AMSTERDAM-O.

Integraaltransformaties in de mathematisch physica

Toepassingen van de integraaltransformaties op problemen van warmtegeleiding

door

Prof. Dr R.Timman

1. De vergelijking voor de warmtegeleiding; reductie van het probleem door een integraaltransformatie.

Zoals bekend, wordt het warmtetransport door een eenheid van oppervlak gegeven door de formule

$$\varphi = - a(\underline{n}.\ \text{grad}\ U)$$

als U de temperatuur en a de warmtegeleidingscoëfficiënt is en $\underline{n}$ de normaal op het oppervlak voorstelt.

Hieruit leidt men af, dat voor een vast lichaam met constante dichtheid ρ een soortgelijke warmte c de temperatuurverdeling U voldoen moet aan de partiële differentiaalvergelijking

$$U_t = k.\Delta U$$

waarbij $k = \frac{a}{\rho c}$ en Δ de operator van Laplace voorstelt, in rechthoekige coördinaten x,y,z: $U = U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}$.

Door de differentiaalvergelijking alleen is deze temperatuurverdeling niet bepaald; zij wordt verder meestal vastgelegd door zekere randcondities te geven aan de rand van het gebied, dat beschouwd wordt en door op een bepaald tijdstip de temperatuurverdeling voor te schrijven (rand- en begincondities).

Al naar de gedaante van deze condities zal men verschillende typen van integraaltransformaties toepassen.

Wij zullen ons in het vervolg in hoofdzaak bezig gaan houden met het geval, dat de begincondities zijn voorgeschreven, dus voor t = 0 is U(x,y,z;0) gegeven, terwijl het lichaam een eindig gebied in de ruimte opvult.

In deze gevallen is de meest aangewezen transformatie de transformatie van Laplace. De temperatuurverdeling U(x,y,z;t) wordt omgezet in een functie u(x,y,z;p) door

$$u(x,y,z;p) = \int_0^\infty e^{-pt}U(x,y,z;t)dt$$

en de partiële differentiaalvergelijking gaat over in een partiële differentiaalvergelijking

$$pu - U(0) = k.(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}).$$

Als het grondgebied eindig is, voert het randwaardenprobleem voor deze differentiaalvergelijking ons tot de theorie van de eigenwaardeproblemen, die wij nu nader gaan behandelen.

Eerst daarna kan de transformatie naar de oorspronkelijke variabele t worden ondernomen. Nauw verwant met de theorie der eigenwaardeproblemen is de theorie der integraalvergelijkingen, die wij ook in de beschouwingen zullen betrekken.

Literatuur. De transformatie van Laplace

H.S.Canlaw and J.C.Jaeger, Operational methods in applied mathematics.
R.V.Churchill, Modern operational mathematics in engineering.
G.Doetsch, Theorie und Anwendungen der Laplace Transformation.

Integraalvergelijkingen

G.Hamel, Integralgleichungen, Berlin.
A.Kneser, Die Integralgleichungen.
Courant-Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I.
E.Lovitt, Linear integral equations (mathematisch).

2. De temperatuurverdeling in een staaf.

Wij beschouwen de temperatuurverdeling in een rechte staaf van eindige lengte, waarbij aan de eindpunten zekere randvoorwaarden voorgeschreven zijn en waarbij voor $t = 0$ een begintemperatuur is gegeven.

In dit geval wordt de vergelijking voor de temperatuurverdeling

$$u_{xx} = \frac{1}{k}.u_t.$$

Wij beschouwen twee verschillende typen van randvoorwaarden

A) $\left.\begin{array}{ll} x = 0 & U = 0 \\ x = 1 & U = 0 \end{array}\right\}$ $t = 0$ $U = f(x)$

B) $\left.\begin{array}{ll} x = 0 & U_x - hU = 0 \\ x = 1 & U_x + HU = 0 \end{array}\right\}$ $t = 0$ $U = f(x)$

Andere typen randvoorwaarden zijn dikwijls tot deze twee typen terug te brengen, bijv.:

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0 & U = U_0 \\ x = 1 & U = U_1 \end{array}\right\} \quad t = 0 \quad U = 0$$

Wij berekenen nu eerst de stationnaire temperatuurverdeling $U_1^{(s)}$, die voldoet aan

$$U^{(s)}_{xx} = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0 & U^{(s)} = U_0 \\ x = 1 & U^{(s)} = U_1 \end{array}\right\}$$

Deze wordt een lineaire functie van x, die aan de randvoorwaarden moet voldoen, dus

$$U^{(s)} = x(U_1 - U_0) + U_0.$$

Wij voeren dan een nieuwe onbekende functie $V(x,t)$ in

$$U = V + x(U_1 - U_0) + U_0$$

dan geldt voor V het randwaardenprobleem A

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0 & V = 0 \\ x = 1 & V = 0 \end{array}\right\} \qquad t = 0 \quad V = -x(U_1 - U_0) - U_0$$

3. <u>Oplossing van probleem A</u>.

De differentiaalvergelijking

$$U_t = k\, U_{xx}$$

gaat door de transformatie van Laplace

$$u(p) = \int_0^\infty e^{-p.kt} U(x,t)\,dt$$

over in

$$u_{xx} - pu = -\frac{1}{k}\, U(x,0).$$

Wij beschouwen nu voorlopig alleen deze getransformeerde vergelijking. De randvoorwaarden zijn:

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array} \qquad \left\{\begin{array}{l} u = 0 \\ u = 1, \end{array}\right.$$

terwijl $\frac{1}{k}\, U(x,0) = f(x)$ gegeven is.

De oplossing van dit randwaardeprobleem voor de niet homogene vergelijking

$$u_{xx} - pu = f(x)$$

vinden wij met behulp van een functie van Green voor dit probleem. Dit is een functie $G(x, \xi)$, die voldoet aan de volgende voorwaarden:

1) $G(x, \xi)$ is een oplossing van de homogene differentiaalvergelijking in x.
2) G voldoet aan de randvoorwaarden voor $x = 0$ en $x = 1$.
3) In het punt ξ maakt de afgeleide G_x een sprong 1, maar G zelf is continu

$$G_x(\xi - 0) - G_x(\xi + 0) = 1 \qquad G(\xi - 0) = G(\xi + 0).$$

G wordt samengesteld uit twee particuliere oplossingen.
De eerste u_1 voldoet aan $x = 0$, $u = 0$, de tweede u_2 aan $x = 1$, $u = 0$.
Wij stellen nu

$$\begin{array}{ll} G(x, \xi) = A.u_1(x) & 0 \leq x < \xi \\ G(x, \xi) = B.u_2(x) & \xi < x \leq 1 \end{array}$$

Dan moet

$$A.u_1(\xi) = B.u_2(\xi)$$

dus kunnen wij stellen

$$G(x,\xi) = C.u_1(x)u_2(\xi) \qquad 0 \leq x < \xi$$
$$G(x,\xi) = C.u_2(x)u_1(\xi) \qquad \xi < x \leq 1,$$

waarbij C bepaald wordt uit de voorwaarden

$$C\left\{u_1'(\xi)\,u_2(\xi) - u_2'(\xi)\,u_1(\xi)\right\} = 1.$$

Wij vinden

$$u_1 = \sinh x\sqrt{p},$$
$$u_2 = \sinh(1-x)\sqrt{p}$$

en voor C de vergelijking

$$C\sqrt{p}\left\{\cosh\xi\sqrt{p}.\sinh(1-\xi)\sqrt{p} + \cosh(1-\xi)\sqrt{p}.\sinh\xi\sqrt{p}\right\} = 1$$

dus

$$C = \frac{1}{\sqrt{p}.\sinh\sqrt{p}}.$$

De functie van Green wordt dus

$$G(x,\xi) = \frac{\sinh x\sqrt{p}.\sinh(1-\xi)\sqrt{p}}{\sqrt{p}.\sinh\sqrt{p}} \qquad 0 \leq x \leq \xi$$

$$G(x,\xi) = \frac{\sinh\xi\sqrt{p}.\sinh(1-x)\sqrt{p}}{\sqrt{p}.\sinh\sqrt{p}} \qquad \xi \leq x \leq 1.$$

Wij kunnen nu de vergelijking direct oplossen.
Uit

$$u_{xx} - pu = f(x)$$
$$G_{xx} - pG = 0$$

volgt

$$\int_0^1 \left\{G(u_{xx}-pu) - u(G_{xx}-pG)\right\} dx = \int_0^1 f(x).G(x,\xi)dx.$$

Door partiële integratie herleiden wij het linkerlid, waarbij het interval in tweeën gesplitst moet worden.

$$\int_0^1 (Gu_{xx}-uG_{xx})dx = \int_0^\xi (Gdu_x-udG_x) + \int_\xi^1 (Gdu_x-udG_x) =$$

$$= G(\xi)-u_x(\xi) - u(\xi).G_x(\xi-0) - G(0)u_x(0)+u(0)G_x(0) + G(1)u_x(1) +$$
$$- u(1)G_x(1) - G(\xi)u_x(\xi) + u(\xi)G_x(\xi+0) +$$
$$- \int_0^\xi (G_xu_x-u_xG_x)dx - \int_\xi^1 (G_xu_x-u_xG_x)dx = - u(\xi).$$

Wij vinden dus:

$$u(\xi) = - \int_0^1 f(x).G(x,\xi)dx,$$

en door terug te transformeren wordt de oplossing van probleem A

4. Ontwikkeling van de oplossing naar eigenfuncties.

De bovenstaande methode is te generaliseren tot meer gecompliceerde differentiaalvergelijkingen.

In vele gevallen is het echter niet mogelijk de functie van Green expliciet aan te geven en dikwijls is het ook lastig de verkregen uitdrukking terug te transformeren.

Wij bespreken daarom, aan deze eenvoudige vergelijking nog een andere methode, nl. de methode van de ontwikkeling naar eigenfuncties.
Het homogene probleem A is

$$u_{xx} - pu = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 & u = 0 \\ x = 1 & u = 0 \end{cases}$$

In het algemeen heeft dit probleem geen oplossingen behalve de nuloplossing.

Alleen voor speciale waarden van p, de eigenwaarden, is dit wel het geval. Stel even $p = -\lambda$, dan wordt de vergelijking

$$u_{xx} + \lambda u = 0$$

De oplossingen zijn

$$U = \sin n\pi x$$

en zij treden op als $\lambda = n^2\pi^2$.

Deze functies heren de <u>eigenfuncties</u> van het randwaardenprobleem en de bijbehorende waarden van λ heten <u>eigenwaarden</u>.

Wij kunnen dit probleem ook uit een andere gezichtshoek beschouwen.

Daartoe schrijven wij de vergelijking als

$$U_{xx} = -\lambda U$$

en passen de redenering van de vorige paragraaf toe.

De vergelijking zonder tweede lid is

$$U_{xx} = 0$$

en een functie van Green voor deze vergelijking en de randvoorwaarden is

$$K(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi) & 0 \leq x \leq \xi \\ \xi(1-x) & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Het randwaardenprobleem kan dus worden omgezet in een vergelijking

$$u(\xi) = \lambda \int_0^1 K(x, \xi).u(x)dx.$$

Hiermede zijn de functies u(x) niet gevonden, want onder de integraal treden deze functies nog op.

Een vergelijking, waarbij de onbekende functie onder een integraal voorkomt, heet een <u>integraalvergelijking</u>. Als de functie niet buiten de integraal voorkomt, heet zij integraalvergelijking van de eerste soort, treedt zij, zoals hier ook onder de integraal op, dan heet zij integraal-

vergelijking van de tweede soort.

Verder is het duidelijk, dat met $u(x)$ ook $\mu\, u(x)$ waarbij μ een willekeurig getal is, een oplossing is. De vergelijking is dus een <u>homogene integraalvergelijking van de tweede soort</u>.

Verder merken wij op, dat de kern <u>symmetrisch</u> is

$$K(x, \xi) = K(\xi, x).$$

Deze integraalvergelijking heeft alleen oplossingen voor zekere waarden van λ, de eigenwaarden en de bijbehorende oplossingen heten eigenfuncties.

Wij bespreken eerst enige eigenschappen van deze eigenfuncties, behorende bij een <u>symmetrische</u> kern.

1) Als u_m en u_n twee eigenfuncties zijn, die bij verschillende eigenwaarden λ_m en λ_n behoren, geldt

$$\int_0^1 u_m u_n dx = 0.$$

Om dit in te zien, merken wij op, dat

$$u_m(\xi) = \lambda_m \int_0^1 K(x, \xi) u_m(x) dx,$$

$$u_n(\xi) = \lambda_n \int_0^1 K(x, \xi) u_n(x) dx$$

door vermenigvuldiging van de eerste vergelijking met $\lambda_n u_n(\xi)$ en de tweede met $\lambda_m u_m(\xi)$ en integratie naar ξ vinden wij

$$\lambda_n \int_0^1 u_n(\xi) u_m(\xi) d\xi = \lambda_n \lambda_m \int_0^1 u_n(\xi) d\xi \int_0^1 K(x, \xi) u_m(x) dx,$$

$$\lambda_m \int_0^1 u_m(\xi) u_n(\xi) d\xi = \lambda_m \lambda_n \int_0^1 u_m(\xi) d\xi \int_0^1 K(x, \xi) u_n(x) dx.$$

Verder is $K(x, \xi) = K(\xi, x)$ en K is een continue functie van x en Verwisseling van de integratievolgorde geeft dan, dat de tweede leden gelijk zijn.

Dus

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^1 u_n(\xi) u_m(\xi) d\xi = 0$$

en, daar $\lambda_n \neq \lambda_m$

$$\int_0^1 u_n(\xi) u_m(\xi) d\xi = 0.$$

2) De eigenwaarden, behorende bij een reële symmetrische kern zijn reëel. Indien er een complexe eigenwaarde was, zou de bijbehorende eigenfunctie $\varphi(x)$ ook complex zijn.

Met deze eigenwaarde en eigenfunctie is ook de toegevoegd complexe functie een eigenfunctie met het toegevoegd complexe getal als eigenwaarde. Daar de eigenwaarden verschillend zijn, moet gelden

$$\int_0^1 \varphi(x)\overline{\varphi(x)} = 0$$

en dit kan niet als (x) niet identiek nul is.
Daar de eigenfuncties tot op een willekeurige constante factor bepaald zijn, kunnen wij deze vastleggen door de eis, dat

$$\int_0^1 u_n^2 dx = 1$$

is.

Deze eigenschappen van de eigenfuncties voeren tot de hoop een willekeurige, voor $0 \leq x \leq 1$ gedefinieerde functie in een reeks naar eigenfuncties te kunnen ontwikkelen.

Schrijven wij nl. formeel

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n . u_n(x)$$

en vermenigvuldigen met $u_m(x)$ en integreren, dan wordt

$$\int_0^1 f(x)u_m(x)dx = A_m,$$

zodat de coëfficiënten A_m bepaald kunnen worden.

Kiezen wij in het bijzonder

$$f(x) = K(x, \xi)$$

dan wordt

$$A_m = \int_0^1 K(x, \xi)u_m(x)dx = \frac{u_m(\xi)}{\lambda_m}$$

zodat wij formeel vinden

$$K(x, \xi) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_m(x)u_m(\xi)}{\lambda_m}$$

de z.g. <u>bilineaire</u> ontwikkeling van de kern.

In het hier genoemde voorbeeld zijn de genormeerde eigenfunctie

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2}. \sin n\pi x$$

en de eigenwaarden

$$\lambda_n = n^2 \pi^2.$$

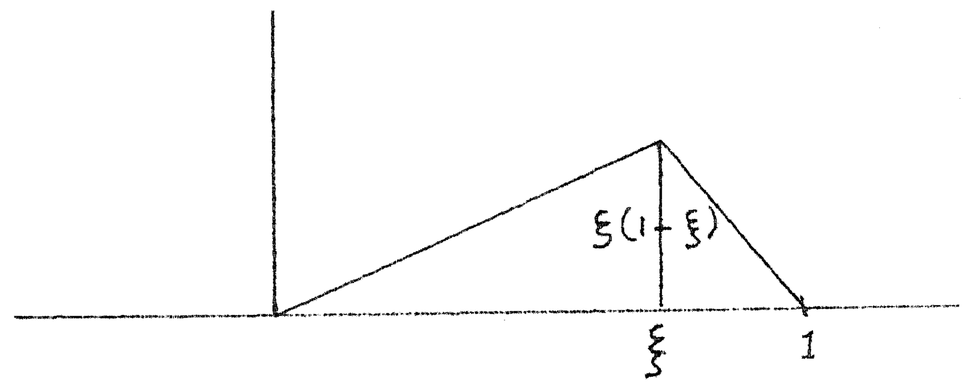
De reeksontwikkeling in f(x) is niets anders dan de gewone ontwikkeling van f(x) in een reeks van Fourier. Het is een moeilijk probleem de meest algemene voorwaarden aan te geven, waaraan een functie f(x) moet voldoen, opdat de Fourier-reeks convergeert en de functie voorstelt.

Wij slaan daarom een andere weg in en bewijzen eerst, dat de bilineaire ontwikkeling voor de kern

$$K(x,\xi) = \begin{matrix} x(1-\xi) & 0 \leq x \leq \xi \\ \xi(1-x) & \xi \leq x \leq 1 \end{matrix}$$

bestaat.

Dit is de gewone ontwikkeling van deze functie in een reeks van Fourier.



De coëfficiënten worden gevonden uit

$$A_m = \sqrt{2}\int_0^{\xi} x(1-\xi)\sin\pi mx dx +$$

$$+\sqrt{2}.\int_{\xi}^{1} \xi(1-x)\sin\pi mx dx = (1-\xi)\sqrt{2}\,\frac{-1}{\pi m}\int_0^{\xi} x.d\cos\pi mx +$$

$$+\ \xi\sqrt{2}.\frac{-1}{\pi m}\int_{\xi}^{1}(1-x)d\cos\pi mx = -\frac{(1-\xi)\sqrt{2}}{\pi m}.\xi.\cos\pi m\xi +$$

$$+\frac{\xi\sqrt{2}}{\pi m}(1-\xi)\cos m\xi + \frac{(1-\xi)\sqrt{2}}{\pi m}.\int_0^{\xi}\cos\pi mx dx - \frac{\xi\sqrt{2}}{\pi m}\int_{\xi}^{1}\cos\pi mx dx =$$

$$= \frac{(1-\xi)\sqrt{2}}{\pi^2 m^2}.\sin\pi m\xi + \frac{\xi\sqrt{2}}{\pi^2 m^2}.\sin\pi m\xi = \frac{\sqrt{2}.\sin\pi m\xi}{{}^2 m^2}.$$

Beschouw nu de reeks

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{2}A_m.\sin\pi mx = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2\sin\pi mx.\sin\pi m\xi}{\pi^2 m^2}$$

Deze is zeker gelijkmatig convergent, want zij wordt gemajoreerd door de reeks

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{m-1}^{\infty}\frac{1}{m^2}$$

die convergent is.

Wij voeren nu in het begrip: bronverdelingsfunctie (Kneser) en verstaan daaronder een functie F(x), die geschreven kan worden als

$$F(\xi) = \int_0^1 K(x,\xi)f(x)dx$$

dus als superpositie van de temperatuurverdelingen, die behoren bij bronnen ter sterkte f(x)dx.

Dan geldt de stelling

<u>Iedere bronverdelingsfunctie kan in een gelijkmatig convergente reeks van eigenfuncties ontwikkeld worden als voor de kern de bilineaire ontwikkeling geldt.</u>

Immers, in dit geval is verondersteld, dat

$$K(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(\xi)}{\lambda_n}$$

een gelijkmatige convergente reeks is.

Wij kunnen deze reeks term voor term integreren en vinden dan de gelijkmatig convergente reeks:

$$F(\xi) = \int_0^1 K(\xi, x)f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(\xi)}{\lambda_n} \int_0^1 f(x)u_n(x)dx$$

Verder is

$$\int_0^1 F(\xi)u_n(\xi)d\xi = \int_0^1 d\xi \int_0^1 K(\xi, x)f(x)dx.u_n(\xi) = \frac{1}{\lambda_n} \cdot \int_0^1 u_n(x)f(x)dx,$$

zodat de coëfficiënten in de gevonden reeks van $F(\xi)$ juist de ontwikkelingscoëfficiënten zijn.

Welke functies zijn nu bronverdelingsfuncties voor de speciale kern die wij beschouwen?

Dit zijn de functies, die aan de randpunten nul zijn en continue eerste afgeleiden hebben, terwijl de tweede afgeleiden hoogstens in een eindig aantal punten discontinu kunnen zijn.

Immers, dan kunnen wij stellen

$$F''(x) = f(x)$$

en deze functie is voor $0 \leq x \leq 1$ gedefinieerd met uitzondering van een eindig aantal punten.

Integratie geeft, met inachtname van de randcondities $F(0) = F(1) = 0$ direct

$$F(\xi) = \int_0^1 K(x, \xi)f(x)dx.$$

Wij hebben dus gevonden: Iedere functie $F(x)$ met $F(0) = F(1)$ met continue eerste afgeleide waarvoor de tweede afgeleide hoogstens in een eindig aantal punten discontinu is, kan in een gelijkmatig convergente reeks van eigenfuncties ontwikkeld worden.

Nu keren wij terug naar het oorspronkelijke randwaardenprobleem

$$u_{xx} - pu = f(x)$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

en veronderstellen, dat $f(x)$ een bronverdelingsfunctie is, dus dat een ontwikkeling bestaat

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m.u_m(x).$$

Wij kunnen nu deze differentiaalvergelijking direct herleiden tot de niet homogene integraalvergelijking

$$u(\xi) = p \int_0^1 K(\xi, x)u(x)dx - \int_0^1 f(x)K(x,\xi)dx.$$

Onderstellen wij nu, dat de oplossing u(x) in een reeks van eigenfuncties ontwikkeld kan worden

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n . u_n(x),$$

dan moet

$$b_n = -\frac{p}{\lambda_n} b_n - \frac{a_n}{\lambda_n}$$

dus:

$$b_n = \frac{a_n}{p+\lambda_n}.$$

Wij vinden dus voor de oplossing de reeks:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n u_n(x)}{p+\lambda_n},$$

die, mèt de reeks voor f(x) convergeert voor iedere waarde van p, die $\neq -\lambda_n$ is.

5. <u>De temperatuurverdeling</u>.

Door de gevonden reeks term voor term terug te transformeren vindt men direct de temperatuurverdeling. Daar de eigenfunctie $u_n(x)$ p niet meer bevat, krijgt men direct

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . u_n(x) e^{-\lambda_n t}$$

en dus in het speciale geval A

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\, e^{-\lambda_n t} \sin n\pi x \int_0^1 f(\xi) \sin n\pi\xi \, d\xi$$

Deze reeks is alleen convergent, indien f(0) = f(1) = 0. Het is physisch ook duidelijk, dat aan deze voorwaarde voldaan moet zijn om "nette" resultaten te krijgen. Immers de randvoorwaarden zijn, dat voor alle t U(0) = U(1) = 0. Het spreek vanzelf, dat dan de gegeven beginverdeling voor t = 0 ook aan deze eindpunten nul moet zijn. Is dit niet het geval, dan treden discontinuïteiten in de oplossing. Dit geval zullen wij later nader onderzoeken.

6. <u>Probleem B</u>.

De oplossing van probleem B is nu eenvoudig te geven, want de stellingen in het voorafgaande zijn, waar mogelijk, onafhankelijk van de speciale vorm van de kern $K(x,\xi)$ geformuleerd.

Het homogene probleem is

$$u_{xx} + \lambda u = 0 \qquad p = -\lambda$$

$$\begin{cases} x = 0 & U_x - hU = 0 \\ x = 1 & U_x + HU = 0 \end{cases}$$

De eigenfuncties vinden wij door op te merken, dat de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is

$$A \sin \sqrt{\lambda}\ x + B \cos \sqrt{\lambda}\ .\ x$$

A en B moeten voldoen aan

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}.A - hB = 0 \\ \sqrt{\lambda}\ .A.\cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\ B.\sin \sqrt{\lambda} + AH \sin \sqrt{\lambda} + HB \cos \sqrt{\lambda} = 0. \end{cases}$$

Dit kan alleen als λ voldoet aan de vergelijking:

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} = \frac{h+H}{\lambda - Hh}.$$

Hieruit vinden wij de eigenwaarden, die alleen positief zijn (de vergelijking heeft uitsluitend reële wortels $x.n\sqrt{\lambda}$).

De eigenfuncties vinden wij door substitutie in λ_n. Ook hier kunnen wij het probleem omzetten in een integraalvergelijking door middel van een functie $K(\xi, x)$, die nu aan de nieuwe randvoorwaarden moet voldoen en ook weer uit twee lineaire stukken bestaat.

$$K(\xi, x) = \begin{cases} \frac{1+H}{hH+h+H}(1+hx)\left(1-\frac{H}{1+H}\xi\right), & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{1+H}{hH+h+H}(1+h\xi)\left(1-\frac{H}{1+H}x\right) & \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Men kan nu alle algemene stellingen over de orthogonaliteit op dezelfde wijze bewijzen als vroeger. Alleen de bilineaire ontwikkeling is iets gecompliceerder, omdat hier de reeks niet meer de gewone reeks van Fourier is. Wij bewijzen dit hier niet, omdat wij later algemeen zullen bewijzen, dat de bilineaire ontwikkeling altijd geldt, als alle eigenwaarden positief zijn (stelling van Mercer).

2e Doelhaavestraat 45
TELEFOON 51660 - 56643
AMSTERDAM-O.

Integraaltransformaties in de mathematische physica

door

Prof. Dr R. Timman

II. Algemene theorie der integraalvergelijkingen met symmetrische kern

1. Berekening van een eigenwaarde van de homogene integraalvergelijking door iteratie.

Wij beschouwen de homogene integraalvergelijking

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\mathcal{G}} K(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

waarbij $K(x,y) = K(y,x)$ en de integratie over het vaste grondgebied (dat ook meerdimensionaal mag zijn) wordt uitgestrekt.

Indien wij veronderstelllen, dat de bilineaire ontwikkeling geldt

$$K(x,y) = \sum_n \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{\lambda_n}$$

dan krijgen wij (formeel)

$$\int K(x,z)\,K(z,y)\,dz = \sum_n \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{\lambda_n^2}$$

Stellen wij verder

$$K^{n+1}(x,y) = \int K^n(x,z).K(z,y)\,dz$$

dan krijgen wij na m iteraties

$$K^m(x,y) = \sum_n \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{\lambda_n^m}$$

Laat nu de eigenwaarden in toenemende grootte zijn $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ dan is bij benadering

$$K^m(x,y).\ \lambda_1^m \sim \varphi_1(x)\ \varphi_1(y)$$

of, als wij de functie $\varphi_1(x)$ normeren

$$\int \varphi_1^2(x)\,dx = 1$$

$$\int K^m(x,x)\,dx = \frac{1}{\lambda_1^m}$$

zodat, wij verwachten:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \lim_{m\to\infty} \frac{\int K^{m+1}(x,x)dx}{\int K^m(x,x)dx}$$

Wij zullen deze stellingen nu bewijzen.

Als belangrijkste hulpmiddel fungeert de ongelijkheid van Schwarz:

$$\left(\int f.g\ dx\right)^2 \leq \left(\int f^2dx\right)\left(\int g^2dx\right).$$

De functie

$$\int (uf+vg)^2dx = u^2\int f^2dx+2uv\int fg\ dx+v^2\int g^2dx$$

is voor alle waarden van u en v $\geq$ 0. Dus is

$$\left(\int fg\ dx\right)^2 - \left(\int f^2dx\right)\left(\int g^2dx\right) \leq 0,$$

waarmee de stelling bewezen is.

Nu is gemakkelijk in te zien, dat

$$K^{n+r}(x,z) = \int K^n(x,y)K^r(y,z)dy$$

en dus is volgens Schwarz

$$\left\{K^{n+r}(x,z)\right\}^2 \leq \int\left\{K^n(x,y)\right\}^2dy.\ \int\left\{K^r(x,y)\right\}^2dy.$$

Wij voeren nu in de constante

$$U_{n+r} = \iint K^n(x,y)K^r(y,x)dx\ dy.$$

Dan is

$$U_{2n} = \iint \left\{K^n(x,y)\right\}^2dx\ dy$$

en geldt enerzijds

$$U^2_{n+r} \leq U_{2n}\cdot U_{2r}$$

en anderzijds

$$U_{2n+2r} \leq U_{2n}\cdot U_{2r}$$

Wij vinden uit de eerste ongelijkheid

$$U^2_{2n} \leq U_{2n-2}\cdot U_{2n+2},$$

of wel

$$\frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} \leq \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}$$

en verder

$$\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} \leq U_2$$

zodat deze getallenrij (die positief is) stijgend is en begrensd en dus tot een limiet nadert.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} = c.$$

Ook bestaat $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{U_{2m}}{c^m} = U$, want $U_{2r} \geqslant \frac{U_{2n+2r}}{U_{2n}} \geqslant \left(\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}\right)^r$,

dus

$$\frac{U_{2r}}{c^r} \geqslant 1.$$

Volgens onze voorafgaande beschouwingen zullen wij verwachten, dat $\frac{1}{c} = \lambda_1^2$ is, waarbij λ_1 de kleinste eigenwaarde is.

Wij zien, dat

$$\frac{K^{2m+2n}(x,y)}{c^{m+n}} - \frac{K^{2n}(x,y)}{c^n} =$$

$$= \frac{1}{c} \iint K(x,z)K(y,u)\left[\frac{K^{2m+2n-2}(z,u)}{c^{m+n-1}} - \frac{K^{2n-2}(z,u)}{c^{n-1}}\right] dz\, du,$$

en dus volgens de ongelijkheid van Schwarz

$$\left[\frac{K^{2m+2n}(x,y)}{c^{m+n}} - \frac{K^{2n}(x,y)}{c^n}\right]^2 \leqq \frac{1}{c^2}\iint K^2(x,z)K^2(y,u)\, dz\, du\ .$$

$$\cdot \iint dz\, du \left[\frac{K^{2m+2n-2}(z,u)}{c^{m+n-1}} - \frac{K^{2n-2}(z,u)}{c^{n-1}}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{c^2}\iint K(x,z)^2K(y,u)^2 dz du.\left[\frac{U_{4m+4n-4}}{c^{2m+2n-2}} - \frac{2U_{4m+4n-4}}{c^{m+2n-2}} + \frac{U_{4n-4}}{c^{2n-2}}\right].$$

Nu hebben wij gezien, dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{2n+2}}{c^{n+1}} = U$$

bestaat, zodat voor m en $n \to \infty$

$\frac{K^{2m}(x,y)}{c^m}$ tot een limiet nadert en wel uniform in x en y.

Deze limiet is nu een functie f(x,y), die symmetrisch is in x en y. Verder is

$$\frac{K^{2m+2}(x,y)}{c^{m+1}} = \frac{1}{c}\int K^2(x,z).\ \frac{K^{2m}(z,y)}{c^m}.\ dz,$$

en de limietfunctie f(x,y) voldoet dus aan:

$$f(x,y) = \frac{1}{c}\int K^2(x,z).f(z,y)dz,$$

en is dus een eigenfunctie van de geïtereerde kern (y is hier een parameter).

Hieruit kunnen wij echter direct een eigenfunctie van de kern zelf afleiden.

Stel nl., bij de eigenfunctie f(x) van de geïtereerde kern

$$\varphi(x) = f(x) - a\int K(x,\alpha)\, f(\alpha)d\alpha$$

waarbij a een constante is. Dan is

$$\int K(x,\beta)\varphi(\beta)d\beta = \int K(x,\beta)f(\beta)d\beta +$$
$$- a \iint K(x,\beta)K(\beta,\alpha)f(\alpha)d\alpha\, d\beta =$$
$$= \int K(x,\beta)f(\beta)d\beta - a\int K^2(x,\alpha)f(\alpha)d\alpha$$

of wel

$$\int K(x,\beta)\varphi(\beta)d\beta = \frac{f(x)-\varphi(x)}{a} - ac\, f(x).$$

Dus, als wij

$$a = \frac{1}{\sqrt{c}}$$

stellen

$$\int K(x,\beta)\varphi(\beta)d\beta = -\sqrt{c}.\ \varphi(x).$$

De oorspronkelijke kern heeft dus een eigenfunctie φ, die behoort bij de eigenwaarde $\sqrt{c}$. Wij zien dus:

<u>Iedere reële symmetrische kern, die continu is, heeft ten minste één reële eigenwaarde en een daarbij behorende eigenfunctie</u>.

2. <u>Eigenschappen van eigenwaarden en eigenfuncties</u>.

Wij gaan nu het gehele systeem van eigenfuncties en eigenwaarden na.

Neem aan, dat bij een eigenwaarde λ één of meer (k) onderling orthogonale eigenfuncties behoren: $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Dan geldt

$$\varphi_j(x) = \lambda \int K(x,\alpha)\varphi_j(\alpha)d\alpha \qquad j = 1,\ldots,k$$

$$\int \varphi_j \varphi_l dx = \delta_l^j = \begin{matrix} 1 & j = l \\ 0 & j \neq l \end{matrix}.$$

Nu vormen wij de grootheid

$$P = \int \left[K(x,\alpha) - \sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j(\alpha) \right]^2 d\alpha =$$

$$= \int K^2(x,\alpha)d\alpha + \sum_{j=1}^{k} c_j^2 - 2\sum_{j=1}^{k} c_j \int K(x,\alpha)\varphi_j(\alpha)d\alpha \geqslant 0,$$

dus, als

$$c_j = \int K(x,\alpha)\varphi_j(\alpha)d\alpha = \frac{\varphi_j(\alpha)}{\lambda}$$

is

$$P = \int K^2(x,\alpha)d\alpha - \sum_{j=1}^{k} \frac{\varphi_j^2(\alpha)}{\lambda^2} = \iint K^2(x,\alpha)d\alpha - \frac{k}{\lambda^2} \geqslant 0.$$

Hieruit volgt, dat k begrensd is, bij iedere eigenwaarde kan niet meer dan een eindig stel eigenfuncties behoren. Laat k het maximale aantal zijn. Verder kunnen wij laten zien, dat iedere eigenfunctie,

die bij een bepaalde λ behoort, een lineaire combinatie is van een systeem $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$.

Stel, dat er een eigenfunctie ψ is, zodat dit niet het geval is. In ieder geval kunnen wij k constanten b_j bepalen, zodat

$$\psi_0(x) = \psi(x) - \sum_{j=1}^{k} b_j \varphi_j(x)$$

orthogonaal is t.o.v. alle φ_j.

Neem nl.

$$b_j = \int \psi(\alpha)\, \varphi_j(\alpha)\, d\alpha .$$

Dan is $\psi_0(x)$ ook een eigenfunctie, die orthogonaal is met φ_j $(j = 1, \ldots, k)$; er zijn dus (k+1) onderling onafhankelijke orthogonale eigenfuncties in tegenstelling met de bovengenoemde onderstelling.

Het orthogonale systeem van eigenfuncties noemen wij een volledig systeem, als bij iedere λ het maximale aantal vertegenwoordigd is. Iedere eigenfunctie is dus een lineaire conbimatie van eigenfuncties uit het volledige systeem.

<u>Eigenfuncties, die bij verschillende eigenwaarden behoren, zijn steeds onderling orthogonaal</u>.

Immers:

$$\lambda_2 \int \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dx = \lambda_1 \lambda_2 \int \varphi_2 \, dx \int K(x, \alpha)\, \varphi_1 . d\alpha$$

$$\lambda_1 \int \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dx = \lambda_1 \lambda_2 \int \varphi_1 \, dx \int K(x, \alpha)\, \varphi_2 . d\alpha$$

Daar $K(x, \alpha)$ symmetrisch is, zijn de rechter leden gelijk en daar $\lambda_1 \neq \lambda_2$ is moet $\int \varphi_1 \varphi_2 \, dx = 0$ zijn.

<u>Een reële kern heeft slechts reële eigenwaarden</u>.

Had zij nl. een complexe eigenwaarde, dan was de bijbehorende eigenfunctie ook complex. De geconjugeerde functie was dan ook een eigenfunctie, behorende bij de geconjugeerde eigenwaarde en door deze functies moest dus gelden $\int \varphi . \overline{\varphi} \, dx = 0$.

Dit kan echter alleen als φ identiek nul is. Als wij de functies φ_n nog normeren $\int \varphi_n^2 \, dx = 1$ krijgen wij dus een <u>orthogonaal systeem van eigenfuncties</u>.

Wij kunnen nu direct nog een stelling afleiden voor de eigenwaarden.

Allereerst is

$$\int \left[K(x, \alpha) - \sum_1 c_1 \varphi_1(\alpha) \right]^2 d\alpha \geqslant 0$$

als gesommeerd is over een eindig aantal eigenfuncties. Stel nu

$$c_1 = \int K(x, \alpha)\, \varphi_1(\alpha)\, d\alpha = \frac{\varphi_1(\alpha)}{\lambda_1} ,$$

dan vinden wij

$$\int K^2(x,\alpha)d\alpha - \sum_1 c_1^2 \geqslant 0$$

of

$$\int K^2(x,\alpha)d\alpha - \sum_1 \frac{\varphi_1^2(x)}{\lambda_1^2} \geqslant 0$$

of, na integratie naar x

$$\iint K^2(x,\alpha)dx\, d\alpha \geqslant \sum_1 \frac{1}{\lambda_1^2}.$$

De reeks van de kwadraten van de reciproke eigenwaarden is dus convergent. De eigenwaarden kunnen dus niet tot een eindige waarde naderen.

Verder kunnen wij nu ook bewijzen:

<u>Als de bilineaire reeks, gevormd met een volledig orthogonaal systeem van een continue symmetrische kern gelijkmatig convergeert, stelt zij de kern ook voor.</u>

Stel nl. dat de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}$$

gelijkmatig convergeert. Wij beschouwen nu de functie

$$Q(x,\xi) = K(x,\xi) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n},$$

die symmetrisch is in x en ξ. Er is dus een eigenfunctie $\psi(x)$ van de integraalvergelijking

$$\psi(x) = \mu \int Q(x,\xi)\psi(\xi)d\xi$$

met eigenwaarde μ.

Als wij nu met $\varphi_n(x)$ vermenigvuldigen en term voor term integreren (de reeks is gelijkmatig convergent), krijgen wij

$$\int \psi(x)\varphi_n(x)dx = \mu \int \psi(\xi)d\xi \left(\int K(x,\xi)\varphi_n(x)dx - \frac{\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}\right) = 0$$

en dus is

$$\psi(x) = \mu \int K(x,\alpha)\psi(\alpha)d\alpha.$$

dus $\psi(x)$ is een eigenfunctie en behoort dus tot het systeem, in tegenspraak met de onderstelling, tenzij $Q(x,\xi)$ identiek nul is en dus geldt

$$K(x,\xi) = \sum_{n=1} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}.$$

3. <u>De bilineaire reeks voor de geïtereerde kern.</u>

Wij beschouwen weer een volledig systeem $\varphi_n(x)$, dat bij een symmetrische kern K(x,y) behoort. Zij f(x) een bij gedeelten continue functie en stel

$$a_n = \int f(\alpha)\,\varphi_n(\alpha)\,d\alpha$$

Dan is volgens Schwarz (l doorloopt een eindige getallenverzameling)

$$\left[\int K(x,\alpha) \sum_l a_l\,\varphi_l(x)\,dx\right]^2 \leq \int K^2(x,\alpha)\,dx \,.\, \sum \alpha_l^2$$

of wel

$$\left(\sum_l \frac{a_l \cdot \varphi_l(\alpha)}{\lambda_l}\right)^2 \leq \int K^2(x,\alpha)\,dx . \sum \alpha_l^2 \,.$$

Nu is

$$\int \left\{f(\alpha) - \sum_l a_l\,\varphi_l(\alpha)\right\}^2 d\alpha \geqslant 0$$

en dus geldt

$$\int f^2(\alpha)\,d\alpha \geqslant \sum_l a_l^2 .$$

De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ convergeert dus.

Verder is

$$\left\{\sum_l \frac{a_l\,\varphi_l(\alpha)}{\lambda_l}\right\}^2 \leq \int K^2(x,\alpha)\,dx . \int f^2(\alpha)\,d\alpha .$$

zodat iedere eindige verzameling termen uit de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n\,\varphi_n(\alpha)}{\lambda_n}$$

begrensd wordt door een van de keuze van de termen onafhankelijke bovengrens. De reeks is dus absoluut convergent.

Zij is ook gelijmatig convergent. Wij kunnen dit bewijzen door op te merken, dat de reeks $\sum_{n=1} a_n^2$ convergeert en dus, dat $\sum_l a_l^2$ voor $l > l_0$ kleiner kan worden dan een vast getal ε_0.

Dan wordt echter

$$\left\{\sum_l \frac{a_l\,\varphi_l(\alpha)}{\lambda_l}\right\}^2 \leq G . \varepsilon$$

als G de maximumwaarde van $\int K^2(x,\alpha)\,dx$ voorstelt. De reeks

$$R(\alpha) = \sum_n \frac{\varphi_n(\alpha)}{\lambda_n} \int f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$$

is dus gelijkmatig absoluut convergent.

Nemen wij $f(\alpha) = K(\alpha, y)$, dan vinden wij

$$R(\alpha) = \sum_n \frac{\varphi_n(\alpha)\,\varphi_n(x)}{\lambda_n^2}$$

en deze gelijkmatig convergente reeks is de bilineaire ontwikkeling van de geïtereerde kern. Inderdaad zijn λ_n^2 de eigenwaarden van de geïtereerde kern.