{\sqrt{\beta_p - \alpha_p} - \sqrt{(\beta_p - \alpha_p)2\alpha_p}}{\sqrt{(\beta_p - \alpha_p)2\alpha_p}} \right] =$$

of

$$\varphi(\xi_p, \eta_p) = \frac{1}{2\pi} \left[\xi_p \log \frac{\sqrt{-\eta_p}}{\xi_p + \eta_p} - \sqrt{-\eta_p(\xi_p + \eta_p)} \right]$$

en dus

$$u(\xi_p, \eta_p) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\sqrt{-\eta_p}}{\xi_p + \eta_p}$$

Voeren wij in de dimensielloze variabele $\omega_p = -\eta_p/\xi_p$, dan zien wij de eenvoudige oplossing komen:

$$u(\xi_p, \eta_p) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{\sqrt{\omega}}{1 - \omega} = \frac{1}{2\pi} \log \sin \sqrt{\omega}$$

een waarde, die langs $\alpha = 0$ continu aansluit bij de waarde op het middenstuk.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
AMSTERDAM - O.

Cursus:
Methoden der Mathematische Physica
Deel II. De golfvergelijking
door
Dr R. Timman.

3.11 De cylinderfuncties als oplossingen van de golfvergelijking.

1. Vlakke golven.

Wij beschouwen in het vervolg oplossingen van de golfvergelijking ¹⁾

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} - \frac{1}{c^2} \varphi_{tt} = 0, \quad (1)$$

die exponentieel van de tijd afhangen

$$\varphi(x, y, z, t) = e^{-i\nu t} \psi(x, y, z). \quad (2)$$

Indien ν reëel is, stellen deze functies dus zuiverharmonische trillingen voor. De vergelijking voor ψ wordt nu

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz} + k^2 \psi = 0, \quad (3)$$

waarbij

$$k = \nu/c.$$

Wij zullen bij onze beschouwingen aan k geen beperkingen opleggen, dus ook complexe waarden toelaten. Allereerst zoeken wij naar enige, zeer eenvoudige speciale typen van oplossingen van (3), die dus speciale golven voorstellen. Zoek eerst een oplossing door scheiding van de variabelen

$$\psi(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z) \quad (4)$$

dan moet gelden

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2 = 0, \quad (5)$$

waaruit volgt (door partieële differentiëren van x , y en z), dat X , Y en Z moeten voldoen aan de gewone differentiaalvergelijkingen

$$\frac{X''}{X} = -k^2 c_1^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -k^2 c_2^2, \quad \frac{Z''}{Z} = -k^2 c_3^2,$$

waarbij c_1 , c_2 en c_3 moeten voldoen aan:

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1.$$

Wij vinden dus als algemene oplossing

$$\begin{aligned} X &= A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}, \\ Y &= A_2 e^{ik_2 y} + B_2 e^{-ik_2 y}, \\ Z &= A_3 e^{ik_3 z} + B_3 e^{-ik_3 z}, \end{aligned}$$

1) Vergelijk R. Weyrich: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Teubner, 1936.

De oplossing van de gewenste soort bestaat dus uit termen van de vorm

$$\psi = A e^{ik(c_1 x + c_2 y + c_3 z)},$$

waarbij $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ beschouwd kunnen worden als de richtingscosinussen van een rechte door de oorsprong. Indien c_1 , c_2 en c_3 reëel zijn, is deze rechte reëel en stelt $p = c_1 x + c_2 y + c_3 z$ de afstand voor van de projectie van het punt x, y, z op deze rechte tot de oorsprong. Hieruit blijkt, dat alle punten, die in een plat vlak loodrecht op deze rechte liggen, dezelfde phase hebben. Daar de complete oplossing is

$$\varphi(x, y, z, t) = A e^{ikp - i\nu t},$$

zullen de vlakken, waar de phase een bepaalde waarde heeft, zich met een snelheid $\frac{\nu}{k} = c$ voortplanten in de richting van positieve p , d.w.z. de snelheid van een vlakke golf is c . De golflengte, d.w.z. de afstand van twee vlakken met gelijke phase is $\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\nu}$. Zijn alle optredende grootheden reëel, dan is

$$\text{Re}[\varphi(x, y, z, t)] = A \cos(kp - \nu t)$$

en krijgen wij de voortplanting van een harmonische golfbeweging. Is alleen A complex: $A = |A| e^{i\delta_0}$, dan krijgen wij t.o.v. het vorige geval een phaseverschuiving

$$\text{Re}[\varphi] = |A| \cos(kp - \nu t + \delta_0).$$

Is daarentegen ook k complex $k = k' + ik''$, dan vinden wij

$$\text{Re}[\varphi] = \text{Re}\left\{|A| e^{-k''p} e^{i(k'p - \nu t + \delta_0)}\right\} = |A| e^{-k''p} \cos(k'p - \nu t + \delta_0),$$

d.w.z. de amplitude van de golf neemt in de richting van de normaal af of toe al naarmate $k'' > 0$ of < 0 is. Wij vinden in het eerste geval een gedempte golf, zoals die in een absorberend medium optreedt. Indien alle constanten, dus ook c_1, c_2 en c_3 complex zijn, wordt het gedrag veel gecompliceerder. Stel

$$c_v = c'_v + ic''_v,$$

dan is

$$p = c_1 x + c_2 y + c_3 z = c'_1 x + c'_2 y + c'_3 z + i(c''_1 x + c''_2 y + c''_3 z).$$

Stellen wij nu

$$c'_v = \rho' \cos \alpha'_v, \quad \rho' = \sqrt{c'^2_1 + c'^2_2 + c'^2_3}$$

$$c''_v = \rho'' \cos \alpha''_v, \quad \rho'' = \sqrt{c''^2_1 + c''^2_2 + c''^2_3}$$

dan staan in de eerste plaats de bijbehorende rechten loodrecht op elkaar, want uit

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

volgt dat

$$c'_1 c''_1 + c'_2 c''_2 + c'_3 c''_3 = 0.$$

Wij vinden dus, dat

$$p = p'(x \cos \alpha_1' + y \cos \alpha_2' + z \cos \alpha_3') + \\ + i p''(x \cos \alpha_1'' + y \cos \alpha_2'' + z \cos \alpha_3'') = p'p' + p''p'',$$

waarbij p' en p'' de projecties zijn van de vector (x, y, z) op de twee richtingen. In dit geval is

$$\text{Re} A e^{i(kp - \omega t)} = |A| e^{-(k' p' + k'' p'')} \cos(k' p' - k'' p'' + \delta_0 - \omega t)$$

en de vlakken met gelijke amplitude zijn verschillend van de vlakken met gelijke phase. Is $k'' = 0$, dus is in het medium geen absorbtie aanwezig, dan staan de twee richtingen van uitdempen en voortplanten loodrecht op elkaar. Als bijzonder geval kiezen wij

$$c_1 = \sqrt{1 + \gamma^2}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = i \gamma \quad \gamma > 0,$$

dan wordt de uitwijking bij positieve $|A|$

$$A e^{-\gamma z} \cos(k \sqrt{1 + \gamma^2} x - \omega t).$$

Wij vinden dus een golf met voorplantingssnelheid langs de x-as, die in z richting snel uitdempt, een z.g. oppervlaktegolf, zoals die bij golven op wateroppervlakken of ook in de electromagnetische lichttheorie bij het verschijnsel van de "totale reflectie" optreedt.

De hier behandelde vlakke golven in zeer algemene zin kunnen wij nu als elementaire bouwstenen voor meer gecompliceerde golven gaan opvatten.

2. Het superpositie-principe.

Uit het feit, dat de golfvergelijking lineair en homogeen is, volgt n.l. direct, dat met elk systeem $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ van oplossingen ook iedere lineaire combinatie $\sum_k c_k \varphi_k$, waarbij de c_k onafhankelijk zijn van x, y, z en t , een oplossing voorstelt. Zelfs mogen wij integreren

$$\int C(\alpha) \varphi_\alpha d\alpha,$$

indien hierbij aan zekere eisen voldaan is, die nodig zijn voor de verwisseling van integratie naar de parameter α en de differentiaties naar x, y, z en t mogelijk te maken.

Als een voudig voorbeeld beschouwen wij twee vlakke golven met dezelfde frequentie, waarvan de amplitude $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}|A| e^{i\delta_0}$ en $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}|A| e^{-i\delta_0}$ geconjugueerd complex zijn en de normaal richtingen tegenovergesteld. Dan is voor reële k :

$$\varphi = \frac{1}{2}(A e^{ikp} + \bar{A} e^{-ikp}) e^{-i\omega t} = A \cos(kp + \delta) e^{-i\omega t}$$

en de uitwijking is

$$\text{Re}[\varphi] = |A| \cos(kp + \delta) \cos \omega t.$$

De vlakken van constante phase, in het bijzonder de "knoopvlakken" zijn hier vast in de ruimte.

Een belangrijker type van superpositie verkrijgen wij door op te merken, dat wij c_1, c_2 en c_3 door twee parameters kunnen vervangen door

bolcoördinaten in te voeren:

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos \vartheta' \sin \chi', & 0 \leq \vartheta' < 2\pi \\ c_2 &= \sin \vartheta' \sin \chi', & 0 \leq \chi' \leq \pi. \\ c_3 &= \cos \chi'. \end{aligned}$$

Wij krijgen dan een zeer algemen vorm van de golfvergelijking door te schrijven

$$\begin{aligned} \psi &= \iint e^{ik(x \cos \vartheta' \sin \chi' + y \sin \vartheta' \sin \chi' + z \cos \chi')} f(\vartheta', \chi') \sin \chi' d\vartheta' d\chi' = \\ &= \iint e^{ikp} f(\vartheta', \chi') \sin \chi' d\vartheta' d\chi', \end{aligned}$$

waarbij $f(\vartheta', \chi')$ een willekeurige integrabele functie is. Wij nemen $f(\vartheta', \chi') = 1$ en voeren ook in de ruimte bolcoördinaten in

$$\begin{aligned} x &= R \cos \vartheta' \sin \chi' \\ y &= R \sin \vartheta' \sin \chi' \\ z &= R \cos \chi'. \end{aligned}$$

Om een eenvoudig resultaat te verkrijgen, leggen wij dan de as van het ϑ', χ' zo vast, dat zij met de voerstraal naar x, y, z samenvalt. In dit geval is χ' de hoek, die de straal naar het integratieelement met deze voerstraal insluit, dus

$$p = R \cos \chi'$$

en wij vinden

$$\begin{aligned} \psi &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{ikR \cos \chi'} \sin \chi' d\vartheta' d\chi' = \\ &= -2\pi \frac{e^{ikR \cos \chi'}}{ikR} \Big|_{\chi'=0}^{\chi'=\pi} = \frac{4\pi}{k} \frac{\sin kR}{R}. \end{aligned}$$

Vroeger hebben wij voor een lopende bolvormige golf gevonden $\frac{e^{-ik(R-ct)}}{R}$,

zodat het resultaat hier te voorschijn komt als een staande bolsymmetrische golf. Een dergelijk resultaat vinden wij door het invoeren van cylindercoördinaten door alleen vlakke golven te beschouwen, waarvan de normaal loodrecht op de z -as staat, dus

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos \vartheta' \\ c_2 &= \sin \vartheta' \\ c_3 &= 0. \end{aligned}$$

In dit geval verkrijgen wij

$$\psi = \int_0^{2\pi} e^{ik(x \cos \vartheta' + y \sin \vartheta')} d\vartheta',$$

of, met $x = r \cos \vartheta'$, $y = r \sin \vartheta'$ de uitdrukking voor een cylindergolf

$$\psi = \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos(\vartheta' - \vartheta)} d\vartheta' e^{-ikt} = \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha e^{-ikt}.$$

Voeren wij nu in de functie van Bessel

$$J_0(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(kr \cos \alpha) d\alpha$$

dan vinden wij als golffunctie

$$J_0(kr) e^{-i\omega t}.$$

Ook hier verkrijgen wij op onze methode slechts staande golven. De "knoopcilinders" worden opgeleverd door de nulpunten van de functie van Bessel en zijn ook hier weer vast.

Het is duidelijk, dat de hier gevolgde methode niet de meest algemene is. Om lopende golven op deze wijze te kunnen voorstellen, moeten wij, i.p.v. reële waarden voor c_1 , c_2 en c_3 ook complexe waarden toelaten.

MATHEMATISCH CENTRUM
2de Boerhaavestr. 49
A m s t e r d a m 0.

Cursus:

Methoden der Mathematische Physica

Deel II. De golfvergelijking

door

Dr R. Timman

3. Lopende golven.

Bij een beschouwing van de formule, die de staande bolgolf levert door integratie over de bol valt het op, dat de integrand onafhankelijk is van χ' , maar niet van χ .

Integratie naar χ' van 0 naar 2π levert de onbepaalde integraal

$$\psi = -2\pi \frac{e^{ikR \cos \chi'}}{ikR} \quad (1)$$

die alleen dan de lopende bolgolf $\frac{e^{ikR}}{ikR}$ levert, als de ene grens is $\chi'=0$ en om de andere grens de term verdwijnt. Dit is alleen het geval, indien hier

$$\operatorname{Re} ikR \cos \chi' = -\infty$$

is, dus

$$\operatorname{Im} kR \cos \chi' = +\infty,$$

dus bijv. indien $kR > 0$, $\chi' = \pi/2 - i\infty$.

Wij moeten integreren dus van 0 tot $\pi/2$ en daarna in het complexe χ' vlak verder langs de imaginaire as tot $-i\infty$.

Op deze wijze vinden wij dus de uitdrukking om de lopende bolvormige golf

$$\frac{e^{ikR - ir\tau}}{R} \quad (2)$$

die wij ook vroeger reeds gevonden hebben als oplossing van de bol-symmetrische golfvergelijking.

Het ligt nu voor de hand om ook cylindergolven voor te stellen door in de overeenkomstige formule van blz. 45 complexe integratiegrenzen in te voeren. Het is echter niet zo eenvoudig om direct in te zien hoe deze grenzen gekozen moeten worden.

Daarom zoeken wij een voorstelling voor divergerende lopende cylindergolven op een andere manier. Wij beschouwen een oneindige rechte (de z as) belegd met de vergerende bolgolven met dezelfde fase

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik \sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}}}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}} d\zeta \quad (3)$$

Het is duidelijk, dat de integrand onafhankelijk is van z , zodat wij vinden:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\sqrt{r^2+\zeta^2}}}{\sqrt{r^2+\zeta^2}} d\zeta = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{ik\sqrt{r^2+\zeta^2}}}{\sqrt{r^2+\zeta^2}} d\zeta \quad (4)$$

Indien $\text{Im } k > 0$ is, wat wij steeds zullen onderstellen, is deze integraal convergent, maar dit is ook nog het geval voor reële k , omdat wij in dit geval de integraal voor elk der twee delen kunnen vervangen door de som van de integralen, die ontstaan door integratie over het segment tussen telkens twee opeenvolgende nulpunten van $\cos k\sqrt{r^2+\zeta^2}$ of $\sin k\sqrt{r^2+\zeta^2}$.

De zo ontstaande alternerende reeksen, waarvan de termen monotoon tot nul naderen zijn convergent, zodat ook de integralen convergent zijn. Voor complexe k gaan van $r \rightarrow \infty$ de integralen exponentieel naar nul. Om de integraal aan te laten sluiten bij de vroeger gevonden uitdrukking voor $J_0(kr)$, stellen wij

$$\zeta = ir \sin \alpha$$

en vinden dan, na toevoeging van de factor $\frac{1}{\pi i}$

$$H_0^{(1)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \quad (5)$$

die de eerste functie van Hankel voorstelt en, met de tijdfactor $e^{i\omega t}$ een divergerende lopende cylindergolf voorstelt (zij is ontstaan uit divergerende lopende bolgolven).

Analoog krijgt men een convergerende lopende cylindergolf door

$$H_0^{(2)}(kr) = - \frac{1}{\pi} \int_{+i\infty}^{-i\infty} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \quad (6)$$

die voor k reëel convergeert (en voor $\text{Im } k < 0$).

Wij kunnen voor $H_0^{(2)}(kr)$ ook een integraalvoorstelling zoeken, die dezelfde integrand heeft als in (5) door te stellen $\alpha' = \pi + \alpha$, en krijgen dan

$$H_0^{(2)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi-i\infty}^{\pi+i\infty} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha \quad (7)$$

4. Bol- en cylindergolven van hogere orde.

Wij keren nog eens terug tot de bolgolven en merken in de eerste plaats op, dat $\frac{e^{ikR}}{R}$ zich voor kleine kR gedraagt als $\frac{1}{R}$, d.w.z. als een oplossing van de potentiaalvergelijking, die bekend staat als een enkelvoudige pool.

Het is verder bekend, dat door differentiatie in een bepaalde richting ν met richtingscosinussen l , m en n uit $\frac{1}{R}$ ontstaat een dipool met asrichting ν :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} + m \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R} + n \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} \quad (1)$$

Evenzo ontstaan hogere singulariteiten door herhaalde differentiatie. Eenzelfde procédé kan toegepast worden op de golfvergelijking, waar ook de coëfficiënten constant zijn.

Zo ontstaan uit $H_0^{(\mu)}(kr)$ ($\mu=1,2$) de oplossingen

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(\mu)}(kr) = \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) H_0^{(\mu)}(kr) = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} H_0^{(\mu)}(kr)$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(\mu)}(kr) = \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) H_0^{(\mu)}(kr) = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} H_0^{(\mu)}(kr)$$

Voor $\text{Im } k > 0$ kan de differentiatie onder het integraalteken worden uitgevoerd, voor reële k kan dit niet, daar de ontstaande integralen divergeren.

Wij beschouwen nu de integrand in de voorstelling voor $H_0^{(\mu)}(kr)$

voor reële kr en merken op, dat deze verdwijnt in het oneindige van de in de figuur gearceerde gebieden; omdat

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\alpha' + i\alpha'') = \\ &= \cos \alpha' \cosh \alpha'' + i \sin \alpha' \sinh \alpha''. \end{aligned}$$

Het is dus mogelijk om voor $H_0^{(1)}(kr)$ te schrijven:

$$H_0^{(1)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha$$

waarbij C_1 loopt van $-\eta + i\infty$ tot $\eta + i\infty$ ($0 < \eta < \pi$) terwijl $H_0^{(2)}(kr)$ de vorm aanneemt

$$H_0^{(2)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{C_2} e^{ikr \cos \alpha} d\alpha$$

waarbij C_2 loopt van $\eta - i\infty$ tot $-\eta + i\infty$.

Nu zijn de integralen absoluut convergent zodat wij onder het integraalteken mogen differentieren

$$\begin{aligned} u &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(\mu)}(kr) = \cos \varphi \cdot \frac{ik}{\pi} \int_{C_\mu} e^{ikr \cos \alpha} \cos \alpha d\alpha = \\ &= -k \cos \varphi \cdot \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{C_\mu} e^{ikr \cos \alpha} e^{i(\alpha - \pi/2)} d\alpha - \int_{C_\mu} e^{ikr \cos \alpha} e^{-i(\alpha - \pi/2)} d\alpha \right\} \end{aligned}$$

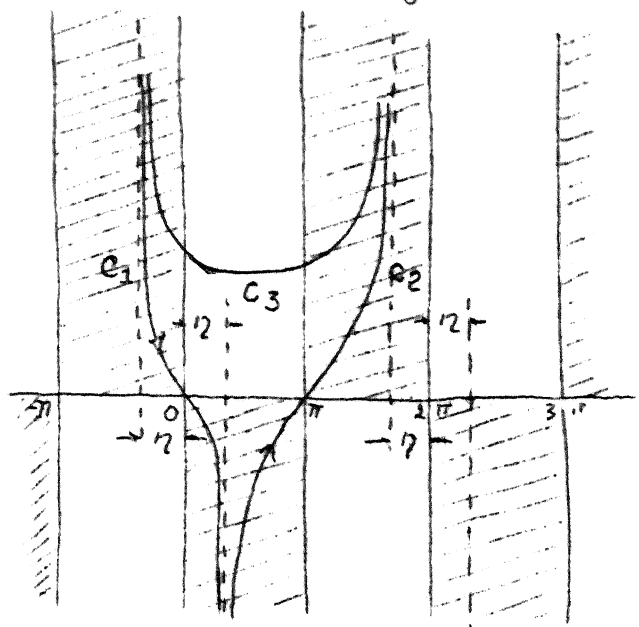
Is de integratieweg C_1 , dan vervangen wij in de tweede integraal α door $-\alpha$ en verkrijgen dan

$$u = -k \cos \varphi \cdot \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{ikr \cos \alpha} e^{i(\alpha - \pi/2)} d\alpha.$$

Is de weg C_2 , dan vervangen wij α door $2\pi - \alpha$ en verkrijgen als algemeen resultaat

$$u = -k \cos \varphi \cdot \frac{1}{\pi} \int_{C_\mu} e^{ikr \cos \alpha} e^{i(\alpha - \pi/2)} d\alpha.$$

Door de differentiatie $\frac{\partial}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r}$ ontstaan analoge formules, die inplaats van de cosinus de sinus bevatten. Wij definiëren nu



$$H_1^{(\mu)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{C_\mu} e^{ikr \cos \alpha} e^{i(\alpha - \pi/2)} d\alpha \quad (\mu=1,2) \quad (5)$$

Wij kunnen dit resultaat ook krijgen door de differentiaaloperator

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \quad (6)$$

en vinden dan

$$(7) \quad \partial H_0^{(\mu)}(kr) = (-k) \cdot e^{i\varphi} H_1^{(\mu)}(kr) = (-k) e^{i\varphi} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{C_\mu} e^{ikr \cos \alpha} e^{i(\alpha - \pi/2)} d\alpha$$

Door herhaalde uitvoering van deze operatie verkrijgen wij

$$D^n H_0^{(\mu)}(kr) = (-k)^n e^{in\varphi} \frac{1}{\pi} \int_{C_\mu} e^{ikr \cos \alpha} e^{in(\alpha - \pi/2)} d\alpha \quad (8)$$

zoals wij door volledige inductie bewijzen. Immers uit (8) volgt

$$\begin{aligned} D^{n+1} H_0^{(\mu)}(kr) &= (-k)^{n+1} \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{\pi} \left[ik \int_{C_\mu} e^{ikr \cos \alpha} \cdot \cos \alpha \cdot e^{in(\alpha - \pi/2)} d\alpha + \right. \\ &\quad \left. - \frac{n}{r} \int_{C_\mu} e^{ikr \cos \alpha} e^{in(\alpha - \pi/2)} d\alpha \right] = \\ &= (-k)^{n+1} \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{\pi} \left[ik \int_{C_\mu} e^{ikr \cos \alpha} \cos \alpha e^{in(\alpha - \pi/2)} d\alpha + \right. \\ &\quad \left. - ik \int_{C_\mu} e^{ikr \cos \alpha} \cdot (-i \sin \alpha) e^{in(\alpha - \pi/2)} d\alpha \right] = \\ &= (-k)^{n+1} \cdot e^{i(n+1)\varphi} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{C_\mu} e^{ikr \cos \alpha} e^{i(n+1)(\alpha - \pi/2)} d\alpha. \end{aligned}$$

Sommerfield voert nu als algemene definitie voor de functies van Hamilton in

$$H_n^{(\mu)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{C_\mu} e^{ikr \cos \alpha} e^{in(\alpha - \pi/2)} d\alpha \quad (9)$$

die dus samen met de factor $e^{in\varphi - i r t}$ oplossingen van de golfvergelijking voorstellen en wel divergerende lopende golven voor $\mu=1$ en convergerende lopende golven voor $\mu=2$.

Deze functies zijn blijkbaar complex. Om staande golven te verkrijgen moeten wij zorgen reële functies te construeren, zodat, door vermenigvuldiging met $\cos n\varphi \cdot e^{-i r t}$ de knooplijnen in de ruimte vast liggen. Door op te merken, dat $H_0^{(1)}(kr)$ en $H_0^{(2)}(kr)$ voor reële k toegevoegd complexe functies zijn, zien wij dat $H_0^{(1)}(kr) + H_0^{(2)}(kr)$ een reële functie van kr is (voor reële kr), die dus aan het gewenste doel beantwoordt. In het algemeen is

$$J_n(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_1 + C_2} e^{ikr \cos \alpha} e^{in(\alpha - \pi/2)} d\alpha = \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{C_3} e^{ikr \cos \alpha} e^{in(\alpha - \pi/2)} d\alpha.$$

waarbij nu C_3 een contour is, die van $-\eta + i\infty$ naar $2\pi - \eta + i\infty$ loopt.

In het bijzonder kunnen wij hiervoor kiezen de weg

$$-\eta + 1 \infty \rightarrow -\eta \rightarrow -\eta + 2\pi \rightarrow -\eta + 2\pi + 1 \infty$$

en opmerken, dat de integrand de periode 2π heeft, zodat de bijdragen van de verticale wegen elkaar opheffen. Dan wordt

$$J_n(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta+2\pi}^{-\eta+2\pi+\eta} e^{ikr \cos \alpha} e^{in(\alpha - \pi/2)} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\eta}^{-\eta+\eta} e^{ikr \cos \alpha} e^{in\alpha} d\alpha.$$

Kiezen wij nu $\eta = \pi$, dan komt er

$$J_n(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ikr \cos \alpha + in\alpha} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ikr \cos \alpha} \cos n\alpha d\alpha. \quad (11)$$

in overeenstemming met het vroeger gevonden resultaat.

Een andere reële functie verkrijgen wij uit de combinatie

$$Y_n(kr) = \frac{1}{2i} \left[H_n^{(1)}(kr) - H_n^{(2)}(kr) \right], \quad (12)$$

die bekend staat als functie van Neumann.

Om voor deze functie een integraalvoorstelling te vinden, met meer-
vuldige eindpunten, kiezen wij voor C_1 en C_2 de volgende krommen

$\frac{\pi}{2} - i\infty \rightarrow -\pi/2 \rightarrow +\pi/2 \rightarrow \pi/2 - i\infty$ en $\frac{\pi}{2} - i\infty \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{3\pi}{2} + i\infty$ en
verkrijgen de formule van Schäfli

$$Y_n(kr) = \frac{1}{2\pi i} \left[i \int_{\infty}^0 e^{-kr \sinh \tau} e^{-n\tau} (e^{n\pi i} + e^{-n\pi i}) d\tau - 2i \int_0^{\infty} e^{-kr \sinh \tau} e^{n\tau} d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikr \sin \beta} e^{-n\beta} d\beta - \int_0^{\pi} e^{ikr \sin \beta} e^{in\beta} d\beta \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kr \sin \beta - n\beta) d\beta - \frac{2}{\pi} e^{-in\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-kr \sinh \tau} \cosh n(\tau + i\pi/2) d\tau \quad (13)$$

9. De cylinderfuncties voor complexe waarden van index en argument.

Wij hebben nu gezien hoe, om reële kr en n geheel de cylinderfuncties
verkregen kunnen worden door superpositie van vlakke golven met geschikt
gekozen integratiegrenzen.

Wij kunnen dit nu gaan uitbreiden en wel eerst nog voor reële kr ,
waarvoor complexe waarden van de index ν .

Allereerst merken wij op, dat wij door de algemene superpositie van gol-
ven, waarvan de normaal loodrecht op de z as is, verkrijgen

$$u(x, y) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{ik(x \cos \varphi' + y \sin \varphi')} f(\varphi') d\varphi'.$$

Door het invoeren van poolcoördinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ en de
substitutie $\varphi' = \alpha + \varphi$ gaat dit over in

$$u(r, \varphi) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{ikr \cos(\varphi - \varphi')} f(\varphi') d\varphi' = \int_{\alpha_1 - \varphi}^{\alpha_2 - \varphi} e^{ikr \cos \alpha} f(\alpha + \varphi) d\alpha.$$

Wij stellen nu in het bijzonder (ν is complex)

$$f(\varphi') = f(\alpha + \varphi) = \frac{1}{\pi} e^{i\nu(\varphi' + \pi/2)} = e^{i\nu\varphi} \cdot \frac{1}{\pi} e^{i\nu(\alpha - \pi/2)}$$

en verkrijgen dan

$$u = e^{i\nu\varphi} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1 - \varphi}^{\alpha_2 - \varphi} e^{ikr \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha.$$

Nu proberen wij α_1 en α_2 zo te bepalen, dat de integraal onafhankelijk wordt van φ , d.w.z., dat het verschil van de integrerende termen nul wordt.

Dit bereiken wij door te zorgen, dat de integrand aan beide zijden nul wordt.

Voor reële kr is dit het geval als $\alpha_1 - \varphi$ en $\alpha_2 - \varphi$ in de gearceerde gebieden liggen en naar het oneindige gaan. Indien wij aannemen, dat $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ is, kunnen wij α_1 en α_2 dus vastleggen als een der grootheden uit de reeksen $(2m + \frac{1}{2})\pi + 1 \infty$ of $(2n + \frac{1}{2})\pi - 1 \infty$.

Stel dan verder $\varphi = \eta - \pi/2$, waarbij $0 < \eta < \pi$ is, dan krijgen wij de integraal

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1 + \pi/2 - \eta}^{\alpha_2 + \pi/2 - \eta} e^{ikr \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha.$$

Wij duiden nu de ontstane functies met dezelfde symbolen aan als de reeds gedefinieerde functies, waarin zij voor $\nu = n$ (n geheel) overgaan.

Om $H_\nu^{(1)}$ te verkrijgen, stellen wij dus $\alpha_1 = -\pi/2 + i\infty$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - i\infty$,

voor $H_\nu^{(2)}$ $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - i\infty$, $\alpha_2 = \frac{3\pi}{2} + i\infty$, en voor

$2J_\nu$ $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2} + i\infty$, $\alpha_2 = \frac{3\pi}{2} + i\infty$.

De functie $Y_\nu^{(2)}$ kan dan ook voor complexe ν gedefinieerd worden als

$$Y_\nu^{(2)} = \frac{1}{2i} \left\{ H_\nu^{(1)}(kr) - H_\nu^{(2)}(kr) \right\}.$$

Cursus:

Methoden der Mathematische Physica.

Deel II. De golfvergelijking

door

Dr R. Timman.

Wij zullen nu het gedrag van de ingevoerde functies nagaan, indien kr niet meer reëel, maar een willekeurig complex getal is. Wij zetten nu verder $kr=z$, en wij hebben dus voor z reëel de integraalvoorstellingen van Sommerfeld

$$H_\nu^{(\mu)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{C_\mu} e^{iz \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha, \quad \mu = 1, 2$$

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_3} e^{iz \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha.$$

Het is nu duidelijk, dat voor complexe z de integraalvoorstelling geldig is, zolang zij nog convergeert, d.w.z. zolang $\text{Re}(iz \cos \alpha)$ naar $-\infty$ gaat, indien α naar de grenzen van C_μ toe gaat.

Gaat dus bijvoorbeeld $\alpha = \beta + i\gamma$ langs C_1 naar $-\eta + i\infty$ en stellen wij $z = |z|e^{i\psi}$, dan geldt bij benadering

$$\text{Re}(iz \cos \alpha) = -\text{Im} \{ |z| e^{i\psi} \cos(\beta + i\gamma) \} \sim -\frac{|z|}{2} e^\gamma \sin(\eta + \psi)$$

en gaat dus naar $-\infty$, zolang $\sin(\eta + \psi) > 0$ of $0 < \eta + \psi < \pi$ is.

Wij zien dus, dat de integraalvoorstelling van H_1 geldig blijft, zolang

$$-\eta < \arg z < \pi - \eta$$

is (dezelfde betrekking blijft gelden voor C_2 en C_3 , daar wij hier α door $-\alpha$ of door $2\pi - \alpha$ moeten vervangen).

Wij vinden dus, dat bij een vaste kromme C_μ een halfvlak van geldigheid in het z vlak behoort. Indien wij η beperken door de ongelijkheid

$0 < \eta < \pi$, dan hebben wij dus integraal-

voorstellingen gevonden voor het gehele

z -vlak met uitzondering van de nega-

tieve reële as. Twee integraalvoorstel-

lingen, die behoren bij de waarden η_1

en η_2 zullen dus beide geldig zijn in

een eindige sector en zijn dus analytische

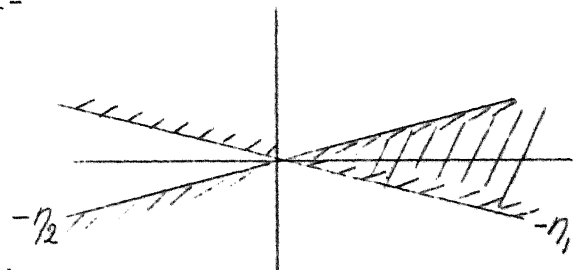
voortzettingen van elkaar. Niets belet ons echter voor η ook waarden

buiten het interval $0 < \eta < \pi$ te geven en daardoor analytische voort-

zettingen te verkrijgen, die voor andere argumenten van z dan $-\pi < \arg z < \pi$ geldig zijn.

Het eenvoudigste is dit gedrag te zien aan de functie

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta+i\infty}^{2\pi-\eta+i\infty} e^{iz \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha.$$



Hier laten wij $\arg z$ met π toenemen, vervangen dus z door $z.e^{i\pi}$, Dan moeten wij echter η door $\eta - \pi$ vervangen om een convergente integraal te krijgen en vinden dus

$$J_{\nu}(z.e^{i\pi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\eta+i\infty}^{3\pi-\eta+i\infty} e^{-iz \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha$$

Nu stellen wij in deze integraal $\alpha = \alpha' + \pi$

$$J_{\nu}(z.e^{i\pi}) = \frac{e^{i\nu\pi}}{2\pi} \int_{-\eta+i\infty}^{2\pi-\eta+i\infty} e^{iz \cos \alpha'} e^{i\nu(\alpha' - \pi/2)} d\alpha'$$

$$= e^{i\nu\pi} \cdot J_{\nu}(z).$$

Bij m halve omlopen krijgen wij

$$J_{\nu}(z.e^{im\pi}) = e^{i\nu m \pi} J_{\nu}(z),$$

d.w.z. de functie $J_{\nu}(z)$ heeft in de oorsprong voor niet gehele ν een vertakkingspunt en gedraagt zich in de omgeving van de oorsprong als de functie z^{ν} .

Alleen voor $\nu = n$ (geheel) behoudt de functie bij een volle omloop haar oorspronkelijke waarde.

Daar de formule voor alle waarden van ν geldt, is ook

$$J_{-\nu}(z.e^{im\pi}) = e^{-i\nu m \pi} J_{-\nu}(z).$$

Het is nu belangrijk om op te merken, dat alle cylinderfuncties zijn uit te drukken in $J_{\nu}(z)$ en $J_{-\nu}(z)$.

Immers, indien wij in

$$J_{-\nu}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta+i\infty}^{2\pi-\eta+i\infty} e^{iz \cos \alpha} e^{-i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha$$

α door $-\alpha$ vervangen, verkrijgen wij

$$\begin{aligned} J_{-\nu}(z) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\eta-i\infty}^{-2\pi+\eta-i\infty} e^{iz \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha + \pi/2)} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-2\pi+\eta-i\infty}^{-\eta+i\infty} + \int_{-\eta+i\infty}^{\eta-i\infty} \right\} e^{iz \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha + \pi/2)} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ e^{-2\pi i \nu} \int_{\eta-i\infty}^{2\pi-\eta+i\infty} e^{iz \cos \alpha} e^{-i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha + \int_{-\eta+i\infty}^{\eta-i\infty} e^{iz \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha + \pi/2)} d\alpha \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ e^{-\pi i \nu} \int_{\eta-i\infty}^{2\pi-\eta+i\infty} e^{iz \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha + e^{\pi i \nu} \int_{-\eta+i\infty}^{\eta-i\infty} e^{iz \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha \right\} \end{aligned}$$

of wel

$$J_{-\nu}(z) = \frac{1}{2} \left\{ e^{-\pi i \nu} H_{\nu}^{(2)}(z) + e^{\pi i \nu} H_{\nu}^{(1)}(z) \right\},$$

terwijl wij al wisten, dat

$$J_{\nu}(z) = \frac{1}{2} \left\{ H_{\nu}^{(2)}(z) + H_{\nu}^{(1)}(z) \right\}.$$

Indien ν geen geheel getal is, vinden wij dus:

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \frac{1}{\sin \nu \pi} \left\{ e^{-i\nu\pi} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \right\},$$

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = \frac{-1}{\sin \nu \pi} \left\{ e^{i\nu\pi} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \right\},$$

en

$$Y_{\nu}(z) = \frac{1}{2i} \{ H_{\nu}^{(1)}(z) - H_{\nu}^{(2)}(z) \} = \frac{1}{\sin \nu \pi} \{ \cos \nu \pi J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \}.$$

Voor ν geheel krijgen wij hier onbepaalde uitdrukkingen, die door limietovergang gevonden moeten worden; bijv.:

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(z) &= 1 \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \nu} \{ e^{i\nu\pi} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \}}{\frac{\partial}{\partial \nu} \sin \nu \pi} \right]_{\nu=n} = \\ &= J_n(z) + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_{\nu}(z) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right]_{\nu=n}. \end{aligned}$$

Wij kunnen nu dus de omlooprelaties direct geven

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(z \cdot e^{m\pi i}) &= \frac{1}{\sin \nu \pi} \left[e^{(m-1)\nu\pi i} J_{\nu}(z) - e^{-m\nu\pi i} J_{-\nu}(z) \right] = \\ &= - \frac{\sin(m-1)\nu\pi}{\sin \nu \pi} H_{\nu}^{(1)}(z) - e^{-\nu\pi i} \frac{\sin m\nu\pi}{\sin \nu \pi} H_{\nu}^{(2)}(z). \end{aligned}$$

$$H_{\nu}^{(2)}(z \cdot e^{m\pi i}) = e^{\nu\pi i} \frac{\sin m\nu\pi}{\sin \nu \pi} H_{\nu}^{(1)}(z) + \frac{\sin(m+1)\nu\pi}{\sin \nu \pi} H_{\nu}^{(2)}(z).$$

waaruit weer door limietovergang voor ν geheel volgt

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(z \cdot e^{m\pi i}) &= (-1)^{mn} \{ H_n^{(1)}(z) - 2mJ_n(z) \}, \\ H_n^{(2)}(z \cdot e^{m\pi i}) &= (-1)^{mn} \{ H_n^{(2)}(z) + 2mJ_n(z) \}. \end{aligned}$$

De coupure langs de negatieve z -as, die in dit geval voor de $J_n(z)$ niet meer nodig was, is voor deze functies dus nog wel essentieel, daar zij ook voor gehele ν niet meer eenduidig zijn.

Verder gaan wij nog na, hoe de functies zich gedragen bij overgang tot de toegevoegd complexe functie

$$\overline{H_{\nu}^{(1)}(z)} = \frac{1}{\pi} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} e^{-i\bar{z} \cos \alpha} e^{-i\bar{\nu}(\alpha - \pi/2)} d\alpha$$

waarbij $0 < \eta + \arg z < \pi$,

Stel $\alpha = \pi - \alpha'$, $\eta = \pi - \eta'$, waarbij dus $0 < \eta' + \arg \bar{z} < \pi$,

dan krijgen wij

$$\overline{H_{\nu}^{(1)}(z)} = - \frac{1}{\pi} \int_{2\pi - \eta' + i\infty}^{\eta' - i\infty} e^{i\bar{z} \cos \alpha'} e^{i\bar{\nu}(\alpha' - \pi/2)} d\alpha' =$$

$$= H_{\bar{\nu}}^{(2)}(\bar{z}).$$

en ook

$$\overline{H_{\nu}^{(2)}(z)} = H_{\bar{\nu}}^{(1)}(\bar{z}).$$

Hieruit volgt direct, dat zowel $J_{\nu}(z)$ als $Y_{\nu}(z)$ voor reële ν en z reëel zijn.

Van groot belang zijn ook de functies, die voor zuiver imaginaire waarden van z optreden ($\forall$ reëel)

$$H_{\nu}^{(1)}(iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\eta+i\infty}^{\eta-i\infty} e^{-y \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha.$$

Neem de integratieweg symmetrisch t.o.v. de oorsprong en stel in het tweede stuk $\alpha = -\alpha'$

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(iy) &= \frac{e^{-i\nu \pi/2}}{\pi} \left[\int_{\eta+i\infty}^0 e^{-y \cos \alpha} e^{i\nu \alpha} d\alpha + \int_0^{-\eta+i\infty} e^{-y \cos \alpha'} e^{-i\nu \alpha'} d\alpha' \right] = \\ &= -\frac{e^{-i\nu \pi/2}}{\pi} \left[\int_0^{\eta+i\infty} e^{-y \cos \alpha} (e^{i\nu \alpha} + e^{-i\nu \alpha}) d\alpha \right] \end{aligned}$$

Wij kunnen nu $\eta = 0$ nemen, daar de integraal toch convergeert en vinden dan voor de functie

$$K_{\nu}(y) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2}\nu \pi} H_{\nu}^{(1)}(iy)$$

de reële integraalvoorstelling

$$K_{\nu}(y) = \int_0^{\infty} e^{-y \cosh \mu} \cosh \nu \mu \cdot d\mu.$$

De functie van Bessel voor zuiver imaginaire waarden van het argument levert ons een iets gecompliceerdere formule

$$\begin{aligned} J_{\nu}(iy) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\eta+i\infty}^{2\pi-\eta+i\infty} e^{-y \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\eta}^{2\pi-\eta} e^{-y \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha + \int_{-\eta+i\infty}^{-\eta} e^{-y \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \int_{2\pi-\eta+i\infty}^{2\pi-\eta} e^{-y \cos \alpha} e^{i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Hier kunnen wij, daar η moet voldoen aan $0 < \eta + \pi/2 < \pi$, $\eta = 0$ stellen en vinden dan, door in de eerste integraal te stellen $\alpha = \pi - \alpha'$, in de tweede $\alpha = i\mu$ en in de derde $\alpha = 2\pi + i\mu$

$$\begin{aligned} J_{\nu}(iy) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ -e^{i\nu \pi/2} \int_{\pi}^0 e^{y \cos \alpha'} e^{-i\nu \alpha'} d\alpha' - i e^{-i\nu \pi/2} \int_0^{\infty} e^{-y \cosh \mu} e^{-\nu \mu} d\mu + \right. \\ &\quad \left. + i e^{i\nu \frac{3\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-y \cosh \mu} e^{-\nu \mu} d\mu \right\} = \\ &= \frac{e^{i\nu \pi/2}}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} e^{y \cos \alpha} \cos \nu \alpha d\alpha - \sin \nu \pi \int_0^{\infty} e^{-y \cosh \mu} e^{-\nu \mu} d\mu \right\} \end{aligned}$$

Voor de functie

$$I_{\nu}(y) = e^{-i\nu \pi/2} J_{\nu}(iy)$$

vinden wij dus de reële integraalvoorstelling:

$$I_{\nu}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{y \cos \alpha} \cos \nu \alpha d\alpha - \frac{\sin \nu \pi}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-y \cosh \mu} e^{-\nu \mu} d\mu$$

6. Convergente en asymptotische reeksontwikkelingen.

Uit de integraalvoorstellingen is het mogelijk om reeksontwikkelingen af te leiden, die zowel voor kleine als grote waarden van $|z|$ de functie goed voorstellen, zij het dan, dat de eerste gewoon convergeren, terwijl de reeksen van de tweede categorie asymptotische reeksen zijn.

Wij gaan daartoe uit van de integraalvoorstelling

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_C e^{iz \cos \alpha + i\nu(\alpha - \pi/2)} d\alpha$$

en kiezen $\eta = \pi/2 - \arg z$.

Verder voeren wij een nieuwe variabele in

$$t = -\frac{z}{2} e^{-i(\alpha - \pi/2)},$$

waardoor

$$iz \cos \alpha = \frac{1z}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = -t + \frac{z^2}{4t}$$

$$e^{i\nu(\alpha - \pi/2)} = \left(-\frac{2t}{z}\right)^{-\nu}, \quad dt = -it d\alpha$$

De integratieweg loopt nu van $+\infty$, loopt om de oorsprong en daarna weer naar $+\infty$, zodat wij vinden

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_{\infty}^{(0+)} e^{-t} \cdot e^{\frac{z^2}{4t}} (-t)^{-\nu-1} dt.$$

Wij ontwikkelen nu de functie

$e^{\frac{z^2}{4t}}$ in een machtreeks

$$e^{\frac{z^2}{4t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \cdot t^{-k}$$

en integreren term voor term

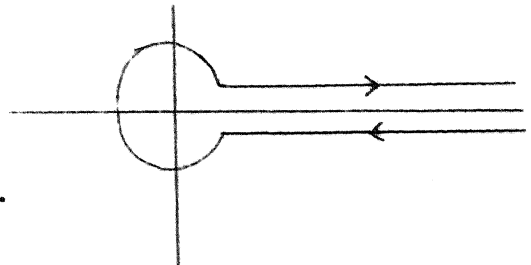
$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1z}{2}\right)^{2k} \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{(0+)} e^{-t} (-t)^{-\nu-k-1} dt.$$

Deze integraal levert ons de Γ functie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0+)} e^{-t} (-t)^{-\nu-k-1} dt = \frac{-1}{\Gamma(\nu+k+1)},$$

zodat wij krijgen

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1z}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}.$$



Cursus:

Methoden der Mathematische Physica

Deel II: De golfvergelijking

door

Dr R. Timman.

§ 7. Asymptotische ontwikkelingen van de cylinderfuncties.

Naast de gewone ontwikkelingen, in in het gehele platte vlak convergente reeksen zijn van groot belang de asymptotische ontwikkelingen, die alleen bruikbaar zijn voor grote waarden van het argument.

Allereerst geven wij de definitie van het begrip asymptotisch convergent in tegenstelling tot het gewone convergentiebegrip van een reeks. Een reeks

$$S_n(z) = \sum_{m=0}^n a_m(z)$$

van termen van de complexe variabele z wordt, zoals bekend convergent genoemd, in zeker gebied G , indien een functie $s(z)$ bestaat, zodanig, dat voor iedere z uit G en iedere ε een index m te vinden is, zodat

$$|R_n(z)| = |s(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

voor alle $n > N$. (Indien N onafhankelijk van z gekozen kan worden in G , is de convergentie uniform). Hier is dus het punt z vast en de waarde van n moet onbeperkt toenemen om het verschil tussen $s(z)$ en $s_n(z)$ willekeurig klein te maken.

Bij asymptotische convergentie nemen wij een bepaald aantal termen uit de reeks, houden dus n vast en zeggen, dat de reeks $s_n(z) =$

$= \sum_{m=0}^n a_m(z)$, waarbij z in een gebied G ligt, dat zich tot in het oneindige uitstrekt, asymptotisch convergeert, indien een functie $s(z)$ bestaat, zodanig, dat bij iedere ε een M te vinden is, zodat

$$|R_n(z)| = |s(z) - s_n(z)| < \varepsilon$$

is, indien $|z| > M$ is in G .

Korter gezegd:

Gewone convergentie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s(z) - s_n(z)| \rightarrow 0 \quad z \text{ vast.}$$

Asymptotische convergentie

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |s(z) - s_n(z)| \rightarrow 0 \quad n \text{ vast.}$$

We behandelen eerst een belangrijke stelling uit de theorie der transformaties van Laplace, d.w.z. de functietransformaties, die aan een functie $F(t)$ een functie $f(s)$ toevoegen door middel van de formule

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt,$$

indien de integraal in zeker gebied bestaat.

Een voldoende voorwaarde hiertoe is, dat getallen $K > 0$ en $b > 0$ bestaan, zodat

$$F(t) \quad |F(t)| < K e^{bt} \quad \text{voor } |t| > a > 0$$

en dat voor $0 \leq t < a$ integreerbaar is. Indien nu voor $F(t)$ voor $|t| < a$ een reeksontwikkeling geldt van de vorm

$$F(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m t^{\frac{m}{q}-1}$$

geldt voor de getransformeerde functie een asymptotische ontwikkeling

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = \sum_{m=1}^{M-1} a_m \Gamma\left(\frac{m}{q}\right) s^{-\frac{m}{q}} + R_M,$$

indien s ligt in het halfvlak

$$\operatorname{Res} > b.$$

Hierbij bestaat een constante $K_1 > 0$, zodat

$$|R_M| \leq K_1 \left\{ \operatorname{Res} - b \right\}^{-\frac{M}{q}} \Gamma\left(\frac{M}{q}\right).$$

Wij kunnen nl. op grond van de convergentieonderstelling van de reeks en het gedrag $F(t)$ voor grote t een constante K_1 zo bepalen, dat langs de gehele integratieweg geldt

$$\left| F(t) - \sum_{m=1}^{M-1} a_m t^{\frac{m}{q}-1} \right| = |R_M(t)| \leq K_1 \cdot |t|^{\frac{M}{q}-1} e^{bt},$$

zodat integratie term voor term levert

$$f(s) = \sum_{m=1}^{M-1} a_m \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\frac{m}{q}-1} dt + R_M = \sum_{m=1}^{M-1} a_m \Gamma\left(\frac{m}{q}\right) s^{-\frac{m}{q}} + R_M,$$

waarbij

$$|R_M| = \left| \int_0^{\infty} r_m(t) e^{-st} dt \right| \leq K_1 \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\frac{M}{q}-1} e^{bt} dt = K_1 [\operatorname{Res} - b]^{-\frac{M}{q}} \Gamma\left(\frac{M}{q}\right).$$

Deze ongelijkheid geldt, indien $\operatorname{Res} \geq b$ is.

Na deze voorbereiding kunnen wij nu de asymptotische formules voor de cylinderfuncties afleiden voor grote waarden van (z) . Daartoe brengen wij de integraalontwikkelingen eerst op de gewenste vorm en kiezen de functie

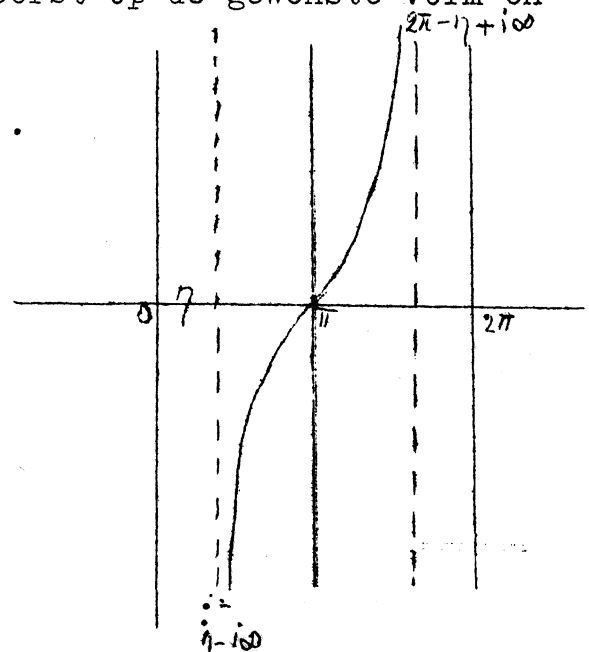
$$H_r^{(z)} |z| = \frac{1}{\pi} \int_{C_2} e^{-iz} \cos \alpha e^{i\gamma} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) d\alpha.$$

Nu stellen wij

$$i(\cos \alpha + 1) = 2i \cos^2 \frac{\alpha}{2} = -\tau,$$

$$d\alpha = \frac{-id\tau}{\sin \alpha}, \text{ zodat, indien wij de}$$

twee takken van C_2 symmetrisch kiezen



$$H_{\nu}^{(2)}(z) = -\frac{2i}{\pi} e^{-i(z - \nu \frac{\pi}{2})} \int_0^{\infty} \exp i' \gamma - \frac{\pi}{2} e^{-z\tau} \frac{\cos \nu (\alpha - \pi)}{\sin \alpha} d\tau.$$

t nadert dan asymptotisch tot de waarde

$$i \left\{ 1 + \cos(\eta - i \infty) \right\} = i \left\{ 1 + \cos \eta \cosh \infty - i \sin \eta \sinh \infty \right\} \rightarrow \rightarrow \frac{1}{2} e^{\infty} e^{i(\eta - \frac{\pi}{2})}.$$

Nu ontwikkelen wij de functie

$$\frac{\cos \nu (\alpha - \pi)}{\sin \alpha} = F(\tau)$$

in een machtreeks naar τ . Deze is voor $\tau = 0$ niet regulier. Wij stellen nu $t = \cos \frac{\alpha}{2}$ en vinden dan, dat de functie $f(t)$, gedefinieerd door

$$\frac{\cos \nu (\alpha - \pi)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = t F(-2it^2) = f(t)$$

regulier is in de oorsprong, zodat wij haar in een reeks van Mac-Laurin kunnen ontwikkelen, die een convergentiestraal heeft, die bepaald wordt door de dichtsbijzijnde pool, d.w.z. $\alpha = 0$ en $\alpha' = 2\pi$, dus $t = \pm 1$.

De coëfficiënten worden gevonden door een differentiaalvergelijking voor $f(t)$ op te stellen:

$$\begin{aligned} -\nu \sin \nu (\alpha - \pi) &= -f'(t) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + f(t) t + 2 \nu^2 \sin \frac{\alpha}{2} f(t) = \\ &= f''(t) \sin^3 \frac{\alpha}{2} + 3f'(t) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + f(t) \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

of wel

$$(1-t^2)f''(t) - 3tf'(t) + (4\nu^2-1)f(t) = 0.$$

Door $(m-2)$ keer te differentiëren, vinden wij

$$(1-t^2)f^{(m)}(t) - (2m-1)tf^{(m-1)}(t) + [4\nu^2 - (m-1)^2] f^{(m-2)}(t) = 0,$$

dus

$$f^{(m)}(0) = -[4\nu^2 - (m-1)^2] f^{(m-2)}(0)$$

en de ontwikkeling wordt

$$f(t) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\nu^2-1^2}{2!} t^2 + \frac{(\nu^2-1^2)(\nu^2-3^2)}{4!} t^4 \dots \right].$$

De overeenkomstige ontwikkeling voor $F(\tau)$ wordt nu

$$F(\tau) = \pm \frac{1}{\sqrt{2i\tau}} \left[1 - \frac{\nu^2-1^2}{2!} \frac{i\tau}{2} + \frac{(\nu^2-1^2)(\nu^2-3^2)}{4!} \left(\frac{i\tau}{2}\right)^2 \dots \right].$$

Het teken bepalen wij zo, dat $F(\tau)$ langs de integratieweg overeenkomt met $\frac{\cos \nu (\alpha - \pi)}{\sin \alpha}$, dus voor α in de omgeving van π

$$\arg F(\tau) = \arg \frac{\cos \nu (\alpha - \pi)}{\sin \alpha} = \arg \frac{-\cos \nu (\alpha - \pi)}{\sin (\alpha - \pi)} \sim \arg \frac{-1}{\alpha - \pi} =$$

$$= \pi - \arg(\alpha - \pi), \quad (\arg F(\tau) \approx -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\gamma - \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2})$$

Langs de integratieweg is $\arg \tau = \eta - \frac{\pi}{2}$ en dus geldt, zodat wij het - teken moeten kiezen. Volgens de stelling geldt dan

$$H_{\nu}^{(2)}(z) \approx \frac{2i}{\pi} e^{-i(z - \nu \frac{\pi}{2})} \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{(2iz)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\nu^2-1}{2!} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{(2iz)^{\frac{3}{2}}} + \dots \right].$$

Wij moeten nu nog aantonen, dat $F(\tau)$ inderdaad aan de eisen, in de stelling genoemd voldoet. Voor grote (τ) geldt langs C_2

$$e^{-i\alpha} \sim 2i\tau,$$

dus

$$F(\tau) \sim -i \left[e^{i\nu\pi} (2i\tau)^{\nu-1} + e^{-i\nu\pi} (2i\tau)^{-\nu-1} \right],$$

zodat wij ν willekeurig klein positief kunnen kiezen. Wij moeten dus alleen zorgen, dat

$$\operatorname{Re} z \cdot e^{i\left(\arg z - \frac{\pi}{2}\right)} > 0$$

is, of

$$-\eta < \arg z < \pi - \eta.$$

MATHEMATISCH CENTRUM,
2de Boerhaavestr. 49,
A m s t e r d a m - O.

Cursus:

Methoden der Mathematische Physica

Deel II: De golfvergelijking

door

Dr R. Timman.

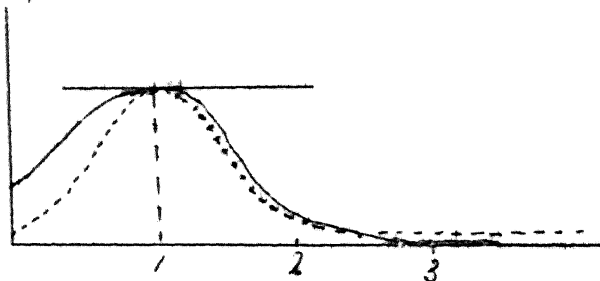
§ 8. De methode der zadelpunten.

De hier gegeven ontwikkeling is goed bruikbaar, indien $|z| \gg 1$ is, terwijl daarentegen voor functies van hoge orde de reeksen veel minder goed bruikbaar zijn. Het is echter direct duidelijk, dat het op oneindig veel manieren mogelijk is de functies in een gedaante te brengen, waarop het lemma van Watson kan worden toegepast. De methode der zadelpunten, die het eerst door Debye op de cylinderfuncties is toegepast, levert dan zeer bruikbare asymptotische ontwikkelingen.

Om de methode duidelijk te maken, beschouwen we eerst eens een voorbeeld van een reële integraal.

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\omega(x^3-3x)} dx. \text{ De integraal}$$

heeft een maximum voor $x = 1$. en neemt daarna snel af, zodat de grootste bijdragen tot de inte-



graal wordt geleverd door het gedeelte van de integrand in de omgeving van $x = 1$. Wij voeren daarom een nieuwe variabele in door te stellen

$$x^3 - 3x + 2 = t^2 = (x-1)^2(x+2)$$

$$2t dt = 3(x^2-1) dx$$

en ontwikkelen $\frac{2t}{3(x^2-1)}$ in een reeks naar t , die begint met een constante

$$\frac{2t}{3(x^2-1)} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

In dit geval wordt

$$I = e^{2\omega} \int_{\sqrt{2}}^{\infty} e^{-t^2} \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \right\} dt = \frac{e^{2\omega}}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\omega^{n+\frac{1}{2}}} + o(e^{-2\omega}) \right\}$$

zodat wij een asymptotische ontwikkeling verkregen hebben.

Elke term van de te integreren reeks sluit zich in de top nauw bij de integrand aan. Het is duidelijk, dat de benadering des te beter is, naarmate ω groter is, waarbij de hoofdterm dan het relatief grootste stuk van het oppervlak onder de kromme weergeeft. De ondergrens levert echter nog een eindige bijdrage tot de integraal.

Bij een algemene beschouwing van de complexe integraal

$$\int_a^b e^{-\omega f(z)} g(z) dz$$

zoeken wij om deze methode na te bootsen dus eerst naar het maximum van de functie $|e^{-\omega f(z)}|$ op de integratieweg, d.w.z. naar een nulpunt van $f'(z) = 0$, leggen de integratieweg door dit punt z_0 .

Het is duidelijk, dat een zo goed mogelijke aansluiting wordt verkregen, indien de integratieweg zo wordt gekozen, dat de modulus van de integrand zo steil mogelijk opklimt en weer afneemt.

Daartoe beschouwen wij het oppervlak opgeleverd door de functie $|e^{-\omega f(z)}| = e^{-\operatorname{Re} \omega f(z)}$ boven het $z = x+iy$ vlak. De niveaulijnen op het oppervlak zijn de lijnen $R = \operatorname{Re} \omega f(z) = \text{const.}$ Hun projecties op het z vlak staan loodrecht op de lijnen $I = \operatorname{Im} \omega f(z) = \text{const.}$, zodat deze lijnen de lijnen van de grootste helling in ieder punt weergeven. Is n de booglengte langs een niveaulijn en s langs een lijn van grootste helling, dan is dus steeds langs een lijn van grootste helling $\frac{\partial R}{\partial n} = 0$, terwijl indien R extreem moet zijn ook $\frac{\partial R}{\partial s} = 0$ moet zijn.

Daar echter volgens Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial R}{\partial s} = -\frac{\partial I}{\partial n}, \quad \frac{\partial R}{\partial n} = \frac{\partial I}{\partial s}$$

moeten alle vier differentiaalquotienten nul zijn, en dus moet gelden $\omega f'(z) = 0$, zoals te verwachten was. Wij zijn dus in een punt met een horizontaal raakvlak op het oppervlak en onderzoeken de aard van dat punt.

Indien n en s een lokaal Euclidisch stelsel vormen in z_0 hetgeen door geschikte keuze van de eenheid (plaatselijk) op de lijnen $R = \text{const.}$ en $I = \text{const.}$ is te bereiken, voldoen R en I aan de vergelijking van Laplace, is dus

$$\frac{\partial^2 R}{\partial s^2} = -\frac{\partial^2 R}{\partial n^2}$$

en dus ook

$$\frac{\partial^2 R}{\partial s^2} \frac{\partial^2 R}{\partial n^2} - \left(\frac{\partial^2 R}{\partial s \partial n}\right)^2 \leq 0$$

zodat het punt een hyperbolisch punt is, d.w.z. in de omgeving van z_0 gedraagt het oppervlak zich als een zadelvlak en z_0 is een zadelpunt. De integratieweg leggen wij nu zo dat de integrand een maximum heeft d.w.z. juist langs de bergpas. (Vandaar dat de methode ook wel de methode van de bergpas wordt genoemd.) Dit wordt bereikt door voor de integratieweg hier te kiezen $I(s, n) = \operatorname{Im} \omega f(z) = \text{const.}$ Indien z_0 een enkelvoudig nulpunt is van $f'(z) = 0$, stellen we nu

$$f(z) - f(z_0) = t^2$$

en

$$2t dt = f'(z) dz$$

en ontwikkelen in de integraal

$$\int e^{-\omega t^2} \frac{2g(z) \cdot t \cdot dt}{f'(z)}$$

de functie $\frac{g(z)t}{f'(z)}$ in een reeks van Taylor in $t=0$, die indien $g(z_0) \neq 0$ de gedaante heeft

$$\frac{g(z)t}{f'(z)} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

Wij vinden dan weer een asymptotische ontwikkeling door de hoofdstelling toe te passen, waarbij bij eindige integratiegrenzen deze weer tot aparte termen aanleiding zullen geven.

Ter illustratie passen wij nu de methode toe op de functies van Hankel.

$$H_\nu^{(\mu)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{C_\mu} e^{1\{z \cos \alpha + \nu(\alpha - \pi/2)\}} d\alpha$$

en stellen nu

$$-zf(\alpha) = i \{ z \cos \alpha + \nu(\alpha - \pi/2) \}$$

zodat de zadelpunten geleverd worden door

$$-\sin \alpha + \frac{\nu}{z} = 0$$

$$\alpha_0 = \arcsin \frac{\nu}{z}.$$

Wij vinden dus twee reeksen van oneindig veel zadelpunten met periode 2π . Wij veronderstellen nu ν en z beide positief reëel en vinden voor de zadelpunten verschillende ligging alnaarmate $\nu/z < 1$ is of $\nu/z > 1$. We onderscheiden nu 3 gevallen

$$\nu/z \ll 1, \quad \nu/z \approx 1 \text{ en } \nu/z \gg 1.$$

In het eerste geval liggen de nulpunten op de reële as en wel in

$$\alpha_0 + 2k\pi \text{ (waarbij } 0 < \alpha_0 < \pi) \text{ en } \pi - \alpha_0 + 2k\pi. \text{ Voor de kromme } C_2$$

kieszen wij de weg

$$\operatorname{Im} i \{ z \cos \alpha + \nu(\alpha - \pi/2) \} = \text{const.}$$

door α_0 , die voor $\alpha = \eta + i\gamma$ ($\gamma \rightarrow \pm \infty$) blijkbaar nadert tot $-\frac{1}{2}\pi - i\infty$ resp. $-\frac{1}{2}\pi + i\infty$.

Stel nu $\tau^2 = f(\alpha) - f(\alpha_0)$, dan is voor $\alpha = \alpha_0$, $\tau = 0$ en

$$2\tau \frac{d\tau}{d\alpha} = f'(\alpha) = 0, \text{ zodat wij}$$

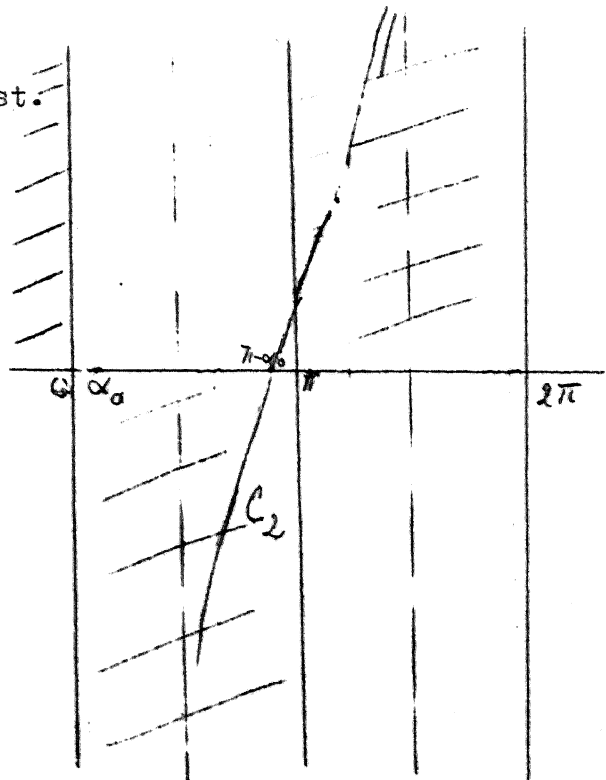
vinden

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi} e^{-zf(\alpha_0)} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\tau^2} \phi(\tau) d\tau \right\},$$

waarbij

$$\phi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau^n = \frac{-2\tau i}{\sin \alpha - \nu/z}$$

regulier is om $\tau = 0$ tot een cirkel, die bepaald wordt door het dichtstbijzijnde nulpunt van de noemer. Het is dus duidelijk, dat aan de voorwaarden van de hoofdstelling is voldaan en wij vinden de reeks:



$$H_y^{(2)}(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-iz \left\{ \cos \alpha_0 + (\alpha_0 - \pi/2) \sin \alpha_0 \right\}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{z^{n+\frac{1}{2}}} \right].$$

De coëfficiënten a_n moeten door vrij gecompliceerde berekeningen bepaald worden (vgl. C.S. Meyer: Asymptotische Entwicklungen von Besselschen und Hankelschen Funktionen für grosse Werte des Arguments und der Ordnung, Mathematische Annalen 108, S.321, 1933).

De hier gebruikte reeks is alleen goed bruikbaar indien $\sqrt{z} \ll 1$ is, d.w.z. in hetzelfde gebied als de vroeger gevonden asymptotische ontwikkeling, waarbij de integratieweg niet door $\pi - \alpha_0$, maar door π dichtbij gelegen werd gevoerd, dus bijna over de pas liep. Daar de resultaten in dit geval dus nauwelijks beter zijn, is de vroegere reeks te verkiezen boven de hier gevonden meer bewerkelijke. Tijdsgebrek poot ons de verdere bespreking, die voor $\sqrt{x} \approx 1$ en $\sqrt{x} > 1$ iets gecompliceerder is, achterwege te laten; wij verwijzen hiervoor naar Weyrich: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, en naar het bovengenoemde artikel van Meyer, zowel als naar de oorspronkelijke artikelen van Debye (Mathematische Annalen 67 (1909)).