STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 21b

Cursus Methoden der Mathematische Physica.

Den Haag, 2.1953-1954.

Veen S.C.van.

1954

TW

Cursus Methoden der Mathematische Fysica, 2.
(Den Haag, 2.)
1953/54

Veen S C van	Inleiding. Het integraaltheorema van Fourier. De integraal van Dirichlet. Afleiding van het integraaltheorema van Fourier.	p 1 - 7
Trense R W	Resumee van de stof, die gedurende het vorig jaar behandeld werd.	p 8 - 12
Veen S C van	Andere (complexe) vorm van het integraaltheorema van Fourier-Reciprociteitstheorema. Verdere toepassingen van de Fouriertransforms. De omkeringsformules van Mellin.	p 13 - 19
Trense R W	Aanvulling op de 2e voordracht p 8 - 12.	p 20 - 27
Trense R W	Vraagstuk.	p 28 - 35
Trense R W	-	p 36 - 44
Veen S C van	De inverse Laplace-transformatie.	p 45 - 47
Trense R W	-	p 48 - 55
Veen S C van	Verdere toepassingen van de inverse Laplace-transformatie. Complicaties bij vertakkingspunten.	p 56 - 60
Trense R W	Twee vraagstukken.	p 61 - 70
Timman R	Toepassingen van de transformatie van Laplace op partiële differentiaalvergelijkingen.	p 71 - 73
Trense R W	-	p 74 - 83
Timman R	-	p 84 - 89
Trense R W	-	p 90 - 99
Trense R W	-	p 100 - 109
Trense R W	Probleem betreffende de hoogwatergolf. Aanvulling.	p 110 - 121

TW
BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Inhoudsopgave

Cursus Methoden der Mathematische Fysica

(vervolg)

1953/1954.

Prof.dr. S.C. van Veen

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
AMSTERDAM (O.)

Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)
te 's-Gravenhage
1e Voordracht: 7 October 1953
Spreker: Prof. Dr S.C.van Veen.

Inleiding: In de voorafgaande cursus hebben wij ons bezig gehouden met het bepalen van Laplace-transformaties van verschillende (elementaire) functies, en we hebben met behulp van de gevonden uitkomsten de inverse transformaties beschouwd. Een algemene methoden van inverse transformatie is daarbij echter nog niet behandeld. Dit onderzoek zal het onderwerp uitmaken van de beschouwingen in de komende cursus. Bij dit algemene onderzoek zal worden gebruik gemaakt van de beginselen der complexe functietheorie (contour-integratie, stelling van Cauchy, residuen-rekening). Verder berust een belangrijk gedeelte op de theorie der Fourier-ontwikkelingen, i.h.b. op de zogenaamde integraal-formule van Fourier. Van deze laatste theorie zullen de hoofdpunten nu eerst uitvoerig behandeld worden.

1. Het integraaltheorema van Fourier (Heuristische beschouwingswijze).

Stel dat $f(x)$ periodiek is, met de periode $2\pi\lambda$. Onder zeer algemene voorwaarden (b.v. de voorwaarden van Dirichlet: het interval $(-\pi\lambda, +\pi\lambda)$ kan in een eindig aantal delen worden verdeeld, zodat in ieder deelinterval $f(x)$ monotoon is) kan $f(x)$ in een Fourier-reeks worden ontwikkeld:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{nx}{\lambda} + b_n \sin \frac{nx}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

Door termsgewijze integratie (welke wij voorlopig aannemen als geoorloofd) volgt:

$$\int_{-\pi\lambda}^{+\pi\lambda} f(t) \cos \frac{nt}{\lambda}\, dt = \pi\lambda a_n \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

$$\int_{-\pi\lambda}^{+\pi\lambda} f(t) \sin \frac{nt}{\lambda}\, dt = \pi\lambda b_n \quad (n = 0,1,2,\ldots) \qquad (2)$$

Dit zijn de integraalformules van Fourier-Euler.
Substitueren wij de uitkomsten (2) in (1), dan komt er:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{+\pi\lambda} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{+\pi\lambda} f(t) \cos \frac{n(x-t)}{\lambda}\, dt \qquad (3)$$

Stel

$$\frac{n}{\lambda} = u_n, \text{ dus } \frac{1}{\lambda} = u_{n+1} - u_n \qquad (u_0 = 0).$$

(3) gaat over in

$$f(x) = \frac{u_1}{2\pi} \int_{-\pi\lambda}^{+\pi\lambda} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}-u_n) \int_{-\pi\lambda}^{+\pi\lambda} f(t) \cos u_n(x-t)\,dt.$$

Stel

$$\int_{-\pi\lambda}^{+\pi\lambda} f(t) \cos u_n\,(x-t)\,dt = \varphi\,(u_n).$$

$$f(x) = \frac{u_1-u_0}{2\pi}\varphi(u_0) + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1} (u_{n+1}-u_n)\varphi(u_n) \qquad (4)$$

Nu laten wij $\lambda \to \infty$ aangroeien, dus $u_{n+1}-u_n \to 0$.
$f(x)$, welke ook geschreven kan worden als

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=0} (u_{n+1}-u_n)\,\varphi\,(u_n) - \frac{1}{2\pi}\,(u_1-u_0)\varphi(u_0)$$

gaat dan, als Riemann-som over in

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\varphi(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u\,(x-t)\,dt.$$

We zijn langs deze heuristische weg op het spoor gekomen van:
het integraaltheorema van Fourier: n.l.

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u\,(x-t)\,dt \qquad (5)$$

maar ook niet meer dan dat, want de voorgaande beschouwingswijze verdient allerminst de pretentie van een "mathematisch bewijs". Daarvoor is al te lichtvaardig omgesprongen met limietovergangen en ontwikkelbaarheid in Fourierreeks.

Wij zullen in de volgende paragrafen een strenge afleiding geven van dit belangrijke theorema, waarbij wij vooral nauwkeurig de vraag onder ogen zullen zien, onder welke voldoende voorwaarden dit theorema geldt.

2. De integraal van Dirichlet.

Eerst een paar hulpstellingen:

Hulpstelling 1. Voor $a > 0$ is

$$0 < \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = G.$$

Bewijs: Duidelijk uit het verloop van de grafiek van $\frac{\sin x}{x}$.

Hulpstelling 2. Voor $0 < a < b$ is

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx \right| \leq 2G.$$

Bewijs: $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \left|\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \left|\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| +$

$$+ \left|\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx\right| = 2G.$$

Hulpstelling 3. $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Bewijs: bekend (zie vorige cursus).

We beschouwen nu

$$\int_{-a}^{+a} f(x+t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt \qquad a > 0 \qquad (6)$$

Hierbij wordt aangenomen, dat de functie f(u) aan de volgende eisen voldoet.

1e f(u) is bepaald in het interval $-a-x < u < a-x$, dus f(x+u) is bepaald in $-a < u < a$.

2e Dit interval $-a-x < u < a-x$ kan verdeeld worden in een eindig aantal deelintervallen, zodat in ieder deelinterval de functie f(u) continu, monotoon en differentieerbaar is (dus in elk inwendig punt van zo'n deelinterval de afgeleide f'(u) bezit).

$$\int_{-a}^{+a} f(x+t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt = \int_{-a}^{0} + \int_{0}^{+a}.$$

Beschouw eerst de 2e integraal $\int_0^{+a} f(x+t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt$ en verdeel het interval (o,a) in 2 delen (0,k) en (k,a), dus

$$\int_0^a = \int_0^k + \int_k^a,$$

waarbij k zo klein (> 0) wordt gekozen, dat

1e f(x+t) in het interval $0 < t < a$ monotoon en differentieerbaar is (dus ook continu);

2e dat bij willekeurig klein gekozen $\varepsilon > 0$

$$\left|f(x+k) - f(x+0)\right| < \frac{\varepsilon}{6G}.$$

Stel de eventuele discontinuïteitspunten (sprongpunten) in het interval (k,a) zijn $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (eindig in aantal)

$$\int_k^a f(x+t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt = \sum_{s=0}^{m} \int_{a_s}^{a_{s+1}} f(x+t)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt \begin{pmatrix} a_o = k \\ a_{m+1} = a \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{s=0}^{m} - \int_{a_s}^{a_{s+1}} \frac{f(x+t)}{tn}\, d\cos nt = -\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{m}\left[\frac{f(x+t)\cos nt}{t}\right]_{a_s}^{a_{s+1}} +$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n}\int_{a_s}^{a_{s+1}} \cos nt \,.\, \frac{t.f'(x+t)-f(x+t)}{t^2}\, dt =$$

$$+ \frac{1}{n}\left\{\frac{f(x+k)\cos nk}{k} - \frac{f(x+a)\cos na}{a}\right\} - \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{m-1}\frac{\cos na_s}{a_s}\left\{f(x+a_s+0)-f(x+a_s-0)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{n}\int_{k}^{a} \cos nt \,.\, \frac{t.f'(x+t)-f(x+t)}{t^2}\, dt \qquad (7)$$

In de som in het rechterlid stelt $\left\{f(x+a_s+0)-f(x+a_s-0)\right\}$ de "sprong" voor in het discontinuïteitspunt a_s.

Wij willen straks de limietwaarde bepalen van (6) als $n \to \infty$.
Uit (7) ziet men, dat men na <u>voorafgaande keuze van k en ε</u>, n zo groot kan kiezen, $(n > n_o)$, dat

$$\left|\int_{k}^{a} f(x+t)\,\frac{\sin nt}{t}\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (8)$$

Nu komt de voornaamste kwestie:

$$\int_{0}^{k} f(x+t)\,\frac{\sin nt}{t}\, dt = \int_{0}^{k}\left\{f(x+t) - f(x+0)\right\}\frac{\sin nt}{t}\, dt +$$

$$+ f(x+0)\int_{0}^{k}\frac{\sin nt}{t}\, dt \qquad (9)$$

$f(x+t) - f(x+0)$ is <u>monotoon</u> in het interval $(0,k)$
Zonder beperking kunnen wij aannemen, dat $f(x+t)-f(x+0)$ in dit interval monotoon <u>stijgt</u> (anders beschouwt men de tegengestelde functie $f(x+0)-f(x+t)$)
Volgens de tweede middelwaardestelling is dan:

$$\int_{0}^{k}\left\{f(x+t)-f(x+0)\right\}\frac{\sin nt}{t}\, dt = \left\{f(x+k)-f(x+0)\right\}\int_{1}^{k}\frac{\sin nt}{t}\, dt.$$

$$(0 < 1 < k)$$

$$\text{Dus } \left|\int_{0}^{k}\left\{f(x+t)-f(x+0)\right\}\frac{\sin nt}{t}\, dt\right| < \left|f(x+k)-f(x+0)\right|\left|\int_{1}^{k}\frac{\sin nt}{t}\, dt\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{6G}\left|\int_{n1}^{nk}\frac{\sin u}{u}\, du\right| < \frac{\varepsilon}{6G}\,.\,2G = \frac{\varepsilon}{3} \quad \begin{matrix}\text{(hulpstelling 2 en}\\ \text{voorwaarden)}\end{matrix} \qquad (10)$$

$$f(x+0)\int_{0}^{k}\frac{\sin nt}{t}\, dt = f(x+0)\int_{0}^{kn}\frac{\sin u}{u}\, du \longrightarrow f(x+0)\,\frac{\pi}{2} \text{ voor } n \to \infty \quad ,$$

dus voor $n > n_1$ is

$$\left| f(x+0) \int_0^k \frac{\sin nt}{t}\, dt - \frac{\pi}{2} f(x+0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (11)$$

Ten slotte volgt uit (8), (9), (10), (11).

$$\left| \int_0^a f(x+t) \frac{\sin nt}{t}\, dt - \frac{\pi}{2} f(x+0) \right| < \varepsilon ,$$

voor $n > \max (n_o, n_1)$.
Dus

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^a f(x+t) \frac{\sin nt}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} f(x+0).$$

Op volkomen analoge wijze leidt men af, dat

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-a}^0 f(x+t) \frac{\sin nt}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} f(x-0)$$

zodat:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \int_{-a}^{+a} f(x+t) \frac{\sin nt}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \left\{ f(x+0)+f(x-0) \right\}} \qquad (12)$$

Dit is de integraal van Dirichlet. In een continuïteitspunt x wordt $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$, dus dan is het rechterlid $\pi f(x)$.

<u>Opmerking;</u> De uitkomst (12) kan onder minder verstrekkende eisen ten aanzien van f(u) worden afgeleid. In het bijzonder kan men de eis van differentieerbaarheid laten vallen. Het bewijs van (12) wordt dan echter veel omvangrijker, en vereist veel meer hulpstellingen.
In de meest voorkomende practische gevallen zal ruimschoots aan de bovengestelde eisen zijn voldaan. Voor verdere bijzonderheden verwijzen wij naar de uitgebreide handboeken op dit gebied.

3. <u>Afleiding van het integraaltheorema van Fourier</u>.

Omdat

$$\frac{\sin nt}{t} = \int_0^n \cos ut\, du$$

kan (12) geschreven worden in de vorm:

$$\frac{\pi}{2} \left\{ f(x+0)+f(x-0) \right\} = \lim_{n \to \infty} \int_{-a}^{+a} f(x+t)dt \int_0^n \cos ut\, du. \qquad (13)$$

Men komt nu licht in de verleiding om in de rechterzijde van (13) de integratievolgorde te verwisselen en voor het 2e lid te zetten

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^n du \int_{-a}^{+a} f(x+t) \cos ut \, du,$$

waaruit onmiddellijk het integraaltheorema van Fourier zou kunnen volgen, als deze omkering van de integratievolgorde geoorloofd zou zijn.

Dit laatste zullen wij nu juist bewijzen, onder de extra-voorwaarde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx \text{ . bestaat;}$$

of: de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{+\infty}$ convergeert absoluut.

Wij willen verder laten zien, dat onder die voorwaarden in de "binnen"-integraal de grenzen a door ∞ kunnen worden vervangen.
Voor eindige a en n geldt inderdaad:

$$\int_{-a}^{+a} f(x+t)\, dt \int_0^n \cos ut \, du = \int_0^n du \int_{-a}^{+a} f(x+t) \cos ut \, du \quad (14)$$

Neem nu $A > a$, dan is

$$\int_0^n \int_{-A}^{+A} - \int_0^n \int_{-a}^{+a} = \int_0^n \int_{-A}^{-a} + \int_0^n \int_{+a}^{+A} = \int_{-A}^{-a} \int_0^n + \int_a^A \int_0^n$$

of:

$$\left| \int_0^n \int_{-A}^{+A} - \int_0^n \int_{-a}^{+a} \right| \leq \left| \int_{-A}^{-a} f(x+t) \frac{\sin nt}{t} \, dt \right| + \left| \int_a^A f(x+t) \frac{\sin nt}{t} \, dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{a} \left\{ \int_{-A}^{-a} |f(x+t)| \, dt + \int_a^A |f(x+t)| \, dt \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t)| \, dt = \frac{\text{const}}{a},$$

voor iedere $A > a$.

Nu $A \to \infty$

$$\left| \int_0^n \int_{-\infty}^{+\infty} - \int_0^n \int_{-a}^{+a} \right| \leq \frac{\text{const}}{a} \quad \text{(voor iedere n).}$$

Vervolgens $n \to \infty$

$$\left| \lim_{n\to\infty} \int_0^n \int_{-\infty}^{+\infty} - \lim_{n\to\infty} \int_0^n \int_{-a}^{+a} \right| \leq \frac{\text{const}}{a},$$

dus wegens (14) en (13)

$$\frac{\pi}{2} \left[f(x+0) + f(x-0) \right] = \int_0^{\infty} du \int_{-}^{+} f(t+x) \cos ut \, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} du \int_{-}^{+} f(t) \cos u\,(t-x)\, dt,$$

waarmede het integraaltheorema van Fourier bewezen is onder de volgende voorwaarden.

1e f(t) is bepaald voor alle reële waarden van t.

2e ieder eindig interval $-a < t < +a$ kan worden verdeeld in een eindig aantal deelintervallen, zodat in ieder van deze deelintervallen f(t) continu, monotoon, en differentieerbaar is.

3e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ bestaat.

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
TELEFOON 51660 - 56643
AMSTERDAM-O.

Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)

te 's-Gravenhage

2e Voordracht: 21 October 1953

Spreker: Ir R.W. Tronse.

Resumee van de stof, die gedurende het vorig jaar behandeld werd.

Door de Laplace-transformatie

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$$

wordt een functielichaam $V\{F(t)\}$ isomorf afgebeeld op een ander functielichaam $V\{f(s)\}$.
De inverse afbeelding komt tot stand door de inverse transformatie

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} f(s)ds$$

Op de laatste transformatie zal dit jaar zeer uitgebreid worden ingegaan. De isomorphie van de additieve functie-groepen is zonder meer duidelijk. Bij de multiplicatieve groepen hebben we gezien, dat tegenover de gewone vermenigvuldiging van twee functies f(s) en g(s) de convolutie staat van de functies F(t) en G(t)

$$f(s)\ g(s) = g(s)\ f(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t F(t-\tau)G(\tau)d\tau \right\} dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t G(t-\tau)F(\tau)d\tau \right\} dt.$$

Ingevoerd werd de Unit-step function U(t)

$U(t) = 0$ voor $t < 0$
$U(t)$, onbepaald, of $= \frac{1}{2}$ voor $t=0$
$U(t) = 1$ voor $t > 0$.

De verschoven Unit-step function U(t-a)

$U(t-a) = 0$ voor $t < a$
$U(t-a)$, onbepaald, of $\frac{1}{2}$ voor $t=a$
$U(t-a) = 1$ voor $t > a$.

Hiermee is de functie $U_1(t,\varepsilon)$ te definiëren:

$$U_1(t,\varepsilon) = \frac{U(t) - U(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

welke voor $\varepsilon \to 0$ overgaat in de oneigenlijke δ functie van Dirac, welke ook bekend is onder de naam pulsfunctie en welke functie bij de isomorphie der multiplicatieve groepen de rol speelt van eenheidsfunctie

$$f(s).1 = \int_0^{\infty} e^{-st} \left\{ \lim_{\varepsilon \to 0} F(t)^{*} U_1(t, \varepsilon) \right\} dt$$

Om de Laplacetransformatie van inversen tot stand te brengen zal gebruik gemaakt moeten worden van hogere pulsfuncties, die opgevat dienen te worden als de oneigenlijke δ functie van Dirac of exacter als de distributies van Schwartz.
De puls en dubbele pulsfunctie bleken bruikbaar voor de invoering van puntlasten en momenten.

De Functielichamen welke door Laplace-transformatie op elkaar worden afgebeeld blijken aan bepaalde voorwaarden te moeten voldoen.

F(t) moet van exponentieële begrensdheid zijn

$$|F(t)\ e^{-s\alpha}| < M$$

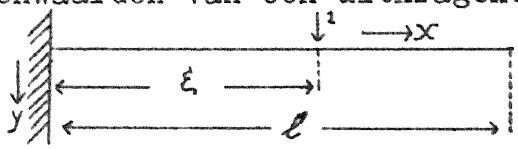
of iets scherper $\int_0^t F(\tau)d\tau$ van begrensde variatie.

f(s) moet voor $s \to \infty$ naar nul gaan met uitzondering van de transformaties van de pulsfuncties in het punt $t = 0$.

Voor de transformatie van afgeleide functies werd gevonden

$$L\left[F^{n}(t)\right] = s^{n}f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \ldots F^{n-1}(0).$$

Om een indruk te krijgen van het gebruik dat men maken kan van Laplacetransformaties zal een voorbeeld behandeld worden, dat tegelijkertijd toch weer iets nieuwe brengt:
Bepaling van de eigenfuncties en eigenwaarden van een uitkragende balk. Opstelling van de integraalvergelijking.



Allereerst zullen we hiervan de kern moeten bepalen, d.w.z. de functie, die de zakkingslijn weergeeft bij belasting door een kracht 1 terplaatse $x = \xi$ (invloedslijn).
De differentiaalvergelijking van deze zakkingslijn luidt

$$\frac{d^4.y}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}$$

met als randvoorwaarden

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$
$$y''(1) = 0 \qquad y'''(1) = 0$$

$$q(x) = U_1(x - \xi).$$

Passen we een Laplace-transformatie toe, zo gaat de differentiaalvergelijking over in

$$s^4\ L[y] - s^3\ y(0) - s^2\ y'(0) - sy''(0) - y'''(0) = \frac{e^{-s\xi}}{EI}$$

of in ve band met de randvoorwaarden en na enige bewerking:

$$L[y] = \frac{y''(0)}{s^3} + \frac{y'''(0)}{s^4} + \frac{e^{-s\xi}}{EIs^4} .$$

Invers transformerend

$$y = \frac{x^2}{2} y''(0) + \frac{x^3}{6} y'''(0) + \frac{(x-\xi)^3}{6EI} U(x-\xi)$$

$$y'' = y''(0) + xy'''(0) + \frac{x-\xi}{EI} U(x-\xi)$$

$$y''' = y'''(0) + \frac{U(x-\xi)}{EI} .$$

In verband met de resterende randvoorwaarden zijn de vergelijkingen op te lossen

$$y''(0) + 1y'''(0) + \frac{1-\xi}{EI} = 0$$

$$y'''(0) + \frac{1}{EI} = 0$$

met als oplossing

$$y'''(0) = -\frac{1}{EI} \qquad y''(0) = \frac{\xi}{EI}$$

Voor de zakkingslijn vinden we dus:

$$y = \frac{x^2(3\xi - x)}{6EI} + \frac{(x-\xi)^3}{6EI} U(x-\xi)$$

ofwel

$$G(x,\xi) = x^2(3\xi - x)/6EI \qquad (x < \xi)$$

$$= \xi^2(3x - \xi)/6EI \qquad (\xi < x)$$

hetgeen ook te schrijven is als

$$G(x,\xi) = \xi^2(3x - \xi)/6EI \qquad (\xi < x)$$

$$= \xi^2(3x - \xi)/6EI - \frac{(x-\xi)^3}{6EI} \qquad (x \quad)$$

Is de balk belast door een willekeurige belasting $F(\xi)$ zo zal de zakking in een punt x gelijk zijn aan

$$y(x) = \int_0^1 G(x,\xi) F(\xi) d\xi$$

Zij nu de balk onderworpen aan een ongedempte trilling met kleine amplitudo

$$y(x,t) = y(x) \sin \omega t$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x) \sin \omega t.$$

Als de massa per lengte-eenheid van de balk m bedraagt, is dus

$$F(\xi) = m\omega^2 y(\xi) \sin \omega t$$

$$y(x) \sin \omega t = m\omega^2 \int_0^1 G(x,\xi)\, y(\xi) \sin \omega t \, d\xi$$

ofwel

$$y(x) = \lambda \int_0^x \xi^2(3x-\xi)\, y(\xi)\, d\xi + \lambda \int_x^1 x^2(3\xi - x)\, y(\xi)\, d\xi \qquad \lambda = \frac{m\omega^2}{6EI}$$

of omgevormd

$$y(x) = \lambda \int_0^x \xi^2(3x-\xi)\, y(\xi)\, d\xi + \lambda \int_0^1 x^2(3\xi - x)\, y(\xi)\, d\xi +$$

$$- \lambda \int_0^x x^2(3\xi - x)\, y(\xi)\, d\xi =$$

$$= \lambda \int_0^x \xi^2(3x-\xi)\, y(\xi)\, d\xi + \lambda \int_0^1 x^2(3\xi - x)\, y(\xi)\, d\xi +$$

$$- \lambda \int_0^x \xi^2(3x-\xi)\, y(\xi)\, d\xi + \lambda \int_0^x (x-\xi)^3\, y(\xi)\, d\xi =$$

$$= \lambda \int_0^x (x-\xi)^3\, y(\xi)\, d\xi + \lambda \int_0^1 x^2(3\xi - x)\, y(\xi)\, d\xi .$$

Zij $\int_0^1 3\xi\, y(\xi)\, d\xi = \alpha$ en $\int_0^1 y(\xi)\, d\xi = \beta$

$$y(x) = \lambda \int_0^x (x-\xi)^3\, y(\xi)\, d\xi + \lambda\alpha x^2 - \lambda\beta x^3 .$$

Een Laplace-transformatie hierop uitvoerend

$$y(s) = \frac{6\lambda}{s^4} y(s) + \frac{2\lambda\alpha}{s^3} - \frac{6\lambda\beta}{s^4}$$

$$y(s) = \frac{2\lambda\alpha s}{s^4 - 6\lambda} - \frac{6\lambda\beta}{s^4 - 6\lambda} .$$

Zij $6\lambda = k^4$

$$y(x) = \frac{\lambda\alpha}{k^2} (\cosh kx - \cos kx) - \frac{3\lambda\beta}{k^3} (\sinh kx - \sin kx)$$

$$\beta = \int_0^1 y(\xi)\,d\xi = \left[\frac{\lambda\alpha}{k^3} (\sinh kl - \sin kl) + \right.$$

$$\left. - \frac{3\lambda\beta}{k^4} (\cosh kl + \cos kl) + \frac{6\lambda\beta}{k^4} \right] =$$

$$= \frac{\alpha k}{6} (\sinh kl - \sin kl) - \frac{\beta}{2}(\cosh kl + \cos kl) + \beta$$

$$\beta = \frac{\sinh kl - \sin kl}{\cosh kl + \cos kl} \frac{k}{3} \alpha$$

$$\alpha = \int_0^1 3\xi y(\xi)\,d\xi = \frac{3\lambda\alpha l}{k^3} (\sinh kl - \sin kl) - \frac{9\lambda\beta l}{k^4}(\cosh kl + \cos kl) +$$

$$- \frac{3\lambda\alpha}{k^4}(\cosh kl + \cos kl) + \frac{9\lambda\beta}{k^5}(\sinh kl + \sin kl) + \frac{6\lambda\alpha}{k^4} .$$

In verband met de gevonden uitdrukking voor β zijn de eerste twee termen van het rechterlid nul. Na invoering van $\lambda = \frac{k^4}{6}$ vinden we:

$$\alpha = - \frac{\alpha}{2}(\cosh kl + \cos kl) + \frac{3\beta}{2k} (\sinh kl + \sin kl) + \alpha$$

ofwel

$$\beta = \frac{\cosh kl + \cos kl}{\sinh kl + \sin kl} \frac{k}{3} \alpha .$$

De eigenwaarden k moeten dus gevonden worden uit de vergelijking:

$$\frac{\cosh kl + \cos kl}{\sinh kl + \sin kl} = \frac{\sinh kl - \sin kl}{\cosh kl + \cos kl}$$

ofwel na enige uitwerking

$$\cosh kl \cos kl + 1 = 0$$

De eigenfuncties hebben de gedaante

$$y(x) = c\,(\cosh kx - \cos kx) - \frac{\sinh kl - \sin kl}{\cosh kl + \cos kl}(\sinh kx - \sin kx)$$

Enkele waarden van kl zijn:

$$k_1 l = 1{,}8751$$
$$k_2 l = 4{,}6941$$
$$k_3 l = 7{,}8548$$

met de bijbehorende waarden

$$\omega_1 = \frac{3{,}5160}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\omega_2 = \frac{22{,}0346}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\omega_2 = \frac{61{,}6979}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} .$$

2e Boerhaavestraat 49
TELEFOON 51660 - 56643
AMSTERDAM-O.

Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)
te 's-Gravenhage
3e Voordracht: 4 November 1953
Spreker: Prof.Dr S.C. van Veen.

4. Andere (complexe) vorm van het integraaltheorema van Fourier-Reciprociteitstheorema.

Het in § 3 afgeleide theorema van F. in de gedaante:

$$\frac{\pi}{2}\left\{f(x+0) + f(x-0)\right\} = \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x)\,dt$$ kan ook geschreven worden als

$$\frac{\pi}{2}\left\{f(x+0)+f(x-0)\right\} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(e^{iu(t-x)}+e^{-iu(t-x)}\right)dt$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(t-x)} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(t-x)} f(t)\,dt.$$

Wanneer in de eerste integraal u wordt vervangen door -u, dan gaat de uitkomst over in

$$\frac{\pi}{2}\left\{f(x+0)+f(x-0)\right\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(t-x)} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(t-x)} f(t)\,dt$$

of

$$f(x+0) = f(x-0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu(t-x)} f(t)\,dt \qquad (14)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iut} f(t)\,dt.$$

Op volkomen analoge wijze vindt men

$$f(x+0) + f(x-0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+iut} f(t)\,dt \qquad (14')$$

Dit theorema neemt een bijzonder elegante vorm aan als men stelt:

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut}\,dt \qquad (15)$$

(Deze integraal bestaat wegens de veronderstelde convergentie van

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt\ )$$

In de continuïteitspunten van f(x) gelden dan wegens (14) en (15) de reciprociteitsformules.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{iux} du \\ g(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} dt \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Men noemt de rechterzijden de (algemene) Fourier-transforms van g(u) resp. f(t).
Wij vermelden de volgende speciale gevallen

a: f(x) is een even functie van x: (d.w.z. f(-x) = f(x)).

$$\left.\begin{aligned} g(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos ut \, dt. \\ f(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} g(u) \cos ut \, du \end{aligned}\right\} \qquad (17^a).$$

b: f(x) is een oneven functie van x: (d.w.z. f(-x) = -f(x)).

$$\left.\begin{aligned} g(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \sin ut \, dt. \\ f(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} g(u) \sin ut \, dt. \end{aligned}\right\} \qquad (17^b)$$

In deze gevallen bereikt men volledige reciprociteit.
De rechterleden van 17^a en 17^b worden de Fourier-cos-transforms, resp. de Fourier-sinus-transforms van f(t) en g(u) genoemd.

5. Verdere toepassingen van de Fourier-transforms.

Naast de later te vermelden belangrijke toepassingen op de theorie der L-transformaties en bij de oplossing van partiele differentiaalvergelijkingen kunnen de gevonden uitkomsten worden gebruikt om op eenvoudige wijze de uitkomst van verschillende moeilijke integralen te vinden. Wij vermelden alleen als voorbeeld de bekende uitkomst van Laplace:

Stel $f(x) = e^{-\beta|x|}$ $(\beta > 0)$ even functie.

$$f(x) = e^{-\beta|x|} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} g(u) \cos u x \, du,$$

met $g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \cos ut \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2+u^2}$

m.a.w. $\frac{2\beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos ux}{\beta^2+u^2} \, du = e^{-\beta |x|}$. (18)

(zie ook cursus 1952-1953).

6. De omkeringsformules van Mellin.

Eerste stelling van Mellin:

Gegeven: $s = \sigma + it$ is een complexe veranderlijke.

In de strook $\alpha < \sigma < \beta$ is de functie $f(s)$ analytisch,

en $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma + it) \, dt$ convergent.

In de smallere strook $\alpha + \delta \leq \sigma \leq \beta - \delta$ ($\delta > 0$, willekeurig constant) zal $f(s) \longrightarrow 0$ voor $|t| \to \infty$, gelijkmatig in σ .

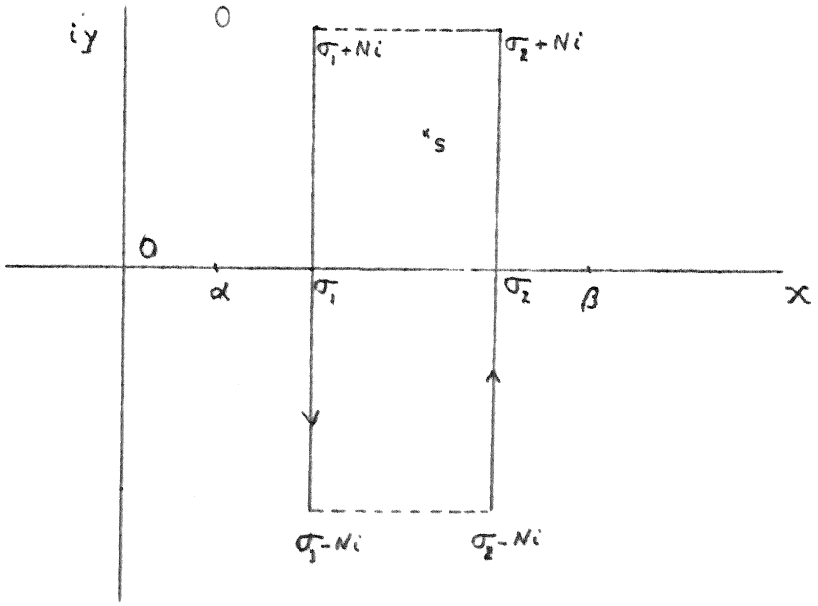
Wanneer men dan stelt, voor x positief reëel, en voor vaste σ':

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} x^{-s} f(s) ds \qquad (19)$$

dan geldt in de strook $\alpha < \sigma < \beta$

$$f(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \, g(x) dx \, . \qquad (20)$$

Bewijs:



Wij integreren eerst de functie

$$x^{-z}f(z)$$

langs de omtrek der aangegeven rechthoek. De uitkomst =0, omdat deze functie op de omtrek van deze rechthoek en daarbinnen analytisch is. Dus

$$\int_{\sigma_2-Ni}^{\sigma_2+Ni} x^{-z}f(z)dz + \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} x^{-(Ni+u)}f(Ni+u)du + \int_{\sigma_1+Ni}^{\sigma_1-Ni} x^{-z}f(z)dz +$$

$$+\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} x^{-(-Ni+u)}f(-Ni+u)du = 0$$

(Stelling van Cauchy).

Wegens $f(s) \to 0$ voor $|t| \to \infty$ gelijkmatig in $\alpha + \delta \leq \sigma \leq \beta - \delta$ bij willekeurige vaste $\delta > 0$ kan bij gegeven willekeurige kleine $\varepsilon > 0$ een waarde $t_0 > 0$ worden bepaald, zodat:

$$|f(u+ti)| < \frac{\varepsilon|\log x|}{2\,|x^{-\sigma_1}-x^{-\sigma_2}|}$$

voor $|t| > t_0$.

Kiezen wij dus in bovenstaande uitkomst, die ook geschreven kan worden als:

$$\int_{\sigma_2-Ni}^{\sigma_2+Ni} x^{-z}f(z)dz - \int_{\sigma_1-Ni}^{\sigma_1+Ni} x^{-z}f(z)dz = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} x^{-(Ni+u)}f(Ni+u)du +$$

$$-\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} x^{-(-Ni+u)}f(-Ni+u)du$$

de waarde $N > t_0$ dan is de absolute waarde van het rechterlid

$$< \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} x^{-u}\cdot \frac{\varepsilon|\log x|}{2\,|x^{-\sigma_1}-x^{-\sigma_2}|}\,du + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{x^{-u}\,\varepsilon\,|\log x|}{2\,|x^{-\sigma_1}-x^{-\sigma_2}|}\,du =$$

zoals door berekening gemakkelijk volgt, voor $x > 0$ en $x \neq 1$. (voor $x=1$ kieze men t zo groot, dat $|f(u+ti)| < \frac{\varepsilon}{2}$ is).

Dus voor $N > t_0$ is

$$\left| \int_{\sigma_2-Ni}^{\sigma_2+Ni} x^{-z}f(z)dz - \int_{\sigma_1-Ni}^{\sigma_1+Ni} x^{-z}f(z)dz \right| < \varepsilon$$

of:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\sigma_2 - Ni}^{\sigma_2+Ni} x^{-z} f(z)\,dz = \lim_{N\to\infty} \int_{\sigma_1 - Ni}^{\sigma_1+Ni} x^{-z} f(z)\,dz$$

wat eenvoudig geschreven wordt als

$$\int_{\sigma_2 - \infty i}^{\sigma_2+\infty i} x^{-z} f(z)\,dz = \int_{\sigma_1 - \infty i}^{\sigma_1+\infty i} x^{-z} f(z)\,dz. \qquad (21)$$

Men mag dus de verticale integratieweg van $\sigma_1 - \infty i$ tot $\sigma_1 + \infty i$ evenwijdig verplaatsen naar $(\sigma_2 - \infty i,\ \sigma_2 + \infty i)$.

Wij beschouwen vervolgens:

$$\int_0^\infty x^{s-1} g(x)\,dx = \int_0^1 x^{s-1} g(x)\,dx + \int_1^\infty x^{s-1} g(x)\,dx.$$

In de eerste integraal van h t rechterlid stellen wij:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - \infty i}^{\sigma_1+\infty i} x^{-z} f(z)\,dz,$$

in de 2e de volgens (21) daaraan gelijke waarde

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_2 - \infty i}^{\sigma_2+\infty i} x^{-z} f(z)\,dz.$$

Dus:

$$\int_0^\infty x^{s-1} g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 x^{s-1}\,dx \int_{\sigma_1 - \infty i}^{\sigma_1+\infty i} x^{-z} f(z)\,dz +$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_1^\infty x^{s-1}\,dx \int_{\sigma_2 - \infty i}^{\sigma_2+\infty i} x^{-z} f(z)\,dz = I_1 + I_2.$$

In de integralen I_1 en I_2 van het rechterlid mag de integratievolgorde verwisseld worden, omdat wegens

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\sigma_1+ti)|\,dt \int_0^1 x^{-1+(\sigma-\sigma_1)}\,dx$$

$$|I_2| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\sigma_2+ti)|\,dt \int_1^\infty x^{-1-(\sigma_2-\sigma)}\,dx$$

de bedoelde integralen absoluut convergeren. Dus:

$$\int_0^\infty x^{s-1}g(x)dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-\infty i}^{\sigma_2+\infty i}\frac{f(z)dz}{z-s} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-\infty i}^{\sigma_1+\infty i}\frac{f(z)}{z-s}\,dz. \qquad (22)$$

Beschouwen wij $\int \frac{f(z)dz}{z-s}$ genomen langs de omtrek van de rechthoek van de voorgaande figuur. Wij kiezen in de eerste plaats N zo groot dat S binnen de rechthoek valt.
De absolute waarde van de som integralen langs de horizontale rechthoekszijden is

$$< \frac{2}{2\pi\{N-|t|\}}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}|f(Ni+u)|\,du < \varepsilon \text{ voor N groot genoeg.}$$

Nu is de waarde van $\int \frac{f(z)dz}{z-s}$ genomen over de omtrek van de rechthoek

$$= 2\pi i f(s). \qquad \text{(Integraalformule van Cauchy).} \qquad (23)$$

In verband met de voorgaande opmerkingen kan voor $N \to \infty$ deze contour integratie worden vervangen door

$$\int_{\sigma_2-\infty i}^{\sigma_2+\infty i}\frac{f(z)dz}{z-s} - \int_{\sigma_1-\infty i}^{\sigma_1+\infty i}\frac{f(z)dz}{z-s} \qquad (24)$$

Uit (22), (23) en (24) volgt:

$$\int_0^\infty x^{s-1}\,g(x)dx = f(s) \text{ in de strook } \alpha < \sigma < \beta \qquad \text{w.t.b.w.}$$

<u>Tweede stelling van Mellin</u>

Gegeven voor $x > 0$ zal $g(x)$ bij gedeelten <u>glad</u> zijn, d.w.z. ieder eindig interval $0 < x < a$ kan verdeeld worden in een <u>eindig</u> aantal deelintervallen, zodat in ieder van deze deelintervallen $g(x)$ <u>continu</u>, <u>differentieerbaar</u>, met <u>continue</u> afgeleide zal zijn voor iedere $a > 0$.

Voor $\alpha < \sigma < \beta$ is $\int_0^\infty x^{\sigma-1}g(x)dx$ absoluut convergent.

Dan volgt omgekeerd uit

$$f(x) = \int_0^\infty x^{s-1}g(x)dx \longrightarrow g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s}f(s)ds.$$

Bewijs:

In de integraal $\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s}f(s)ds$

wordt x vervangen door e^u. Daardoor gaat de integraal over in

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} e^{-us}f(s)ds = \frac{i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u(\sigma+ti)}dt.f(\sigma+ti)$$

$$= \frac{e^{-u\sigma}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ut\,i}\,dt.\int_{0}^{\infty} y^{(\sigma+it)-1}g(y)dy.$$

Vervang hierin y door e^v. Dan wordt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} e^{-us}f(s)ds = \frac{e^{-u\sigma}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-uti}dt\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma+it)v}g(e^v)dv$$

$$= \frac{e^{-u\sigma}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(v-u)}e^{v\sigma}g(e^v)dv =$$

$$= \frac{e^{-u\sigma}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu}dt\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itv}\,G(v)dv$$

met

$$G(v) = e^{v\sigma}\,g(e^v).$$

Volgens de formule van Fourier (14') geldt dus in ieder continuïteitspunt van g(x)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s}f(s)ds = e^{-u\sigma}G(u) = e^{-u\sigma}e^{u\sigma}g(e^u) = g(x).$$

w.t.b.w.

Wij zullen in het vervolg zien, dat speciaal met behulp van de tweede stelling de inverse Laplace-transformatie in integraalvorm kan worden opgeschreven.

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
TELEFOON 51660 - 56643
AMSTERDAM-O.

Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)

te 's-Gravenhage

4e Voordracht: 18 November 1953

(Aanvulling op de 2e Voordracht van 21 October 1953)

Spreker: Ir R.W. Trense.

Door de Laplace transformatie:

$$f(s) = L\left[F(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$$

wordt het functielichaam $\{f(s)\}$ isomorf afgebeeld op het functielichaam $\{F(t)\}$. Onder een functielichaam verstaat men een verzameling van functies, die zowel aan de additieve als aan de multiplicatieve groepseigenschappen voldoen.
Wat deze eigenschappen zijn, zal in de loop van het betoog wel duidelijk worden.
Zijn de vermenigvuldigings-operaties commutatief zo heet een lichaam recht, in tegenstelling met de niet commutatieve scheve lichamen.
$\{f(s)\}$ en $\{F(t)\}$ zullen recht blijken te zijn.
Het bewijs van de isomorfie van $\{f(s)\}$ en $\{g(s)\}$ als additieve groepen beschouwd gaat als volgt

$$f(s) + g(s) = L\left[F(t)\right] + L\left[G(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt + \int_0^\infty e^{-st}G(t)dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\left\{F(t) + G(t)\right\}dt = L\left[F(t) + G(t)\right] =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\left\{G(t) + F(t)\right\}dt = L\left[G(t) + F(t)\right] =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}G(t)dt + \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt = L\left[G(t)\right] + L\left[F(t)\right] = g(s) + f(s)$$

q.e.d.

Hoewel eigenlijk triviaal zullen de additieve groepseigenschappen hier worden genoemd

$$\left.\begin{aligned}\{f(s)+g(s)\}+k(s) &= f(s)+\{g(s)+k(s)\}\\ \{F(t)+G(t)\}+H(t) &= F(t)+\{G(t)+H(t)\}\end{aligned}\right\}\ \text{associatieve wet}$$

Er is een eenheidselement in beide groepen, dat zowel als linker dan wel als rechter eenheidselement fungeert

i.c.: $o(s) = 0$ en $O(t) = 0$

$f(s) + o(s) = f(s)$ $\qquad$ $F(t) + O(t) = F(t)$

$o(s) + f(s) = f(s)$ $\qquad$ $O(t) + F(t) = F(t)$

Bij elk element hoort zijn inverse

$\left[f(s)\right]^{-1} = -f(s)$ $\qquad$ $\left[F(t)\right]^{-1} = -F(t)$

Immers

$$f(s) + \left[f(s)\right]^{-1} = f(s) - f(s) = o(s)$$

$$F(t) + \left[F(t)\right]^{-1} = F(t) - F(t) = O(t)$$

Uit het voorgaande volgt voor beide groepen de mogelijkheid tot aftrekking. Onder het verschil van $g(s)$ en $f(s)$ verstaat men het element, dat bij $f(s)$ geteld $g(s)$ oplevert.

Dit element is $g(s) + \left[f(s)\right]^{-1}$.

Immers

$$f(s) + \left\{g(s) + \left[f(s)\right]^{-1}\right\} = f(s) + \left\{\left[f(s)\right]^{-1} + g(s)\right\} =$$

$$= \left\{f(s) + \left[f(s)\right]^{-1}\right\} + g(s) = o(s) + g(s) = g(s).$$

Voor $F(t)$ en $G(t)$ geldt dezelfde beschouwing. Bij de isomorfie der multiplicatieve groepen kiezen we als vermenigvuldigings-operatie voor de verzameling $\{f(s)\}$ de gewone algebraische vermenigvuldiging. Voor de verzameling $\{F(t)\}$ is ze dan de convolutie integraal.

Immers

$$f(s)\, g(s) = L\left[F(t) * G(t)\right] =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^{t} F(t-\tau)\, G(\tau)\, d\tau = g(s)\, f(s) = L\left[G(t) * F(t)\right] =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^{t} G(t-\tau) F(\tau)\, d\tau.$$

Daar $f(s)$ een multiplicatieve groep is, is $F(t)$ dit ook

Dat $F(t) * G(t) = G(t) * F(t)$ ziet men ook onmiddellijk in.

Substitueer in

$$\int_0^{t} F(t-\tau) G(\tau)\, d\tau.$$

voor $t-\tau = \nu$ $\qquad$ $d\tau = -d\nu$

$\tau = t-\nu$

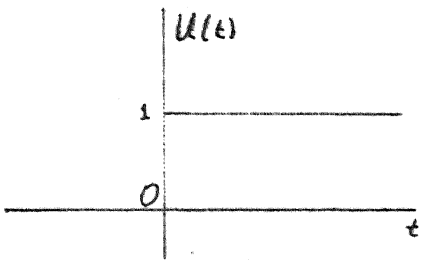
Uit $\tau = 0 \rightarrow \nu = t$ $\qquad$ Uit $\tau = t \longrightarrow \nu = 0$

$$\int_0^t F(t-\tau)\, G(\tau)\, d\tau = -\int_t^0 F(\nu)\, G(t-\nu)\, d\nu =$$

$$= \int_0^t G(t-\nu)\, F(\nu)\, d\nu$$

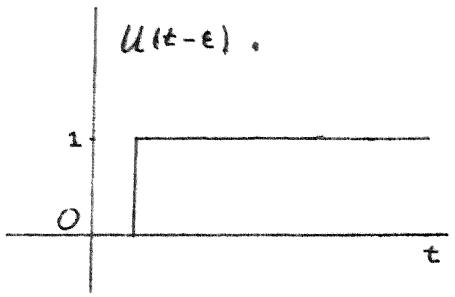
q.e.d

Wat is nu in de groep $\{F(t)\}$ het eenheidselement. Met deze vraag storten we ons meteen op een berg van mathematische moeilijkheden. Dit element moet die functie zijn, van welke de Laplace getransformeerde 1 is. Het vorig jaar hebben we haar leren kennen als eerste puls-functie. We hebben toen gedefinieerd de eenheidssprongfunctie en de verschoven eenheidssprongfunctie



$U(t) = 0 \quad$ voor $t \leq 0$

$U(t) = 1 \quad$ voor $t > 0$



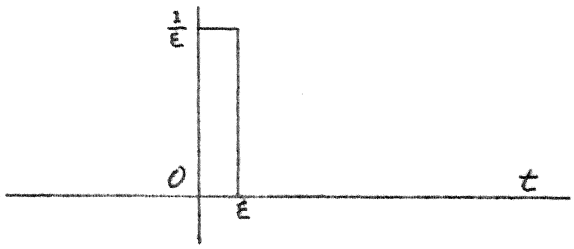
$U(t-\varepsilon) = 0 \quad$ voor $t < \varepsilon$

$U(t-\varepsilon) = 1 \quad$ voor $t > \varepsilon$

Hierop kunnen we definieren

$$U_1(t,\varepsilon) = \frac{U(t) - U(t-\varepsilon)}{\varepsilon}$$

De overgang $U_1(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} U_1(t,\varepsilon)$



is nu in de ogen van exacte mathematici een gruwel, zulk een functie is immers niet gedefinieerd. Merkwaardig is, dat ze wel goed bruikbaar is als operator onder het integraalteken. Het lijkt me verstandig toe haar dan ook in de geest van de Stieltjes-integralen te definieren als

$$U_1(t)\,dt = d\,U(t)$$

De functie $U_1(t)$ is een verbyzondering van de δ functie van Dirac, welke functie en "afgeleiden" Dirac herhaalde malen toepast in zijn relativistische quanten mechanica. Daar definieert hij deze functie heel ruim als

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

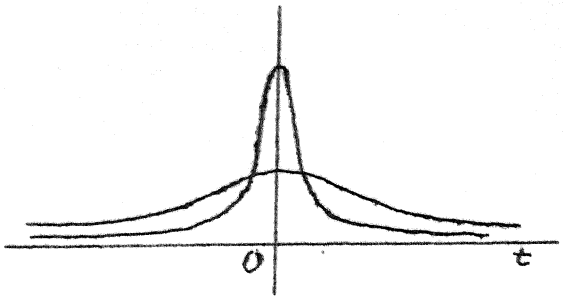
$$\delta(t) = 0 \quad \text{voor } t < 0$$

$$\delta(t) = 0 \quad \text{voor } t > 0.$$

Men kan zich allerlei δ-functies bedenken. Bijv. uit de klokfunctie van Gausz:

$$\delta(t,a) = \frac{1}{\sqrt{a\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{a}}$$

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} \delta(t,a)$$



Nu is

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t,a)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{a}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right)^2} d\,\frac{t}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = 1$$

Het rechterlid is onafhankelijk van a. Laat men a tot nul naderen zo is voor $t \neq 0$ $\lim_{a \to 0} \delta(t,a) = 0$.

Voor $t \to 0$ wordt $\delta(t)$ ∞ groot.

Een ander voorbeeld uit de functie van Lejeune Dirichlet

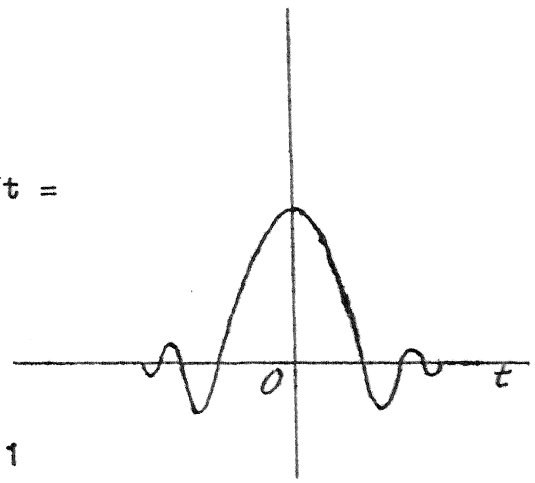
$$\delta(t,N) = \frac{\sin Nt}{\pi t} \qquad \text{voor } -\varepsilon < t < \varepsilon.$$

$\delta(t,N) = 0$ voor $t < -\varepsilon$

$\delta(t,N) = 0$ voor $t > \varepsilon$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t,N)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\sin Nt}{\pi t}\,dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\sin Nt}{\pi Nt}\, d\,Nt =$$

$$= \int_{-N\varepsilon}^{+N\varepsilon} \frac{\sin z}{\pi z}\,dz$$



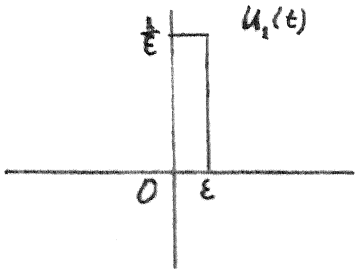
Voor $N\varepsilon \to \infty$ wordt dus $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t,N)\,dt = \frac{\pi}{\pi} = 1$

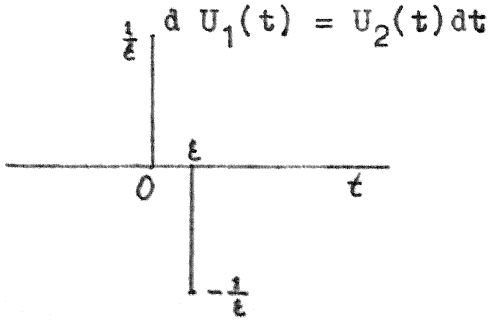
Men kan ε zo klein maken als men zelf wil en krijgt dan een Diracsche δ-functie.

Het vorig jaar hebben we ook de dubbele puls ingevoerd, die ik nu in de geest der Stieltjes integralen definieer door

$$U_2(t)\,dt = d\,U_1(t).$$

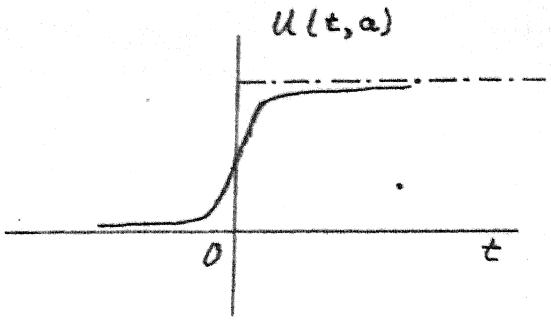
Grafisch voorgesteld hebben we





Vergelijken we het een en ander met de functie $\delta(t)$ en haar afgeleiden zoals ze ontstaan uit de klokfunctie van Gausz.

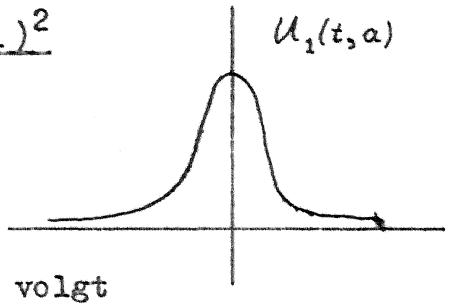
Voor U(t,a) is dan te schrijven



$$U(t,a) = \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\tau^2}{a}} d\tau$$

$$U(t,a) = \lim_{a \to 0} U(t,a)$$

$$U_1(t,a,\varepsilon) = \delta(t-\varepsilon,a) = \frac{1}{\sqrt{a\pi}} e^{-\frac{(t-\varepsilon)^2}{a}}$$



$$U_1(t,a,\varepsilon) = \frac{d}{dt} U(t-\varepsilon,a)$$

Bij overgang van a naar nul en ε naar nul + volgt

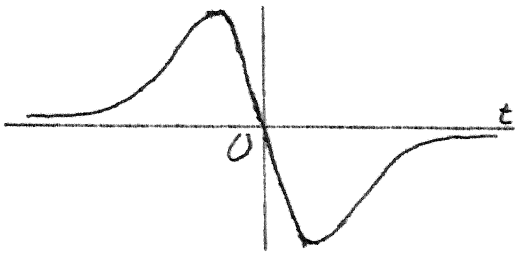
$$U_1(t)dt = d\,U(t)$$

ε werd ingevoerd om er zorg voor te dragen dat na overgang $a \to 0$

$$U_1(t) = 0 \qquad \text{voor } t \leqq 0$$

Zo we hier steeds rekening mee houden kunnen we het ook weglaten

$$U_2(t,a) = \frac{d}{dt} U_1(t,a) = \frac{-2t}{a\sqrt{a\pi}} e^{-\frac{t^2}{a}}$$



Bij overgang $a \to 0$

$$U_2(t)dt = d\,U_1(t).$$

We zullen nog nagaan of het moment bij de functie $U_2(t,a)$ onafhankelijk van a, één blijft. Voor dit moment is te schrijven

$$-2\int_{-\infty}^{0} t\,U_2(t,a)dt = -2\int_{-\infty}^{0} t\,d\,U_1(t,a) =$$

$$= \left[-2t\ \frac{1}{\sqrt{a\pi}} e^{-\frac{t^2}{a}}\right]_{-\infty}^{0} + 2\int_{-\infty}^{0} U_1(t,a)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(t,a)dt = 1$$

Bepalen we de L.T. van $U_1(t)$

$$L\ U_1(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} U_1(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-st} d\,U(t) =$$

$$= \left[e^{-st}\,U(t)\right]_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st}\,U(t)dt = s\left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^{\infty} = \frac{s}{s} = 1,$$

of met Stieltjes integralen

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\, d\, U(t) = \left[e^{-st} \right]_{t=0} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Evenzo van $U_2(t)$

$$L\left[U_2(t) \right] = \int_0^{\infty} e^{-st}\, U_2(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\, d\, U_1(t) =$$

$$= \left[e^{-st}\, U_1(t) \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st}\, U_1(t)dt = s \times 1 = s.$$

Definieren we in het algemeen

$$U_{p+1}(t)dt = U_p(t)dt$$

zo vinden we

$$L\left[U_{p+1}(t) \right] = \int_0^{\infty} e^{-st}\, U_{p+1}(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-st} d\, U_p(t) =$$

$$= \left[e^{-st}\, U_p(t) \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st}\, U_p(t)dt = s\, L\left[U_p(t) \right]$$

$$L\left[U_p(t) \right] = s^{p-1}$$

De hogere pulsfuncties zullen zeer bruikbaar blijken te zijn ter bepaling van de inverse functies $\left[F(t) \right]^{-1}$.
Verifiëren we vervolgens het eenheidselement

$$f(s)\, 1 \cong \int_0^t F(t-\tau) U_1(\tau)d\tau = \int_0^t F(t-\tau)\, d\, U(\tau) =$$

$$= \left[F(t-\tau)\, U(\tau) \right]_0^t + \int_0^t F'(t-\tau)\, U(\tau)d\tau =$$

$$= F(0) - \left[F(t-\tau) \right]_0^t = F(0) - F(0) + F(t) = F(t).$$

Met Stieltjes integralen ziet men dit zelfs sneller

$$\int_0^t F(t-\tau)\, U_1(\tau)d\tau = \int_0^t F(t-\tau)\, d\, U(\tau) = \left[F(t-\tau) \right]_{\tau=0} \cdot 1 = F(t).$$

Gebruik makende van de isomorfie

$$\left\{ f(s) \right\} \cong \left\{ F(t) \right\}$$

bewijzen we,

$$\{f(s)g(s)\}\, k(s) = L\left[\{F(t) * G(t)\} * H(t)\right]$$

$$f(s)\{g(s)\, k(s)\} = L\left[F(t) * \{G(t) * H(t)\}\right]$$

$$\therefore \{F(t) * G(t)\} * H(t) = F(t) * \{G(t) * H(t)\}$$

ofwel

$$\int_0^t \left\{ \int_0^{t-\tau} F(t-\tau-\nu)\, G(\nu)\, d\nu \right\} H(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \left\{ F(s-\tau) \int_0^{\tau} G(\tau-\nu) H(\nu)\, d\nu \right\} d\tau$$

Gaan we na waar s f(s) de L.T. van is

$$s\, f(s) = f(s)s \cong \int_0^t F(t-\tau)\, U_2(\tau)\, d\tau = \int_0^t F(t-\tau)\, d\, U_1(\tau) =$$

$$= \left[F(t-\tau) U_1(\tau)\right]_0^t + \int_0^t F'(t-\tau)\, U_1(\tau)\, d\tau$$

$$= F(0)U_1(t) + \int_0^t F'(t-\tau)\, d\, U(\tau) = F(0)\, U_1(t) + F'(t)$$

$$L\left[F'(t)\right] = s\, f(s) - L\left[F(0)\, U_1(t)\right] = s\, f(s) - F(0).$$

Zij in het algemeen

$$s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) \ldots - F^{(n-1)}(0)$$

$$\cong F^{(n)}(t)$$

Vermenigvuldigen we het linkerlid met s zo moeten we van het rechterlid de convolutie integraal bepalen met $U_2(t)$

$$s^{n+1} f(s) - s^n F(0) \ldots - sF^{(n-1)}(0)$$

$$\cong \int_0^t F^{(n)}(t-\tau)\, U_2(\tau)\, d\tau = \int_0^t F^{(n)}(t-\tau)\, d\, U_1(\tau)$$

$$= \left[F^{(n)}(t-\tau)\, U_1(\tau)\right]_0^t + \int_0^t F^{(n+1)}(t-\tau)\, U_1(\tau)\, d\tau =$$

$$= F^{(n)}(0) + F^{(n+1)}(t)$$

$$\therefore s^{n+1}f(s) - s^n F(0) \ldots - sF^{(n-1)}(0) - F^{(n)}(0) \triangleq F^{(n+1)}(t)$$

zodat bewezen is dat in het algemeen

$$L\left[F^{(n)}(t)\right] = s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - \quad - F^{(n-1)}(0).$$

Toepassing

$F(t) = \sin kt$ $\qquad F(0) = 0$

$F'(t) = k \cos kt$ $\qquad F'(0) = k$

$F''(t) = -k^2 \sin kt$

$$L\left[-k^2 \sin kt\right] = s^2 L\left[\sin kt\right] - k$$

$$L\left[\sin kt\right] = \frac{k}{s^2 + k^2}.$$

Maar dan is $\left[\sin kt\right]^{-1} = L^{-1}\left[\frac{s^2 + k^2}{k}\right] =$

$$= \frac{1}{k} U_3(t) + k\, U_1(t)$$

We zien hieruit dus dat inversen te bepalen zijn zo de pulsfuncties aanvaard worden. Het vorig jaar werd afgeleid

$$L\left[\cos kt\right] = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

$F(t) = \sinh kt$ $\qquad F(0) = 0$

$F'(t) = k \cosh kt$ $\qquad F'(0) = 0$

$F''(t) = k^2 \sinh kt$

$$L\left[k^2 \sinh kt\right] = s^2 L\left[\sinh kt\right] - k$$

$$L\left[\sinh kt\right] = \frac{k}{s^2 - k^2}.$$

Evenzo

$$L\left[\cosh kt\right] = \frac{s}{s^2 - k^2},$$

zodat

$$L\left[\sinh kt - \sin kt\right] = \frac{k}{s^2 - k^2} - \frac{k}{s^2 + k^2} = \frac{2k^3}{s^4 - k^4}$$

$$L\left[\cosh kt - \cos kt\right] = \frac{s}{s^2 - k^2} - \frac{s}{s^2 + k^2} = \frac{2k^2 s}{s^4 - k^4}.$$

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
TELEFOON 51660 - 56643
AMSTERDAM-O.

Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)
te 's-Gravenhage
5e Voordracht: 18 November 1953

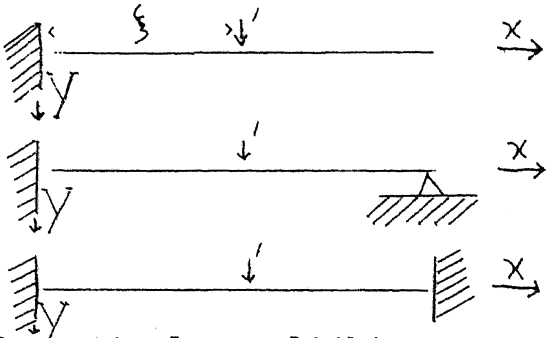
Spreker: Ir R.W. Trense.

Op verzoek zal nog een vraagstuk behandeld worden als in de syllabus voor de voordracht op 21 October '53 teneinde duidelijk uit te laten komen, dat de toegepaste methode een algemene methode is.

Het aan de orde gestelde vraagstuk is de afleiding van de eigentrillingen van een aan weerszijden ingeklemde balk. De kern van de integraalvergelijking wordt in wezen weer gevormd door de invloedslijn voor uitbuiging uit de evenwichtsstand.

Ter vergelijking zullen de invloedslijnen afgeleid worden van de aan een zijde ingeklemde balk (geval I) de aan een zijde ingeklemde en aan andere zijde vrij opgelegde balk (geval II) en de aan weerszijden ingeklemde balk. De D.V. luidt

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{U_1(x-\xi)}{EI}$$



Voor alle drie gevallen zijn de randvoorwaarden voor x=0:

$Y(0) = 0;\ Y'(0) = 0.$

Door Laplace transformatie wordt de differentiaalvergelijking omgezet tot:

$$s^4y(s) - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) = \frac{e^{-s\xi}}{EI}.$$

In verband met de randvoorwaarden

$$y(s) = \frac{1}{s^3}Y''(0) + \frac{1}{s^4}Y'''(0) + \frac{1}{EI}\,\frac{e^{-s\xi}}{s^4}.$$

Waaruit door inverse transformatie

$$Y(x) = \frac{1}{2}x^2Y''(0) + \frac{1}{6}x^3Y'''(0) + \frac{1}{6}\,\frac{(x-\xi)^3}{EI}\,U(x-\xi).$$

Voor de drie gevallen krijgen we met de resterende randvoorwaarden

Geval I: $\qquad Y''(1) = 0 \qquad Y'''(1) = 0$

$$Y_I(x) = \frac{3\xi x^2 - x^3}{6EI} + \frac{(x-\xi)^3}{6EI}\,U(x-\xi).$$

Geval II: $Y(1) = 0$ $Y''(1) = 0$

$$Y_{II}(x) = \frac{2l^2\xi - 3l\xi^2 + \xi^3}{4EI\ l^2}x^2 + \frac{-2l^3+3l\xi^2-\xi^3}{12EI\ l^3}x^3 + \frac{(x-\xi)^3}{6EI}U(x-\xi)$$

of omgevormd

$$Y_{II}(x) = \frac{3\xi x^2 - x^3}{6EI} + \frac{(x-\xi)^3}{6EI}U(x-\xi) - \frac{\xi^2x^2(3l-x)(3l-\xi)}{12EI\ l^3}$$

Geval III: $Y(1) = 0$ $Y'(1) = 0$

$$Y_{III}(x) = \frac{l^2\xi - 2l\xi^2 + \xi^3}{2EI\ l^2}x^2 + \frac{-l^3+3l\xi^2-2\xi^3}{6EI\ l^3}x^3 + \frac{(x-\xi)^3}{6EI}U(x-\xi)$$

of omgevormd

$$Y_{III}(x) = \frac{3\xi x^2 - x^3}{6EI} + \frac{(x-\xi)^3}{6EI}U(x-\xi) - \frac{\xi^2x^2(3l-x)(3l-\xi)}{12EI\ l^3} - \frac{3\xi^2x^2(l-x)(l-\xi)}{12EI\ l^3}.$$

Men ziet dat in alle drie gevallen de vergelijking zo gevormd is, dat men de vorm voor $x > \xi$ uit die voor $x < \xi$ krijgen kan door x met ξ te verwisselen.

Voor het geval III krijgen we voor $x < \xi \rightarrow \xi > x$

$$Y_{III}(x) = \frac{l^2\xi - 2l\xi^2 + \xi^3}{2EI\ l^2}x^2 + \frac{-l^3+3l\xi^2-2\xi^3}{6EI\ l^3}x^3$$

Voor $x > \xi \rightarrow \xi < x$

$$Y_{III}(x) = \frac{l^2 - 2l\ \ +\ \ }{2EI\ l^2}\xi^2 + \frac{-l^3+3l\ \ ^2-2\ \ ^3}{6EI\ l^3}\xi^3 + \frac{(x-\ \ )^3}{6EI}$$

ofwel

Voor $x > \xi \rightarrow \xi < x$

$$Y_{III}(x) = \frac{l^2x - 2lx^2 + x^3}{2EI\ l^2}\xi^2 + \frac{-l^3+3lx^2-2x^3}{6EI\ l^3}\xi^3$$

Voor $x < \xi \rightarrow \xi > x$

$$Y_{III}(x) = \frac{l^2x - 2lx^2 + x^3}{2EI\ l^2}\xi^2 + \frac{-l^3+3lx^2-2x^3}{6EI\ l^3}\xi^3 - \frac{(x-\xi)^3}{6EI}.$$

We zullen bij de verdere afleiding van een viertal functies gebruik maken t.w.

$\sigma_1(x) = \sinh kx - \sin kx$ $\quad$ $\sigma_2(x) = \cosh kx - \cos kx$

$\sigma_3(x) = \sinh kx + \sin kx$ $\quad$ $\sigma_4(x) = \cosh kx + \cos kx$

$$\frac{d\sigma_1(x)}{dx} = k\sigma_2(x);\ \frac{d\sigma_2(x)}{dx} = k\sigma_3(x);\ \frac{d\sigma_3(x)}{dx} = k\sigma_4(x);\ \frac{d\sigma_4(x)}{dx} = k\sigma_1(x)$$

Bepalen we

$$\int_0^1 \xi^n \sigma_m(\xi)d\xi$$

m te beschouwen als m mod 4

$$\int_0^1 \xi^n \sigma_m(\xi)d\xi = \frac{1}{k}\int_0^1 \xi^n\, d\sigma_{m-1}(\xi) =$$

$$= \left[\frac{\xi^n}{k}\sigma_{m-1}(\xi)\right]_0^1 - \frac{n}{k}\int_0^1 \xi^{n-1}\sigma_{m-1}(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1^n}{k}\sigma_{m-1}(1) - \frac{n}{k}\int_0^1 \xi^{n-1}\sigma_{m-1}(\xi)d\xi .$$

Met deze recursieformule bepalen we

$$\int_0^1 \sigma_1(\xi)d\xi = \frac{1}{k}\left\{\sigma_4(1) - 2\right\}$$

$$\int_0^1 \xi\,\sigma_1(\xi)d\xi = \frac{1}{k}\sigma_4(1) - \frac{1}{k^2}\sigma_3(1)$$

$$\int_0^1 \xi^2\sigma_1(\xi)d\xi = \frac{1^2}{k}\sigma_4(1) - \frac{21}{k^2}\sigma_3(1) + \frac{2}{k^3}\sigma_2(1)$$

$$\int_0^1 \xi^3\sigma_1(\xi)d\xi = \frac{1^3}{k}\sigma_4(1) - \frac{31^2}{k^2}\sigma_3(1) + \frac{61}{k^3}\sigma_2(1) - \frac{6}{k^4}\sigma_1(1)$$

en

$$\int_0^1 \sigma_2(\xi)d\xi = \frac{1}{k}\sigma_1(1)$$

$$\int_0^1 \xi\,\sigma_2(\xi)d\xi = \frac{1}{k}\sigma_1(1) - \frac{\sigma_4(1) - 2}{k^2}$$

$$\int_0^1 \xi^2\sigma_2(\xi)d\xi = \frac{1^2\sigma_1(1)}{k} - \frac{21\sigma_4(1)}{k^2} + \frac{2}{k^3}\sigma_3(1)$$

$$\int_0^1 \xi^3 \sigma_2(\xi)\,d\xi = \frac{1^3\sigma_1(1)}{k} - \frac{3l^2\sigma_4(1)}{k^2} + \frac{6l\sigma_3(1)}{k^3} - \frac{6\sigma_2(1)}{k^4}.$$

Als een aan weerszijden ingeklemde balk belast wordt door een momentane belasting $F(\xi,t)$ zo is de momentane zakking terplaatse x:

$$Y(x,t) = \int_0^1 Y_{III}(x)\, F(\xi,t)\,d\xi$$

Zij $G(x,\xi) = 6EI\, Y_{III}(x)$ zo wordt deze vergelijking

$$Y(x,t) = \frac{1}{6EI} \int_0^1 G(x,\xi)\, F(\xi,t)\,d\xi$$

Als de balk in staande trilling is, is voor Y(x,t) te schrijven

$$Y(x,t) = Y(x)\, \sin \omega t$$

$$\frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 Y(x)\, \sin \omega t$$

Stellen we de massa per lengte eenheid m. Op een element ter lengte $d\xi$, terplaatse ξ werkt dan een traagheidskracht groot:

$$-\omega^2 m\, Y(x)\, \sin \omega t\, d\xi,$$

welke gericht is naar de evenwichtsstand. Deze kracht wordt geleverd door de inwendige schuifspanningen aan weerszijden van het element hierop werkend. Deze schuifspanningen, tezamen met dezelfde uitwijking uit de evenwichtstand, kunnen ook worden geleverd door een belasting

$$F(\xi,t) = \omega^2 m\, Y(\xi)\, \sin \omega t.$$

In de integraalvergelijking ingevuld krijgen we

$$Y(x)\, \sin \omega t = \frac{\omega^2 m}{6EI} \int_0^1 G(x,\xi)\, Y(\xi)\, \sin \omega t \quad d\xi$$

Delen we beide leden door $\sin \omega t$ en stellen we $\lambda = \frac{m\omega^2}{6EI}$

zo ontstaat tenslotte

$$Y(x) = \lambda \int_0^1 G(x,\xi)\, Y(\xi)\,d\xi.$$

Vullen we voor $G(x,\xi)$ de voor de aan weerszijden ingeklemde balk gevonden waarde in, zo is:

$$Y(x) = \lambda \int_0^{\cdot} \left\{ \frac{3l^2x - 6lx^2 + 3x^3}{l^2}\xi^2 + \frac{-l^3 + 3lx^2 - 2x^3}{l^3}\xi^3 \right\} Y(\xi)\,d\xi$$

$\lambda \int$

$$+\lambda\int_0^1\left\{\frac{3l^2\xi-6l\xi^2+3\xi^3}{l^2}x^2+\frac{-l^3+3l\xi^2-2\xi^3}{l^3}x^3\right\}Y(\xi)d\xi$$

$$-\lambda\int_0^x\left\{\frac{3l^2x-6lx^2+3x^3}{l^2}\xi^2+\frac{-l^3+3lx^2-2x^3}{l^3}\xi^3\right\}Y(\xi)d\xi$$

$$+\lambda\int_0^x(x-\xi)^3\,Y(\xi)d\xi\ .$$

$$Y(x)=\lambda\int_0^x(x-\xi)^3Y(\xi)d\xi+\lambda x^2\int_0^1\frac{3l^2\xi-6l\xi^2+3\xi^3}{l^2}Y(\xi)d\xi$$

$$+\lambda x^3\int_0^1\frac{-l^3+3l\xi^2-2\xi^3}{l^3}Y(\xi)d.\xi$$

Zij $\alpha=\int_0^1\frac{3l^2\xi-6l\xi^2+3\xi^3}{l^2}Y(\xi)d\xi$

en $\beta=3\int_0^1\frac{-l^3+3l\xi^2-2\xi^3}{l^3}Y(\xi)d\xi\ .$

$$Y(x)=\lambda\int_0^x(x-\xi)^3\,Y(\xi)d\xi+\lambda\alpha x^2+\tfrac{1}{3}\lambda\beta x^3.$$

Door een Laplace-Transformatie ontstaat hieruit

$$Y(s)=\frac{6\lambda}{s^4}Y(s)+\frac{2\lambda\alpha}{s^3}+\frac{2\lambda\beta}{s^4},$$

waaruit

$$Y(s)=\frac{2\lambda\alpha s}{s^4-6\lambda}+\frac{2\lambda\beta}{s^4-6\lambda}\ .$$

Zij $6\lambda=k^4$

$$Y(s)=\frac{2\lambda\alpha s}{s^4-k^4}+\frac{2\lambda\beta}{s^4-k^4}\ .$$

Door inverse transformatie ontstaat hieruit

$$Y(x)=\frac{\lambda\alpha}{k^2}(\cosh kx-\cos kx)+$$

$$+\frac{\lambda\beta}{k^3}(\sinh kx-\sin kx)=$$

$$=\frac{\lambda\alpha}{k^2}\sigma_2(x)+\frac{\lambda\beta}{k^3}\sigma_1(x).$$

In de formules voor α en β ingevuld krijgen we:

$$\alpha = \frac{\lambda\alpha}{k^2l^2}\left[\int_0^1 3l^2\xi\,\sigma_2(\xi)d\xi - \int_0^1 6l\xi^2\sigma_2(\xi)d\xi + \int_0^1 3\xi^3\sigma_2(\xi)d\xi\right] +$$

$$+ \frac{\lambda\beta}{k^3l^2}\left[\int_0^1 3l^2\xi\,\sigma_1(\xi)d\xi - \int_0^1 6l\xi^2\sigma_1(\xi)d\xi + \int_0^1 3\xi^3\sigma_1(\xi)d\xi\right] =$$

$$= \frac{\lambda\alpha}{k^2l^2}\left[\frac{3l^3}{k}\sigma_1(1) - \frac{3l^2}{k^2}\sigma_4(1) + \frac{6l^2}{k^2} - \frac{6l^3}{k}\sigma_1(1) + \frac{12l^2}{k^2}\sigma_4(1) -\right.$$

$$\left. - \frac{12l}{k^3}\sigma_3(1) + \frac{3l^3}{k}\sigma_1(1) - \frac{9l^2\sigma_4(1)}{k^2} + \frac{18l}{k^3}\sigma_3(1) - \frac{18}{k^4}\sigma_2(1)\right] +$$

$$+ \frac{\lambda\beta}{k^3l^2}\left[\frac{3l^3}{k}\sigma_4(1) - \frac{3l^2}{k^2}\sigma_3(1) - \frac{6l^3}{k}\sigma_4(1) + \frac{12l^2}{k^2}\sigma_3(1) - \frac{12l}{k^3}\sigma_2(1)\right.$$

$$\left. + \frac{3l^3}{k}\sigma_4(1) - \frac{9l^2}{k^2}\sigma_3(1) + \frac{18l}{k^3}\sigma_2(1) - \frac{18}{k^4}\sigma_1(1)\right.$$

$$\alpha = \frac{6\lambda\alpha}{k^4} + \frac{\lambda\alpha}{k^2l^2}\left\{\frac{6l\sigma_3(1)}{k^3} - \frac{18\sigma_2(1)}{k^4}\right\} + \frac{\lambda\beta}{k^3l^2}\left\{\frac{6l}{k^3}\sigma_2(1) - \frac{18}{k^4}\sigma_1(1)\right\}$$

Er rekening mee houdende dat $6\lambda = k^4$ ontstaat door linker en rechter lid met

$$\frac{k^7l^2}{6\lambda}$$ te vermenigvuldigen:

$$\left\{k^2l\sigma_3(1) - 3k\sigma_2(1)\right\}\alpha + \left\{kl\sigma_2(1) - 3\sigma_1(1)\right\}\beta = 0$$

$$\beta = \frac{\lambda\alpha}{k^2l^3}\left[\int_0^1 -3l^3\sigma_2(\xi)d\xi + \int_0^1 9l\xi^2\sigma_2(\xi)d\xi - \int_0^1 6\xi^3\sigma_2(\xi)d\xi\right] +$$

$$+ \frac{\lambda\beta}{k^3l^3}\left[\int_0^1 -3l^3\sigma_1(\xi)d\xi + \int_0^1 9l\xi^2\sigma_1(\xi)d\xi - \int_0^1 6\xi^3\sigma_1(\xi)d\xi\right] =$$

$$= \frac{\lambda\alpha}{k^2l^3}\left[-\frac{3l^3}{k}\sigma_1(1) + \frac{9l^3}{k}\sigma_1(1) - \frac{18l^2}{k^2}\sigma_4(1) + \frac{18l}{k^3}\sigma_3(1) -\right.$$

$$\left. - \frac{6l^3}{k}\sigma_1(1) + \frac{18l^2}{k^2}\sigma_4(1) - \frac{36l}{k^3}\sigma_3(1) + \frac{36}{k^4}\sigma_2(1)\right] +$$

$$+ \frac{\lambda\beta}{k^3l^3}\left[-\frac{3l^3}{k}\sigma_4(1) + \frac{6l^3}{k} + \frac{9l^3}{k}\sigma_4(1) - \frac{18l^2}{k^2}\sigma_3(1) + \frac{18l}{k^3}\sigma_2(1)\right.$$

$$- \frac{61^3}{k}\sigma_4(1) + \frac{181^2}{k^2}\sigma_3(1) - \frac{361}{k^3}\sigma_2(1) + \frac{36}{k^4}\sigma_1(1)\Big]$$

$$\beta = \frac{\lambda\alpha}{k^2 l^3}\left\{\frac{-181}{k^3}\sigma_3(1) + \frac{36\sigma_2(1)}{k^4}\right\} + \beta + \frac{\lambda\beta}{k^3 l^3}\left\{-\frac{181}{k^3}\sigma_2(1) + \frac{36}{k^4}\sigma_1(1)\right\}$$

Door vermenigvuldiging van linker en rechterlid met $\frac{k^7 l^3}{18\lambda}$ ontstaat

$$\left\{-k^2 l\sigma_3(1) + 2k\sigma_2(1)\right\}\alpha + \left\{-kl\sigma_2(1) + 2\sigma_1(1)\right\}\beta = 0$$

Van beide vergelijkingen voor α en β is alleen een oplossing mogelijk zo

$$\begin{vmatrix} k^2 l\sigma_3(1) - 3k\sigma_2(1) & kl\,\sigma_2(1) - 3\sigma_1(1) \\ -k^2 l\,\sigma_3(1) + 2k\sigma_2(1) & -kl\,\sigma_2(1) + 2\sigma_1(1) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -k\,\sigma_2(1) & -\sigma_1(1) \\ -k^2 l\sigma_3(1) + 2k\sigma_2(1) & -kl\,\sigma_2(1) + 2\sigma_1(1) \end{vmatrix} = 0$$

$$+ k^2 l\sigma_2^2(1) - 2k\sigma_1(1)\sigma_2(1) - k^2 l\sigma_1(1)\sigma_3(1) + 2k\sigma_1(1)\sigma_2(1) = 0$$

$$\sigma_2^2(1) = \sigma_1(1)\sigma_3(1)$$

ofwel

$$(\cosh kl - \cos kl)^2 = (\sinh kl - \sin kl)(\sinh kl + \sin kl)$$

$$\cosh^2 kl - 2\cosh kl \cos kl + \cos^2 kl = \sinh^2 kl - \sin^2 kl$$

$$\cosh^2 kl - \sinh^2 kl + \cos^2 kl + \sin^2 kl = 2\cosh kl \cos kl$$

$$2 = 2\cosh kl \cos kl$$

$$\cosh kl \cos kl = 1$$

$$\beta = \alpha\frac{k^2 l\sigma_3(1) - 2k\sigma_2(1)}{-kl\sigma_2(1) + 2\sigma_1(1)} =$$

$$= \alpha k\,\frac{kl\sigma_3(1) - 2k\sigma_2(1)}{-kl\sigma_2(1) + 2\sigma_1(1)} \cdot \frac{\sigma_1(1)}{\sigma_1(1)} =$$

$$= \alpha k\,\frac{kl\sigma_1(1)\sigma_3(1) - 2k\sigma_2(1)\sigma_1(1)}{\left\{-kl\sigma_2(1) + 2\sigma_1(1)\right\}\sigma_1(1)} =$$

$$= \alpha k\,\frac{kl\sigma_2^2(1) - 2k\sigma_2(1)\sigma_1(1)}{\left\{-kl\sigma_2(1) + 2\sigma_1(1)\right\}\sigma_1(1)} = -\alpha k\,\frac{\sigma_2(1)}{\sigma_1(1)}$$

$$Y(x) = \frac{\lambda\alpha}{k^2\sigma_1(1)}\left\{\sigma_1(1)\sigma_2(x) - \sigma_2(1)\sigma_1(x)\right\}$$

$$Y'(x) = \frac{\lambda\alpha}{k\sigma_1(1)}\left\{\sigma_1(1)\sigma_3(x) - \sigma_2(1)\sigma_2(x)\right\}$$

$$Y''(x) = \frac{\lambda\alpha}{\sigma_1(1)}\left\{\sigma_1(1)\sigma_4(x) - \sigma_2(1)\sigma_3(x)\right\}$$

$$Y'''(x) = \frac{\lambda\alpha k}{\sigma_1(1)}\left\{\sigma_1(1)\sigma_1(x) - \sigma_2(1)\sigma_4(x)\right\}$$

$$Y(1) = 0 \qquad Y'(1) = 0$$

Verder volgt uit $\cosh kl \cos kl = 1$

$$\sinh kl = \sqrt{\cosh^2 kl - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 kl} - 1} = \operatorname{tg} kl$$

$$\sigma_1(1)\sigma_4(1) - \sigma_2(1)\sigma_3(1) = 2(\sinh kl \cos kl - \cosh kl \sin kl) =$$

$$= 2\operatorname{tg} kl\,(\cos kl - 1)$$

De uitdrukking in alleen nul voor $kl = n\pi$. Alleen voor het triviale geval dat n=0 stemt dit overeen met de wortels van $\cosh kl \cos kl = 1$

$$\sigma_1^2(1) - \sigma_2(1)\sigma_4(1) = -2 \sinh kl \sin kl = -2 \operatorname{tg} kl \sin kl =$$

Ook deze uitdrukking is alleen nul voor $kl = n\pi$.
Inderdaad is dus

$$Y''(1) \neq 0$$

$$Y'''(1) \neq 0$$

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
TELEFOON 51660 - 56643
AMSTERDAM-O.

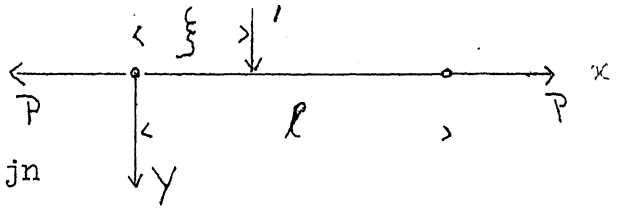
Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)

te 's-Gravenhage

6e Voordracht: 16 December 1953

Spreker: Ir R.W. Trense.

Bepaling van de eigentrillingen van een aan weerszijden scharnierend opgelegde staaf, die onderworpen is aan een trekkracht P.
Van de integraalvergelijking, die het probleem beheerst, zullen we allereerst de kern afleiden, d.w.z. de invloedslijn voor de uitwijkingen uit de evenwichtsstand. De D.V. hiervoor zijn



$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2M}{dx^2} &= -\,q(x) = -\,U_1(x-\xi) \\ M - PY &= -\,EI\,\frac{d^2Y}{dx^2} \end{aligned}\right\}$$

Waaruit door samenstelling

$$\frac{d^4Y}{dx^4} - \frac{P}{EI}\,\frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{U_1(x-\xi)}{EI}\,.$$

Voor het punt x=0 zijn de randvoorwaarden

$$Y(0) = 0;\ Y''(0) = 0$$

Door L.T. ontstaat uit de D.V.

$$s^4y(s) - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) - \frac{P}{EI}\,s^2y(s) +$$

$$\frac{P}{EI}\,sY(0) + \frac{P}{EI}\,Y'(0) = \frac{e^{-s\xi}}{EI}\,.$$

In verband met de randvoorwaarden

$$(s^4 - \frac{P}{EI}s^2)y(s) = (s^2 - \frac{P}{EI})Y'(0) + Y'''(0) + \frac{e^{-s\xi}}{EI}\,.$$

Zij $\frac{P}{EI} = \alpha^2$

$$y(s) = \frac{Y'(0)}{s^2} + \frac{Y'''(0)}{s^2(s^2-\alpha^2)} + \frac{e^{-s\xi}}{EI\ s^2(s^2-\alpha^2)}\,,$$

of na partiele breuksplitsing

$$y(s) = \frac{Y'(0)}{s^2} + \frac{Y'''(0)}{2}\left(\frac{1}{s^2-\alpha^2} - \frac{1}{s^2}\right) + \frac{1}{\alpha^2 EI}\left(\frac{e^{-s\xi}}{s^2-\alpha^2} - \frac{e^{-s\xi}}{s^2}\right).$$

Inverse transformerend

$$Y(x) = xY'(0) + \frac{Y'''(0)}{3}\left\{\sinh \alpha x - \alpha x\right\} + \frac{U(x-\xi)}{\alpha^3 EI}\left\{\sinh \alpha (x-\xi) - \alpha(x-\xi)\right\}$$

$$Y''(x) = \frac{Y'''(0)}{\alpha}\sinh \alpha x + \frac{U(x-\xi)}{\alpha EI}\left\{\sinh \alpha (x-\xi)\right.$$

Uit de resterende randvoorwaarden

$$Y(1) = 0 \qquad Y''(1) = 0 \quad \text{volgt}$$

$$Y'(0) = \frac{1-\xi}{\alpha^2 EI1} - \frac{\sinh \alpha(1-\xi)}{\alpha^2 EI \sinh \alpha 1}$$

$$Y'''(0) = -\frac{\sinh \alpha (1-\xi)}{EI \sinh \alpha 1}$$

$$Y(x) = \frac{(1-\xi)\alpha x \sinh \alpha 1 - \alpha 1 x \sinh \alpha(1-\xi) - 1 \sinh \alpha x \sinh \alpha(1-\xi) + 1\alpha x \sinh \alpha(1-\xi)}{\alpha^3 EI\ 1 \sinh \alpha 1}$$

$$+ \frac{U(x-\xi)}{\alpha^3 EI}\left\{\sinh \alpha(x-\xi) - \alpha(x-\xi)\right.$$

Nu is $\alpha^2 EI = P$.

$$Y(x) = -\frac{\sinh \alpha x \sinh \alpha(1-\xi)}{P\alpha \sinh \alpha 1} + \frac{(1-\xi)x}{Pl} + \frac{U(x-\xi)}{P\alpha}\left\{\sinh \alpha(x-\xi) - \alpha(x-\xi)\right\}.$$

Voor $x < \xi$ ofwel $\xi > x$

$$Y(x) = -\frac{\sinh \alpha(1-\xi)}{P\alpha \sinh \alpha 1}\sinh \alpha x + \frac{(1-\xi)x}{Pl}.$$

Voor $x > \xi$ ofwel $\xi < x$

$$Y(x) = -\frac{\sinh \alpha(1-\xi) \sinh \alpha x}{P\alpha \sinh \alpha 1} + \frac{(1-\xi)x}{Pl} + \frac{\sinh \alpha(x-\xi)}{P\alpha} - \frac{(x-\xi)}{P}$$

waaruit na enige uitwerking

$$Y(x) = -\frac{\sinh \alpha \xi \sinh \alpha(1-x)}{P\alpha \sinh \alpha 1} + \frac{\xi(1-x)}{Pl},$$

zodat voor $x < \xi \rightarrow \xi > x$ ook te schrijven is

$$Y(x) = -\frac{\sinh \alpha \xi \sinh \alpha(1-x)}{P\alpha \sinh \alpha 1} + \frac{\xi(1-x)}{Pl} - \frac{\sinh \alpha(x-\xi)}{P\alpha} + \frac{x-\xi}{P}.$$

Denken we ons de beweging weer als een staande trilling, zo krijgen we met datgene wat in de voorgaande voordrachten reeds werd behandeld voor de integraalvergelijking zo we

$$\lambda = \frac{m\omega^2}{P\alpha} \text{ stellen}$$

$$Y(x) = \lambda \int_0^x \left\{ - \frac{\sinh\alpha\xi \sinh\alpha(1-x)}{\sinh\alpha\, 1} + \frac{\alpha\xi(1-x)}{1} \right\} Y(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \lambda \int_0^1 \left\{ - \frac{\sinh\alpha(1-\xi)\sinh\alpha x}{\sinh\alpha\, 1} + \frac{\alpha(1-\xi)x}{1} \right\} Y(\xi)\,d\xi -$$

$$- \lambda \int_0^x \left\{ - \frac{\sinh\alpha\xi \sinh\alpha(1-x)}{\sinh\alpha\, 1} + \frac{\alpha\xi(1-x)}{1} \right\} Y(\xi)\,d\xi$$

$$+ \lambda \int_0^x \left\{ \sinh\alpha(x-\xi) - \alpha(x-\xi) \right\} Y(\xi)\,d\xi .$$

Zij $\beta = -\alpha \int_0^1 \frac{\sinh\alpha(1-\xi)}{\sinh\alpha\, 1} Y(\xi)\,d\xi$

$$\gamma = + \int_0^1 \frac{\alpha(1-\xi)}{1} Y(\xi)\,d\xi$$

$$Y(x) = \lambda \int_0^x \left\{ \sinh\alpha(x-\xi) - \alpha(x-\xi) \right\} Y(\xi)\,d\xi + \frac{\beta\lambda}{\alpha} \sinh\alpha x + \lambda\gamma x .$$

Na L-transformatie:

$$y(s) = \lambda\alpha \left\{ \frac{1}{s^2-\alpha^2} - \frac{1}{s^2} \right\} y(s) + \frac{\beta\lambda}{s^2-\alpha^2} + \frac{\gamma\lambda}{s^2} .$$

Vermenigvuldig linker en rechterlid met $s^2(s^2-\alpha^2)$

$$(s^4 - \alpha^2 s^2 - \lambda\alpha^3) y(s) = \lambda\beta s^2 + \lambda\gamma(s^2-\alpha^2) .$$

Zo $k_1^2 = -\frac{1}{2}\alpha^2 + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^4 + \lambda\alpha^3}$

$$k_2^2 = \frac{1}{2}\alpha^2 + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha^4 + \lambda\alpha^3}$$

$$y(s) = \frac{\lambda\beta s^2}{(s^2+k_1^2)(s^2-k_2^2)} + \frac{\lambda\gamma(s^2-\alpha^2)}{(s^2+k_1^2)(s^2-k_2^2)}$$

of na partiele breuksplitsing

$$y(s) = \frac{\lambda\beta}{k_1^2+k_2^2}\left\{\frac{k_1^2}{s^2+k_1^2} + \frac{k_2^2}{s^2-k_2^2}\right\} + \frac{\lambda\gamma}{k_1^2+k_2^2}\left\{\frac{k_1^2}{s^2+k_1^2} + \frac{k_2^2}{s^2-k_2^2} + \frac{\alpha^2}{s^2+k_1^2} - \frac{\alpha^2}{s^2-k_2^2}\right\}$$

Door inverse transformatie ontstaat hieruit

$$Y(x) = \frac{\lambda\beta}{k_1^2+k_2^2}\left\{k_1 \sin k_1x + k_2 \sinh k_2x\right\} + \frac{\lambda\gamma}{k_1^2+k_2^2}\left\{\frac{k_1^2+\alpha^2}{k_1} \sin k_1x + \frac{k_2^2-\alpha^2}{k_2} \sinh k_2x\right\},$$

of in het algemeen

$$Y(x) = C_1 \sin k_1x + C_2 \sinh k_2x$$

$$Y''(x) = -C_1k_1^2 \sin k_1x + C_2k_2^2 \sinh k_2x.$$

In verband met de randvoorwaarden $Y(1) = Y''(1) = 0$

$$C_1 \sin k_1l + C_2 \sinh k_2l = 0$$
$$-C_1k_1^2 \sin k_1l + C_2k_2^2 \sinh k_2l = 0.$$

Dit stelsel heeft alleen een oplossing ongelijk aan de nuloplossing, zo

$$\begin{vmatrix} \sin k_1l & \sinh k_2l \\ -k_1^2 \sin k_1l & k_2^2 \sinh k_2l \end{vmatrix} = 0$$

of na uitwerking

$$(k_1^2 + k_2^2) \sinh k_2l \sin k_1l = 0$$
$$k_1^2 + k_2^2 = 2\sqrt{\tfrac{1}{4}\alpha^4 + \lambda\alpha^3} \neq 0$$
$$\sinh k_2l \neq 0.$$

Een oplossing is dus alleen mogelijk zo

$$k_1l = u\pi \qquad n \neq 0$$

$$k_1^2 = \sqrt{\tfrac{1}{4}\alpha^4 + \lambda\alpha^3} - \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

$$\alpha^4 = \frac{P^2}{(EI)^2} \qquad \lambda\alpha^3 = \frac{m\omega^2}{P\alpha}\alpha^3 = \frac{m\omega^2\alpha^2}{P} = \frac{m\omega^2}{EI}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}\frac{P^2}{(EI)^2} + \frac{m\omega^2}{EI}} - \frac{P}{2EI} = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

$$\frac{1}{4}\frac{P^2}{(EI)^2} + \frac{m\omega^2}{EI} = \frac{n^4\pi^4}{l^4} + \frac{P}{EI}\frac{n^2\pi^2}{l^2} + \frac{1}{4}\frac{P^2}{(EI)^2}$$

$$\omega^2 = \frac{n^2\pi^2}{ml^2}\left\{\frac{n^2\pi^2 EI}{l^2} + P\right\}$$

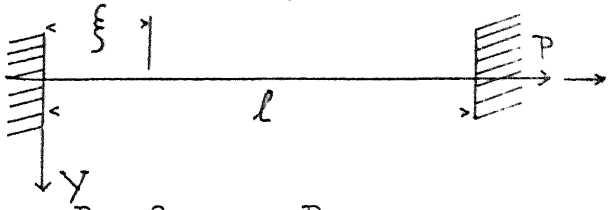
Uit:

$$C_2 = -\frac{C_1 \sin k_1 l}{\sinh k_2 l} \quad \text{volgt } C_2 = 0$$

$$Y(x) = C_1 \sin \frac{n\pi x}{l} .$$

Bepaling van de eigentrillingen van een aan weerszijden ingeklemde staaf onderworpen aan een trekkracht P, D.V. van de kernvergelijking

$$\frac{d^4Y}{dx^4} - \frac{P}{EI}\frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{U_1(x-\xi)}{EI}$$



Na Laplace Transformatie:

$$s^4y(s) - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) - \frac{P}{EI}s^2y(s) + \frac{P}{EI}sY(0) + \frac{P}{EI}Y'(0) = \frac{e^{-s\xi}}{EI} .$$

In verband met de randvoorwaarden:

$$(s^4 - \frac{P}{EI}s^2)y(s) = s\,Y''(0) + Y'''(0) + \frac{e^{-s\xi}}{EI} .$$

Zij $\frac{P}{EI} = \alpha^2$

$$y(s) = \frac{Y''(0)}{s(s^2-\alpha^2)} + \frac{Y'''(0)}{s^2(s^2-\alpha^2)} + \frac{e^{-s\xi}}{EIs^2(s^2-\alpha^2)}$$

$$y(s) = \frac{Y''(0)}{\alpha^2}\left(\frac{s}{s^2-\alpha^2} - \frac{1}{s}\right) + \frac{Y'''(0)}{\alpha^2}\left(\frac{1}{s^2-\alpha^2} - \frac{1}{s^2}\right) + \frac{1}{\alpha^2 EI}\left(\frac{e^{-s\xi}}{s^2-\alpha^2} - \frac{e^{-s\xi}}{s^2}\right)$$

$$Y(x) = \frac{Y''(0)}{\alpha^2}\left\{\cosh \alpha x - 1\right\} + \frac{Y'''(0)}{\alpha^3}\left\{\sinh \alpha x - \alpha x\right\} + \frac{U(x-\xi)}{\alpha^3 EI}\left\{\sinh \alpha(x-\xi) - \alpha(x-\xi)\right\}$$

Uit $Y(1) = Y'(1) = 0$ vinden we voor $Y''(0)$ en $Y'''(0)$ waarden welke functies zijn van ξ .

Zij

$$Y''(0) = \frac{H_1(\xi)}{\alpha EI} , \quad Y'''(0) = \frac{H_2(\xi)}{EI} .$$

Voor $x < \xi \rightarrow \xi > x$

$$Y(x) = \frac{H_1(\xi)}{\alpha^3 EI}\left\{\cosh \alpha x - 1\right\} + \frac{H_2(\xi)}{\alpha^3 EI}\left\{\sinh \alpha x - \alpha x\right\} .$$

Voor $x > \xi \rightarrow \xi < x$

$$Y(x) = \frac{H_1(\xi)}{\alpha^3 EI}\left\{\cosh\alpha x - 1\right\} + \frac{H_2(\xi)}{\alpha^3 EI}\left\{\sinh\alpha x - \alpha x\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha^3 EI}\left\{\sinh\alpha(x-\xi) - \alpha(x-\xi)\right\}.$$

In verband met de symmetrie $x > \xi \rightarrow \xi < x$,

$$Y(x) = \frac{H_1(x)}{\alpha^3 EI}\left\{\cosh\alpha\xi - 1\right\} + \frac{H_2(x)}{\alpha^3}\left\{\sinh\alpha\xi - \alpha\xi\right\}$$

$$x < \xi \rightarrow \xi > x$$

$$Y(x) = \frac{H_1(x)}{\alpha^3 EI}\left\{\cosh\alpha\xi - 1\right\} + \frac{H_2(x)}{\alpha^3}\left\{\sinh\alpha\xi - \alpha\xi\right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^3 EI}\left\{\sinh\alpha(x-\xi) - \alpha(x-\xi)\right\}$$

Zij $\lambda = \frac{m\omega^2}{P\alpha} = \frac{m\omega^2}{\alpha^3 EI}$.

De integraalvergelijking wordt dan uiteindelijk

$$Y(x) = \lambda\int_0^x \left\{\sinh\alpha(x-\xi) - \alpha(x-\xi)\right\} Y(\xi)\,d\xi$$

$$+ \lambda\int_0^1 H_1(\xi)\left\{\cosh\alpha x - 1\right\} Y(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \lambda\int_0^1 H_2(\xi)\left\{\sinh\alpha x - \alpha x\right\} Y(\xi)\,d\xi .$$

Zij $\beta = \int_0^1 H_1(\xi)Y(\xi)\,d\xi$ en $\gamma = \alpha\int_0^1 H_2(\xi)Y(\xi)\,d\xi$.

$$Y(x) = \lambda\int_0^x \left\{\sinh\alpha(x-\xi) - \alpha(x-\xi)\right\} Y(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \lambda\beta\left\{\cosh\alpha x - 1\right\} + \frac{\lambda\gamma}{\alpha}\left\{\sinh\alpha x - \alpha x\right\}$$

Na L.T:

$$y(s) = \lambda\alpha\left\{\frac{1}{s^2-\alpha^2} - \frac{1}{s^2}\right\} y(s) + \lambda\beta\left(\frac{s}{s^2-\alpha^2} - \frac{1}{s}\right) + \lambda\gamma\left(\frac{1}{s^2-\alpha^2} - \frac{1}{s^2}\right)$$

$$(s^4 - \alpha^2 s^2 - \lambda\alpha^3)y(s) = \lambda\beta\alpha^2 s + \lambda\gamma\alpha^2,$$

en zo

$$k_1^2 = -\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{4}\alpha^4 + \lambda\alpha^3 \; ; \; k_2^2 = \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{4}\alpha^4 + \lambda\alpha^3.$$

$$y(s) = \frac{\lambda\beta\alpha^2 s}{(s^2+k_1^2)(s^2-k_2^2)} + \frac{\lambda\gamma\alpha^2}{(s^2+k_1^2)(s^2-k_2^2)}$$

$$y(s) = \frac{\lambda\beta\alpha^2}{k_1^2+k_2^2}\left(\frac{-s}{s^2+k_1^2} + \frac{s}{s^2-k_2^2}\right) + \frac{\lambda\gamma\alpha^2}{k_1^2+k_2^2}\left(\frac{-\alpha^2}{s^2+k_1^2} + \frac{\alpha^2}{s^2-k_2^2}\right).$$

In het algemeen krijgt men hieruit door inverse transformatie

$$Y(x) = C_1(-\cos k_1x + \cosh k_2) + C_2(-\frac{1}{k_1}\sin k_1x + \frac{1}{k_2}\sinh k_2x)$$

$$Y'(x) = C_1(k_1 \sin k_1x + k_2 \sinh k_2x) + C_2(-\cos k_1x + \cosh k_2x).$$

De randvoorwaarden $Y(1) = 0$ $Y'(1) = 0$ voeren tot het verg. stelsel

$$C_1(-\cos k_1l + \cosh k_2l) + C_2(-\frac{1}{k_1}\sin k_1l + \frac{1}{k_2}\sinh k_2l) = 0$$

$$C_1(k_1 \sin k_1l + k_2 \sinh k_2l) + C_2(-\cos k_1l + \cosh k_2l) = 0.$$

Dit stelsel heeft een andere oplossing dan de nul oplossing, zo:

$$\cos^2 k_1l - 2\cos k_1l \cosh k_2l + \cosh^2 k_2l + \sin^2 k_1l - \sinh^2 k_2l +$$

$$+(\frac{k_2}{k_1} - \frac{k_1}{k_2})\sin k_1l \sinh k_2l = 0, \qquad \text{ofwel als}$$

$$2 - 2\cos k_1l \cosh k_2l + \frac{k_2^2-k_1^2}{k_1k_2}\sin k_1l \sinh k_2l = 0$$

In dat geval is

$$C_2 = C_1 \frac{k_1 \sin k_1l + k_2 \sinh k_2l}{\cos k_1l - \cosh k_2l},$$

waarmee het probleem opgelost is.

We hebben bij voortduring gezien dat in de behandelde problemen de kern der integraalvergelijkingen symmetrisch is.
Verwisselt men in $G(x, \xi)$ x met ξ zo behoudt $G(x, \xi)$ haar waarde.
Immers was $x < \xi$ dan is na verwisseling $x > \xi$ geworden, de vorm van $G(x, \xi)$ is dan de gewisselde vorm geworden en na verwisseling van x en ξ krijgt men dan de oorspronkelijke vorm terug.
M.a.w. $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.
Naar hieruit volgt de orthogonaliteit der eigenfuncties. Immers zij $Y_m(x)$ en $Y_n(x)$ eigenfuncties behorende bij de eigenwaarden λ_m en λ_n

$$Y_m(x) = \lambda_m \int_0^1 G(x, \xi)\, Y_m(\xi)\, d\xi$$

$$Y_n(x) = \lambda_n \int_0^1 G(x, \xi)\, Y_n(\xi)\, d\xi.$$

Vermenigvuldig de eerste en de tweede vergelijking resp. met $Y_n(x)$ en $Y_m(x)$ en integreer beide leden over x van $0 \rightarrow 1$

$$\int_0^1 Y_m(x)\, Y_n(x)\, dx = \lambda_m \int_0^1 \int_0^1 G(x, \xi) Y_m(\xi) Y_n(x)\, d\xi\, dx,$$

$$\int_0^1 Y_m(x)\, Y_n(x)\, dx = \lambda_n \int_0^1 \int_0^1 G(x, \xi)\, Y_n(\xi) Y_m(x)\, d\xi\, dx.$$

Passen we in het rechterlid van de tweede vergelijking een assenvernoeming toe en maken we gebruik van de eigenschap $G(\xi, x) = G(x, \xi)$, zo wordt deze vergelijking

$$\int_0^1 Y_m(x) Y_n(x)\, dx = \lambda_n \int_0^1 \int_0^1 G(\xi, x) Y_n(x) Y_m(\xi)\, dx\, d\xi =$$

$$= \lambda_n \int_0^1 \int_0^1 G(x, \xi) Y_m(\xi) Y_n(x)\, d\xi\, dx.$$

Trekken we nu beide vergelijkingen van elkaar af, zo krijgen we

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 \int_0^1 G(x, \xi)\, Y_m(\xi) Y_n(x)\, d\xi\, dx = 0.$$

Daar $\lambda_m \neq \lambda_n$, is

$$\int_0^1 \int_0^1 G(x, \xi) Y_m(\xi) Y_n(x)\, d\xi\, dx = 0$$

en dus

$$\int_0^1 Y_m(x)\, Y_n(x)\, dx = 0.$$

Men kan de eigenfuncties normeren, zodat

$$\int_0^1 Y_n(x)\, Y_n(x)\, dx = 1.$$

Ze vormen dan een basis van een Hilbertse functie-ruimte en hiermee ontstaat de mogelijkheid tot een ontwikkeling in eigenfuncties. Analoog aan de Fourier-transformaties kunnen we dan ook "Fourier-transformaties" opstellen, die we zo kunnen kiezen, dat ze aangepast zijn aan de randvoorwaarden.

Aequivalentie tussen Differentiaalvergelijking en Integraalvergelijking.

Zij $A = a_1 \frac{\partial^n}{\partial x^n} + a_2 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} + \cdots a_n \frac{\partial}{\partial x}$,

a_1; a_2; $\cdots$ a_n kunnen constanten zijn of functies van x.

De Integraalvergelijkingen die we hebben leren kennen hebben de gedaante

$$y(x) = \alpha \int_0^1 K(x, \xi) y(\xi) d\xi \ .$$

Oefenen we de operator A hierop uit

$$A\, y(x) = \alpha \int_0^1 \{ AK(x, \xi) \}\, y(\xi) d\xi \ .$$

Maar nu is:

$$\alpha\, y(x) = \alpha \int_0^1 U_1(x - \xi)\, y(\xi) d\xi \ ,$$

zodat

$$A\, y(x) - \alpha y(x) = \alpha \int_0^1 \{ AK(x, \xi) - U_1(x - \xi) \}\, y(\xi) d\xi \ .$$

Als $K(x, \xi)$ voldoet aan

$$AK(x, \xi) - U_1(x - \xi) = 0,$$

d.w.z. aan de differentiaalvergelijking van de invloedslijn en $y(\xi)$ begrensd is in het gebied $0 \leq \xi \leq 1$, zo voldoet y(x) ook aan

$$A\, y(x) - \alpha\, y(x) = 0,$$

dus aan

$$A\, y(x) = \alpha y(x).$$

q.e.d.

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
TELEFOON 51660 - 56643
AMSTERDAM-O.

Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)
te 's-Gravenhage
7e Voordracht: 6 Januari 1954.
Spreker: Prof.Dr.S.C.van Veen.

§ 7. De inverse Laplace-transformatie.

De in § 6 afgeleide stellingen van Mellin, i.h.b. de tweede stelling van Mellin, leveren onmiddellijk de formule voor de inverse Laplace-transformatie.

Wij hebben immers gezien (pag.18, Tweede stelling van Mellin), dat uit:

$$f(s) = \int_0^\infty x^{s-1} g(x)\,dx \qquad (26)$$

volgt

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} x^{-s} f(s)\,ds\,. \qquad (27).$$

Voldoende voorwaarden zijn: voor $x > 0$ is $g(x)$ bij gedeelten glad.
en:
In de strook $\alpha < \sigma < \beta$ is
$$\int_0^\infty x^{\sigma-1}\, g(x)\,dx$$
absoluut convergent.

Stel nu in (26) en (27) $x = e^{-y}$
Dan gaat (26) over in:

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sy}\, g(e^{-y})\,dy \qquad (26')$$

waaruit onder de gestelde voorwaarden volgt

$$g(e^{-y}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} e^{y(s)}\, f(s)\,ds \qquad (27').$$

Stellen wij

$$g(e^{-y}) = F(y)$$

dan gaat de uitkomst over in:

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sy}\, F(y)\,dy \longrightarrow F(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} e^{ys} f(s)\,ds \qquad (28)$$

(onder de gestelde voorwaarden).

De linkerbetrekking is "bijna" een Laplace-transform. Deze uitdrukking gaat geheel in een L-transform over als wij $\overline{F}(y)$ definieren als volgt:

$$\overline{F}(y) = F(y) \quad \text{voor } y > 0.$$
$$\overline{F}(y) = 0 \quad \text{voor } y \leq 0.$$

Daardoor is er wel kans, dat voor y=0 (of x=1) een discontinuiteit wordt ingevoerd in $g(e^{-y}) = g(x)$, maar dat doet geen kwaad, de functie $g(x)$ is evengoed bij gedeelten glad, en (28) gaat over in:

Uit $f(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\, \bar{F}(y)\,dy = \mathcal{L}\{F(y)\}$ volgt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} e^{ys}\, f(s)\,ds = F(y) \text{ voor } y>0$$
$$= 0 \text{ voor } y \leq 0.$$

Aan de voldoende voorwaarden is zeker voldaan, als we σ zo kiezen, dat rechts van de lijn

$$(\sigma - \infty i \ , \ \sigma + \infty i)$$

een enkele singulariteit van $f(s)$ is gelegen.

Dan is immers in ieder punt $s = \sigma_1 + it$ $(\sigma_1 \geq \sigma)$.

$$f(\sigma_1) = \int_0^\infty x^{\sigma_1 - 1}\, g(x)\,dx$$

absoluut convergent.

Wij kunnen dan tenslotte de gevonden uitkomst als volgt zo kort mogelijk formuleren:

Wanneer gegeven is

$$\mathcal{L}\{F(y)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\, F(y)\,dy \qquad (28)$$

dan volgt hieruit omgekeerd:

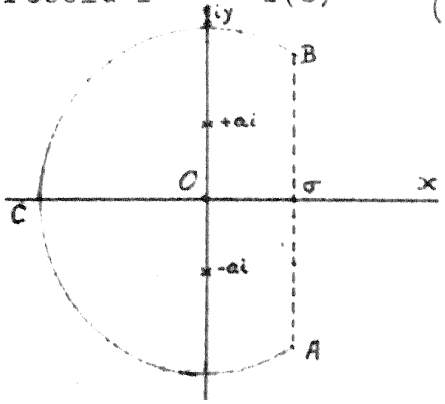
$$F(y) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} e^{+ys}\, f(s)\,ds \qquad (29)$$

Wanneer σ groter is dan het reële gedeelte van alle singulariteiten van $f(s)$.

8. Toepassingen:

De formule (29) stelt ons "theoretisch" in staat, om de inverse Laplace-transform $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ van een gegeven functie $f(s)$ te bepalen. Deze berekening wordt teruggebracht tot de integratie langs de rechte $(\sigma - \infty i \ , \ \sigma + \infty i)$ welke volgens de bekende methoden van de complexe functietheorie (residuen-rekening) tot een contourintegratie kan worden kan worden teruggebracht, zoals wij met enkele klassieke voorbeelden illustreren.

Voorbeeld I $f(s) = \dfrac{1}{(s^2 \pm a^2)^2}$ (stel a reëel)



Enige singulariteiten: polen van de 2e orde in $s = \pm ai$

Wij integreren over de gesloten contour, samengesteld uit de rechte AB, en de cirkelboog BCA, met straal R om de oorsprong beschreven.

De contourintegraal = $2\pi i \sum$ residuen

Op de cirkelboog is $s = R\, e^{i\varphi}$.

$$f(s) = \frac{1}{(R^2 e^{2i\varphi} + a^2)^2} = O(R^{-4}).$$

Nauwkeuriger $\quad |f(s)| < \dfrac{1}{(R^2-a^2)}$

$$\left| \int_{BCA} e^{ys} f(s)\,ds \right| < \int_{BCA} \frac{e^{yR\cos\varphi}}{(R^2-a^2)^2} R\,d\varphi <$$

$$< \frac{e^{\sigma y_R}}{(R^2-a^2)^2} \int_{BCA} d\varphi < \frac{2\pi R e^{\sigma y}}{(R^2-a^2)^2} \longrightarrow 0 \quad \text{voor } R \to \infty$$

Dus voor $R \to \infty$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} e^{ys} f(s)\,ds = \left\{\text{Res van } \frac{e^{ys}}{(s^2+a^2)^2} \text{ in } +ai\right\} + \left\{\text{Res van } \frac{e^{ys}}{(s^2+a^2)^2} \text{ in } -ai\right\}$$

Stel in het eerste geval : $s = ai + \delta$.

$$\frac{e^{ys}}{(s^2+a^2)^2} = \frac{e^{y(ai+\delta)}}{\delta^2(2ai+\delta)^2} = \frac{e^{yai}\, e^{y\delta}}{\delta^2(2ai)^2} \cdot \frac{1}{(1+\frac{\delta}{2ai})^2} =$$

$$= \frac{e^{yai}}{-4a^2} \cdot \frac{1}{\delta^2}\left(1+\frac{y\delta}{1!}+\frac{y^2\delta^2}{2!}+\ldots.\right)\left(1-\frac{2\delta}{2ai}+\frac{3\delta^2}{(2ai)^2}-\ldots.\right) =$$

$$\frac{e^{yai}}{-4a^2} \cdot \frac{1}{\delta^2}\left\{1+\delta\left(y+\frac{i}{a}\right)+O(\delta^2)\right\} .$$

Dus : residu in $+ai$ = coeff. van $\delta = -\dfrac{1}{4a^2} e^{+yai}\left(y+\dfrac{i}{a}\right)$.

Op dezelfde wijze vindt men :residu in $-ai = -\dfrac{1}{4a^2} e^{-yai}\left(y-\dfrac{i}{a}\right)$.

Dus: $F(y) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\dfrac{1}{4a^2}\left\{y\left(e^{yai}+e^{-yai}\right) - \dfrac{1}{ai}\left(e^{yai}-e^{-yai}\right)\right\}$

$$= \frac{1}{2a^3}\left\{\sin ay - ay\cos ay\right\} .$$

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
TELEFOON 51660 - 56643
AMSTERDAM-O.

Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)
te 's-Gravenhage
8e Voordracht: 20 Januari 1954
Spreker: Ir R.T. Trense.

Algemeen bewijs, dat voor de constructies, die in de vorige lezingen worden beschouwd, de Greensche functie $G(x,\xi)$ symmetrisch is (Stelling van Maxwell)

Noemen we de zakkingen in de punten x en ξ zo in het punt ξ een last P aangebracht wordt $y_p(x)$ en $y_p(\xi)$ een zo een last Q in x aangebracht wordt $y_Q(x)$ en $y_Q(\xi)$

Volgens het superpositiebeginsel krijgen we, als we P en Q in verschillende volgorde op de constructie aanbrengen toch dezelfde spanningstoestand.

Daar de hieruit voortvloeiende hoeveelheden inwendige arbeid gelijk zijn aan de bijbehorende hoeveelheden uitwendige arbeid, zijn de laatste als de eerste aan elkaar gelijk.

In het geval dat P het eerst wordt aangebracht is de uitwendige arbeid

$$A_1 = \tfrac{1}{2}Py_p(\xi) + Py_Q(\xi) + \tfrac{1}{2}Qy_Q(x)$$

Wordt Q het eerst aangebracht zo is

$$A_2 = \tfrac{1}{2}Qy_Q(x) + \tfrac{1}{2}Py_p(\xi) + Qy_p(x)$$

Gelijkstelling van A_1 en A_2 voert tot

$$Py_Q(\xi) = Qy_p(x)$$

Als nu $P = Q = 1$ zo is $y_Q(\xi) = y_p(x)$

De zakking in een punt x als gevolg van het aanbrengen van een kracht P=1 in een punt ξ is dus gelijk aan de zakking in het punt ξ als in het punt x een kracht Q=1 is aangebracht of m.a.w.

$$G(x,\xi) = G(\xi,x)$$

Stelling : Zij $\varphi_1\ \varphi_2$,... de genormeerde eigen functies behorende bij de eigenwaarden λ_1 ,λ_2 ,.... van de integraalvergelijking met symmetrische kern

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\ell K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

$\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ vormen een rij van monotoon aangroeiende positieve eigenwaarden. De grootte van deze eigenwaarden neemt onbegrensd toe

Als $g(x) = \int_0^\ell K(x,\xi)\,h(\xi)\,d\xi$

waarbij h(x) op het interval [0-1] begrensd en bij gedeelten continu is en als

$$a_i = \int_0^\ell g(x)\varphi_i(x)\,dx$$

zo is $\sum_1^\infty a_i\varphi_i(x)$ gelijkmatig convergent

en gaat $g(x) - \sum_1^n a_i \varphi_i(x)$ gelijkmatig naar nul voor $n \to \infty$
M.a.w. de functie $g(x)$ is ontwikkelbaar in een reeks van eigenfuncties.

Hoe veelomvattend en technisch bruikbaar deze klasse van functies is zullen we aan het eind van het betoog nog nader bezien.
Bij het bewijs van de stelling moet gebruik gemaakt worden van een aantal hulpstellingen wier bewijs we aan het eigenlijke bewijs van de stelling zullen laten voorafgaan.

De eerste hiervan is de Ongelijkheid van Schwarz

$$(\sum_1^n a_i b_i)^2 \leq (\sum_1^n a_i^2)\ (\sum_1^n b_i^2)$$

Bewijs: De vergelijking $\sum_1^n (a_i x + b_i)^2 = 0$ heeft geen reëele wortels, behalve als $b_i = \lambda a_i$.
In dat geval wordt de vergelijking

$$(x+\lambda)^2 \sum_1^n a_i^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = -\lambda$$

M.a.w. van de beschouwde vergelijking in x is de discriminant ≤ 0.
De uitgewerkte vergelijking ziet er als volgt uit:

$$x^2 \sum_1^n a_i^2 + 2x \sum_1^n a_i b_i + \sum_1^n b_i^2 = 0$$

Discr. : $4(\sum_1^n a_i b_i)^2 - 4(\sum_1^n a_i^2)\ (\sum_1^n b_i^2) \quad 0$ q.d.e.

Beschouwen we vervolgens de ongelijkheid van Schwarz voor functies

Definiëren we het inwendige product

$$(f,g) = \int f g\, dx$$

en de norm van de functie f

$$(f,f) = Nf$$

De bedoelde ongelijkheid luidt hiermee

$$(f,g)^2 \leq (f,f)\ (g,g) = Nf\ Ng$$

Bewijs:

$$(f\lambda + g)^2 dx = \lambda^2 Nf + 2\lambda (f.g) + Ng = 0$$

heeft geen reële of gelijke wortels van λ
Discr.: $4(f,g)^2 - 4\,Nf\ Ng \quad 0$ q.d.e.
Dat de functies Q_i een orthonormaal stelsel vormen, drukken we met de Kronecker δ als volgt uit

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 \text{ als } \mu \neq \nu \\ 1 \text{ als } \mu = \nu \end{cases}$$

$$\varphi_\mu, \varphi_\nu) = \delta_{\mu\nu}$$

Iedere functie f is formeel als reeks van orthonormale functies φ_i op te schrijven.
Immers zo $f = \Sigma\, c_\mu \varphi_\mu$ is

$$(f,\varphi_\nu) = \Sigma\, c_\mu(\varphi_\mu,\varphi_\nu) = \Sigma\, c_\mu \delta_{\mu\nu} = c_\nu$$

Dat f metterdaad ontwikkelbaar is zullen we voor de functies $g(x)$ juist nader bekijken en bewijzen.
De Ongelijkheid van Bessel

Er worde in het midden gelaten of f al of niet te ontwikkelen is in

een reeks van eigenfuncties. Hen vorme de inwendige producten

$$c_\nu = (f,\varphi_\nu) = \int_0^l f \varphi_\nu \, dx$$

dan is

$$\sum c_\nu^2 \leq Nf$$

Bewijs:

$$\int (f - \sum c \varphi_\nu)^2 \, dx \geq 0$$

$$\int f^2 dx - 2 \int \sum c_\nu f \varphi_\nu \, dx + \int (\sum c_\nu \varphi_\nu)^2 \, dx \geq 0$$

Aangezien

$$(\varphi_\mu, \varphi_\nu) = \delta_{\mu\nu} \quad \text{is} \quad \int (\sum c_\nu \varphi_\nu)^2 = \sum c_\nu^2$$

$$\int f^2 dx - 2 \sum c_\nu \int f \varphi_\nu dx + \sum c_\nu^2 \geq 0$$

$$\int f^2 dx - 2 \sum c_\nu^2 + \sum c_\nu^2 \geq 0$$

$$\sum c_\nu^2 \leq \int f^2 dx \qquad \text{q.d.e.}$$

Analoog aan het bewijs van de ongelijkheid van Schwarz voor functies kunnen wij een belangrijke eigenschap afleiden voor de functie

$$J(\varphi,\varphi) = \int_0^l \int_0^l K(x,\xi) \varphi(x) \varphi(\xi) \, dx \, d\xi,$$

waarbij φ geen eigenfunctie hoeft te zijn. Echter moet $N\varphi$ wel begrensd zijn.

De vergelijking in α :

$$\int\int \{\alpha K(x,\xi) + \varphi(x)\varphi(\xi)\}^2 dx \, d\xi =$$

$$= \alpha^2 \iint \{K(x,\xi)\}^2 dx \, d\xi + 2\alpha \iint K(x,\xi)\varphi(x)\varphi(\xi) dx \, d\xi +$$

$$+ \iint \{\varphi(x)\}^2 \{\varphi(\xi)\}^2 dx \, d\xi = 0$$

heeft geen reële wortels van α of anders zijn deze wortels gelijk.

M.a.w.

$$\text{Disr.:} \quad 4\{J(\varphi,\varphi)\}^2 - 4(\varphi,\varphi)^2 \iint \{K(x,\xi)\}^2 dx \, d\xi \leq 0$$

$$\{J(\varphi,\varphi)\}^2 \leq (\varphi,\varphi)^2 \iint \{K(x,\xi)\}^2 dx \, d\xi$$

Nu is de invloedsfunctie $K(x,\xi)$ steeds een begrensde functie en daar ook $N\varphi$ begrensd is, bezit $|J(\varphi,\varphi)|$ een begrensde waarde.

We kunnen ons nu dus met recht afvragen of $|J(\varphi,\varphi)|$ zo we functies φ beschouwen waarvoor $N\varphi$ constant is , een maximum waarde bezit en hoe groot deze is.

Nemen we voorlopig aan dat $N\varphi = 1$.

De functie $K(x,\xi)$ bestaat nu ofwel uit polynomen of is in verband met haar continuiteit op het gebied $x\{0\text{-}l\}$, $\xi\{0\text{-}l\}$ gelijkmatig door polynomen te approximeren. (Weierstrasz)

$$K_m(x,\xi) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \beta_i(\xi)$$

$$|K(x,\xi) - K_m(x,\xi)| \leq \varepsilon$$

De 2 functies $\alpha_1(x), \alpha_2(x) \ldots\ldots \alpha_i(x), \beta_1(x), \beta_2(x) \ldots\ldots \beta_m(x)$

denken we ons lineair uitgedrukt in een systeem van q orthonormale functies $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ ..... $\omega_q(x)$ hetgeen door een orthonormeringsproces is tot stand te brengen.

$$K_m(x,\xi) = \sum_{i,k=1}^{q(m)} c_{ik}^{m}\, \omega_i(x)\, \omega_k(\xi)$$

In verband met de symmetrie van $K(x,\xi)$ is

$$c_{ik}^{m} = c_{ki}^{m}$$

Immers: $$\sum_{i,k=1}^{q(m)} c_{ik}^{m}\, \omega_i(x)\, \omega_k(\xi) \equiv \sum_{i,k=1}^{q(m)} c_{ik}^{m}\, \omega_i(\xi)\, \omega_k(x) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i,k=1}^{q(m)} c_{ki}^{m}\, \omega_i(x)\, \omega_k(\xi)$$

Noem $J_m(\varphi\,\varphi) = \iint K_m(x,\xi)\, \varphi(x)\, \varphi(\xi)\, dx\, d\xi$

verder zij $(\varphi,\omega_i) = y_i$

zo is $$J_m(\varphi;\varphi) = \sum_{i,k=1}^{q(m)} c_{ik}^{m}\, y_i\, y_k$$

Van $|J_m(\varphi,\varphi)|$ moeten we nu het maximum vinden met als nevenvoorwaarde $(\varphi,\varphi) = 1$. Volgens de ongelijkheid van Bessel is

$$\sum_{i=1}^{q(m)} y_i^{\,2} \leq (\varphi,\varphi) = 1$$

De grootste waarde van $|J_m(\varphi\,\varphi)|$ is te bereiken als $\sum_{i=1}^{q(m)} y_i^{\,2} = 1$. Ware dit niet het geval, zo zou $|J_m(\varphi,\varphi)|$ te vergroten zijn door haar met een geeigende factor te vermenigvuldigen,

Immers zij $\sum_{i=1}^{q(m)} y_i^{\,2} = c^2$ $\qquad c^2 < 1$

als nu $\bar{y}_i = \frac{1}{c}\, y_i$, dan is $\sum_{i=1}^{q(m)} \bar{y}_i^{\,2} = 1$

Nu gaat de ongelijkheid van Bessel in een gelijkheid over zo Q ontwikkelbaar is in het stelsel functies waarmee de coefficienten zijn opgebouwd.

Nemen we een geconstrueerde functie

$\bar{\varphi} = \sum_{i=1}^{q(m)} \bar{y}_i \omega_i$ in beschouwing zo zien we dat hiervoor geldt

$$(\varphi,\omega_i) = \bar{y}_i = \frac{1}{c}\, y_i \qquad \text{en} \qquad (\varphi,\varphi) = \sum_{i=1}^{q(m)} \bar{y}_i^{\,2} = 1$$

Maar dan is $$\left|J_m(\bar{\varphi},\bar{\varphi})\right| = \left|\sum_{i,k=1}^{q(m)} c_{ik}^{m}\, \bar{y}_i\, \bar{y}_k\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{c^2} \sum_{i,k=1}^{q(m)} c_{ik}^{m}\, y_i\, y_k\right| = \frac{1}{c^2}\left|J_m(\varphi\,\varphi')\right| > \left|J_m(\varphi\,\varphi)\right|$$

De bepaling van een extremum van $J_m(\varphi,\varphi)$ is aequivalent met de de bepaling van een extremum van

$$J_m(\varphi,\varphi) - \sigma_{im}\left\{\sum_{i=1}^{q(m)} y_i^{\,2} - 1\right\} \qquad \text{ofwel van}$$

$$\sum_{i,k=1}^{q(n)} c_{ik}^{n}\, y_i y_k - \sigma_{1n}\left\{\sum_{i=1}^{q(n)} y_i^2 - 1\right\}$$

Partiële differentiatie voert tot

$$\sum_{k=1}^{q(n)} c_{ik}^{n}\, y_k = \sigma_{1n}\, y_i \qquad \left\{ i = 1,2 \ldots q(n) \right\} \qquad \text{I}$$

We hebben hier $q(n)$ homogene vergelijkingen met $q(n)$ onbekenden. Bij nulstelling van de determinant der coefficiënten ontstaat een vergelijking van de graad $q(n)$ in σ_{1n}. De wortel σ_{1n} van deze vergelijking die de grootste abs. waarde bezit is juist de waarde, die we hebben willen.

Immers noem de oplossing van de vergelijking

I tezamen met $\sum_{i=1}^{q(n)} y_i^2 = 1 \quad : y_i^*$

vermenigvuldig het linker en rechter lid van I met y_i^* en sommeer van $1 - q(n)$

$$J\,(\varphi_2\varphi)_{extr} = \sum_{i,k=1}^{q(n)} c_{ik}^{n}\, y_k^* y_i^* = \sum_{1}^{q(n)} \sigma_{1n} (y_i^*)^2 = \sigma_{1n}$$

We zullen aantonen dat

$$\varphi_n(x) = y_1^* \omega_1(x) + y_2^* \omega_2(x) + \ldots\ldots y_{q(n)}^* \omega_{q(n)}(x)$$

voldoet aan de integraalverg.:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sigma_{1n}} \int K(x\,\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \qquad \text{II}$$

In verband met de orthonormale eigenschappen $(\omega_\mu(x)\omega_\nu(x)) = \delta_{\mu\nu}$ en de voorwaarde $\sum_{1}^{q(n)} (y_i^*)^2 = 1$ is

$$N\varphi_\mu = \int \left\{ \sum_{1}^{q(n)} y_i^* \omega_i(x) \right\}^2 dx = 1 \quad \text{en is} \quad (\varphi_\mu, \omega_i) = y_i$$

Vermenigvuldig nu het linker en het rechter lid van I met $\omega_i(x)$ en sommeer van $1-q(n)$

$$\sum_{i,k=1}^{q(n)} c_{ik}^{n}\, y_k^* \omega_i(x) = \sigma_{1n} \sum_{1}^{q(n)} y_i^* \omega_i(x)$$

$$\sum_{i,k=1}^{q(n)} c_{ik}^{n}\, \omega_i(x) \int \omega_k(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi = \sigma_{1n} \varphi_n(x)$$

$$\sigma_{1n}\varphi_n(x) = \int \sum_{i,k=1}^{q(n)} \omega_1(x)\omega_k(\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = \int K_n(x,\xi)\varphi_n(\xi)\, d\xi \qquad \text{q.d.e.}$$

Het omgekeerde is ook waar uit II volgt I.

Vermenigvuldig het linker en rechter lid van II met $\omega_i(x)$ en integreer beide leden over het toepassingsgebied

$$y_i^* = (\varphi_n(x), \omega_i(x)) = \frac{1}{\sigma_{1n}} \iint K_n(x,\xi)\omega_1(x)\, \varphi_n(\xi)\, dx\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sigma_{1n}} \iint \sum_{i,k=1}^{q(n)} c_{ik}^{n}\, \omega_i^2(x)\, dx\, \omega_k(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\sigma_{1n}} \sum_{k=1}^{q(n)} c_{ik}^{n}\, y_k^*$$

q.d.e.

In de ongelijkheid $\left\{J(\varphi,\varphi)\right\}^2 \leq (\varphi,\varphi)^2 \iint \left\{K(x,\xi)\right\}^2 dx\, d\xi$

is $J(\varphi,\varphi)$ te vervangen door $J(\varphi,\varphi) - J_m(\varphi\,\varphi)$

$$\left\{J(\varphi,\varphi) - J_m(\varphi,\varphi)\right\}^2 \leq (\varphi\,\varphi)^2 \iint \left\{K(x,\xi) - K_m(x,\xi)\right\}^2 dx\, d\xi$$

en daar $\left|K(x,\xi) - K_m(x,\xi)\right| < \varepsilon$

$$\left\{J(\varphi,\varphi) - J_m(\varphi,\varphi)\right\}^2 \leq \varepsilon^2 l^2$$

Voor $m \to \infty$ gaat $K_m(x,\xi)$ over in $K(x\xi)$ en $J_m(\varphi,\varphi)$ over in $J(\varphi,\varphi)$

Daar dan is $\lim_{m\to\infty} \sigma_{1m} = \frac{1}{\lambda_1}$

$$\therefore \quad \left|J(\varphi\,\varphi)\right| \leq \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{zo} \quad (\varphi,\varphi) = 1$$

En in het algemeen

$$\left|J(\varphi\,\varphi)\right| \leq \frac{N(\varphi)}{\lambda_1}$$

Bekijken we vervolgens een soort geconstrueerde kern

$$K'_m(x,\xi) = K(x,\xi) - \sum_1^m \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(\xi)}{\lambda_i}$$

Zij $k \leq m$

$$\int K'_m(x,\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi = \int K(x,\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi - \sum_1^m \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\int \varphi_i(\xi)\varphi_k(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} - \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} = 0$$

$\varphi_k(x)$ is dus, zo $k \leq m$ geen oplossing van de integraalvergelijking

$$\varphi(x) = \lambda \int K'_m(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

$\varphi_{m+1}(x)$ is zulks wel, immers

$$\lambda_{m+1}\int K'_m(x,\xi)\,\varphi_{m+1}(\xi)\,d\xi = \lambda_{m+1}\int K(x,\xi)\,\varphi_{m+1}(\xi)\,d\xi -$$

$$- \lambda_{m+1}\sum_1^m \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\int \varphi_i(\xi)\,\varphi_{m+1}(\xi)\,d\xi = \varphi_{m+1}(x)$$

In het algemeen zijn $\varphi_k(x)$ oplossingen zo $k \geq m+1$

De bijbehorende eigenwaarden zijn λ_k, de kleinste van de reeks is λ_{m+1}

Zij $\eta_1(x)\,;\,\eta_2(x)\,\ldots\ldots\,\zeta_1(x)\,;\,\zeta_2(x)\ldots\ldots$twee reeksen van continue, of bij gedeelten continue functies, zodanig dat hun norm een bovengrens M bezit

$$N(\eta_\mu + \zeta_\mu) = N(\eta_\mu) + N(\zeta_\mu) + 2(\eta_\mu, \zeta_\mu)$$

Volgens de ongelijkheid van Schwarz voor functies is:

$$(\eta_\mu, \zeta_\mu) \leq \sqrt{N\eta_\mu\, N\zeta_\mu}$$

Bijgevolg is

$$N(\eta_\mu + \zeta_\mu) \leq N(\eta_\mu) + N(\zeta_\mu) + 2\sqrt{N(\eta_\mu)N(\zeta_\mu)} \leq 4\,M$$

Zij nu

$$J'_m(\eta_\mu, \zeta_\mu) = \iint K'_m(x,\xi)\,\eta_\mu(x)\,\zeta_\mu(\xi)\,dx\,d\xi$$

$$\left|J_m(\eta_\mu + \zeta_\mu, \eta_\mu + \zeta_\mu)\right| \leq \left|J'_m(\eta_\mu, \eta_\mu)\right| + 2\left|J_m(\eta_\mu, \zeta_\mu)\right| + \left|J'_m(\zeta_\mu\,\zeta_\mu)\right|$$

$$\leq \frac{N(\eta_{\mu+1}+\zeta_{\mu})}{\lambda_{\mu+1}} \leq \frac{4M}{\lambda_{\mu+1}}$$

$$|J_n'(\eta_\mu,\eta_\mu)| \leq \frac{N(\eta_\mu)}{\lambda_{\mu+1}} = \frac{M}{\lambda_{\mu+1}} \qquad |J_n'(\zeta_\mu,\zeta_\mu)| \leq \frac{M}{\lambda_{\mu+1}}$$

Hieruit volgt $2|J_n(\eta_\mu,\zeta_\mu)| \leq \frac{4M}{\lambda_{\mu+1}}$

Maar dan is $\lim_{n\to\infty} J_n'(\eta_\mu,\zeta_\mu) = \lim_{n\to\infty} \iint K_n'(x,\xi)\,\eta_\mu(x)\,\zeta_\mu(\xi)\,dx\,d\xi = 0$

Zij $c_\nu = \int K(x,\xi)\,\varphi_\nu(\xi)\,d\xi = \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$

Volgens de ongelijkheid van Bessel is nu

$$\int K(x,\xi)^2\,d\xi \geq \sum_1^\infty \left\{\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right\}^2$$

Bijgevolg is $T(x) = \sum_1^\infty \frac{\{\varphi_i(x)\}^2}{\lambda_i^2}$ convergent en dus volgens de stelling van Dini gelijkmatig convergent.

Beschouw nu de geconstrueerde kern

$$G(x,\xi) = \sum_1^\infty \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(\xi)}{\lambda_i}$$

Hiermee wordt $\gamma(x) = \int G(x,\xi)\,h(\xi)\,d\xi =$

$$= \sum_1^\infty \varphi_i(x) \int \frac{\varphi_i(\xi)\,h(\xi)}{\lambda_i}\,d\xi = \sum_1^\infty a_i\varphi_i(x)$$

waarbij $a_i = \int \frac{\varphi_i(\xi)\,h(\xi)}{\lambda_i}\,d\xi = \frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i} = \frac{h_i}{\lambda_i}$

Volgens de ongelijkheid van Bessel is

$$\sum h_i^2 \leq Nh$$

en vormt $\sum h_i^2$ dus een convergente reeks.

Wijhebben reeds gezien, dat

$$\sum_1^\infty \frac{\{\varphi_i(x)\}^2}{\lambda_i^2} \quad \text{gelijkmatig convergent is.}$$

Volgens de ongelijkheid van Schwarz is

$$\left[\frac{h_n\varphi_n(x)}{\lambda_n} + \dots + \frac{h_m\varphi_m(x)}{\lambda_m}\right]^2 \leq (h_n^2 + \dots + h_m^2)\left(\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2} + \dots + \frac{\varphi_m^2(x)}{\lambda_m^2}\right)$$

$$\leq \varepsilon^2 = \{\varepsilon(n)\}^2 \text{ en niet } \{\varepsilon(n,x)\}^2$$

Bijgevolg is $\sum_1^\infty a_i\varphi_i(x) = \sum_1^\infty \frac{h_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)$ gelijkmatig convergent.

Zij $\gamma_n(x) = \sum_1^{n'} a_i\varphi_i(x)$ $\qquad \gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(x)$

$$g(x) = \int K(x,\xi)\,h(\xi)\,d\xi$$

$$\lambda_n(x) = \int \sum_i^n \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(\xi)}{\lambda_i}\, h(\xi)\, d\xi$$

$$g(x) \doteq \gamma(x) = \int K'(x,\xi)\, h(\xi)\, d\xi$$

Zij $\omega(x)$ een willekeurige, doch bij gedeelten continue functie, wier norm begrensd is.
Hiermee vormen we de uitdrukking

$$\int \omega(x) \left\{ g(x) - \gamma_n(x) \right\} dx = \iint K'_n(x,\xi)\,\omega(x)\, h(\xi)\, dx\, d\xi$$

Nu hebben we gezien, dat

$$\lim_{n\to\infty} \iint K'_n(x,\xi)\,\omega(x)\, h(\xi)\, dx\, d\xi \to 0$$

$$\therefore \int \omega(x) \left\{ g(x) - \gamma(x) \right\} dx = 0$$

Stellen we $\omega(x) = g(x) - \gamma(x)$ zo is

$$\int \left\{ g(x) - \gamma(x) \right\}^2 dx = 0$$

$g(x)$ gaat dus gelijkmatig over in $\gamma(x)$ welke gelijkmatig convergent is.

q.d.e.

Hoe gaan we nu te werk zo $g(x)$ een willekeurig gegeven functie is?
Zo we bij $g(x)$ e'n $h(x)$ kunnen vinden, die begrensd en bij gedeelten continu is, zodanig dat $g(x) = \int_0^l K(x,\xi)\, h(\xi)\, d\xi$ zo is $g(x)$ in eigen functies ontwikkelbaar.
Welnu, als $K(x,\xi)$ voldoet aan de D.V.

$$A\, K(x,\xi) = U_1(x-\xi)$$

zo voldoet $g(x)$ aan de D.V: $A\, g(x) = h(x)$
Immers:

$$A\, g(x) = \int_0^l A\, K(x,\xi)\, h(\xi)\, d\xi = \int_0^l U_1(x-\xi)\, h(\xi)\, d\xi = h(x)$$

Hiermee hebben we een eenvoudig middel om $h(x)$ te bepalen, waarop we kunnen nagaan of $h(x)$ aan de gestelde voorwaarden voldoet.

$$\leq \frac{N(\eta_m \zeta_m)}{\lambda_{\mu+1}} \leq \frac{4M}{\lambda_{\mu+1}}$$

$$|J_m'(\eta_\mu, \eta_\mu)| \leq \frac{N(\eta_m)}{\lambda_{\mu+1}} = \frac{M}{\lambda_{\mu+1}} \qquad |J_m'(\zeta_\mu, \zeta_\mu)| \leq \frac{M}{\lambda_{n+1}}$$

Hieruit volgt

$$2|J_m'(\eta_\mu, \zeta_\mu)| \leq \frac{6M}{\lambda_{\mu+1}}$$

Maar dan is $\lim_{m\to\infty} J_m'(\eta_m, \zeta_\mu) = \lim_{m\to\infty} \iint K_m'(x,\xi)\, \eta_m(x)\, \zeta_\mu(\xi)\, dx\, d\xi = 0$

Zij $\gamma_n(x) = \sum_1^n a_i \varphi_i(x)$, waarbij $a_i = \int \frac{\varphi_i(\xi)}{\lambda_i} h(\xi)\, d\xi$

zodat $\gamma_n(x) = \int \sum_1^n \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(\xi)}{\lambda_i} h(\xi)\, d\xi$

$$\gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(x)$$
$$g(x) = \int K(x,\xi)\, h(\xi)\, d\xi$$
$$g(x) - \gamma(x) = \int K'(x,\xi)\, h(\xi)\, d\xi$$

Zij $\omega(x)$ een willekeurige, doch bij gedeelten continue functie, wier norm begrensd is. Hiermee vormen we de uitdrukking

$$\int \omega(x) \{ g(x) - \gamma_n(x) \}\, dx = \iint K'(x,\xi)\omega(x)\, h(\xi)\, dx\, d\xi$$

Nu hebben we gezien dat

$$\lim_{n\to\infty} \iint K_n'(x,\xi)\, \omega(x)\, h(\xi)\, dx\, d\xi \to 0$$
$$\therefore \int \omega(x) \{ g(x) - \gamma(x) \}\, dx = 0$$

Stellen we $\omega(x) = g(x) - \gamma(x)$ zo is

$$\int \{ g(x) - \gamma(x) \}^2\, dx = 0$$

$\gamma(x)$ gaat dus over in $g(x)$, zodat $g(x)$ te beschouwen is als somfunctie van $\gamma(x)$.

Hiermee is nu de ontwikkeling in eigenfuncties van $K(x,\xi)$ zelve te bekijken en wel in eigenfuncties $\varphi_i(\xi)$

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_0^l K(x,\xi)\, \varphi_i(\xi)\, d\xi$$
$$\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} = (K(x,\xi), \varphi_i(\xi))$$
$$K(x,\xi) = \sum \left\{ \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} \right\} \varphi_i(\xi)$$

We zullen gebruik moeten maken van de norm van een δ functie van Dirac zodat we de afleiding hiervan te bekijken hebben.

We stellen

$$\delta(x, \lambda_{\mu+1}) = \frac{\sqrt{\lambda_{\mu+1}}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\lambda_{\mu+1} x^2}$$

$$N\,\delta(x,\lambda_{\mu+1}) = \frac{\lambda_{\mu+1}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\lambda_{\mu+1}\,x^2}\,dx = \frac{\lambda_{\mu+1}}{\pi\sqrt{2\lambda_{\mu+1}}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x\sqrt{2\lambda_{\mu+1}})^2}\,d(x\sqrt{2\lambda_{\mu+1}})$$

$$= \frac{\lambda_{\mu+1}}{\pi\sqrt{2\lambda_{\mu+1}}}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_{\mu+1}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Bij de limietovergang $n \to \infty$ en verschuiving van de top van de klokfunctie naar 0^+ ontstaat een pulsfunctie. Bij de bepaling van de norm kan men dan bij limiet de integratie van $-\infty \to +\infty$ vervangen door een van $0 \to l$.

Stellen we nu $h(\xi) = U_1(\xi' - \xi) = \lim_{n\to\infty} \delta(\xi' - \xi, \lambda_{\mu+1})$

$$N\,U_1(\xi' - \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\lambda_{\mu+1}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$g(x) = \int_0^l K(x,\xi)\,U_1(\xi' - \xi)\,d\xi = K(x,\xi')$$

$$\int_0^l \omega(x)\left[K(x,\xi') - \sum_1^n \left\{\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right\}\varphi_i(\xi')\right]dx =$$

$$= \int_0^l\int_0^l K'_\mu(x,\xi)\,\omega(x)\,U_1(\xi'-\xi)\,dx\,d\xi \leq \frac{6\sqrt{\lambda_{\mu+1}}}{\lambda_{\mu+1}\sqrt{2\pi}} \longrightarrow 0$$

Zorg door een transformatie $x' = a_1x + a_2$, dat het interval $0-1$ overgaat in $\alpha - \beta$ $\{0 < \alpha < \beta < 1\}$

Kies voor $\omega(x)$: $1, x, x^2, \ldots, x^n \ldots$ zo volgt uit de stelling van Lerch dat de somfunctie van $\sum_1^\infty \left\{\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right\}\varphi_i(\xi)$ de continue functie $K(x,\xi)$ is of m.a.w. $\sum_1^\infty \left\{\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right\}\varphi_i(\xi)$ gaat gelijkmatig naar $K(x,\xi)$

Zij $c_\nu = \int K(x,\xi)\,\varphi_\nu(\xi)\,d\xi = \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$

Volgens de ongelijkheid van Bessel is nu

$$\int K(x,\xi)^2\,d\xi \geq \sum_1^\infty \left\{\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right\}^2$$

Bijgevolg is $T(x) = \sum_1^\infty \frac{\{\varphi_i(x)\}^2}{\lambda_i^2}$ convergent.

Er is echter meer.

Uit $$\sum_1^\infty \left\{\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right\}\varphi_i(\xi) = K(x,\xi)$$ volgt

$$\sum_1^\infty \left\{\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right\}\int K(x,\xi)\,\varphi_i(\xi)\,d\xi = \int K^2(x,\xi)\,d\xi$$

$$\sum_1^\infty \left\{\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right\}^2 = \int K^2(x,\xi)\,d\xi.$$

De somfunctie $T(x)$ is dus een continue functie en alle termen van de reeks zijn positief.

Bijgevolg is $\sum_1^\infty \left\{\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right\}^2$ volgens de stelling van Dini gelijkmatig convergent.

Beschouwen we nu weer

$$\gamma(x) = \sum_{1}^{\infty} \varphi_i(x) \int \frac{\varphi_i(\xi)\, h(\xi)}{\lambda_i}\, d\xi = \sum_{1}^{\infty} a_i\, \varphi_i(x)$$

waarbij $a_i = \int \frac{\varphi_i(\xi)\, h(\xi)}{\lambda_i}\, d\xi = \frac{(h\,\varphi_i)}{\lambda_i} = \frac{h_i}{\lambda_i}$

Volgens de ongelijkheid van Bessel is

$$\sum h_i^2 \leq Nh$$

en vormt $\sum h_i^2$ dus een convergente reeks.

Wij hebben reeds gezien dat

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\{\varphi_i(x)\}^2}{\lambda_i^2} \quad \text{gelijkmatig convergent is.}$$

Volgens de ongelijkheid van Schwarz is

$$\left[\frac{h_n \varphi_n(x)}{\lambda_n} + \ldots \frac{h_m \varphi_m(x)}{\lambda_m} \right]^2 \leq (h_n^2 + \ldots h_m^2) \left[\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_m^2} + \ldots + \frac{\varphi_m^2(x)}{\lambda_m^2} \right.$$

Bijgevolg is $\sum_{1}^{\infty} a_i \varphi_i(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{h_i}{i} \varphi_i(x)$ gelijkmatig convergent. $\quad \leq \epsilon^2 = \{\epsilon(n)\}^2$ en niet $\{\epsilon(n,x)\}^2$

Daar we reeds gezien hebben dat $g(x)$ de somfunctie is van $\gamma(x)$, volgt hieruit dus dat $g(x)$ gelijkmatig te approximeren is door $\gamma(x)$ en dus ontwikkelbaar is in eigenfuncties.

Hoe gaan we nu te werk zo $g(x)$ een willekeurig gegeven functie is?

Zo we bij $g(x)$ een $h(x)$ kunnen vinden, die begrensd en bij gedeelten continu is, zodanig dat $g(x) = \int_0^l K(x,\xi)\, h(\xi)\, d\xi$ zo is $g(x)$ in eigenfuncties ontwikkelbaar.

Welnu, als $K(x,\xi)$ voldoet aan de D.V.

$$A\, K(x,\xi) = U_1(x-\xi)$$

zo voldoet $g(x)$ aan de D.V. $A\, g(x) = h(x)$

Immers:

$$A\, g(x) = \int_0^l A\, K(x,\xi)\, h(\xi)\, d\xi = \int_0^l U_1(x-\xi)\, h(\xi)\, d\xi = h(x)$$

Hiermee hebben we een eenvoudig middel om $h(x)$ te bepalen, waarop we kunnen nagaan of $h(x)$ aan gestelde voorwaarden voldoet.

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
AMSTERDAM (O.)

Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)
te 's-Gravenhage

9e Voordracht: 3 Februari 1954.

Spreker: Prof.Dr S.C. van Veen.

9. Verdere toepassingen van de inverse Laplace-transformatie. Complicaties bij vertakkingspunten.

Wanneer de singulariteiten in een bepaald halfvlak (links van $R(z)=c$) zijn gelegen, en wanneer deze singulariteiten gewone polaire singulariteiten zijn (zoals in het voorbeeld van § 8), dan kunnen wij zonder verdere principiele bezwaren de integraal van Bromwick (29) i.h.a. completeren tot een contourintegraal en de residuenstelling toepassen (mits de integraal over het "kromme" gedeelte van de contour $\longrightarrow 0$).

Essentiele moeilijkheden kunnen optreden bij aanwezigheid van andere singulariteiten, zoals vertakkingspunten, waarbij de te integreren functie niet eenwaardig is in het beschouwde gebied.

Wij willen deze moeilijkheden illustreren aan de hand van het ook voor de toepassingen uiterst belangrijke geval:

$$f(s)= \frac{1}{s}\ e^{-\sqrt{s}} \tag{30}$$

De inversie-integraal van Bromwick (29) levert:

$$F(y)= L^{-1}\left\{ f(s)\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma -\infty i}^{\sigma +\infty i} e^{ys-\sqrt{s}}.\ \frac{ds}{s} \tag{31}$$

De functie $f(s)= \frac{1}{s}\ e^{-\sqrt{s}}$ bezit een vertakkingspunt in $s = 0$. (De twee verschillende waarden voor $\sqrt{s}$ vallen daar samen).

Om de functie $f(s)$ eenwaardig te definieren, schrijven wij als gebruikelijk:

$$s = re^{i\theta}$$

$$\text{en}\quad \sqrt{s} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}\left(\cos\tfrac{\theta}{2} + i \sin\tfrac{\theta}{2}\right). \tag{31}$$

met $-\pi < \theta < +\pi$. Met deze beperking voor θ wordt de functie $\sqrt{s}$ door (31) gedefinieerd als een functie die eenwaardig en analytisch is in alle punten van het eindige complexe vlak, met uitzondering van het negatieve gedeelte van de reele as, met inbegrip van de oorsprong. Omdat $f(s)$ een analytische functie van $\sqrt{s}$ is, is $f(s)$ analytisch in dat zelfde gebied.

Laat σ een willekeurige positieve constante voorstellen.
Voor alle punten s in het halfvlak $Re(s) \geq \sigma$ is $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ dus $\cos\frac{\theta}{2} > \frac{1}{2}\sqrt{2}$

en $$|f(s)| = \frac{1}{|s|}\, e^{-\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}} < \frac{1}{r}\, e^{-\sqrt{\frac{r}{2}}},$$

m.a.w. $r^k|f(s)|$ is begrensd in dit halfvlak voor $k > 1$, zelfs voor iedere constante k, of $f(s) = O(s^{-k})$.

Dus:

$$F(y) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta\to\infty} \int_{\sigma-i\beta}^{\sigma+i\beta} e^{(ys-\sqrt{s})}\, \frac{ds}{s}\,.$$

Nu kiezen wij een gesloten contour, zodanig dat $e^{ys-\sqrt{s}}$ op een binnen deze contour analytisch is. (Het vertakkingspunt s = 0, en de negatieve reele as moet dus buiten de contour worden gesloten). Daartoe kiezen wij de in fig.1 aangegeven contour, die verder geen verklaring behoeft (tenslotte $r_0 \to 0$, $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$).

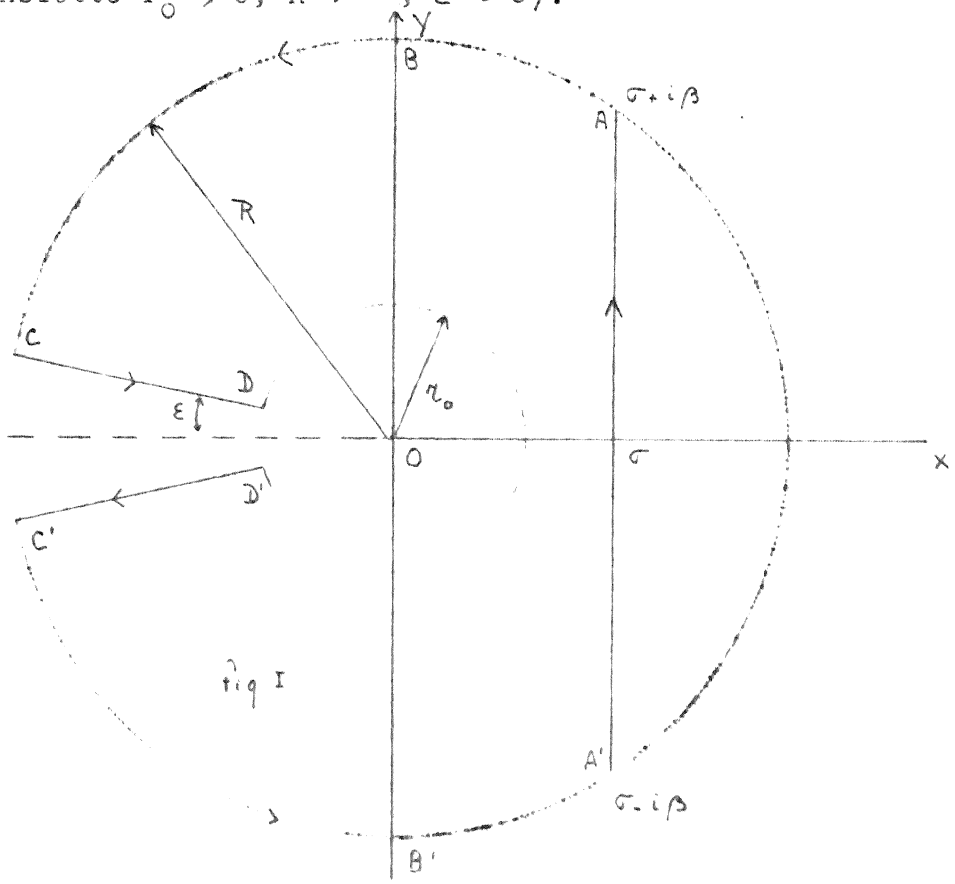


fig 1

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\beta}^{\sigma+i\beta} e^{(ys-\sqrt{s})}\,\frac{ds}{s} + \frac{1}{2\pi i}\,(I_{AC}+I_{CD}+I_{DD'}+I_{D'C'}+I_{C'A'}) = 0$$

(Cauchy) (32).

a) We beschouwen eerst $I_{DD'}$ (over de omtrek van de kleine cirkel)

Hierop is $s = r_o e^{i\theta}$; $\sqrt{s} = \sqrt{r_o}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$. $\pi - \varepsilon > \theta > -\pi + \varepsilon$.

$$I_{DD'} = i \int_{\pi-\varepsilon}^{-\pi+\varepsilon} e^{yr_o e^{i\theta} - \sqrt{r_o}\, e^{i\frac{\theta}{2}}}\, d\theta.$$

Integraal is continue functie van θ en r_o voor $r_o \geq 0$, dus:

$$\lim_{r_o \to 0} I_{DD'} = i \int_{\pi-\varepsilon}^{-\pi+\varepsilon} d\theta = -2(\pi-\varepsilon)i \to -2\pi i \text{ voor } \varepsilon \to 0 \qquad (33)$$

b) I_{CD} en $I_{D'C'}$.

Op CD is $z = re^{i(\pi-\varepsilon)}$ $(r_o < r < R)$ en $\sqrt{z} = r\, e^{i\frac{(\pi-\varepsilon)}{2}}$

dus $z \to -r$; $\sqrt{z} \to +i\sqrt{r}$ voor $\varepsilon \to 0$.

Op D'C' is $z = re^{-i(\pi-\varepsilon)}$, $\sqrt{z} = \sqrt{r}\; e^{-i\frac{(\pi-\varepsilon)}{2}}$

dus voor $\varepsilon \to 0$; $z \to -r$; $\sqrt{z} \to -i\sqrt{r}$.

Dus: (voor $\varepsilon \to 0$)

$$I_{CD} + I_{D'C'} = \int_{R}^{r_o} e^{-yr - i\sqrt{r}}\,\frac{dr}{r} + \int_{r_o}^{R} e^{-yr+i\sqrt{r}}\,\frac{dr}{r}$$

$$= 2i \int_{r_o}^{R} e^{-yz}\,\frac{\sin\sqrt{r}}{r}\,dr$$

dus:

$$\lim_{\substack{r_o \to 0 \\ R \to \infty}} (I_{CD}+I_{D'C'}) = 2i \int_0^{\infty} e^{-yr}\,\frac{\sin\sqrt{r}}{r}\,dr = 4i \int_0^{\infty} e^{-yx^2}\,\frac{\sin x}{x}\,dx \qquad (34)$$

c) $I_{AC} = I_{AB} + I_{BC}$.

Op AB $= \mathrm{Re}(ys - \sqrt{s}) = \mathrm{Re}(y.Re^{i\theta} - \sqrt{R}e^{-i\frac{\theta}{2}}) = y\,R\cos\theta - \sqrt{R}\cos\frac{\theta}{2} < y\sigma$

Dus: $\left|\frac{e^{ys-\sqrt{s}}}{s}\,ds\right| < e^{y\sigma}\,d\theta$.

$$\left|I_{AB}\right| = \left|\int_A^B\right| < e^{y\sigma}\int_{\theta_A}^{\frac{\pi}{2}} = e^{y\sigma}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_A\right) \to 0 \text{ voor } R \to \infty \text{ omdat } \theta_A \to \frac{\pi}{2}.$$

Op BC is $\mathrm{Re}(ys - \sqrt{s}) < y\,R\cos\theta$ (zie boven).

$$\left| I_{BC} \right| < \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{yR\cos\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-yR\sin\varphi} d\varphi \quad (\theta = \tfrac{\pi}{2} + \varphi)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-yR\sin\varphi} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-yR\sin\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{-yR\sin\varphi}\cos\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-yR\sin\varphi} d\varphi$$

$$< \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{-yR\sin\varphi} d\sin\varphi}{\cos\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-yR\sin\frac{\pi}{3}}\, d\varphi$$

$$= 2\left[\frac{e^{-yR\sin\varphi}}{-yR}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + e^{-\frac{1}{2}yR\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$$

$$= \frac{2}{yR}\left(1 - e^{-\frac{yR}{2}\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6} e^{-\frac{1}{2}yR\sqrt{3}} \to 0 \text{ voor } R \to \infty \ (y > 0) \qquad (35)$$

Wij willen hierbij opmerken, dat de laatste redenering een belangrijke vereenvoudiging is van het in de klassieke literatuur bekende bewijs van het "lemma van Jordan".

Het is gemakkelijk in te zien, dat voor $I_{C'A'}$ dezelfde redenering geldt, met hetzelfde resultaat.

Dus

$$\left| I_{C'A'} \right| \to 0 \quad \text{voor } R \to \infty. \qquad (35')$$

Uit (32), (33), (34), (35) en (35') volgt tenslotte voor $r_o \to 0$, $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$

$$F(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{ys - \sqrt{s}}\, \frac{ds}{s} = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-yx^2} \frac{\sin x}{x}\, dx. \qquad (36)$$

Hierdoor is F(y) teruggebracht tot een andere (weliswaar reele) integraal. Ook deze laatste integraal is niet te berekenen in een eindige vorm, maar te herleiden tot een andere, die getabelleerd is.

Als volgt:

$$\int_0^{\infty} e^{-yx^2} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{\infty} e^{-yx^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} e^{-yx^2} x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, y^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2n} du$$

$(yx^2 = u^2)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, y^{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2^n} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{(part.integratie!)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \frac{1}{(4y)^n} \qquad (37)$$

Anderzijds is:

$$\int_0^1 e^{-\frac{w^2}{4y}}\, dw = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n}}{n!(4y)^n}\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \frac{1}{(4y)^3} \qquad (38)$$

Uit (37) en (38) volgt:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-yx^2} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \int_0^1 e^{-\frac{w^2}{4y}}\, dw = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{y}}} e^{-x^2} dx$$

$$= \text{erf.}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right).$$

Dus tenslotte is:

$$F(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{ys - \sqrt{s}} \frac{ds}{s} = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-yx^2} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$$= 1 - \text{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) = \text{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right).$$

De functies erf(x) en erfc(x) zijn uitvoerig getabelleerd.

In de pas verschenen "Noordhoff's Wiskundige tafels in 5 dec." van P. Wijdenes (Noordhoff 1953) vindt men op pag. 261 een tafel voor de "error-integral"

$$H(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

voor x = 0,0(0,01)2,5. Voor x $\geq$ 2,5 is H(x) $\sim$ 1.

2e Boerhaavestraat 49
TELEFOON 51660 - 56643
AMSTERDAM-O.

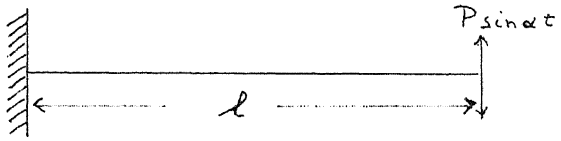
Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)
te 's-Gravenhage

10e Voordracht: 17 Februari 1954.

Spreker : Ir R.W. Trense.

Als toepassing van de ontwikkelde theorie der eigenfuncties, eigenwaarden en Eigentransformaties zullen we een tweetal vraagstukken bekijken. Het eerste zal ter vergelijking der methoden eerst op klassieke wijze worden opgelost en daarna met Eigentransformaties.

1. Een aan een zijde ingeklemde balk wordt aan de vrije zijde onderworpen aan een periodieke kracht $P \sin \alpha t$



De Eigenfuncties voldoen aan de integraalvergelijking :

$$Y_i(x) = \frac{m\omega_i^2}{6EI} \int_0^{\ell} G(x,\xi)\, Y_i(\xi)\, d\xi$$

Voor de gedwongen beweging kunnen we in het stationaire geval, dat $Y(x,t) = Y(x)\sin\alpha t$ de vergelijking opstellen:

$$Y(x)\sin\alpha t = \frac{1}{6EI} \int_0^{\ell} G(x,\xi)\, P\, U_1(1-\xi)\sin\alpha t\, d\xi + \frac{m\alpha^2}{6EI} \int_0^{\ell} G(x,\xi)\, Y(\xi)\sin\alpha t\, d\xi$$

waaruit:

$$Y(x) = \frac{G(x,1)P}{6EI} + \frac{\alpha^2}{\omega^2} \frac{m\omega^2}{6EI} \int_0^{\ell} G(x,\xi)\, Y(\xi)\, d\xi$$

Stellen we $\frac{G(x,1)P}{6EI} = \sum_1^{\infty} a_i Y_i(x)$

en tegelijkertijd

$$Y(x) = \sum_1^{\infty} b_i Y_i(x)$$

In de integraalvergelijking gesubstitueerd ontstaat de identiteit :

$$\sum_1^{\infty} b_i Y_i(x) \equiv \sum_1^{\infty} a_i Y_i(x) + \sum_1^{\infty} \frac{\alpha^2}{\omega^2} b_i Y_i(x)$$

waaruit

$$b_i\left(1 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right) = a_i \longrightarrow b_i = \frac{a_i}{1 - \frac{\alpha^2}{\omega_i^2}}$$

Zodra we dus de ontwikkelingscoëfficiënt a_i bepaald hebben is het vraagstuk als opgelost te beschouwen.
Voor de berekening van a_i putten we allereerst de volgende gegevens uit de tweede vorrdracht

$$\frac{G(x,l)P}{6EI} = \frac{P}{6EI}(3lx^2 - x^3)$$

$$\frac{m\omega^2}{6EI} = \frac{k^4}{6} \longrightarrow k = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2}{EI}}$$

$$Y_i(x) = c\ (\cosh k_i x - \cos k_i x) - \frac{\sinh k_i l - \sin k_i l}{\cosh k_i l + \cos k_i l}(\sinh k_i x - \sin k_i x)$$

met als voorwaarde

$$\cosh k_i l \cos k_i l + 1 = 0$$

Zoals in de vierde voordracht stellen we

$\sigma_1(kx) = \sinh kx - \sin kx$, $\sigma_2(kx) = \cosh kx - \cos kx$
$\sigma_3(kx) = \sinh kx + \sin kx$; $\sigma_4(kx) = \cosh kx + \cos kx$

$$\frac{d\sigma_1(kx)}{dx} = k\sigma_2(kx)\ ; \quad \frac{d\sigma_2(kx)}{dx} = k\sigma_3(kx)\ ; \quad \frac{d\sigma_3(kx)}{dx} = k\sigma_4(kx)\ ;$$

$$\frac{d\sigma_4(kx)}{dx} = k\sigma_1(kx)$$

zodat

$$Y_i(x) = \frac{c}{\sigma_4(k_i l)}\left\{\sigma_4(k_i l)\,\sigma_2(k_i x) - \sigma_1(k_i l)\,\sigma_1(k_i x)\right\}$$

met als voorwaarde

$$\sigma_4^{\,2}(k_i l) = \sigma_1(k_i l)\ \sigma_3(k_i l)$$

Ons eerste werk zal zijn om deze functie te normeren. Daarbij zullen we gebruik maken van de volgende eigenschappen der functies σ

$$\sinh 2kl - \sin 2kl = \sigma_1(kl)\,\sigma_4(kl) + \sigma_2(kl)\,\sigma_3(kl)$$

$$\sinh 2kl + \sin 2kl = \sigma_1(kl)\,\sigma_2(kl) + \sigma_3(kl)\,\sigma_4(kl)$$

$$2\sigma_2(kl)\,\sigma_4(kl) - \sigma_3^{\,2}(kl) - \sigma_1^{\,2}(kl) = 0$$

$$\int_0^l \sigma_1(kx)\,\sigma_2(kx) = \frac{1}{2k}\,\sigma_1^{\,2}(kl)$$

$$\int_0^l \sigma_1^{\,2}(kx)\,dx = \frac{1}{k}\,\sigma_1(kl)\sigma_4(kl) - \int_0^l (\cosh^2 kx - \cos^2 kx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{k}\,\sigma_1(kl)\,\sigma_4(kl) - \frac{1}{4k}(\sinh 2kl - \sin 2kl) =$$

$$= \frac{3}{4k}\,\sigma_1(kl)\,\sigma_4(kl) - \frac{1}{4k}\,\sigma_2(kl)\,\sigma_3(kl)$$

$$\int_0^l \sigma_2^{\,2}(kx)\,dx = \frac{1}{k}\,\sigma_1(kl)\,\sigma_2(kl) - \int_0^l (\sinh^2 kx - \sin^2 kx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{k}\,\sigma_1(kl)\,\sigma_2(kl) - \frac{1}{4k}(\sinh 2kl + \sin 2kl) + l$$

$$= \frac{3}{4k}\sigma_1(kl)\,\sigma_2(kl) - \frac{1}{4k}\sigma_3(kl)\,\sigma_4(kl) + 1.$$

$$\int_0^l \{\sigma_4(kl)\,\sigma_2(kx) - \sigma_1(kl)\,\sigma_1(kx)\}^2\,dx =$$

$$= \frac{3}{4k}\sigma_4^2(kl)\,\sigma_1(kl)\,\sigma_2(kl) - \frac{1}{4k}\sigma_4^3(kl)\,\sigma_3(kl) + 1\sigma_4^2(kl) -$$

$$- \frac{1}{k}\sigma_1^3(kl)\,\sigma_4(kl) + \frac{3}{4k}\sigma_1^3(kl)\,\sigma_4(kl) - \frac{1}{4k}\sigma_1^2(kl)\,\sigma_2(kl)\,\sigma_3(kl) =$$

$$= \frac{3}{4k}\sigma_4^2(kl)\,\sigma_1(kl)\,\sigma_2(kl) - \frac{1}{4k}\sigma_4(kl)\,\sigma_1(kl)\,\sigma_3^2(kl) + 1\,\sigma_4^2(kl) -$$

$$- \frac{1}{4k}\sigma_1^3(kl)\,\sigma_4(kl) - \frac{1}{4k}\sigma_4^2(kl)\,\sigma_1(kl)\,\sigma_2(kl) =$$

$$= \frac{1}{4k}\sigma_1(kl)\,\sigma_4(kl)\{2\sigma_2(kl)\,\sigma_4(kl) - \sigma_3^2(kl) - \sigma_1^2(kl)\} + 1\,\sigma_4^2(kl) =$$

$$= 1\,\sigma_4^2(kl).$$

Bijgevolg moet $c^2 l = 1$ zijn, zodat $c = \frac{1}{\sqrt{l}}$

De genormeerde eigenfuncties luiden dus:

$$Y_i(x) = \frac{1}{(\sqrt{l})\,\sigma_4(k_i l)}\{\sigma_4(k_i l)\,\sigma_2(k_i x) - \sigma_1(k_i l)\,\sigma_1(k_2 x)\}$$

Bepaling van a_i.

Door herhaalde partiële integratie vinden we

$$\int_0^l x^2\{\sigma_4(kl)\,\sigma_2(kx) - \sigma_1(kl)\,\sigma_1(kx)\}\,dx =$$

$$= \frac{2}{k^3}\{\sigma_4(kl)\,\sigma_3(kl) - \sigma_1(kl)\,\sigma_2(kl)\}$$

$$\int_0^l x^3\{\sigma_4(kl)\,\sigma_2(kx) - \sigma_1(kl)\,\sigma_1(kx)\}\,dx =$$

$$= \frac{6l}{k^3}\{\sigma_4(kl)\,\sigma_3(kl) - \sigma_1(kl)\,\sigma_2(kl)\} -$$

$$- \frac{6}{k^4}\{\sigma_4(kl)\,\sigma_2(kl) - \sigma_1^2(kl)\}$$

$$a_i = \int_0^l \frac{P}{6EI}(3lx^2 - x^3)\,Y_i(x)\,dx =$$

$$= \frac{P}{6EI\sqrt{l}.\sigma_4(k_i l)} \cdot \frac{6}{k_i^4}\{\sigma_4(k_i l)\,\sigma_2(k_i l) - \sigma_1^2(k_i l)\} =$$

$$= \frac{P}{m\omega_i^2\sqrt{l}} \cdot \frac{2\sinh k_i l \sin k_i l}{\cosh k_i l + \cos k_i l}$$

$$b_i = \frac{2P}{m\sqrt{l}(\omega_i^2 - \alpha^2)} \cdot \frac{\sinh k_i l \sin k_i l}{\cosh k_i l + \cos k_i l}$$

waarmee het vraagstuk dus opgelost is.

We zullen nu hetzelfde vraagstuk trachten op te lossen met behulp van de aan het vraagstuk aangepaste eigentransformatie.
We definiëren de Eigentransformatie :

$$\mathcal{E}\{Y(x)\} = y(n) = \int_0^{\ell} \{\sigma_4(k_\mu l)\,\sigma_2(k_\mu x) - \sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_1(k_\mu x)\}\; Y(x)\; dx$$

en de inverse transformatie

$$\mathcal{E}^{-1}\{y(n)\} = \sum \frac{1}{\sigma_n(kl)\sqrt{1}}\; y(n)\{\sigma_4(kl)\,\sigma_2(k_\mu x) - \sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_1(k_\mu x)\}$$

$$\mathcal{E}\{Y^{(4)}(x)\} = \int_0^{\ell} \{\sigma_4(k_\mu l)\,\sigma_2(k_\mu x) - \sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_1(k_\mu x)\}\, d\, Y^{(3)}(x) =$$

$$= \left[Y^{(3)}(x)\{\sigma_4(k_\mu l)\,\sigma_2(k_\mu x) - \sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_1(k_\mu x)\}\right]_0^{\ell} -$$

$$- k_\mu \int_0^{\ell} \{\sigma_4(k_\mu l)\,\sigma_3(k_\mu x) - \sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_2(k_\mu x)\}\, d\, Y^{(2)}(x) =$$

$$= \left[-k_\mu Y^{(2)}(x)\{\sigma_4(k_\mu l)\,\sigma_3(k_\mu x) - \sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_2(k_\mu x)\}\right]_0^{\ell} +$$

$$+ k_\mu^2 \int_0^{\ell} \{\sigma_4(k_\mu l)\,\sigma_4(k_\mu x) - \sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_3(k_\mu x)\}\, d\, Y^{1}(x) =$$

$$= \left[k_\mu^2\, Y(x)\{\sigma_4(k_\mu l)\,\sigma_4(k_\mu x) - \sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_3(k_\mu x)\}\right]_0^{\ell} - -$$

$$- k_\mu^3 \int_0^{\ell} \{\sigma_4(k_\mu l)\,\sigma_1(k_\mu x) - \sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_4(k_\mu x)\}\, dY(x) =$$

$$= \left[-k_\mu^3\, Y(x)\{\sigma_4(k_\mu l)\,\sigma_1(k_\mu x) - \sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_4(k_\mu x)\}\right]_0^{\ell} +$$

$$+ k_\mu^4 \int_0^{\ell} \{\sigma_4(k_\mu l)\,\sigma_2(k_\mu x) - \sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_1(k_\mu x)\} Y(x)\, dx =$$

$$= k_\mu^4\, \mathcal{E}\{Y(x)\}\ .$$

De differentiaalvergelijking , die aequivalent aan de integraalvergelijking voor het beschouwde belastingsgeval op te stellen is , luidt:

$$\frac{\partial^4 Y(x,t)}{\partial x^4} = \frac{P\, U_1(x-1)\sin\alpha t}{EI} - \frac{m}{EI}\,\frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial t^2}$$

Zij $Y(x,t) = Y(x)\sin\alpha t$
Door substitutie in de differentiaalvergelijking en na deling door $\sin\alpha t$, ontstaat :

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} = \frac{P\, U_1(x-1)}{EI} + \frac{m\alpha^2}{EI}\, Y(x)$$

Een eigentransformatie toepassend, krijgen we daar

$$\mathcal{E}\{U_1(x-1)\} = \sigma_4(k_\mu l)\,\sigma_2(k_\mu l) - \sigma_1^2(k_\mu l)$$

uit de differentiaalvergelijking:

$$\left\{k_\mu^4 - \frac{m\alpha^2}{EI}\right\}\mathcal{E}\{Y(x)\} = \frac{\sigma_4(k\,l)\,\sigma_2(k\,l) - \sigma_1^2(k\,l)}{EI}$$

$$\left(\frac{m\,\omega_\mu^2}{EI} - \frac{m\alpha^2}{EI}\right) y(n) = \frac{2\sinh(k_\mu l)\sin(k_\mu l)}{EI}$$

$$y(n) = \frac{2\sinh k_\mu l \sin k_\mu l}{m\omega_\mu^2 - m\alpha^2}$$

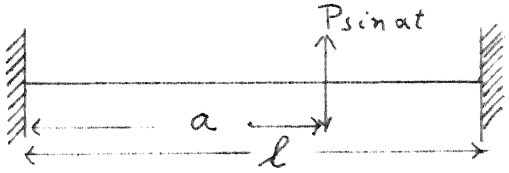
waarne inverse transformatie voert tot:

$$Y(x) = \sum \frac{2\sinh k_\mu l \sin k_\mu l}{m(\omega_\mu^2 - \alpha^2)\,\sigma_4(k_\mu l)\sqrt{1}}\left\{\sigma_4(k_\mu l)\,\sigma_2(k_\mu x) - \sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_1(k_\mu x)\right\}$$

2. Een tweede toepassing is de bepaling van de gedwongen trilling van een aan weerszijden ingeklemde balk, die in het punt a, belast wordt door een periodieke kracht

P sin αt.

De genormeerde eigenfunctie luidt voor dit geval:



$$Y_\mu(x) = \frac{1}{\sigma_1(k_\mu l)\sqrt{1}}\left\{\sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_2(k_\mu x) - \sigma_2(k_\mu l)\,\sigma_1(k_\mu x)\right\}$$

met als voorwaarde : $\sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_3(k_\mu l) = \sigma_2^2(k_\mu l)$

$$\mathcal{E}\{Y(x)\} = y(n) = \int_0^\ell \left\{\sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_2(k_\mu x) - \sigma_2(k_\mu l)\,\sigma_1(k_\mu x)\right\} Y(x)\,dx$$

In verband met de randvoorwaarden is door herhaalde partiële integratie als in het eerste voorbeeld aan te tonen, dat

$$\mathcal{E}\{Y^{(4)}(x)\} = k_\mu^4\,\mathcal{E}\{Y(x)\}$$

verder is

$$\mathcal{E}\{U_1(x-a)\} = \sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_2(k_\mu a) - \sigma_2(k_\mu l)\,\sigma_1(k_\mu a)$$

De differentiaalvergelijking, die voor dit geval geldt,

$$\frac{\partial^4 Y(x,t)}{\partial x^4} = \frac{P\,U_1(x-a)\sin\alpha t}{EI} - \frac{m}{EI}\,\frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial t^2}$$

is door de susbstitutie $Y(x,t)=Y(x)\sin\alpha t$ om te zetten in:

$$\frac{d^4Y(x)}{dx^4} = \frac{P\,U_1(x-a)}{EI} + \frac{m\alpha^2}{EI}\,Y(x)$$

Door middel van een eigentransformatie krijgt men hieruit

$$\left\{k_\mu^4 - \frac{m\alpha^2}{EI}\right\}\mathcal{E}\{Y\} = \frac{\sigma_1(k_\mu l)\,\sigma_2(k_\mu a) - \sigma_2(k_\mu l)\,\sigma_1(k_\mu a)}{EI}$$

Korten we de commutatieve uitdrukking ab-ba af door $[a,b]$ zo krijgen we

$$\left\{\frac{m\omega_\mu^2}{EI} - \frac{m\alpha^2}{EI}\right\} Y(n) = \frac{[\sigma_1(k_\mu l), \sigma_2(k_\mu a)]}{EI}$$

waarbij de teller van het rechter lid een commutator is t.a.v. de indices 1 en 2

$$y(n) = \frac{[\sigma_1(k_\mu l), \sigma_2(k_\mu a)]}{m(\omega_\mu^2 - \alpha^2)}$$

Inverse transformerend krijgen we tenslotte

$$Y(x) = \sum \frac{[\sigma_1(k_\mu l), \sigma_2(k_\mu a)]}{m(\omega^2 - \alpha^2)\, \sigma_1(k_\mu l)\sqrt{l}} \left[\sigma_1(k_\mu l), \sigma_2(k_\mu x)\right]$$

3. Daar Laplacetransformaties lineaire transformaties zijn, ontstaat door Laplacetransformatie van een Hilbertse functie ruimte weer een Hilbertse functie ruimte.
Uit een orthonormale basis behoeft hierbij geen orthonormale basis te ontstaan. Een scheve basis is echter wel altijd te orthogonaliseren en te normeren.
Dit zullen we aan de hand van een voorbaald demonstreren.

Uit $\sin \frac{n\pi x}{l}$ ontstaat door Laplace transformatie

$$f_n(s) = \frac{n\pi}{l} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{n^2\pi^2}{l^2}}$$

Kiezen we als integratieweg, de positieve helft van de reële as, zo wordt het inwendige product van $f_n(s)$ en $f_m(s)$

$$\left(f_n(s), f_m(s)\right) = \int_0^\infty f_n(s)\, f_m(s)\, ds =$$

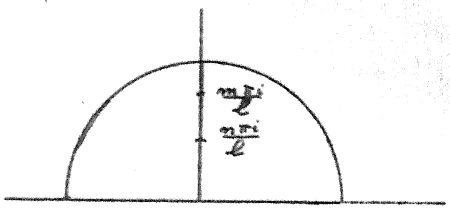
$$= \tfrac{1}{2} \frac{nm\pi^2}{l^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\left(s^2 + \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)\left(s^2 + \frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)}$$

en de norm van $f_n(s)$

$$N f_n(s) = \int_0^\infty f_n^2(s)\, ds = \tfrac{1}{2} \frac{n^2\pi^2}{l^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{\left(s^2 + \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)^2}$$

Beide integralen zijn te bepalen door in de bovenste helft van het coördinatenvlak van Gausz langs een gesloten baan te integreren en wel langs de reële as en de oneindige halfcirkel. Daar de integraal langs de oneindige halfcirkel nul oplevert, is de integraal langs de reële as gelijk aan de algebraïsche som der residuen behorende bij de polen die

zich binnen de integratieweg bevinden.



$$(f_n(s), f_m(s)) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{nm\pi^2}{l^2}\,\frac{l^2}{m^2-n^2}\,\frac{1}{2\pi^3 i}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}\,\frac{1}{s-\frac{n\pi i}{l}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{m}\,\frac{1}{s-\frac{m\pi i}{l}} + \frac{c}{s+\frac{n\pi i}{l}} + \frac{D}{s+\frac{m\pi i}{l}}\right\} ds =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{nm\pi^2}{l^2}\,\frac{l^3}{m^2-n^2}\,\frac{2\pi i}{2\pi^3 i}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2(m+n)}$$

Ter bepaling van $N f_n(s)$ stellen we

$$\left.\begin{aligned} s - \frac{n\pi i}{l} &= k \\ s + \frac{n\pi i}{l} &= k + \frac{2n\pi i}{l} \end{aligned}\right\} \qquad s^2 + \frac{n^2\pi^2}{l^2} = k\left(k + \frac{2n\pi i}{l}\right)$$

$$\left(\frac{1}{s^2 + \frac{n^2\pi^2}{l^2}}\right)^2 = \frac{-l^2}{4\pi^2 n^2}\,\frac{1}{k^2\left(1-\frac{lki}{2n\pi}\right)^2} =$$

$$= \frac{-l^2}{4\pi^2 n^2 k^2}\left\{1 + 2\,\frac{lki}{2n\pi} + 3\left(\frac{lki}{2n\pi}\right)^2 \cdots\cdots\right\}$$

$$N f_n(s) = \frac{n^2\pi^2}{2l^2}\,2\pi i\,\frac{-l^3 i}{4\pi^3 n^3} = \frac{1}{4n}$$

Men kan nu op volgende wijze een orthonormering tot stand brengen

Zij $\psi_1(s) = \frac{2}{\sqrt{l}} f_1(s) \quad \dashrightarrow \quad N\psi_1 = 1$

Zij $\psi_2(s) = a_1 f_1(s) + a_2 f_2(s)$

$$(\psi_1, \psi_2) = \frac{2a_1}{\sqrt{l}} N f_1 + \frac{2a_2}{\sqrt{l}}(f_1, f_2) = 0$$

$$\frac{1}{4} a_1 + \frac{1}{6} a_2 = 0$$

$$N\psi_2 = a_1^2 N f_1 + 2a_1 a_2 (f_1, f_2) + a_2^2 N f_2 = 1$$

$$\frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{6} 2a_1 a_2 + \frac{1}{8} a_2^2 = 1$$

Als oplossing van beide vergelijkingen krijgen we:

$$a_1 = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{l}} \quad ; \quad a_2 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{l}}$$

$$\psi_2(s) = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{l}}\left\{2f_1(s) - 3f_2(s)\right\}$$

of $\psi_2(s) = -\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}}\left\{2f_1(s) - 3f_2(s)\right\}$.

Onze keuze valt op de eerste ontwikkeling van $\psi_2(s)$

Zij $\psi_3(s) = b_1f_1(s) + b_2f_2(s) + b_3f_3(s)$

$(\psi_1, \psi_3) = 0$ voert tot $6b_1 + 4b_2 + 3b_3 = 0$

$(\psi_2, \psi_3) = 0$ tot $5b_2 + 6b_3 = 0$

en $N\psi_3 = 1$ tot

$$\frac{1}{4}b_1^2 + \frac{1}{8}b_2^2 + \frac{1}{12}b_3^2 + \frac{1}{3}b_1b_2 + \frac{1}{4}b_1b_3 + \frac{1}{5}b_2b_3 = 1$$

Met als oplossing

$$b_1 = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{1}}, \quad b_2 = -\frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{1}}, \quad b_3 = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{1}}$$

$$\psi_3(s) = \pm\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1}}\left\{3f_1(s) - 12f_2(s) + 10f_3(s)\right\} \quad \text{etc.}$$

4. Gaan we de Laplacetransformatie na van een Dirac functie, teneinde te concluderen of ook een inverse transformatie van de resultaat functie mogelijk is.

Zij

$$F(t,a) = \frac{1}{\sqrt{a\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{a}}$$

De dubbelzijdige Laplace transformatie hiervan is

$$f(s,a) = \frac{1}{\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\, e^{-\frac{t^2}{a}}\, dt =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{4}as^2}\sqrt{a}}{\sqrt{a\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2+ast+\frac{a^2s^2}{a}}{a}}\, d\left(\frac{t+\frac{1}{2}as}{\sqrt{a}}\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{4}as^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(t+\frac{1}{2}as)^2}{\sqrt{a}}}\, d\left(\frac{t+\frac{1}{2}as}{\sqrt{a}}\right)$$

Zij $\frac{t + \frac{1}{2}as}{\sqrt{a}} = \tau$

$$f(s,a) = \frac{e^{\frac{1}{4}as^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2}\, d\tau = \frac{e^{\frac{1}{4}as^2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = e^{\frac{1}{4}as^2}$$

Laten we a tot nul naderen zo blijkt de transformatie 1 op te leveren. Bij een integratie van $0 \to \infty$ denken we ons de top van de klokfuntie van Gausz in 0^+. Na de limietovergang $a \to 0$ krijgt men dan hetzelfde resultaat.

Gaan we de inverse transformatie na van $e^{\frac{1}{4}as^2}$.

$$L^{-1}\left\{e^{\frac{1}{4}as^2}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}\, e^{\frac{1}{4}as^2} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{t^2}{a}}}{2\,i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\frac{\frac{1}{4}as^2+ast+t^2}{a}}\, ds =$$

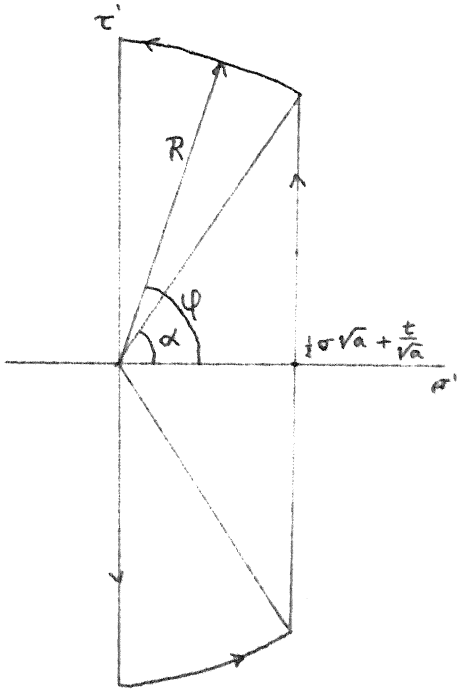
$$= \frac{2}{\sqrt{a}}\,\frac{e^{-\frac{t^2}{a}}}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{(\frac{1}{2}s\sqrt{a}+\frac{t}{a})^2}\, d(\tfrac{1}{2}s\sqrt{a}+\frac{t}{\sqrt{a}})$$

Zij $\frac{1}{2}s\sqrt{a}+\frac{t}{\sqrt{a}} = s' = \sigma' + i\tau$

$$L^{-1}\left\{e^{\frac{1}{4}as^2}\right\} = \frac{e^{-\frac{t^2}{a}}}{i\sqrt{a}}\int_{\frac{1}{2}\sigma\sqrt{a}+\frac{t}{\sqrt{a}}-i\infty}^{\frac{1}{2}\sigma\sqrt{a}+\frac{t}{\sqrt{a}}+i\infty} e^{(s')^2}\, ds' = \frac{1}{i\sqrt{a\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau')^2} i\, d\tau'$$

$$= \frac{e^{-\frac{t^2}{a}}}{\sqrt{a\pi}} .$$

We hebben de integratie-rechte verschoven naar de imaginaire as.
We zullen aantonen dat dit geoorloofd is.
Bekijken we hiertoe de integratie langs
een weg als in de figuur aangegeven.
Binnen de integratieweg bezit de integrand
geen singulariteiten zodat de kringintegraal
gelijk is aan nul.
Voor de gedeelten langs de cirkelbogen krijgen
we



$$\left| \int_{\alpha}^{\pi/2} e^{R^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2}\, Rie^{i\varphi}\, d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi-\alpha} e^{R^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2}\, Rie^{i\varphi}\, d\varphi \right| <$$

$$< \int_{\alpha}^{\pi/2} \left| e^{R^2\cos 2\varphi + iR^2\sin 2\varphi} \right| \left| Rie^{i\varphi} \right| d\varphi +$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi-\alpha} \left| e^{R^2\cos 2\varphi + iR^2\sin 2\varphi} \right| \left| Rie^{i\varphi} \right| d\varphi =$$

$$= \int_{\alpha}^{\pi/2} e^{R^2\cos 2\varphi}\, Rd\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi-\alpha} e^{R^2\cos 2\varphi}\, Rd\varphi < 2Re^{R^2\cos 2\varphi}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) =$$

$$= \frac{(\pi - 2\alpha)R}{e^{R^2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}}$$

Nu denken we ons $\frac{1}{2}\sigma\sqrt{a} + \frac{t}{\sqrt{a}}$ bij het aangroeien van t zodanig oneindig worden dat $\alpha > 45^\circ$ blijft.

Maar dan is $$\lim_{R\to\infty} \frac{(\pi - 2\alpha)R}{e^{R^2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)}} = 0$$

De toegepaste verschuiving is hiermee dan gerechtvaardigd.
We zien dus dat

$$L^{-1}\{f(s,a)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}\, e^{as^2}\, ds = F(t,a)$$

Differentieren we links en rechts p x naar t zo krijgen we

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}\, s^p\, e^{as^2}\, ds = \frac{d^p}{dt^p}\{F(t,a)\}$$

Laten we $a \to 0$ naderen zo ontstaat het resultaat waar we reeds eerder mee gewerkt hebben

$$L^{-1}\left[s^p\right] = U_{p+1}(t)$$

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
TELEFOON 51660 - 56643
AMSTERDAM-O.

Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)

te 's-Gravenhage

11e Voordracht: 3 Maart 1954.

Spreker: Prof.Dr. R.Timman.

Toepassingen van de transformatie van Laplace op partiële differentiaalvergelijkingen.

Wij zullen enkele randwaardenproblemen behandelen uit de theorie der partiële differentiaalvergelijkingen en wel van de warmtegeleidingsvergelijking en van de golfvergelijking.

1. De vergelijking van de warmtegeleiding.

1.1 Wij duiden de temperatuur in het punt x van een homogene staaf met lengte 1 op het tijdstip t aan door $U(x,t)$ $0 \leq x \leq 1$.
Als nog in de staaf warmtebronnen ter sterkte $Q(x,t)$ aanwezig zijn, geldt voor $U(x,t)$ de vergelijking

$$U_{xx} - U_t = -Q(x,t).$$

Op het ogenblik t=0 zij de temperatuurverdeling

$$U(x,0) = U_o(x) \qquad 0 < x < 1.$$

De randvoorwaarden zijn

$$\alpha_o\, U(0^+,t) + \beta_o\, U_x(0^+,t) = A_o(t).$$
$$\alpha_1\, U(1^-,t) + \beta_1\, U_x(1^-,t) = A_1(t)$$

Hierbij wordt de eis gesteld, dat de temperatuurverdeling continu aansluit bij de beginvoorwaarden en de randwaarden.
De coëfficiënten α en β hangen met de warmteoverdrachtscoëfficiënten aan de uiteinden samen.
Om dit algemene probleem met behulp van de transformatie van Laplace op te kunnen lossen, moeten wij veronderstellen, dat het uitvoeren van de transformatie verwisselbaar is met de differentiaties en met de limietovergangen aan de rand.
Voeren wij nu in

$$\int_0^\infty e^{-st}\, U(x,t)dt = u(x,s) \quad , \qquad \int_0^\infty e^{-st} A_i(t)dt = a_i$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\, q(x,t)dt = q(x,s)$$

dan gaat de vergelijking over in de volgende differentiaalverg. voor u

$$\frac{d^2u}{dx^2} - su = - q(x,s) - U_o(x).$$

en de randvoorwaarden in

$$\alpha_o \bar{u}(0,s) + \beta_o \bar{u}_x(0,s) = a_o(s)$$
$$\alpha_1 \bar{u}(1,s) + \beta_1 \bar{u}_x(1,s) = a_1(s)$$

Wij zullen voorlopig dit probleem niet in zijn volle algemeenheid behandelen, maar eerst enkele bijzondere gevallen beschouwen.

1.2. Temperatuur in een staaf met voorgeschreven eindtemperaturen.

Denk, dat de staaf geen warmtebronnen bevat en dat de begintemperatuur 0 is.
Verder hebben de randcondities de vorm:

$$U(0^+,t) = 0 \qquad t > 0.$$
$$U(1^-,t) = 1$$

Het getransformeerde probleem wordt

$$\frac{d^2u}{dx^2} - su = 0$$

$$\bar{u}(0^+,s) = 0$$
$$\bar{u}(1^-,s) = \frac{1}{s}.$$

De oplossing van dit probleem is direct aan te geven

$$u(x,s) = \frac{\sinh x\sqrt{s}}{s \sinh \sqrt{s}}$$

en de temperatuurverdeling zal gevonden worden door terug te transformeren. Wij kunnen dit op verschillende manieren doen en elke manier levert ons een oplossing, die bepaalde voordelen heeft.
Allereerst merken wij op dat

$$u(x,s) = \frac{\sinh x\sqrt{s}}{s \sinh \sqrt{s}} = \sum_0^\infty \left\{ \frac{e^{-(2n+1-x)\sqrt{s}}}{s} - \frac{e^{-(2n+1+x)\sqrt{s}}}{s} \right\}$$

zodat de vroeger berekende inversie-integraal juist van pas komt.

$$L\left\{\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = \frac{1}{s} e^{-\alpha\sqrt{s}}, \quad \text{waarbij } \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\lambda^2} d\lambda$$

Term voor term terugtransformeren geeft

$$U(x,t) = \sum_0^\infty \left[\operatorname{erfc} \frac{2n+1-x}{2\sqrt{t}} - \operatorname{erfc} \frac{2n+1+x}{2\sqrt{t}} \right] =$$
$$= \sum_0^\infty \left[\operatorname{erf} \frac{2n+1+x}{2\sqrt{t}} - \operatorname{erf} \frac{2n+1-x}{2\sqrt{t}} \right].$$

Het is gemakkelijk aan te tonen, dat deze reeks inderdaad aan alle voorwaarden voldoet.
Allereerst is de reeks

$$U(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{0}^{\infty} \int_{\frac{2n+1-x}{2\sqrt{t}}}^{\frac{2n+1+x}{2\sqrt{t}}} e^{-\lambda^2} d\lambda .$$

samen met haar partiële afgeleiden voor $t > 0$ gelijkmatig convergent.
Voor $t \to 0$ nadert de som van de reeks tot nul,
voor $x \to 0$ nadert elke term tot nul en dus ook de som,
voor $x \to 1$ krijgen wij

$$U(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{0}^{\infty} \int_{\frac{2n}{2\sqrt{t}}}^{\frac{2n+1}{2\sqrt{t}}} e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = 1.$$

De hier gegeven vorm is uitstekend geschikt voor de berekening van de temperatuur voor kleine t, daar de reeks dan zeer snel convergeert.
Een andere vorm krijgen we door de functie

$$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh\sqrt{s}} = \frac{x\sqrt{s} + \frac{(x\sqrt{s})^3}{3!} + \dots}{\sqrt{s} + \frac{(\sqrt{s})^3}{3!} + \dots} = \frac{x + \frac{x^3 s}{3!} + \dots}{1 + \frac{s}{3!} + \dots}$$

te beschouwen als het quotiënt van twee machtreeksen in s, door in teller en noemer dezelfde tak van $\sqrt{s}$ te nemen, $u(x,s)$ is overal regulier behalve in $s=0$ en de overige nulpunten van $\sinh\sqrt{s}$, dus $s = -n^2\pi^2$.
Wij passen nu de omkeerstelling toe op deze functie en krijgen:

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st} \sinh x\sqrt{s}}{s \sinh\sqrt{s}} ds \quad \text{waarbij } \gamma > 0 \text{ is.}$$

Wij berekenen eerst formeel de inverse functie, die hierbij behoort en verifiëren dan later, dat deze inderdaad aan alle voorwaarden voldoet.
De polen van de getransformeerde functie zijn $s = -n^2\pi^2$ $\quad n > 1$
en de residuen in deze polen zijn

$$2\, e^{-n^2\pi^2 t} \frac{\sin n\pi x}{n\pi \cos n\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi n} \cdot e^{-n^2\pi^2 t} \cdot \sin n\pi x.$$

Voor $s=0$ vinden wij als residu x zodat wij formeel als oplossing vinden

$$U(x,t) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^2}{n} e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x.$$

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
AMSTERDAM (O.)

Telefoon 51660
(Administratie, Bibliotheek, Afd. Statistiek, Afd. Zuivere Wiskunde)

Telefoon 56643
(Afd. Toegepaste Wiskunde, Rekenafdeling)

Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)
te 's-Gravenhage

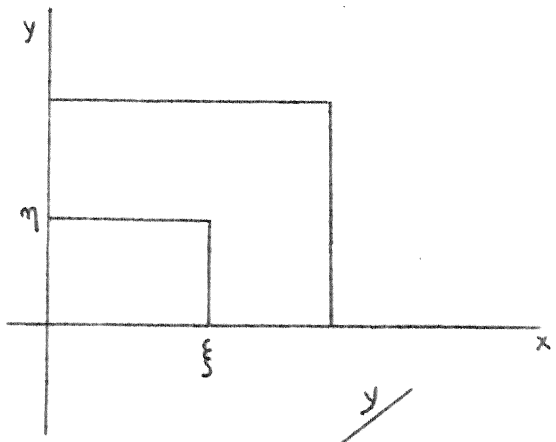
4e Voordracht: 17 Maart 1954.
Spreker: Ir R.W.Trense.

1. Volgens een stelling van Weierstrasz is iedere continue functie $F(x,y)$ in een eindig gebied gelijkmatig te approximeren door een som van polynomen, $F(x,y) = \sum \alpha_i(x)\beta_i(y)$ en volgens een uitbreiding bekend als de stelling van Stone-Weierstrasz is iedere continue functie $F(x,y)$ in een eindig gebied gelijkmatig approximeerbaar door continue functies of m.a.w. $\alpha_i(x)$ en $\beta_i(x)$ behoeven niet beperkt te blijven tot polynomen. In verband met deze stellingen kunnen we nu tweedimensionale eigentransformaties en inverse transformaties definieren, welke eigen zijn aan de concrete systemen, waarop ze zullen worden toegepast, in dien zin, dat de bij de definitie te gebruiken eigenfuncties zinvol d.w.z. met een grote aanpassing aan deze systemen zijn gekozen. Het concrete eigen karakter hiervan maakt het raadzaam de theorie van deze transformaties aan de hand van een tweetal concrete voorbeelden te ontwikkelen.
Voor het eerste voorbeeld viel de keuze op de oplossing van de differentiaalvergelijking van de zakkingen (x,y) van een aan vier zijden ingeklemde plaat, die in een punt (ξ, η) belast is door een puntlast P.

$$\frac{\partial^4 (x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 (x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 (x,y)}{\partial y^4} =$$

$$= \frac{q}{D} = \frac{P}{D} U_1\left\{(x-\xi),(y-\eta)\right\}$$

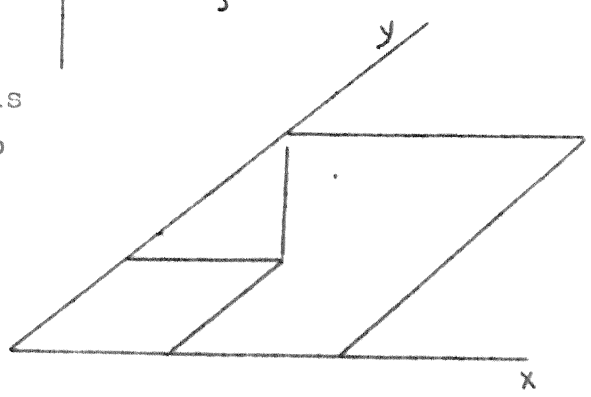
waarbij de stijfheidsfactor $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$



Onder $U_1\left\{(x-\xi),(y-\eta)\right\}$ verstaan we de tweedimensionale pulsfunctie , die zoals de eendimensionale pulsfunctie als operator onder het integraalteken is op te vatten:

$$U_1\left\{(x-\xi),(y-\eta)\right\}\,dx\,dy =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{terplaatse } x=\xi,\ y=\eta \\ 0 & \text{voor } x \neq \xi,\ y \neq \eta \end{cases}$$



We definieren nu

$$E^2\{W(x,y)\} = w(n,m) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\{\sigma_1(k_n l_1)\sigma_2(k_n x) - \sigma_2(k_n l_1)\sigma_1(k_n x)\}$$
$$\{\sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_2(\varkappa_m y) - \sigma_2(\varkappa_m l_2)\sigma_1(\varkappa_m y)\} W(x,y)\, dx\, dy$$

waarbij k_n en $\varkappa_m$ voldoen moeten aan

$$\sigma_1(k_n l_1)\sigma_3(k_n l_1) = \sigma_2^2(k_n l_1) \rightarrow \cosh(k_n l_1)\cos(k_n l_1) = 1$$
$$\sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_3(\varkappa_m l_2) = \sigma_2^2(\varkappa_m l_2) \rightarrow \cosh(\varkappa_m l_2)\cos(\varkappa_m l_2) = 1$$

Voor de inverse transformatie volgt hieruit

$$W(x,y) = E^{-2}\{w(n,m)\} = \sum \frac{w(n,m)}{l_1 l_2\, \sigma_1^2(k_n l_1)\sigma_1^2(\varkappa_m l_2)} \cdot$$

$$\{\sigma_1(k_n l_1)\sigma_2(k_n x) - \sigma_2(k_n l_1)\sigma_1(k_n x)\}\{\sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_2(\varkappa_m y) - \sigma_2(\varkappa_m l_2)$$
$$\sigma_1(\varkappa_m y)\}$$

Bij de definitie van de Eigentransformatie is gebruik gemaakt van de ongenormeerde eigenfuncties van een aan weerszijden ingeklemde balk:

$$\varphi_n(x) = \sigma_1(k_n l)\sigma_2(k_n x) - \sigma_2(k_n l)\sigma_1(k_n x)$$

en zijn de normeringsfactoren verwerkt in de inverse transformatie.
Gaan we de eigentransformatie na van de partiële differentiaalquotiënten, welke in de differentiaalvergelijking voorkomen en maken we daarbij gebruik van de approximeerbaarheid van $W(x,y) = \sum \alpha_i(x)\beta_i(y)$ terwijl we in verband met de gelijkmatigheid van deze approximatie telkenmale $\sum$ en $\int$ teken mogen wisselen.

$$E^2\left\{\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\right\} = \sum_i \int_0^{l_2} \varphi_m(y)\beta_i(y)\, dy \int_0^{l_1}\{\sigma_1(k_n l_1)\sigma_2(k_n x) - \sigma_2(k_n l_1)\sigma_1(k_n x)$$
$$d\,\frac{\partial^3 \alpha_i(x)}{\partial x^3} =$$

$$= \sum_i \int_0^{l_2} \varphi_m(y)\beta_i(y)\, dy \left[\left[\frac{\partial^3 \alpha_i(x)}{\partial x^3}\{\sigma_1(k_n l_1)\sigma_2(k_n x) - \sigma_2(k_n l_1)\sigma_1(k_n x)\}\right]_0^{l_1} -\right.$$
$$\left. - k_n \int_0^{l_1}\{\sigma_1(k_n l_1)\sigma_3(k_n x) - \sigma_2(k_n l_1)\sigma_2(k_n x)\}\, d\,\frac{\partial^2 \alpha_i(x)}{\partial x^2}\right] =$$

$$= \sum_i \int_0^{l_2} \varphi_m(y)\beta_i(y)\, dy \left[\left[-k_n \frac{\partial^2 \alpha_i(x)}{\partial x^2}\{\sigma_1(k_n l_1)\sigma_3(k_n x) - \sigma_2(k_n l_1)\sigma_2(k_n x)\}\right]_0^{l_1} +\right.$$
$$\left. + k_n^2 \int_0^{l_1}\{\sigma_1(k_n l_1)\sigma_4(k_n x) - \sigma_2(k_n l_1)\sigma_3(k_n x)\}\, d\,\frac{\partial \alpha_i(x)}{\partial x}\right] =$$

$$= \sum_i \int_0^{l_2} \varphi_m(y)\,\beta_i(y)\,dy \left[\left[k_n^2 \frac{\partial_i(x)}{\partial x} \left\{ \sigma_1(k_n l_1)\sigma_4(k_n x) - \sigma_2(k_n l_1)\sigma_3(k_n x) \right\} \right]_0^{l_1} - \right.$$

$$\left. - k_n^3 \int_0^{l_1} \left\{ \sigma_1(k_n l_1)\,\sigma_1(k_n x) - \sigma_2(k_n l_1)\,\sigma_4(k_n x) \right\} d\alpha_i(x) \right] =$$

$$= \sum_i \int_0^{l_2} \varphi_m(y)\,\beta_i(y)\,dy \left[\left[-k_n^3 \alpha_i(x) \left\{ \sigma_1(k_n l_1)\sigma_1(k_n x) - \sigma_2(k_n l_1)\sigma_4(k_n x) \right\} \right]_0^{l_1} + \right.$$

$$\left. + k_n^4 \int_0^{l_1} \left\{ \sigma_1(k_n l_1)\,\sigma_2(k_n x) - \sigma_2(k_n l_1)\sigma_1(k_n x) \right\} \alpha_i(x)\,dx \right] =$$

$$= k_n^4 \sum_i \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \varphi_n(x)\,\varphi_m(y)\,\alpha_i(x)\,\beta_i(y)\,dx\,dy =$$

$$= k_n^4 \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \varphi_n(x)\,\varphi_m(y) \sum \alpha_i(x)\,\beta_i(y)\,dx\,dy =$$

$$= k_n^4 \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \varphi_n(x)\,\varphi_m(y)\; W(x,y)\,dx\,dy = k_n^4\, E^2 \left\{ W(x,y) \right\}$$

Bij de afleiding werd ervan gebruik gemaakt dat

$$\alpha_i(0) = \alpha_i(1) = 0 \quad \text{en} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \right)_0 = \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \right)_1 = 0$$

het een een gevolg is van de randvoorwaarden

$$W(0,y) = \sum \alpha_i(0)\,\beta_i(y) \equiv 0$$

$$W(1,y) = \sum \alpha_i(1)\,\beta_i(y) \equiv 0$$

$$\left[\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} \right]_{x=0} = \sum \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \right)_0 \beta_i(y) \equiv 0$$

$$\left[\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} \right]_{x=1} = \sum \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \right)_1 \beta_i(y) \equiv 0$$

Op dezelfde wijze is af te leiden

$$E^2 \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right\} = \varkappa_m^4\, E^2 \left\{ W(x,y) \right\}$$

en

$$E^2 \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} = k_n^2 \varkappa_m^2 \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left\{ \sigma_1(k_n l_1)\sigma_4(k_n x) - \sigma_2(k_n l_1)\,\sigma_3(k_n x) \right.$$

$$\left. \left\{ \sigma_1(\varkappa_m l_2)\,\sigma_4(\varkappa_m y) - \sigma_2(\varkappa_m l_2)\,\sigma_3(\varkappa_m y) \right\} W(x,y)\,dx\,dy \right.$$

Noemen we

$$E_{nm}^{*2} \left\{ W(x,y) \right\} = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left\{ \sigma_1(k_n l_1)\,\sigma_4(k_n x) - \sigma_2(k_n l_1)\,\sigma_3(k_n x) \right\}$$

$$\left\{ \sigma_1(\varkappa_m l_2)\,\sigma_4(\varkappa_m y) - \sigma_2(\varkappa_m l_2)\sigma_3(\varkappa_m y) \right\} W(x,y)\,dx\,dy$$

Zo hebben we dus

$$E^2\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right\} = k_n^2 \varkappa_m^2 E_{nm}^{*2}\{W(x,y)\}$$

Onderwerpen we de differentiaalvergelijking aan deze eigentransformatie zo ontstaat:

$$(k_n^4+\varkappa_m^4)\, w(n,m) + 2k_n^2\varkappa_m^2 E_{nm}^{*2}\{W(x,y)\} = \frac{P}{D}\varphi_n(\xi)\varphi_m(\eta)$$

Substitueren we hierin voor

$$W(x,y) = \sum \frac{w(\nu,\mu)\varphi_\nu(x)\varphi_\mu(y)}{l_1 l_2 \sigma_1^2(k_\nu l_1)\sigma_2^2(k_\mu l_2)}$$

en verwisselen we sommatie en integratieteken zo krijgen we

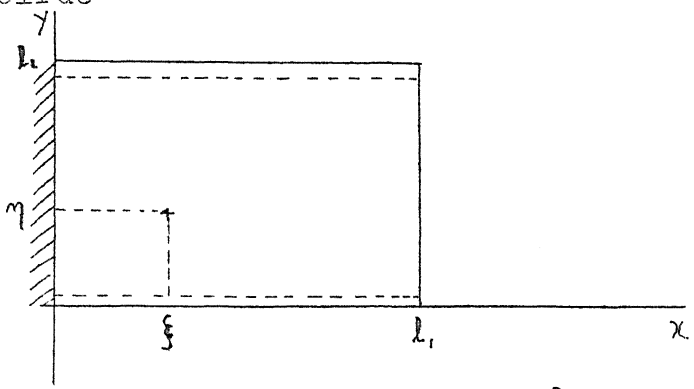
$$(k_n^4+\varkappa_m^4)\, w(n,m) + \sum_{\nu,\mu} \frac{2k_n^2\varkappa_m^2 w(\nu,\mu)}{l_1 l_2 \sigma_1^2(k l_1)\sigma_2^2(k l_2)} E_{nm}^{*2}\varphi_\nu(x)\varphi_\mu(y) = \frac{P}{D}\varphi_n(\xi)\varphi_m(\eta)$$

Bij een zodanige approximatiegraad, dat ν en μ van 1 tot N lopen hebben we dus N^2 vergelijkingen met N^2 onbekenden $w(\nu,\mu)$.
Het vraagstuk is hiermee dus in principe als opgelost te beschouwen.

2. Als 2e vraagstuk beschouwen we de bepaling van de zakkingen die ontstaan, als een plaat, die aan twee tegenoverliggende zijden vrij opgelegd is en aan de twee andere zijden resp. ingeklemd en vrij zwevend, belast wordt door een puntlast P in het punt (ξ,η)

De differentiaalvergelijking is dezelfde als in het vorige vraagstuk

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} U_1\{(x-\xi),(y-\eta)\}$$



We definieren nu

$$E^2\{W(x,y)\} = w(n,m) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\{\sigma_4(k_n l_1)\sigma_2(k_n x) - \sigma_1(k_n l_1)\sigma_1(k_n x)\}$$
$$\{\sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_3(\varkappa_m y) - \sigma_3(\varkappa_m l_2)\sigma_1(\varkappa_m y)\}\, W(x,y)\, dx\, dy$$

$$\sigma_4^2(k_n l_1) = \sigma_1(k_n l_1)\sigma_3(k_n l_1) \rightarrow \cosh(k_n l_1)\cos(k_n l_1) = -1$$

$$\sigma_1^2(\varkappa_m l_2) = \sigma_3^2(\varkappa_m l_2) \longrightarrow \varkappa_m = \frac{m\pi}{l_2}$$

$$W(x,y) = E^{-2}\left\{ w(n,m)\right\} = \sum \frac{w(n,m)}{2l_1 l_2 \sigma_4^{\,2}(k_n l_1)\,\sigma_1^{\,2}(\varkappa_m l_2)}$$

$$\left\{\sigma_4(k_n l_1)\sigma_2(k_n x) - \sigma_1(k_n l_1)\sigma_1(k_n x)\right\}\left\{\sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_3(\varkappa_m y) - \sigma_3(\varkappa_m l_2)\sigma_1(\varkappa_m y)\right.$$

De eigentransformaties van $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ en $\frac{\delta^4 w}{\delta y^4}$ blijken weer evenredig te zijn aan de eigentransformaties van w, hetgeen blijken kan uit de volgende becijfering:

$$E^2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right) = \sum_i \int_0^{l_2} \varphi_m(y)\beta_i(y)\,dy \int_0^{l_1} \left\{\sigma_4(k_n l_1)\sigma_2(k_n x) - \sigma_1(k_n l_1)\sigma_1(k_n x)\right\} d\,\frac{\partial^3 \alpha_i(x)}{\partial x^3} =$$

$$= \sum \int_0^{l_2} \varphi_m(y)\beta_i(y)\,dy \left[\left[\frac{\partial^3 \alpha_i(x)}{\partial x^3}\left\{\sigma_4(k_n l_1)\sigma_2(k_n x) - \sigma_1(k_n l_1)\sigma_1(k_n x)\right\}\right]_0^{l_1} - \right.$$

$$\left. - k_n \int_0^{l_1} \left\{\sigma_4(k_n l_1)\sigma_3(k_n x) - \sigma_1(k_n l_1)\sigma_2(k_n x)\right\} d\,\frac{\partial^2 \alpha_i(x)}{\partial x^2}\right] =$$

$$= \sum_i \int_0^{l_2} \varphi_m(y)\beta_i(y)\,dy \left[\left[-k_n \frac{\partial^2 \alpha_i(x)}{\partial x^2}\left\{\sigma_4(k_n l_1)\sigma_3(k_n x) - \sigma_1(k_n l_1)\sigma_2(k_n x)\right\}\right]_0^{l_1} + \right.$$

$$\left. + k_n^{\,2} \int_0^{l_1} \left\{\sigma_4(k_n l_1)\sigma_4(k_n x) - \sigma_1(k_n l_1)\sigma_3(k_n x)\right\} d\,\frac{\partial \alpha_i(x)}{\partial x}\right] =$$

$$= \sum_i \int_0^{l_2} \varphi_m(y)\beta_i(y)\,dy \left[\left[k_n^{\,2}\,\frac{\partial \alpha_i(x)}{\partial x}\left\{\sigma_4(k_n l_1)\sigma_4(k_n x) - \sigma_1(k_n l_1)\sigma_3(k_n x)\right\}\right]_0^{l_1} - \right.$$

$$\left. - k_n^{\,3} \int_0^{l_1} \left\{\sigma_4(k_n l_1)\sigma_1(k_n x) - \sigma_1(k_n l_1)\sigma_4(k_n x)\right\} d\alpha_i(x)\right] =$$

$$= \sum_i \int_0^{l_2} \varphi_m(y)\beta_i(y)\,dy \left[\left[-k_n^{\,3}\alpha_i(x)\left\{\sigma_4(k_n l_1)\sigma_1(k_n x) - \sigma_1(k_n l_1)\sigma_4(k_n x)\right\}\right]_0^{l_1} + \right.$$

$$\left. + k_n^{\,4} \int_0^{l_1} \left\{\sigma_4(k_n l_1)\sigma_2(k_n x) - \sigma_1(k_n l_1)\sigma_1(k_n x)\right\} \alpha_i(x)\,dx\right] =$$

$$= k_n^{\,4}\, E^2\left\{\sum \alpha_i(x)\beta_i(y)\right\} = k_n^{\,4}\, E^2\left\{w(x,y)\right\}$$

$$E^2\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\} = \sum_i \int_0^{l_1} \varphi_m(x)\alpha_i(x)\,dx \int_0^{l_2} \left\{\sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_3(\varkappa_m y) - \sigma_3(\varkappa_m l_2)\sigma_1(\varkappa_m y)\right\}$$

$$d\,\frac{\partial^3 \beta_i(y)}{\partial y^3} =$$

$$= \sum_i \int_0^{l_1} \varphi_n(x)\alpha_i(x)\,dx \left[\left[\frac{\partial^3 \beta_i(y)}{\partial y^3}\left\{\sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_3(\varkappa_m y) - \sigma_3(\varkappa_m l_2)\sigma_1(\varkappa_m y)\right\}\right]_0^{l_2} - \right.$$

$$\left. - \varkappa_m \int_0^{l_2} \left\{\sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_4(\varkappa_m y) - \sigma_3(\varkappa_m l_2)\sigma_2(\varkappa_m y)\right\} d\,\frac{\partial^2 \beta_i(y)}{\partial y^2}\right] =$$

$$= \sum_i \int_0^{l_1} \varphi_n(x)\alpha_i(x)\,dx \left[\left[-\varkappa_m \frac{\partial^2 \beta_i(y)}{\partial y^2} \left\{ \sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_4(\varkappa_m y) - \sigma_3(\varkappa_m l_2)\sigma_2(\varkappa_m y) \right\} \right]_0^{l_2} + \right.$$

$$\left. + \varkappa_m^2 \int_0^{l_2} \left\{ \sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_1(\varkappa_m y) - \sigma_3(\varkappa_m l_2)\sigma_3(\varkappa_m y) \right\} \, d\, \frac{\partial \beta_i(y)}{\partial y} \right] =$$

$$= \sum_i \int_0^{l_1} \varphi_n(x)\alpha_i(x)\,dx \left[\left[\varkappa_m^2 \frac{\partial \beta_i(y)}{\partial y} \left\{ \sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_1(\varkappa_m y) - \sigma_3(\varkappa_m l_2)\sigma_3(\varkappa_m y) \right\} \right]_0^{l_2} - \right.$$

$$\left. - \varkappa_m^3 \int_0^{l_2} \left\{ \sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_2(\varkappa_m y) - \sigma_3(\varkappa_m l_2)\sigma_4(\varkappa_m y) \right\} d\beta_i(y) \right] =$$

$$= \sum_i \int_0^{l_1} \varphi_n(x)\alpha_i(x)\,dx \left[\left[-\varkappa_m^3 \beta_i(y) \left\{ \sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_2(\varkappa_m y) - \sigma_3(\varkappa_m l_2)\sigma_4(\varkappa_m y) \right\} \right]_0^{l_2} + \right.$$

$$\left. + \varkappa_m^4 \int_0^{l_2} \left\{ \sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_3(\varkappa_m y) - \sigma_3(\varkappa_m l_2)\sigma_1(\varkappa_m y) \right\} \beta_i(y)\, dy \right] =$$

$$= + \varkappa_m^4 \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \varphi_n(x)\, \varphi_m(y)\alpha_i(x)\beta_i(y)\, dx\, dy = \varkappa_m^4 E^2 \left\{ w(x,y) \right\}$$

Nu is

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum \frac{k_n^2 \varkappa_m^2 w(n,m)}{2 l_1 l_2 \sigma_4^2(k_n l_1)\sigma_1^2(\varkappa_m l_2)} \left\{ \sigma_4(k_n l_1)\sigma_4(k_n x) - \sigma_1(k_n l_1)\sigma_3(k_n x) \right\}$$

$$\left\{ \sigma_1(\varkappa_m l_2)\sigma_1(\varkappa_m y) - \sigma_3(\varkappa_m l_2)\sigma_3(\varkappa_m y) \right\}$$

De omzetting van differentiaalvergelijking door eigentransformatie geeft hiermee het volgende resultaat

$$(k_n^4 + \varkappa_m^4)\, w(n,m) + \sum_{r,\mu} \frac{2 k_r^2 \varkappa_\mu^2 w(r,\mu)}{2 l_1 l_2 \sigma_4^2(k_r l_1)\sigma_1^2(\varkappa_\mu l_2)} \cdot$$

$$\left\{ \sigma_4(k_r l_1)\sigma_4(k_r x) - \sigma_1(k_r l_1)\sigma_3(k_r x) \right\} \left\{ \sigma_1(\varkappa_\mu l_2)\sigma_3(\varkappa_\mu y) - \sigma_3(\varkappa_\mu l_2)\sigma_1(\varkappa_\mu y) \right\} =$$

$$= \frac{P}{D} \left\{ \sigma_4(k_n l_1)\sigma_2(k_n \xi) - \sigma_1(k_n l_1)\sigma_1(k_n \xi) \right\} \left\{ \sigma_1(\varkappa_n l_1)\sigma_3(k_n \xi) - \sigma_3(\varkappa_n l_2)\sigma_1(\varkappa_n \eta) \right\}$$

een stelsel vergelijkingen, waarmee de coëfficiënten $w(n,m)$ $(n=1,\ldots N,$ $m=1,\ldots N)$ op te lossen zijn.

3. Bij een der problemen, dat in de loop van deze cursus behandeld worden zal, is een aantal Laplace-transformaties benodigd van functies, die verband houden met Besselfuncties met een imaginair argument.
Het vorig cursusjaar hebben we gezien, dat

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^m}{m!} \right] = \frac{1}{s^{m+1}}$$

Maar dan volgt hieruit, dat:

$$\frac{t^m}{m!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zt}\,\frac{dz}{z^{m+1}}$$

Zij nu t=1

$$\frac{1}{m!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{z}\,\frac{dz}{z^{m+1}} \qquad (1)$$

Uit vorig jaar hebben we ook de Bessel-functies van de eerste soort leren kennen $J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\frac{1}{2}z)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!}$.

Substitueren we ix voor z, zo krijgen we $J_n(ix) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{i^n (\frac{1}{2}x)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!}$

Stellen we nu $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$ zo wordt :

$$I_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!} \qquad (2)$$

$$I_0(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^{2r}}{r!\,r!}$$

$$\frac{dI_0(x)}{dx} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r(\frac{1}{2}x)^{2r-1}}{r!\,r!} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^{2r-1}}{(r-1)!\,r!} = \sum_{\rho=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^{1+2\rho}}{\rho!\,(1+\rho)!} = I_1(x)$$

Zodat dus

$$I_1(x) = \frac{d\,I_0(x)}{dx} \qquad (3)$$

In verband met (1) wordt (2)

$$I_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}x)^{n+2r}}{2\,i\,r!}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{z}\,\frac{dz}{z^{n+r+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(\tfrac{1}{2}x)^n \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{z}\,\frac{dz}{z^{n+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(\frac{x^2}{4z}\right)^r =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(\tfrac{1}{2}x)^n \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{z+\frac{x^2}{4z}}\,\frac{dz}{z^{n+1}} \qquad (4)$$

Beperken we ons voorlopig tot I_0

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{z+\frac{x^2}{4z}}\,\frac{dz}{z} \qquad (5)$$

Zij nu $x = \frac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2}$

en $z = \frac{1}{2}\xi(t-k) \rightarrow dz = \frac{1}{2}(t-k)\,d\xi$ zodat $\frac{dz}{z} = \frac{d\xi}{\xi}$

(5) blijft alleen geldig, zo t > k.

Het geval t < k zullen we nog apart bekijken

Noem $\beta = \frac{4\gamma}{t-k}$.

Bij substitutie in (5) ontstaat:

$$e^{-\frac{1}{2}at}\, I_0(\tfrac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{-\frac{1}{2}at}\, e^{\frac{1}{4}\xi(t-k)+\frac{a^2}{4\xi}(t+k)}\, \frac{d\xi}{\xi} \qquad (6)$$

Zij verder:

$$\sqrt{\xi} = \sqrt{s+a} + \sqrt{s} \quad \rightarrow \quad \xi = 2s + a + 2\sqrt{s(s+a)}$$

$$\sqrt{\frac{a}{\xi}} = \sqrt{s+a} - \sqrt{s} \quad \rightarrow \quad \frac{a^2}{\xi} = 2s + a - 2\sqrt{s(s+a)}$$

Door optelling en aftrekking ontstaat hieruit

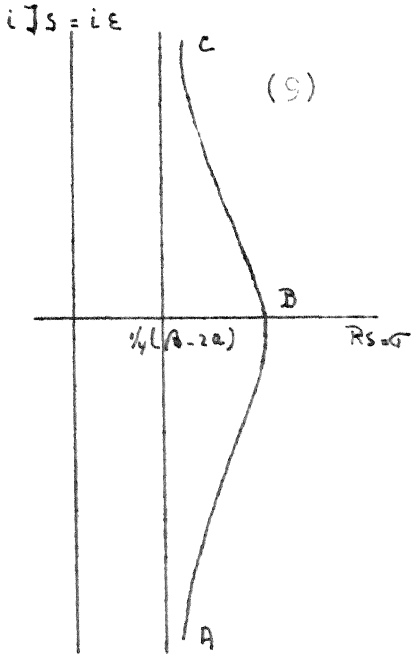
$$4s + 2a = \xi + \frac{a^2}{\xi} \quad \rightarrow \quad s = \tfrac{1}{4}\left(\xi + \frac{a^2}{\xi} - 2a\right) \qquad (7)$$

en $\sqrt{s(s+a)} = \tfrac{1}{4}\left(\xi - \frac{a^2}{\xi}\right)$ (8)

Uit (7) ontstaat door differentiatie

$$\frac{ds}{d\xi} = \tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{a^2}{\xi^2}\right)$$ en dus in verband met (8) :

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{1}{\xi}\sqrt{s(s+a)} \qquad \frac{d\xi}{\xi} = \frac{ds}{\sqrt{s(s+a)}} \qquad (9)$$



Substitutie van (7), (8) en (9) in (6) geeft:

$$e^{-\frac{1}{2}at}\, I_0(\tfrac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ABC} e^{st}\, \frac{e^{-k\sqrt{s(s+a)}}}{\sqrt{s(s+a)}}\, ds$$

Bij de eerste substitutie gaat de rechte $R(z) = \gamma$ over in de rechte $R(\xi) = \frac{4\gamma}{t-k} = \beta$

Bij de tweede substitutie gaat de rechte $R\,\xi = \beta$ in de kromme ABC over.

Zij $\xi = \beta + i\eta$ (β constant, η variabel) en

$s = \sigma + i\varepsilon$

$$\sigma + i\varepsilon = \tfrac{1}{4}\left(\beta + i\eta + \frac{a^2}{\beta+i\eta} - 2a\right)$$

waaruit

$$\sigma = \tfrac{1}{4}\left(\beta + \frac{a^2}{\beta^2+\eta^2} - 2a\right)$$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}\left(\eta - \frac{a^2\eta}{\beta^2+\eta^2}\right)$$

Men zorge ervoor dat $\beta > 2a$

Daar η van $-\infty \rightarrow +\infty$ loopt is

$$\tfrac{1}{4}(\beta - 2a) \leq \sigma \leq \tfrac{1}{4}\left(\beta + \frac{a^2}{\beta^2} - 2a\right)$$

De kromme ligt dus tussen de rechten

$\sigma = \frac{1}{2}(\beta - 2a)$ en $\sigma = \frac{1}{2}(\beta - 2a + \frac{a^2}{\beta^2})$ besloten.

Hierbij is de rechte $\sigma = \frac{1}{2}(\beta - 2a)$ een asymptoot, terwijl het punt $\sigma = \frac{1}{2}(\beta - 2a + \frac{a^2}{\beta^2})$ op de reële as, het snijpunt voorstelt van deze as met de kromme.

De integrand

$$e^{st}\ \frac{e^{-k\sqrt{s(s+a)}}}{\sqrt{s(s+a)}} = e^{s(t-k)}\ \frac{1}{e^{k\{\sqrt{s(s+a)}-s\}}}\ \frac{1}{\sqrt{s(s+a)}}$$

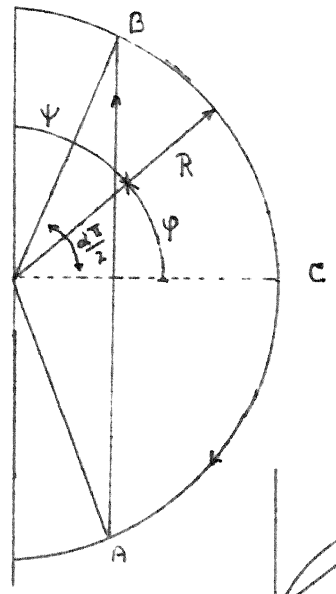
bezit als we de oorsprong uitzonderen, in het gehele rechterhalfvlak geen polen. De integratie langs de kromme kan dus vervangen worden door die langs de rechte $\sigma = \frac{1}{2}(\beta - 2a)$.

Voor $t > k$ geldt dus

$$e^{-\frac{1}{2}at} I_o(\tfrac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}\ \frac{e^{-k\sqrt{s(s+a)}}}{\sqrt{s(s+a)}}\ ds \qquad (10)$$

Bekijken we nu voor $t < k$ de contourintegraal

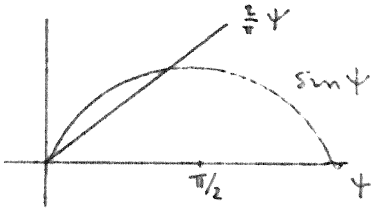
$$\int_{ABCA} e^{s(t-k)}\ \frac{1}{e^{k\{\sqrt{s(s+a)}-s\}}}\ \frac{ds}{\sqrt{s(s+a)}}$$



langs de oneindige cirkel BCA is

$$\left|\int_{BCA} e^{s(t-k)}\ \frac{1}{e^{k\{\sqrt{s(s+a)}-s\}}}\ \frac{ds}{\sqrt{s(s+a)}}\right| <$$

$$< \int_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}^{\frac{\pi}{2}(1+\alpha)} \frac{R\,d\Psi}{e^{R(k-t)\sin\Psi_R}} <$$



$$< \frac{2}{R}\int_{\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}^{\pi/2} \frac{dR\,\Psi}{e^{\frac{2(k-t)}{\pi}R\Psi}} = \frac{2}{R}\left[-\frac{\pi}{2(k-t)}\ e^{-\frac{2(k-t)}{\pi}R\Psi}\right]_{\Psi=\frac{\pi}{2}(1-\alpha)}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{(k-t)R}\left\{\frac{1}{e^{(k-t)(1-\alpha)R}} - \frac{1}{e^{(k-t)R}}\right\} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Voor $t < k$ is dus $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\ \frac{e^{-k\sqrt{s(s+a)}}}{\sqrt{s(s+a)}}\ ds = 0$

$\frac{e^{-k\sqrt{s(s+a)}}}{\sqrt{s(s+a)}}$ blijkt dus de Laplace transformatie te zijn van de

functie F(t):

$$t < k \qquad F(t) = 0$$
$$t > k \qquad F(t) = e^{-\frac{1}{2}at}\, I_0(\tfrac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2})$$

ofwel

$$L\left[e^{-\frac{1}{2}at}\, I_0(\tfrac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2})\, U(t-k)\right] = \int_k^\infty e^{st}\, e^{-\frac{1}{2}at}\, I_0(\tfrac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2})\, dt =$$

$$= \frac{e^{-k\sqrt{s(s+a)}}}{\sqrt{s(s+a)}} \qquad (11)$$

Differentieer het linker en rechterlid van (11) naar k

$$L\left[-\tfrac{1}{2}ak\,\frac{e^{-\frac{1}{2}at}}{\sqrt{t^2-k^2}}\, I_0'(\tfrac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2})\, U(t-k) - e^{-\frac{1}{2}at}\, I_0(\tfrac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2})\, U_1(t-k)\right] =$$

$$= \int_k^\infty -e^{-st}\,\tfrac{1}{2}ak\,\frac{e^{-\frac{1}{2}at}}{\sqrt{t^2-k^2}}\, I_0'(\tfrac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2})\, dt - e^{-(s+\frac{1}{2}a)k} =$$

$$= \frac{-\sqrt{s(s+a)}\; e^{-k\sqrt{s(s+a)}}}{\sqrt{s(s+a)}}$$

In verband met (3) is dus

$$\int_k^\infty e^{-st}\,\tfrac{1}{2}ak\,\frac{e^{-\frac{1}{2}at}}{\sqrt{t^2-k^2}}\, I_1(\tfrac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2}) = e^{-k\sqrt{s(s+a)}} - e^{-(s+\frac{1}{2}a)k} \qquad (12)$$

of m.a.w.

$e^{-k\sqrt{s(s+a)}} - e^{-(s+\frac{1}{2}a)k}$ is de Laplacetransformatie van de functie F(t)

$$t < k \qquad F(t) = 0$$
$$t > k \qquad F(t) = \tfrac{1}{2}a\, e^{-\frac{1}{2}at}\,\frac{k}{\sqrt{t^2-k^2}}\, I_1(\tfrac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2})$$

Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)
te 's-Gravenhage

13e Voordracht: 31 Maart 1954
Spreker: Prof. Dr R.Timman.

Wij beschouwen nogmaals de op de eerste manier verkregen oplossing van het probleem en passen de methode toe op een oneindig lange staaf.

Wij hebben dan de randcondities

$$U(0^+,t) = 1 \quad t > 0 \qquad U(\infty) \to 0,$$

en de beginvoorwaarde

$$U(x,0) = 0.$$

Het getransformeerde probleem

$$\frac{d^2u}{dx^2} - su = 0$$

$$U(0^+,s) = \frac{1}{s}$$

$$U(\infty,s) = 0$$

heeft als enige oplossing

$$U(x,s) = \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}$$

zodat wij direct de omkeerformule kunnen toepassen.

$$U(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\lambda^2}\, d\lambda .$$

Physisch kunnen wij deze oplossing interpreteren als de temperatuurverdeling, die behoort bij een warmtebron, die op het tijdstip t = 0 in de oorsprong wordt geplaatst.

Het is nu mogelijk voor het vroeger gevonden resultaat voor een staaf van eindige lengte, waarvan het ene uiteinde een temperatuur 1 en het andere een temperatuur nul heeft, ook term voor term te interpreteren.

Allereerst een bron inhet punt 1 (staaf nu naar links)

$$U_1(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right).$$

Om de temperatuur voor x = 0: $U(0,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$ te compenseren een te-

gengestelde bron in x = -1 (spiegeling).

Totaal

$$U_2(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1+x}{2\sqrt{t}}\right).$$

Nu is echter in x = 1

$$U_2(1,t) = -\operatorname{erfc}\left(\frac{2}{2\sqrt{t}}\right).$$

Dit moet weer gecompenseerd worden door een bron in 1+2 = 3 (spiegelbron in de tweede). Dus:

$$U_3(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1+x}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{3-x}{2\sqrt{t}}\right).$$

Dan moet weer de invloed van deze bron voor x = 0 ongedaan gemaakt worden en zo ontstaat de verkregen reeks door herhaalde spiegeling van warmtebronnen t.o.v. de uiteinden van de staaf.

Bewijs, dat de reeksontwikkeling geldig is.

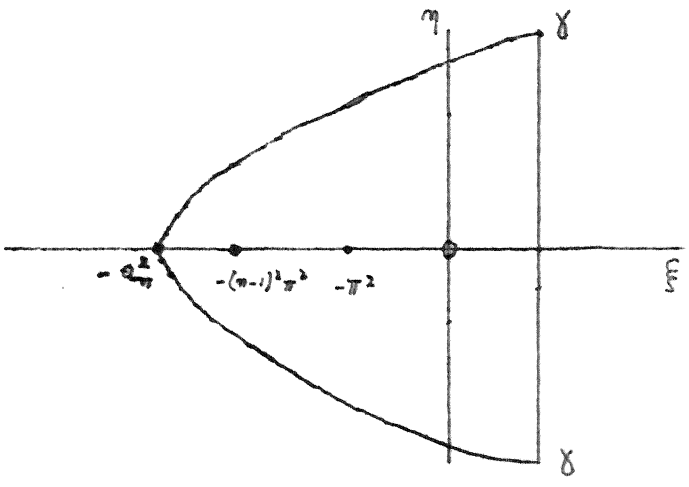
Wij bewijzen nu, dat de reeksontwikkeling, die wij gevonden hebben voor de integraal

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st}\sinh x\sqrt{s}}{s\sinh\sqrt{s}}\,ds \qquad \gamma > 0$$

inderdaad geldig is.

Stel $s = \xi + i\eta$.

Wij beschouwen eerst de integraal over een eindig segment van de lijn $\xi = \gamma > 0$ en completeren dit door een parabool met top naar links en brandpunt in de oorsprong, zodat de parabool tussen de op de negatieve ξ-as gelegen polen doorloopt. De vergelijking van de parabool is



$r = \dfrac{2a_n^2}{1-\cos\theta} = a_n^2 \operatorname{cosec}\dfrac{2\theta}{2}$, waarbij $a_n = (n-\frac{1}{2})\pi$.

De snijpunten met de negatieve as liggen dan in $1 = -(n-\frac{1}{2})^2\pi^2$, en $a_n \to \infty$ als $n \to \infty$.

Als $s = \gamma e^{i\theta}$ op de parabool ligt, is

$$\sqrt{s} = \gamma^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{1}{2}i\theta} = a_n.\frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}.\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= a_n\left(\cot\frac{\theta}{2} \pm i\right).$$

Nu geldt voor een complex getal a+bi:

$$|\sinh(a+bi)|^2 = \sinh^2 a + \sin^2 b,$$

en dus is

$$|s\,u(x,s)|^2 = \frac{\sinh^2(xa_n \cot\frac{\theta}{2}) + \sin^2(xa_n)}{\sinh^2(a_n \cot\frac{\theta}{2}) + \sin^2 a_n},$$

maar $\sin^2 a_n = 1$ en $0 < x < 1$, zodat langs de parabool

$$|su(x,s)| \leq 1$$

is.

Gaan wij nu de integraal na langs de contour C_n en het rechte stuk, dan is langs de parabool

$$\left| \int_{C_N} e^{st}\, x(x,s)\,ds \right| < \left| \int_{+\theta_1}^{2\pi-\theta_1} e^{+\gamma \cos\theta . t} \cdot \frac{ds}{|s|} \right| <$$

$$< \int_{\theta_1}^{2\pi-\theta_1} e^{+ta_n^2 \cdot \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}} \cdot \frac{\sqrt{2+\cos\theta}\,.d\theta}{\frac{t}{2}} < \int_{\theta_1}^{2\pi-\theta_1} e^{+ta_n^2 \cdot \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}} \cdot d\theta$$

waarbij θ_1 bepaald is door

$$2a_n^2 \cdot \frac{\cos\theta_1}{1-\cos\theta_1} = \gamma,$$

zodat

$$\left|\frac{\pi}{2} - \theta_1\right| < \frac{\gamma}{a_n^2}.$$

Wij splitsen nu weer de integratie weg in drie stukken van $\frac{2}{3}\pi$ tot $\frac{4}{3}\pi$, waarbij

$$\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta} < -\frac{1}{3}$$

en van θ_1 tot $\frac{2}{3}\pi$, van $\frac{4}{3}\pi$ tot $2\pi - \theta_1$.

Langs het middenstuk is

$$J_2 < \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} e^{-\frac{1}{3}ta_n^2} \cdot d\theta < \frac{2}{3}\pi \cdot e^{-\frac{1}{3}ta_n^2}$$

Langs het eerste stuk kunnen wij de exponent majoreren. Stel $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$, dan is voor $\theta_1 < \theta < \frac{2}{3}\pi$

$$\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta} < \frac{\sin\varphi}{1-\sin\varphi} < +\frac{3}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \varepsilon\right),$$

waarbij $\varepsilon = \frac{\gamma}{a_n^2}$.

Dan is

$$J_1 < \int_{\theta_1}^{\frac{1}{3}\pi} e^{ta_n^2(\frac{3}{2} + \frac{3}{\pi}\varepsilon) - \frac{3-a_n^2\theta}{\pi}} \cdot d\theta =$$

$$\frac{\pi e^{ta_n^2(\frac{3}{2}+\frac{3\xi}{\pi})}}{3ta_n^2}\cdot\left[e^{-\frac{3ta_n^2\theta}{\pi}\pi}-e^{-\frac{3ta_n^2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-\xi)}\right]$$

en dus gaat J_1 naar nul als $n \to \infty$. Evenzo bewijst men, dat de derde integraal naar nul gaat.

Hiermede is dus aangetoond, dat als $n \to \infty$; de contourintegraal nadert tot de integraal over het stuk van de verticale lijn $\xi = \gamma$ en dus, dat zij juist de omkeringsformule levert.

De contourintegraal is verder gelijk aan de som van de residuen in de polen, die binnen de contour liggen. Als n toeneemt, neemt het aantal termen van de reeks onbepaald toe, de som van de reeks zal dus tot de integraal, uitgestrekt van $\gamma - \infty i$ tot $\gamma + \infty i$ naderen.

Dat deze integraal zelf bestaat, volgt direct uit onze schattingen van de integrand en dus is de reeks convergent.

Deze beschouwingen gelden alleen voor $t > 0$.

Ook als $t = 0$ is, convergeert de reeks echter en wel nadert haar som tot

$$x + \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cdot\sin n\pi x,$$

die juist op het interval $|x| < 1$ de waarde nul heeft, daar de reeks juist de ontwikkeling van x in een reeks van Fourier voorstelt.

Oplossing voor willekeurige begintemperaturen.

Wij behandelen nu het probleem van de temperatuurverdeling in de staaf met een willekeurige begintemperatuur, waarbij echter beide eindpunten op de temperatuur nul worden gehouden.

$$U_t = U_{xx} \qquad 0 < x < 1 \qquad t > 0$$

met randvoorwaarden

$$U(+0,t) = U(1-0,t) = 0 \qquad t > 0.$$

$$U(x,+0) = g(x) \qquad 0 \quad x \quad 1.$$

Het getransformeerde probleem wordt

$$su(x,s) - g(x) = u_{xx}(x,s)$$

$$u(0,s) = u(1,s) = 0.$$

De oplossing van deze niet-homogene gewone differentiaalvergelijking kunnen wij vinden met behulp van een functie van Green.

$$G(x,\xi;s)\begin{cases}=\dfrac{\sinh(1-x)\sqrt{s}\ .\ \sinh\xi\sqrt{s}}{\sqrt{s}\sinh\sqrt{s}} & 0 \le \xi \le x\\[2ex] =\dfrac{\sinh x\sqrt{s}\ .\ \sinh(1-\xi)\sqrt{s}}{\sqrt{s}\sinh\sqrt{s}} & x \le \xi \le 1\end{cases}$$

$$u(x,s) = \int_0^1 g(\xi)\,G(x,\xi;s)\,d\xi .$$

Om deze oplossing terug te transformeren, bepalen wij eerst het residu van $G(x, \xi ; s)$ als functie van s in de pool

$$s = -\pi^2 n^2.$$

Dit wordt

$$2 \frac{\sin(1-x)\pi n \,.\, \sin \pi n}{\cos n \pi} \qquad 0 \leq \xi \leq x$$

$$2 \frac{\sin x \pi n \,.\, \sin(1-\xi)\pi n}{2 \cos n \pi} \qquad x \leq \xi \leq 1$$

maar deze waarden zijn gelijk aan

$$2 \frac{\sin n \pi x \,.\, \sin n \pi \xi}{\cos n \pi}$$

zodat wij vinden, als $g(\xi)$ continu is

$$u(x,s) = 2 \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \pi x \,.\, \int_0^1 g(\xi) \sin n \pi \xi \, d\xi \,.\, e^{-n^2 \pi^2 t}$$

een resultaat, dat wij op een klassieke manier door ontwikkelen in een Fourierreeks (eigenlijk: toepassen van de eindige Fourier-transformatie) ook hadden kunnen verkrijgen.

Variabele eindtemperaturen.

Wij beschouwen weer de half-oneindige staat $x > 0$, waarbij voor $x = 0$ de eindtemperatuur voorgeschreven is als een gegeven functie van t.

$$x = 0 \quad \begin{cases} U_{xx} = U_t & x > 0 \\ U(+0,t) = F(t) & t > 0 \end{cases}$$

$$t = 0 \qquad U = 0 \qquad x > 0 \qquad x \to \infty \qquad U \to 0.$$

Het getransformeerde probleem is

$$\frac{d^2 x}{dx^2} - su = 0$$

$$u(+0,s) = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt,$$

en wij vinden als oplossing

$$u = sf(s) \,.\, \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s} = sf(s) \,.\, v(x,s)$$

die teruggetransformeerd moet worden.

Nu is het origineel van $v = \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}$ bekend, nl. $V(t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$, en dus is $s \,.\, \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}$ het beeld van $V_t(x,t)$, d.w.z. de temperatuurverdeling van een staaf, waarbij op het tijdstip $t = 0$ een eenheidssprong in de oorsprong wordt aangebracht.

Wij vinden dan door toepassing van de convolutie-integraal

$$U(x,s) = \int_0^t F(t-\tau)\, V_t(x,\tau)\, d\tau .$$

Ook kunnen wij met sf(s) werken, als F(t) differentieerbaar is

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(+0),$$

dus

$$u(x,s) = F(+0)\,.\,v(x,s) + \mathcal{L}\{F(t)\}\,.\,v(x,s)$$

en

$$U(x,t) = F(+0)\,.\,V(x,t) + \int_0^t F'(t-\tau)\, V(x,\tau)\, d\tau .$$

Dit zijn speciale gevallen van het z.g. theorema van Duhamel, dat betrekking heeft op variabele randtemperaturen.

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
TELEFOON 51660 - 56643
AMSTERDAM-O.

Cursus Methoden der Mathematische Physica(vervolg)
te 's-Gravenhage

14e Voordracht: 14 April 1954
Spreker: Ir R.W.Trense.

1. In de 12e Voordracht werden 2 dimensionale Eigentransformaties geconstrueerd met behulp van ongenormeerde 1 dimensionale Eigenfuncties en werden de normeringsfactoren opgenomen in de inverse transformaties. Dit geschiedde ter aansluiting op de Fourier-sinus en cosinus transformatie maar zulks is niet per se nodig. Voor een verdere uitbouw is het zelfs wenselijk van genormeerde eigenfuncties gebruik te maken. Zij bijv. de genormeerde eigenfunctie behorende bij een balk op twee steunpunten, die aan weerszijden op een bepaalde wijze is opgelegd: $\bar{\varphi}_n(x)$, dan is $(\bar{\varphi}_n(x), \bar{\varphi}_m(x)) = \delta_{nm}$.

Voor een plaat zijn dan de 2 dimensionale Eigentransformaties te construeren:

$$\bar{w}(n,m) = \bar{E}^2\{W(x,y)\} = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \bar{\varphi}_n(x)\,\bar{\varphi}_m(y)\,W(x,y)\,dx\,dy$$

$$W(x,y) = \bar{E}^{-2}\{\bar{w}(n,m)\} = \sum\{\bar{w}(n,m)\,\bar{\varphi}_n(x)\,\bar{\varphi}_m(y)\}$$

In de 12e voordracht hebben we aan de hand van een tweetal voorbeelden gezien hoe de invloedsfunctie door eigenfuncties te approximeren is. Algemeen is hiervoor dan ook te schrijven

$$G(x,y,\xi,\eta) = \sum \bar{g}(n,m,\nu,\mu)\,\bar{\varphi}_n(x)\,\bar{\varphi}_m(y)\,\bar{\varphi}_\nu(\xi)\,\bar{\varphi}_\mu(\eta)$$

Met deze invloedsfunctie kunnen we nu weer de integraalvergelijking van het vrije trillingsprobleem opstellen.

$$Z(x,y,t) = -m\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} G(x,y,\xi,\eta)\,\frac{\partial^2 Z(\xi,\eta,t)}{\partial t^2}\,d\xi\,d\eta$$

Voor $Z(x,y,t) = Z(x,y)\sin\omega t$ vinden we, zo we tevens $\lambda = m\omega^2$ stellen

$$Z(x,y) = \lambda\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} G(x,y,\xi,\eta)\,Z(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Als nu $Z(x,y) = \sum\{\bar{z}(n,m)\,\bar{\varphi}_n(x)\bar{\varphi}_m(y)\}$
zo wordt de vergelijking:

$$\sum\{\bar{z}(n,m)\,\bar{\varphi}_n(x)\,\bar{\varphi}_m(y)\} \equiv \lambda\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\Big[\sum \bar{y}(n,m,\nu,\mu)\,\bar{\varphi}_n(x)\,\bar{\varphi}_m(y)\,.$$
$$.\sum \bar{z}(\nu',\mu')\,\bar{\varphi}_{\nu'}(\xi)\,\bar{\varphi}_{\mu'}(\eta)\,d\xi\,d\eta\Big] \equiv$$

$$\equiv \lambda \sum \bar{g}(n,m,\nu,\mu)\,\bar{\varphi}_n(x)\,\bar{\varphi}_m(y) \sum \bar{z}(\nu',\mu')\,\delta_{\nu'\nu}\,\delta_{\mu'\mu} \equiv$$

$$\equiv \lambda \sum_{m,m,\nu,\mu} \{\ \bar{g}(n,m,\nu,\mu)\ \bar{z}(\nu,\mu)\,\bar{\varphi}_n(x)\,\bar{\varphi}_m(y).$$

Zij $\lambda^* = \frac{1}{\lambda}$

Wij hebben dan bij een N-voudige approximatie $\nu = 1,\ldots N$; $\mu = 1,\ldots,N$ een stelsel van N^2 homogene vergelijkingen met de onbekenden $\bar{z}(\nu,\mu)$

$$\sum_{\nu,\mu} \bar{g}(n,m,\nu,\mu)\ \bar{z}(\nu,\mu) = \lambda^*\ \bar{z}(n,m).$$

Een andere oplossing dan de nuloplossing is alleen mogelijk zo de determinant D der coëfficiënten nul is.
De vergelijking van de graad N^2, $D = 0$ levert N^2 eigenwaarden λ^* op met evenzovele oplossingen van $\bar{z}(\nu,\mu)$.
Hiermee stellen we dus N^2 eigenfuncties op, welke weer te normeren zijn.
Noem de genormeerde eigenfuncties behorende bij λ^*_i : $\psi_i(x,y)$.
$\psi_i(x,y)$ voldoet dus aan de vergelijking

$$\psi_i(x,y) = \lambda_i \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} G(x,y,\xi,\eta)\ \psi_i(\xi,\eta)\ d\xi\, d\eta$$

bovendien is

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \psi_i(x,y)\,\psi_k(x,y)\ dx\ dy = 0$$

hetgeen een gevolg is van de symmetrie van $G(x,y,\xi,\eta)$

en is $\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \psi_i^{\,2}(x,y)\ dx\ dy = 1.$

Er bestaat dus alle grond voor de volgende definitie van wat we noemen zullen kanonieke Eigentransformaties

$$K^2\{W(x,y)\} = w(i) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \psi_i(x,y)\ W(x,y)\ dx\ dy$$

$$W(x,y) = K^{-2}\{w(i)\} = \sum_i w_i\,\psi_i(x,y)$$

Met deze kanonieke Eigentransformaties zijn weer vraagstukken op te lossen, zoals de gedwongen trilling van een plaat. De oplossing verloopt geheel analoog aan het eendimensionale probleem.
Zij de plaat in het punt (a,b) onderworpen aan een periodieke kracht $P \sin\alpha t$.
De integraalvergelijking luidt dan:

$$W(x,y,t) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} G(x,y,\xi,\eta)\ P\,U_1(a-\xi,b-\eta)\ \sin\alpha t\ d\xi\, d\eta\ -$$
$$- m\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} G(x,y,\xi,\eta)\ \frac{\partial^2 W(\xi,\eta,t)}{\partial t^2}\ d\xi\, d\eta$$

Voor het geval dat de beweging stationair is schrijven we

$$W(x,y,t) = W(x,y)\ \sin\alpha t.$$

Hiermee wordt de vergelijking:

$$W(x,y) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} G(x,y,\xi,\eta)\, P\, U_1(a-\xi, b-\eta)\, d\xi\, d\eta + m\alpha^2 \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} G(x,y,\xi,\eta)\, W(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= P\, G(x,y,a,b) + m\alpha^2 \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} G(x,y,\xi,\eta)\, W(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta .$$

Met de kanonieke Eigentransformaties krijgt men de volgende oplossing

$$\psi_i(x,y) = \lambda_i \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} G(x,y,\xi,\eta)\psi_i(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$\Delta^2\psi_i(x,y) = \lambda_i \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \Delta^2 G(x,y,\xi,\eta)\psi_i(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= \lambda_i \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \frac{U_1(x-\xi, y-\eta)}{D}\, \psi_i(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$\Delta^2\psi_i(x,y) = \frac{\lambda_i}{D}\psi_i(x,y)$$

$$W(x,y) = \sum w_i \psi_i(x,y) \quad \text{waarbij} \quad w_i = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \psi_i W\, dx\, dy$$

$$\Delta^2 W(x,y) = \sum w_i \Delta^2 \psi_i(x,y) = \sum \frac{\lambda_i}{D} w_i \psi_i(x,y)$$

$$K_k^2\left\{\Delta^2 W(x,y)\right\} = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \psi_k(x,y)\, \Delta^2 W(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \sum \frac{\lambda_i}{D} w_i \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \psi_i \psi_k\, dx\, dy = \sum \frac{\lambda_i}{D} w_i \delta_{ik} = \frac{\lambda_k w_k}{D}$$

De D.V. welke aequivalent is aan de beschouwde integraalvergelijking luidt:

$$\Delta^2 W = \frac{P}{D} U_1(x-a, y-b) + \frac{m\alpha^2}{D} W$$

$$K_i^2\left\{\Delta^2 W\right\} = \frac{P}{D}\psi_i(a,b) + \frac{m\alpha^2}{D} K_i^2\left\{W\right\}$$

$$\frac{\lambda_i w_i}{D} = \frac{P}{D}\psi_i(a,b) + \frac{m\alpha^2}{D} w_i$$

$$w_i = \frac{P\psi_i(a,b)}{\lambda_i - m\alpha^2} = \frac{P\psi_i(a,b)}{m(w_i^2 - \alpha^2)} .$$

Op klassieke manier zou de oplossing verder als volgt verlopen

Zij $P\, G(x,y,a,b) = \sum c_i \psi_i(x,y)$

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} P\, G(x,y,a,b)\, \psi_k(x,y)\, dx\, dy = \sum c_i \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \psi_i(x,y)\, \psi_k(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \sum c_i \delta_{ik} .$$

$$\therefore\ c_i = \int_0^{l_1}\int_0^{l_1} P\, G(x,y,a,b)\, \psi_i(x,y)\, dx\, dy = \frac{P\psi_i(a,b)}{\lambda_i}$$

Zij verder $W(x,y) = \sum w_i \psi_i(x,y)$

$$\sum w_i \gamma_i(x,y) = \sum \frac{P\psi_i(a,b)}{\lambda_i} \psi_i(x,y) + \sum \frac{\alpha^2}{\omega_i^2} w_i \lambda_i \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} G(x,y,\xi,\eta)\psi_i(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= \sum \frac{P\psi_i(a,b)}{\lambda_i} \psi_i(x,y) + \sum \frac{\alpha^2}{\omega^2} w_i \psi_i(x,y)$$

$$w_i = \frac{P\psi_i(a,b)}{\lambda_i(1-\frac{\alpha^2}{\omega^2})} = \frac{P\psi_i(a,b)}{m(\omega^2-\alpha^2)}$$

2. In de 12e Voordracht werden een aantal Laplace transformaties afgeleid van Besselfuncties welke voorzien waren van een soort dempingsfactor. Door van enigszins gewijzigde substituties gebruik te maken, kan men deze dempingsfactor vermijden.

We gaan uit van (5)

$$I_o(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{z+\frac{x^2}{4z}} \cdot \frac{dz}{z}$$

We stellen $x = b\sqrt{t^2-k^2}$ $\quad b>0\ ;\ t>k$

$z = \frac{1}{4}\xi(t-k)$ $\quad \frac{dz}{z} = \frac{d\xi}{\xi}$

zodat

$$I_o\left\{ b\sqrt{t^2-k^2} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{\frac{1}{4}\xi(t-k)+\frac{k^2(t+k)}{\xi}} \frac{d\xi}{\xi}$$

Hierna :

$$\sqrt{\xi} = \sqrt{s+b} + \sqrt{s-b} \rightarrow \xi = 2s + 2\sqrt{s^2-b^2} \qquad (13)$$

$$\frac{2b}{\xi} = \sqrt{s+b} - \sqrt{s-b} \rightarrow \frac{4b^2}{\xi} = 2s - 2\sqrt{s^2-b^2} \qquad (14)$$

Door optelling en aftrekking ontstaat uit (13) en (14)

$$\xi + \frac{4b^2}{\xi} = 4s \rightarrow s = \frac{1}{4}\xi + \frac{b^2}{\xi} \qquad (15)$$

$$\xi - \frac{4b^2}{\xi} = 4\sqrt{s^2-b^2} \qquad \sqrt{s^2-b^2} = \frac{1}{4}\xi - \frac{b^2}{\xi} \qquad (16)$$

Uit (16) door differentiatie

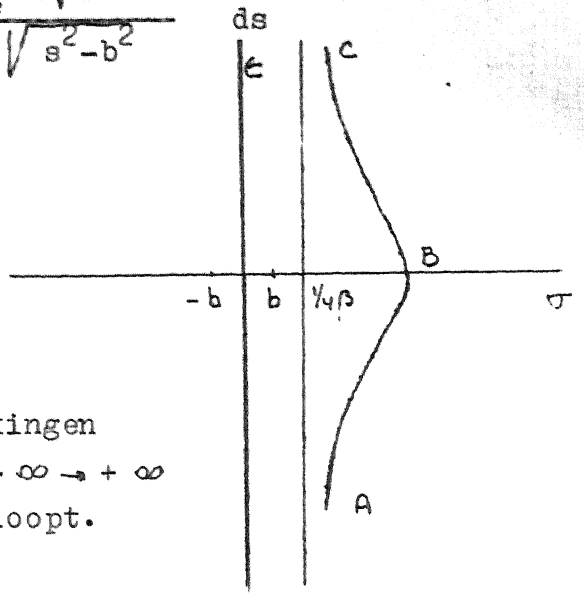
$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{1}{4} - \frac{b^2}{\xi^2} = \frac{1}{\xi}\left(\frac{1}{4}\xi - \frac{b^2}{\xi}\right) = \frac{\sqrt{s^2-b^2}}{\xi}$$

$$\frac{ds}{\sqrt{s^2-b^2}} = \frac{d\xi}{\xi}$$

$$\frac{1}{4}\xi(t-k) + \frac{b^2(t+k)}{\xi} = t\left(\frac{1}{4}\xi + \frac{b^2}{\xi}\right) - k\left(\frac{1}{4}\xi - \frac{b^2}{\xi}\right) = st - k\sqrt{s^2-b^2}$$

zodat

$$I_o\left\{ b\sqrt{t^2-k^2} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABC} e^{st} \frac{e^{-k\sqrt{s^2-b^2}}}{\sqrt{s^2-b^2}} ds$$



Zij $s = \sigma + i\epsilon$

$\xi = \beta + i\eta$

$$\sigma + i\epsilon = \tfrac{1}{4}\beta + \tfrac{1}{4} i\eta + \frac{b^2}{\beta + i\eta}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \tfrac{1}{4}\beta + \frac{b^2\beta}{\beta^2+\eta^2} \\ \epsilon &= \tfrac{1}{4}\eta - \frac{b^2\eta}{\beta^2+\eta^2} \end{aligned}\right\}$$ parametervergelijkingen in η, die van $-\infty \to +\infty$ loopt.

$$\tfrac{1}{4}\beta \leq \sigma \leq \tfrac{1}{4}\beta + \frac{b^2}{\beta}$$

Door $\frac{1}{4}\beta$ loopt weer een verticale asymptoot terwijl het snijpunt met de σ as rechts hiervan gelegen is in $\frac{1}{4}\beta + \frac{b^2}{\beta}$

Als men er zorg voor draagt, dat $\frac{1}{4}\beta > b$ zal in het gehele gearceerde gebied geen singulariteit voorkomen. De integratie langs de kromme kan dus vervangen worden door die langs de asymptoot

$$I_o\left\{ b\sqrt{t^2-k^2} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \frac{e^{-k\sqrt{s^2-b^2}}}{\sqrt{s^2-b^2}} ds \qquad \sigma > b$$

Om aan te tonen dat voor $t < k$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{-(k-t)s} \frac{e^{k\{s-\sqrt{s^2-b^2}\}}}{\sqrt{s^2-b^2}} ds$$

naar nul gaat, komt het er in wezen op neer dat we aantonen dat

$$\lim_{s\to\infty} \left| \frac{e^{k\{s-\sqrt{s^2-b^2}\}}}{\sqrt{s^2-b^2}} \right| \to 0$$

op een cirkel met het middelpunt in de oorsprong en straal = R hebben we

$$\max \left| \frac{e^{k\{s-\sqrt{s^2-b^2}\}}}{\sqrt{s^2-b}} \right| = \frac{e^{k\{R-\sqrt{R^2-b^2}\}}}{\sqrt{R^2-b^2}}$$

$$= \frac{e^{kR\left\{1-\sqrt{1-\frac{b^2}{R^2}}\right\}}}{R\sqrt{1-\frac{b^2}{R^2}}} < \frac{e^{kR\left(1-1+\frac{b^2}{R^2}\right)}}{R\sqrt{1-\frac{b^2}{R^2}}} = \frac{e^{\frac{kb^2}{R}}}{R\sqrt{1-\frac{b^2}{R^2}}}$$

hetgeen inderdaad bij $R \to \infty$ naar nul gaat.

We hebben dus

$$\frac{e^{-k\sqrt{s^2-b^2}}}{\sqrt{s^2-b^2}} = \int s^{-st}\, I_o(b\sqrt{t^2-k^2})\, dt \qquad (17)$$

Hieruit ontstaat door links en rechts naar k te differentieren

$$e^{-k\sqrt{s^2-b^2}} - e^{-ks} = \int_b^{\infty} e^{-st}\, \frac{bk}{\sqrt{t^2-k^2}}\, I_1(b\sqrt{t^2-k^2})\, dt \qquad (18)$$

Men kan eventueel in (11)

$$\frac{e^{-k\sqrt{s(s+a)}}}{\sqrt{s(s+a)}} = \int_k^{\infty} e^{-(s+\frac{1}{2}a)t}\, I_o\left\{\tfrac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2}\right\} dt$$

substitueren $\frac{1}{2}a=b$

$$\frac{e^{-k\sqrt{s(s+2b)}}}{\sqrt{s(s+2b)}} = \int_k^{\infty} e^{-(s+b)t}\, I_o\left\{b\sqrt{t^2-k^2}\right\} dt$$

Zij nu $s+b=\sigma$ $\quad \left.\begin{array}{l} s=\sigma-b \\ s+2b=\sigma+b \end{array}\right\}$ $s(s+2b)=\sigma^2-b^2$

$$\frac{e^{-k\sqrt{\sigma^2-b^2}}}{\sqrt{\sigma^2-b^2}} = \int_k^{\infty} e^{-\sigma t}\, I_o\left\{b\sqrt{t^2-k^2}\right\} dt$$

Evenwel ontsnapt ons hier de voorwaarde dat het reële deel van σ gro[illegible] dan b zijn moet.

3. Twee dimensionale Laplace Transformaties.

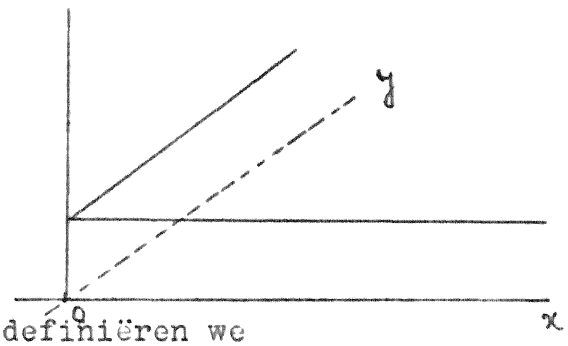
Op dezelfde wijze als de eendimensionale Eigentransformaties uitgebrei[illegible] werden tot tweedimensionale kunnen ook de Laplacetransformaties tot twee-dimensionale worden uitgebreid.

We definiëren

$$L^2\left[F(x,y)\right] = f(s,\sigma) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(sx+\sigma y)}\, F(x,y)\, dx\, dy$$

De uitbreidingen van de stap en pulsfuncties zijn de volgende

$$U_{oo}(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ en of } y \leq 0 \\ 1 & x > 0 \text{ en } y > 0 \end{cases}$$



$$L^2\left[U_{oo}(x,y)\right] = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(sx+\sigma y)}\, dx\, dy =$$

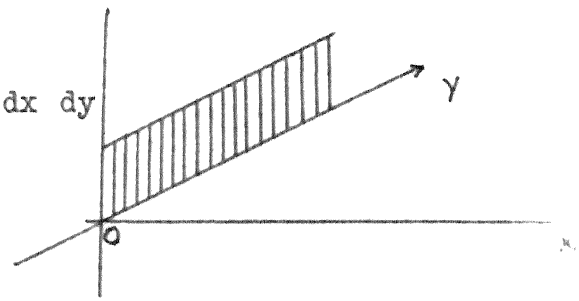
$$= \left[\frac{-e^{-sx}}{s}\right]_0^{\infty} \cdot \left[\frac{-e^{-\sigma y}}{\sigma}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s\sigma} \qquad (19)$$

Als operator onder het integraalteken definiëren we

$$U_{1o}(x,y)\, dx = d_x\, U_{oo}(x,y)$$

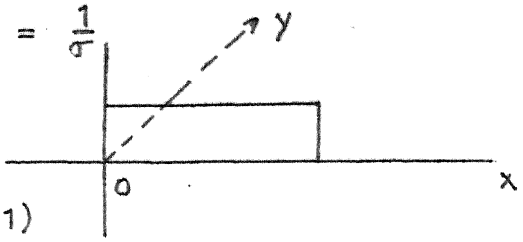
$$L^2\left[U_{1o}(x,y)\right] = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(sx+\sigma y)} U_{1o}(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\sigma y} dy \int_0^{\infty} e^{-sx}\, d_x(U_{oo})\, dx =$$



$$= \int_0^\infty e^{-\sigma y}\, dy\left[\left[\, e^{-sx}\, U_{oo}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx}\, U_{oo}\, dx\right] =$$

$$= s\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(sx+\sigma y)} U_{oo}\, dx\, dy = \frac{s}{s\sigma} = \frac{1}{\sigma} \qquad (20)$$



Evenzo:

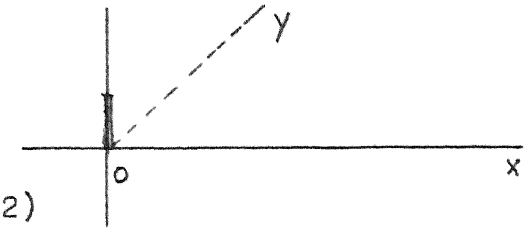
$$U_{o1}(x,y)\, dy = d_y\, U_{oo}$$

$$L^2\left\{ U_{o1}(x,y)\right\} = \frac{1}{s} \qquad (21)$$

$$U_{11}(x,y)\, dx\, dy = d_y\, U_{1o}(x,y) =$$

$$= d_x\, U_{o1}(x,y) = d_x\, d_y\, U_{oo}(x,y)$$

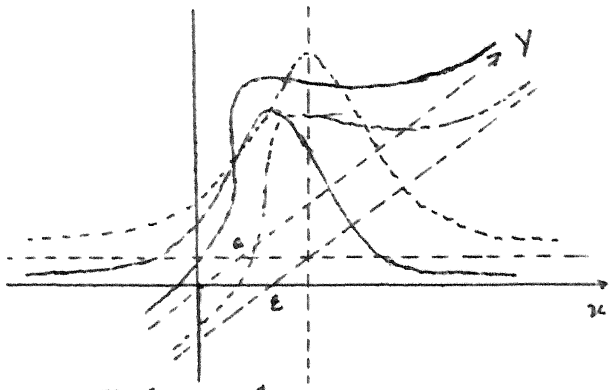
$$L^2\left\{ U_{11}(x,y)\right\} = 1 \qquad (22)$$



We kunnen $U_{11}(x,y)$ eventueel opvatten als een Dirac functie.

Zij bijv. $\delta(x-\epsilon, y-\epsilon, a) = \frac{1}{a\pi}\, e^{-\frac{(x-\epsilon)^2+(y-\epsilon)^2}{a}}$

Welke waarde a ook bezit, de inhoud van het deel van het door δ weergegeven klokvormige lichaam boven het xy vlak , blijkt een te zijn, inners:



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\epsilon, y-\epsilon, a)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{a}{a\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\epsilon)^2+(y-\epsilon)^2}{a}}\, d\left(\frac{x-\epsilon}{\sqrt{a}}\right) d\left(\frac{y-\epsilon}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{\pi}\,\pi = 1$$

Men kan dan ook $U_{11}(x,y)$ opvatten als:

$$U_{11}(x,y) = \lim_{\substack{a\to o\\ \epsilon\to o}} (x-\epsilon, y-\epsilon, a)$$

Bepalen we de dubbelzijdige 2 dimensionale Laplacetransformatie van

$\delta(x-\epsilon, y-\epsilon, a)$

$$L^2\left[\delta(x-\epsilon, y-\epsilon, a)\right. = \frac{1}{a\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left\{sx+\sigma y+\frac{(x-\epsilon)^2+(y-\epsilon)^2}{a}\right\}} dx\, dy =$$

$$= \frac{a}{a\pi}\, e^{-\epsilon(s+\sigma)+\frac{a}{4}(s^2+\sigma^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left\{\left(\frac{x-\epsilon}{\sqrt{a}}+\frac{s\sqrt{a}}{2}\right)^2+\left(\frac{y-\epsilon}{\sqrt{a}}+\frac{\sigma\sqrt{a}}{2}\right)^2\right\}}$$

$$d\left(\frac{x}{\sqrt{a}}+\frac{s\sqrt{a}}{2}\right) d\left(\frac{y}{\sqrt{a}}+\frac{\sigma\sqrt{a}}{2}\right) =$$

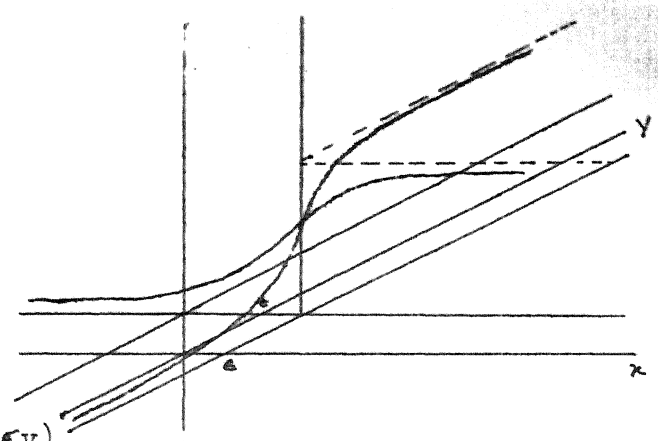
$$= e^{-\epsilon(s+\sigma)+\frac{a}{4}(s^2+\sigma^2)}$$

Na limietovergang krijgen we dus

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ \epsilon\to 0^+}} L^2\left\{\delta(x-\epsilon, y-\epsilon, a)\right\} = 1$$

Als δ functie van Dirac is U_{oo} op te vatten, als

$$U_{oo} = \lim_{\substack{a \to o \\ \epsilon \to o^+}} \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \delta\,(x-\epsilon, y-\epsilon, a)\; dx\; dy$$



Inductief kunnen we bewijzen, dat

$$L^2\left[\, U_{po}(x,y)\right] = \frac{s^{p-1}}{\sigma} \qquad (23)$$

zo $U_{po}\,dx = d_x\, U_{(p-1)o}$

Zij $L^2\left[U_{po}(x,y)\right] = \frac{s^{p-1}}{\sigma}$, zo is

$$L^2\left[\, U_{(p+1)o}(x,y)\right] = \int_o^\infty\int_o^\infty e^{-(sx+\sigma y)}\, d_x U_{po}\; dy =$$

$$= \int_o^\infty e^{-\sigma y}\, dy \left[\left[\, e^{-sx}\, U_{po}\right]_o^\infty + s\int_o^\infty e^{-sx}\, U_{po}\; dx\right] =$$

$$= s\int_o^\infty\int_o^\infty e^{-(sx+\sigma y)}\, U_{po}\; dx\; dy = \frac{s^p}{\sigma}$$

De stelling is waar voor $p=1$, dus is ze algemeen waar.

Evenzo is te bewijzen

$$L^2\left[\, U_{oq}(x,y)\right] = \frac{\sigma^{q-1}}{s} \qquad (24)$$

Het inductieve bewijs voor de stelling

$$L^2\left[\, U_{pq}(x,y)\right] = s^{p-1}\sigma^{q-1} \qquad (25)$$

gaat als volgt:

per definitie is:

$$U_{pq}(x,y)\; dx\; dy = d_x\, d_y\, U_{(p-1)(q-1)}$$

$$L^2\left[\, U_{(p+1)(q+1)}\,(x,y)\right] = \int_o^\infty\int_o^\infty e^{-(sx+\sigma y)}\; d_x\, U_{p(q+1)}\; dy =$$

$$= \int_o^\infty e^{-\sigma y}\, dy \left[\left[\, e^{-sx}\, U_{p(q+1)}\right]_o^\infty + s\int_o^\infty e^{-sx}\, U_{p(q+1)}\; dx\right] =$$

$$= s\int_o^\infty\int_o^\infty e^{-(sx+\sigma y)}\, U_{p(q+1)}\; dx\; dy = s\int_o^\infty\int_o^\infty e^{-(sx+\sigma y)}\; dx\; d_y\, U_{pq} =$$

$$= s\int_o^\infty e^{-sx}\, dx\left[\left[\, e^{-\sigma y}\, U_{pq}\right]_o^\infty + \sigma\int_o^\infty e^{-\sigma y}\, U_{pq}\; dy\right] =$$

$$= s\,\sigma\int_o^\infty e^{-(sx+\sigma y)}\, U_{pq}\; dx\; dy = s^p\,\sigma^q$$

Maar nu is voor $p > q$

$$L^2\left[\, U_{(p-q)o}(x,y)\right] = \frac{s^{p-q-1}}{\sigma} \qquad \text{(zie 23)}$$

en voor $q > p$

$$L^2\left[\, U_{o(q-p)}(x,y)\right] = \frac{\sigma^{q-p-1}}{s} \qquad \text{(zie 24)}$$

zodat de stelling hiermee bewezen is.

4. Uitbreiding van het convolutie begrip tot twee dimensies.

Voor het product van twee beeldfuncties is te schrijven

$$f(s,\sigma)g(s,\sigma) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(sx+\sigma y)}F(x,y)\,dx\,dy \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s\xi+\sigma\eta)}G(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\{s(x+\xi)+\sigma(y+\eta)\}}F(x,y)\,G(\xi,\eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta \quad .$$

Om tot de convolutie hiervan te komen is de volgende hulpstelling benodigd

Lemma

Als $F(x,y) = F_1(x,y) + F_2(x,y)$

$$|F_1(x,y)| < M_1\, e^{\alpha x+\beta y}$$

$$F_2(x,y) = \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=r}\sum_{l}\left[\, c_{ijl}\, U_{ij}\{(x-a_1),(y-b_1)\}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=r}\sum_{l} |\, c_{ijl}\,| < M_2\, e^{\gamma h}$$

$$G(\xi,\eta) = G_1(\xi,\eta) + G_2(\xi,\eta)$$

$$|G_1(\xi,\eta)| < M_3\, e^{\delta\xi+\beta\eta}$$

$$G_2(\xi,\eta) = \sum_{m=1}^{m=q}\sum_{n=1}^{n=w}\sum_{r}\left[\, d_{mnr}\, U_{mn}\{(\xi-a_r),(y-b_r)\}\right.$$

$$\sum_{m=1}^{m=q}\sum_{n=1}^{n=w}\sum_{r} |\, d_{mnr}\,| < M_4\, e^{\gamma k}$$

zo zal het deel van de integraal

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\{s(x+\xi)+\sigma(y+\eta)\}}F(x,y)G(\xi,\eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta$$

over het gebied $x+\xi > h$, $y+\eta > k$ voor $h \to \infty$ en $k \to \infty$ naar nul gaan.

Bewijs:

$$f(s,\sigma)g(s,\sigma) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\{s(x+\xi)+\sigma(y+\eta)}F_1(x,y)G_1(\xi,\eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta +$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(sx+\sigma y)}F_1(x,y)\,dx\,dy \sum_{m=1}^{m=q}\sum_{n=1}^{n=w}\sum_{r} d_{mnr}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s\xi+\sigma\eta)} U_{mn}(\xi-a_r,\eta-b_r)\,d\xi\,d\eta +$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s\xi+\sigma\eta)}G_1(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=r}\sum_{l} c_{ijl}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(sx+\sigma y)}U_{ij}(x-a_1,y-b_1)$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=r}\sum_{l} c_{ijl}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(sx+\sigma y)}U_{ij}(x-a_1,y-b_1)\,dx\,dy \sum_{m=1}^{m=q}\sum_{n=1}^{n=w}\sum_{r} d_{mnr}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s\xi+\sigma\eta)}U_{mn}(\xi-a_r)(\eta-b_r)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\{s(x+\xi)+\sigma(y+\eta)\}} F_1(x,y)G_1(\xi,\eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta +$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(sx+\sigma y)} F_1(x,y)\,dx\,dy \sum_{m=1}^{m=q}\sum_{n=1}^{n=w}\sum_{r} d_{mnr} s^m \sigma^n \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s\xi+\sigma\eta)} \cdot$$

$$\cdot U_{00}(\xi-a_r,\eta-l_r)\,d\xi\,d\eta +$$

$$+ \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s\xi+\sigma\eta)} G_1(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=v}\sum_{l} c_{ijl} s^i \sigma^j \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(sx+\sigma y)} \cdot$$

$$\cdot U_{00}(x-a_1,y-b_1)\,dx\,dy +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=v}\sum_{l} c_{ijl} s^i \sigma^j \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(sx+\sigma y)} U_{00}(x-a_1,y-b_1) \sum_{m=1}^{m=q}\sum_{n=1}^{n=w}\sum_{r} d_{mnr} s^m \sigma^n$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s\xi+\sigma\eta)} U_{00}(\xi-a_r,\eta-b_r)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\{s(x+\xi)+\sigma(y+\eta)\}} \Big[F_1(x,y)G_1(\xi,\eta) +$$

$$+ F_1(x,y) \sum_{m=1}^{m=q}\sum_{n=1}^{n=w}\sum_{r} d_{mnr} s^m \sigma^n U_{00}(\xi-a_r,\eta-b_r) +$$

$$+ G_1(\xi,\eta) \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=v}\sum_{l} c_{ijl} s^i \sigma^j U_{00}(x-a_1,y-b_1) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=v}\sum_{m=1}^{m=q}\sum_{n=1}^{n=w}\sum_{l}\sum_{r} c_{ijl}\, d_{mnr}\, s^{i+m} \sigma^{j+n}\, U_{00}(x-a_1,y-b_1)$$

$$U_{00}(\xi-a_r,\eta-b_r)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta$$

Voor het gebied $x+\xi > h$, $y+\eta > k$ geldt

$$\left| \int_0^k\int_0^k\int_0^k\int_0^k e^{-\{s(x+\xi)+\sigma(y+\eta)} F(x,y)G(\xi,\eta)\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta \right| <$$

$$< \int_0^k\int_0^k\int_0^k\int_0^k e^{-(sh+\sigma k)} \Big[|F_1(x,y)|\,|G_1(\xi,\eta)| +$$

$$+ |F_1(x,y)| \sum_{m=1}^{m=q}\sum_{n=1}^{n=w}\sum_{r} |d_{mnr}| s^m \sigma^n + |G_1(\xi,\eta)| \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=v}\sum_{l} |c_{ijl}| s^i \sigma^j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=p}\sum_{j=1}^{j=v}\sum_{m=1}^{m=q}\sum_{n=1}^{n=w}\sum_{r}\sum_{l} |c_{ijl}|\,|d_{mnr}|\, s^{i+m} \sigma^{j+n}\, dx\,dy\,d\xi\,d\eta <$$

$$< \int_0^k\int_0^k\int_0^k\int_0^k \Big[M_1M_3\, e^{-\{(s-2\alpha)h+(\sigma-2\beta)k} + \{ M_1M_4\, s^q\sigma^w + M_3M_2\, s^p \sigma^v \}$$

$$e^{-\{(s-\alpha-\gamma)h+(\sigma-\beta-\gamma)k\}} +$$

$$+ M_2M_4\, s^{p+q} \sigma^{v+w}\, e^{-\{(s-2\gamma)h+(\sigma-2\gamma)k} \Big]\,dx\,dy\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \frac{h^2k^2}{4} \left[\frac{M_1M_3}{e^{(s-2\alpha)h+(\sigma-2\beta)k}} + \frac{M_1M_4 s^q\sigma^w + M_3M_2 s^p \sigma^v}{e^{(s-\alpha-\gamma)h+(\sigma-\beta-\gamma)k}} + \frac{M_2M_4 s^{p+q}\ \sigma^{v+w}}{e^{(s-2\gamma)h+(\sigma-2\gamma)k}} \right]$$

tenminste als $s > 1$ en $\sigma > 1$

We zorgen er tevens voor dat

$$s > \max \begin{cases} 2\alpha \\ \alpha+\gamma \\ 2\gamma \end{cases} \qquad \sigma > \max \begin{cases} 2\beta \\ \beta+\gamma \\ 2\gamma \end{cases}$$

Laten we h en k onbegrensd aangroeien zo nadert het rechterlid van de ongelijkheid tot nul. q.d.e.

De viervoudige integraal waarmee $f(s,\sigma)y(s,\sigma)$ berekend moet worden, kan dus beperkt blijven tot het gebied

$$\left.\begin{aligned} x+\xi &< h \\ y+\eta &< k \end{aligned}\right\} \begin{aligned} h &\to \infty \\ k &\to \infty \end{aligned}$$

Dit deel vormen we met de volgende coördinaten transformatie om

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x+\xi \\ \gamma &= x \\ \beta &= y+\eta \\ \nu &= y \end{aligned}\right\} \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \gamma \\ \xi &= \alpha-\gamma \\ y &= \nu \\ \eta &= \beta-\nu \end{aligned}\right.$$

met de Jacobiaan:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \gamma} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \nu} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \gamma} & \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} & \frac{\partial \xi}{\partial \nu} & \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \gamma} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \nu} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} & \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \eta}{\partial \nu} & \frac{\partial \eta}{\partial \beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f(s,\sigma)g(s,\sigma) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s\alpha+\sigma\beta)}\,d\alpha\,d\beta \int_0^\alpha\int_0^\beta F(\gamma,\nu)G(\alpha-\gamma,\beta-\nu)\,d\gamma\,d\nu$$

$$\therefore\quad F(\alpha,\beta)^{*}G(\alpha,\beta) = \int_0^\alpha\int_0^\beta F(\gamma,\nu)G(\alpha-\gamma,\beta-\nu)\,d\gamma\,d\nu$$

of door assenvernoeming

$$F(x,y)^{*}G(x,y) = \int_0^x\int_0^y F(\xi,\eta)G(x-\xi,y-\eta)\,d\xi\,d\eta \qquad (26)$$

zodat

$$f(s,\sigma)g(s,\sigma) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(sx+\sigma y)}\,F(x,y)^{*}G(x,y)\,dx\,dy$$

Uit (26) krijgt men door te stellen:

$$(x-\xi)=\alpha \to \xi = x-\alpha \to d\xi = -d\alpha$$
$$(y-\eta)=\beta \to \eta = y-\beta \qquad d\eta = -d\beta$$

$$F(x,y)^{*}G(x,y) = \int_x^0\int_y^0 F(x-\alpha,y-\beta)\,G(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

$$= \int_0^x\int_0^y F(x-\alpha,y-\beta)\,G(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta =$$

$$= G(x,y)^{*}F(x,y) \qquad (27)$$

MATHEMATISCH CENTRUM
2e Boerhaavestraat 49
AMSTERDAM (O.)

Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)
te 's-Gravenhage
15e Voordracht: 12 Mei 1954.
Spreker: Ir R.W.Trense.

Gebruik makende van het convolutie begrip en de tijdens de 14e voordracht afgeleide stelling, dat

$$f(s,\sigma)g(s,\sigma) = L^2\{F(x,y)^* G(x,y)\}$$

waarbij:

$$F(x,y)^* G(x,y) = \int_0^x\int_0^y F(x-\xi,y-\eta)G(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

kunnen we de fundamentele stellingen afleiden, waarmee partiële differentiaalvergelijkingen over te brengen zijn naar de $f(s,\sigma)$ruimte. Systematisch te werk gaande krijgen we allereerst een stelling, welke als bij de eendimensionale Laplacetransformaties zeer goed bruikbaar is voor een inpassing van de tweedimensionale Laplacetransformaties in de groepentheorie.

$$f(s,\sigma).1 = L^2\{F(x,y)^* U_{11}(x,y)\}$$

$$F(x,y)^* U_{11}(x,y) = \int_0^x\int_0^y F(x-\xi,y-\eta)U_{11}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$= \{F(x-\xi,y-\eta)\}_{\substack{\xi=0\\ \eta=0}} = F(x,y) \qquad (28)$$

Vervolgens:

$$s\,f(s,\sigma) = L^2\{F(x,y)^* U_{21}(x,y)\}$$

$$F(x,y)^* U_{21}(x,y) = \int_0^x\int_0^y F(x-\xi,y-\eta)U_{21}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int_0^x\int_0^y F(x-\xi,y-\eta)\,d\xi\,U_{11}(\xi,\eta)\,d\eta =$$

$$= \int_0^y d\eta\left[\left[F(x-\xi,y-\eta)U_{11}(\xi,\eta)\right]_0^x + \int_0^x F'_{(x-\xi)}(x-\xi,y-\eta)U_{11}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right] =$$

$$= \int_0^y F(0,y-\eta)U_{11}(x,\eta) + \int_0^x\int_0^y F'_{(x-\xi)}(x-\xi,y-\eta)U_{11}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta =$$

$$= F(0,y)^* U_{11}(x,y) + F'_x(x,y) =$$

$$= F(0,y)U_{10}(x,y) + F'_x(x,y)$$

$$s\,f(s,\sigma) = L^2\{F(0,y)U_{10}(x,y)\} + L^2\{F'_x(x,y)\}$$

$$= L'_y\{F(0,y)\} + L^2\{F'_x(x,y)\}$$

$$L^2\{F'_x(x,y)\} = s\,f(s,\sigma) - L'_y\{F(0,y)\} \qquad (29)$$

Zij $s^n f(s,\sigma) - s^{n-1} L'_y\{F(0,y)\} - s^{n-2} L'_y\{F'_x(0,y)\} \ldots$

$$- L'_y\{F_x^{(n-1)}(0,y)\} = L^2\{F_x^{(n)}(x,y)\}$$

dan is

$$s\left[s^n f(s,\sigma) - s^{n-1} L'_y\{F(0,y)\} - s^{n-2} L'_y\{F'_x(0,y)\} - L'_y\{F_x^{(n-1)}(0,y)\}\right]$$

de Laplacetransformatie van

$$F_x^{(n)}(x,y)^* U_{21}(x,y) = \int_0^x\int_0^y F^{(n)}_{(x-\xi)}(x-\xi,y-\eta)U_{21}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int_0^x\int_0^y F^{(n)}_{(x-\xi)}(x-\xi,y-\eta)\,d_\xi U_{11}(\xi,\eta)\,d\eta =$$

$$= \int_0^y d\eta\left[\left[F^{(n)}_{(x-\xi)}(x-\xi,y-\eta)\,U_{11}(\xi,\eta)\right]_0^x + \int_0^x F^{(n+1)}_{(x-\xi)}(x-\xi,y-\eta)U_{11}(\xi,\eta)\,d\xi\right] =$$

$$= \int_0^y F_x^{(n)}(0,y-\eta)\,U_{11}(x,\eta)\,d\eta + F_x^{(n+1)}(x,y) =$$

$$= F_x^{(n)}(0,y)^* U_{11}(x,y) + F_x^{(n+1)}(x,y) =$$

$$= F_x^{(n)}(0,y)\,U_{10}(x,y) + F_x^{(n+1)}(x,y)$$

zodat

$$s^{n+1} f(s,\sigma) - s^n L'_y\{F(0,y)\} - \ldots\ldots\ L'_y\{F_x^{(n)}(0,y)\} = L^2\{F_x^{(n+1)}(x,y)\}$$

In verband met (29) is hiermee dus inductief bewezen dat:

$$L^2\{F_x^{(n)}(x,y)\} = s^n L^2\{F(x,y)\} - s^{n-1} L'_y\{F(0,y)\} \ldots L'_y\{F_x^{(n-1)}(o,y)\} \quad (30)$$

Evenzo is aan te tonen dat

$$L^2\{F_y^n(x,y)\} = \sigma^n L^2\{F(x,y)\} - \sigma^{n-1} L'_y\{F(x,0)\} - \ldots L'_y\{F_y^{(n-1)}(x,0)\} \quad (31)$$

Verder volgt uit (29)

$$s\sigma f(s,\sigma) - \sigma L'_y\{F(0,y)\} = L^2\{F'_x(x,y)^* U_{12}(x,y)\}$$

$$F'^*_x U_{12} = \int_0^x\int_0^y F'_{(x-\xi)}(x-\xi,y-\eta)\,U_{12}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \int_0^x\int_0^y F'_{(x-\xi)}(x-\xi,y-\eta)\,d_\eta U_{11}(\xi,\eta)\,d\xi =$$

$$= \int_0^x\left[F'_{(x-\xi)}(x-\xi,y-\eta)\,U_{11}(\xi,\eta)\right]_0^y d\xi +$$

$$+ \int_0^x\int_0^y F''_{\binom{x-\xi}{y-\eta}}(x-\xi,y-\eta)\,U_{11}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta =$$

$$= F'_x(x,0)^* U_{11}(x,y) + F''_{xy}(x,y) =$$

$$= F'_x(x,0)\,U_{01}(x,y) + F''_{xy}(x,y)$$

$$s\sigma f(s,\sigma) - \sigma L'_y\{F(0,y)\} = L^2\left\{F''_{\substack{x\\y}}(x,y)\right\} + L^2\left\{F'_x(x,0)\,U_{01}(x,y)\right\} =$$

$$= L^2\left\{F''_{\substack{x\\y}}(x,y)\right\} + L'_x\left\{F'_x(x,0)\right\}.$$

Maar nu is

$$L'_x\left\{F'_x(x,0)\right\} = s\,L'_x\left\{F(x,0)\right\} - F(0,0)$$

zodat

$$s\sigma f(s,\sigma) - \sigma L'_y\left\{F(0,y)\right\} - s\,L'_x\left\{F(x,0)\right\} + F(0,0) =$$

$$= L^2\left\{F''_{\substack{x\\y}}(x,y)\right\} \qquad (32)$$

Als voortzetting van (32) zullen we door volledige inductie bewijzen, dat:

$$L^2\left\{F^{2n}_{\substack{x^n\\y^n}}(x,y)\right\} = s^n\sigma^n f(s,\sigma) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-m-1}\sigma^{n-m}\,L'_y\left\{F^{2m}_{\substack{x^m\\y^m}}(0,y)\right\} -$$

$$- \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-m}\;{}^{n-m-1}L'_x\left\{F^{2m}_{\substack{x^m\\y^m}}(x,0)\right\} + \sum_{m=0}^{n-1}(s\sigma)^{n-m-1}F^{2m}_{\substack{x^m\\y^m}}(0,0) \qquad (33)$$

Immers als de stelling waar is voor n volgt uit (32)

$$L^2\left\{F^{2n+2}_{\substack{x^{n+1}\\y^{n+1}}}(x,y)\right\} = s\sigma L^2\left\{F^{2n}_{\substack{x^n\\y^n}}(x,y)\right\} - \sigma L'_y\left\{F^{2n}_{\substack{x^n\\y^n}}(0,y)\right\} -$$

$$- s\,L'_x\left\{F^{2n}_{\substack{x^n\\y^n}}(x,0)\right\} + F^{2n}_{\substack{x^n\\y^n}}(0,0) =$$

$$= s^{n+1}\sigma^{n+1}f(s,\sigma) - \sigma L'_y\left\{F^{2n}_{\substack{x^n\\y^n}}(0,y)\right\} - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-m}\;{}^{n-m+1}L'_y\left\{F^{2m}_{\substack{x^m\\y^m}}(0,y)\right\} -$$

$$- sL'_x\left\{F^{2n}_{\substack{x^n\\y^n}}(x,0)\right\} - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-m+1}\sigma^{n-m}\,L'_x\left\{F^{2m}_{\substack{x^m\\y^m}}(x,0)\right\} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{n-1}(s\sigma)^{n-m}F^{2m}_{\substack{x^m\\y^m}}(0,0) + F^{2n}_{\substack{x^n\\y^n}}(0,0) =$$

$$= s^{n+1}\sigma^{n+1}f(s,\sigma) - \sum_{m=0}^{n} s^{n-m}\sigma^{n-m+1}\,L'_y\left\{F^{2m}_{\substack{x^m\\y^m}}(0,y)\right\} -$$

$$- \sum_{m=0}^{n} s^{n-m+1}\sigma^{n-m}\,L'_x\left\{F^{2m}_{\substack{x^m\\y^m}}(x,0)\right\} + \sum_{m=0}^{n}(s\sigma)^{n-m}F^{2m}_{\substack{x^m\\y^m}}(0,0).$$

Daar 32 een verbijzondering is van (33) is (33) bewezen.
Substitueren we in (33):

$$s^{n-m-1}\,\sigma^{n-m}\,L'_y\left\{F^{2m}_{\substack{x^m\\y^m}}(0,y)\right\} = s^{n-m-1}\,\sigma^{n}\,L'_y\left\{F^{m}_{x^m}(0,y)\right\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{n-m-1}\,\sigma^{n-k-1}\,F^{m+k}_{\substack{x^m\\y^k}}(0,0)$$

en

$$s^{n-m}\,\sigma^{n-m-1}\,L'_x\left\{F^{2m}_{\substack{x^m\\y^m}}(x,0)\right\} = s^{n}\,\sigma^{n-m-1}\,L'_x\left\{F^{m}_{y^m}(x,0)\right\} - \sum_{l=0}^{m-1} s^{n-l-1}\,\sigma^{n-m-1}\,F^{m+1}_{\substack{x^l\\y^m}}(0,0)$$

zo krijgen we :

$$L^2\left\{F^{2n}_{\substack{x^n\\y^n}}(x,y)\right\} = s^n\sigma^n f(s,\sigma) - \sigma^n \sum_{m=0}^{m-1} s^{n-m-1}\,L'_y\left\{F^{m}_{x^m}(0,y)\right\} -$$

$$- s^n \sum_{m=0}^{m-1} \sigma^{n-m-1}\,L'_x\left\{F^{m}_{y^m}(x,0)\right\} + \sum_{m=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} s^{n-m-1}\,\sigma^{n-k-1}\,F^{m+k}_{\substack{x^m\\y^m}}(0,0) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1} s^{n-l-1}\,\sigma^{n-m-1}\,F^{m+1}_{\substack{x^l\\y^m}}(0,0) + \sum_{m=0}^{m-1}(s\sigma)^{n-m-1}\,F^{2m}_{\substack{x^m\\y^m}}(0,0) =$$

$$= s^n\sigma^n f(s,\sigma) - \sigma^n \sum_{m=0}^{m-1} s^{n-m-1}\,L'_y\left\{F^{m}_{x^m}(0,y)\right\} -$$

$$- s^n \sum_{m=0}^{m-1} \sigma^{n-m-1}\,L'_x\left\{F^{m}_{y^m}(x,0)\right\} + \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1} s^{n-k-1}\sigma^{n-l-1}\,F^{k+1}_{\substack{x^k\\y^l}}(0,0) \qquad (34).$$

Substitueren we (34) in (29):

$$L^2\left\{F^{2n+1}_{\substack{x^{n+1}\\y^n}}(x,y)\right\} = s^{n+1}\sigma^n f(s,\sigma) - \sigma^n \sum_{m=0}^{m-1} s^{n-m}\,L'_y\left\{F^{m}_{x^m}(0,y)\right\} -$$

$$- s^{n+1} \sum_{m=0}^{m-1} \sigma^{n-m-1}\,L'_x\left\{F^{m}_{y^m}(x,0)\right\} + \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1} s^{n-k}\,\sigma^{n-l-1}\,F^{k+1}_{\substack{x^k\\y^l}}(0,0)$$

$$- L'_y\left\{F^{2n}_{\substack{x^n\\y^n}}(0,y)\right\} \qquad (35).$$

Maar nu is

$$L'_y\left\{F^{2n}_{\substack{x^n\\y^n}}(0,y)\right\} = \sigma^n\,L'_y\left\{F^{n}_{x^n}(0,y)\right\} - \sum_{l=0}^{m-1} \sigma^{n-l-1}\,F^{n}_{\substack{x^n\\y^l}}(0,0)$$

waardoor (35) overgaat in:

$$L^2\{F^{2n+1}_{x^{n+1}y^n}(x,y)\} = s^{n+1}\sigma^n f(s,\ ) -$$

$$- \sigma^n \sum_{k=0}^{(m+\nu)-1} s^{(n+1)-k-1} L'_y\{F^k_{x^k}(0,y)\} - s^{n+1}\sum_{l=0}^{n-1}\sigma^{n-l-1}L'_x\{F^l_{y^l}(x,0)\} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{(m+\nu)-1}\sum_{l=0}^{n-1} s^{(n+1)-k-1}\sigma^{n-l-1} F^{k+1}_{x^k_{y^l}}(0,0) \qquad (36).$$

Dit ν keer voortzettende :

$$L^2\{F^{2n+\nu}_{x^{n+\nu}y^n}(x,y)\} = s^{n+\nu}\sigma^n f(s,\sigma) -$$

$$- \sigma^n \sum_{k=0}^{(m+\nu)-1} s^{(n+\nu)-k-1} L'_y\{F^k_{x^k}(0,y)\} - s^{n+\nu}\sum_{l=0}^{n-1}\sigma^{n-l-1}L'_x\{F^l_{y^l}(x,0)\} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m+\nu-1}\sum_{l=0}^{n-1} s^{(n+\nu)-k-1}\ n-l-1\ F^{k+1}_{x^k_{y^l}}(0,0) \qquad (37).$$

Op analoge wijze krijgt men voor een verhoging van de differentiaties naar y:

$$L^2\{F^{2n+}_{x^n_{y^{n+}}}(x,y)\} = s^n\sigma^{n+\mu} f(s,\sigma) -$$

$$- \sigma^{n+\mu}\sum_{k=0}^{m-1} s^{n-k-1} L'_y\{F^k_{x^k}(0,y)\} - s^n \sum_{l=0}^{n+\mu-1}\sigma^{(n+\mu)-l-1} L'_x\{F^l_{y^l}(x,0)\}$$

$$+ \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n+\mu-1} s^{n-k-1}\ (n+\mu)-l-1\ F^{k+1}_{x^k_{y^l}}(0,0) \qquad (37a)$$

(37) en (37a) kunnen worden samengevat, tot:

$$L^2\{F^{n+m}_{x^m_{y^n}}(x,y)\} = s^m\sigma^n f(s,\sigma) - \sigma^n\sum_{k=0}^{m-1} s^{m-k-1} L'_y\{F^k_{x^k}(0,y)\} -$$

$$- s^m \sum_{l=0}^{n-1}\sigma^{n-l-1} L'_x\{F^l_{y^l}(x,0)\} + \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1} s^{m-k-1}\ n-l-1\ F^{k+1}_{x^k_{y^l}}(0,0) \qquad (38).$$

In het eendimensionale geval werd afgeleid dat de inverse Laplace-transformatie te bepalen is door:

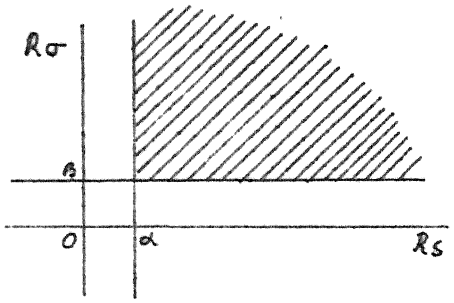
$$L^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} f(s)\, ds \qquad \gamma > 0$$

met als voorwaarde, dat f(s) in het gebied $Rs > \gamma$ een holomorphe functie is.

Bij de uitbreiding tot het tweedimensionale functiegebied, wordt de inverse transformatie

$$L^{-2}\{f(s,\sigma)\} = \frac{-1}{4\pi^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{sx+\sigma y} f(s,\sigma)\, ds\, d\sigma \qquad (39)$$

$\alpha > 0$ en $\beta > 0$



Een belangrijke voorwaarde is hierbij, dat $f(s,\sigma)$ in het gehele gebied

$Rs > \alpha$, $Rs > \beta$ holomorph is

We zullen het belang hiervan aan de hand van een voorbeeld illustreren.

Beginnen we met de bepaling van de 2 dimensionale Laplacetransformatie van de functie

$$\left.\begin{array}{ll} F(y - \frac{x}{a}) & \text{voor } y > \frac{x}{a} \\ 0 & \text{voor } y < \frac{x}{a} \end{array}\right\}$$

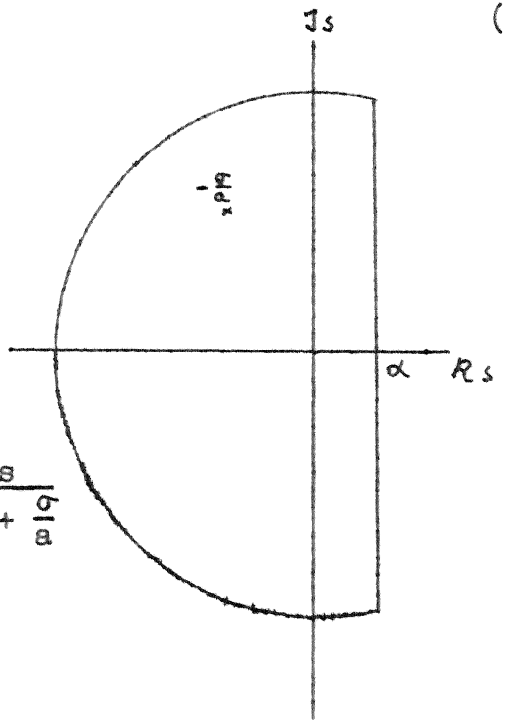
waarbij a een positief getal voorstelt en

$$\lim_{|\sigma|\to\infty} |f(\sigma)| = 0$$

Per definitie vinden we voor de Laplacetransformatie van deze functie

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, dx \int_0^y e^{-\sigma y} F(y - \frac{x}{a})\, U(y - \frac{x}{a})\, dy =$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx}\, e^{-\sigma\frac{x}{a}} f(\sigma)\, dx = \frac{f(\sigma)}{s + \frac{\sigma}{a}} \qquad (40)$$



De omkering gaat als volgt:

$$L^{-2}\left\{\frac{f(\sigma)}{s + \frac{\sigma}{a}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{sx+\sigma y}\, \frac{f(\sigma)}{s + \frac{\sigma}{a}}\, ds\, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{\sigma y} f(\sigma)\, d\sigma\, \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sx}\, \frac{ds}{s + \frac{\sigma}{a}}$$

Nu is; $\operatorname{Res} \frac{e^{sx}}{s + \frac{\sigma}{a}} = 2\pi i\, e^{-\frac{\sigma x}{a}}$

$$L^{-2}\left\{\frac{f(\sigma)}{s + \frac{\sigma}{a}}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{\Phi(y - \frac{x}{a})} f(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= \begin{cases} F(y - \frac{x}{a}) & \text{voor } y > \frac{x}{a} \\ 0 & \text{voor } y < \frac{x}{a} \end{cases}$$

Van dit resultaat gebruik makende zullen we een oplossing trachten te vinden van de differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

die voldoet aan de randvoorwaarden:

$$w(0,t) = F(t) \qquad w'_x(0,t) = G(t)$$

$$w(x,0) = 0 \qquad w'_t(x,0) = 0$$

en daar zulks slechts mogelijk is bij een bepaald verband tussen $G(t)$ en $F(t)$ zullen we tevens proberen om dit verband op te sporen

Door Laplace-transformatie wordt de differentiaalvergelijking omgezet in:

$$s^2 L^2\{w(x,t)\} - sL'_t\{w(0,t)\} - L'_t\{w'_x(0,t)\} -$$

$$- \frac{1}{a^2}\sigma^2 L^2\{w(x,t)\} + \frac{1}{a^2}\sigma L'_x\{w(x,0)\} + \frac{1}{a^2}L'_x\{w'_t(x,0)\} = 0$$

$$\left(s^2 - \frac{\sigma^2}{a^2}\right) L^2\{w(x,t)\} = sL'_t\{F(t)\} + L'_t\{G(t)\}$$

$$L^2\{w(x,t)\} = \frac{s\,f(\sigma) + g(\sigma)}{(s+\frac{\sigma}{a})(s-\frac{\sigma}{a})}$$

In verband met de eis van holomorphie in het gebied $s>0$; $\sigma>0$ moet de teller door $s - \frac{\sigma}{a}$ deelbaar zijn, hetgeen voert tot de voorwaarde

$$\frac{\sigma}{a} f(\sigma) + g(\sigma) = 0$$

$$g(\sigma) = -\frac{\sigma}{a} f(\sigma)$$

$$g(\sigma) + \frac{F(0)}{a} = -\frac{1}{a}\{\sigma f(\sigma) - F(0)\}$$

$$L'_t\{G(t) + \frac{F(0)}{a} U_1(t)\} = -\frac{1}{a} L'_t\{\frac{dF(t)}{dt}\}$$

$$G(t) = -\frac{1}{a}\frac{dF(t)}{dt} - \frac{F(0)}{a} U_1(t)$$

verder wordt:

$$L^2\{w(x,t)\} = \frac{(s-\frac{\sigma}{a})\,f(\sigma)}{(s+\frac{\sigma}{a})(s-\frac{\sigma}{a})} = \frac{f(\sigma)}{s+\frac{\sigma}{a}}$$

zodat:

$$w(x,t) = \begin{cases} F(t-\frac{x}{a}) & \text{voor} \quad t > \frac{x}{a} \\ 0 & \text{voor} \quad t < \frac{x}{a} \end{cases}$$

Van (12) uitgaande (zie syllabus 12e voordracht) kunnen we de tweedimensionale Laplace-transformaties van enkele functies bepalen, die we voor een belangrijke toepassing nodig zullen hebben.

Stelling (12) luidde:

$e^{-k\sqrt{s(s+a)}} - e^{-(s+\frac{1}{2}a)k}$ is de Laplace-transformatie van de functie:

$t < k$	0
$t > k$	$\frac{1}{2}a\ e^{-\frac{1}{2}at}\ \frac{k}{\sqrt{t^2-k^2}}\ I_1(\frac{1}{2}a\sqrt{t^2-k^2})$

Zij nu $s = \sigma$; $t = y$; $k = bx$

Hiermee wordt (12):

$$\int_{\mathcal{B}x}^{\infty} e^{-\sigma y}\ \tfrac{1}{2}a\ e^{-\frac{1}{2}ay}\ \frac{bx}{\sqrt{y^2-b^2x^2}}\ I_1(\tfrac{1}{2}a\sqrt{y^2-b^2x^2}) =$$

$$= e^{-bx\sqrt{\sigma(\sigma+a)}} - e^{-\frac{1}{2}abx}\ e^{-bx\sigma} \qquad (41)$$

Als nu voor:

$y < bx$	$G(x,y) = 0$
$y > bx$	$G(x,y) = \frac{1}{2}a\ e^{-\frac{1}{2}ay}\ \frac{bx}{\sqrt{y^2-b^2x^2}}\ I_1(\frac{1}{2}a\sqrt{y^2-b^2x^2})$

zo is $L^2\{G(x,y)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx}\,dx \int_{\mathcal{B}x}^{\infty} e^{-\sigma y}\ G(x,y)\,dy =$

$$= L'_x\left\{ e^{-bx\sqrt{\sigma(\sigma+a)}} - L'_x\left\{ e^{-\frac{1}{2}abx}\ e^{-bx\sigma}\right\}\right. =$$

$$= \frac{1}{s+b\sqrt{\sigma(\sigma+a)}} - L'_x\left\{ e^{-\frac{1}{2}abx}\ e^{-bx\sigma}\right\}$$

Als nu $f(\sigma) = L^2\{F(y)\ U_{10}\}$

zo is:

$$\frac{f(\sigma)}{s+b\sqrt{\sigma(\sigma+a)}} - L'_x\left\{ e^{-\frac{1}{2}abx}\ e^{-bx\sigma}\ f(\sigma)\right\} =$$

$$= L^2\left\{ G(x,y)^*\ F(y)\ U_{10}(x,y)\right\} =$$

$$= \frac{f(\sigma)}{s+b\sqrt{\sigma(\sigma+a)}} - L^2\left\{ e^{-\frac{1}{2}abx}\ F(y-bx)\ U_{00}\ (x,y-bx)\right\}$$

Maar nu is voor $y > bx$:

$$G(x,y)^*\ F(y)\ U_{10} =$$

$$= \int_0^x U_{10}(x-\xi)\left\{ \int_{\mathcal{B}\xi}^{y} \tfrac{1}{2}abe^{-\frac{1}{2}a\eta}\ \frac{\xi}{\sqrt{\eta^2-b^2\xi^2}}\ I_1(\tfrac{1}{2}a\sqrt{\eta^2-b^2\xi^2})F(y-\eta)\,d\eta\right\} d\xi =$$

$$= \int_{\frac{y}{b}x}^{y} \tfrac{1}{2}ab\, e^{-\frac{1}{2}a\eta}\, \frac{x}{\sqrt{\eta^2-b^2x^2}}\, I_1\left(\tfrac{1}{2}a\sqrt{\eta^2-b^2x^2}\right) F(y-\eta)\,d\eta$$

Voor $y < bx$ is $G(x,y)^* F(y)\, U_{10} = 0$

Maar dan is $\dfrac{f(\sigma)}{s+b\sqrt{\sigma(\sigma+a)}}$

de Laplace-transformatie van de functie:

$$\begin{array}{ll} y < bx & 0 \\ y > bx & e^{-\frac{1}{2}abx}\, F(y-bx) + \\ & + \int_{\frac{y}{b}x}^{y} \tfrac{1}{2}abe^{-\frac{1}{2}a\eta}\, \frac{x}{\sqrt{\eta^2-b^2x^2}}\, I_1\left(\tfrac{1}{2}a\sqrt{\eta^2-b^2x^2}\right)F(y-\eta)\,d\eta \end{array} \qquad (42)$$

Zo $f(s) = L\{F(t)\, U(t-k)\}$ is

$$e^{kcs}\, f(s) = L\{F(t+ck)\, U(t-k+ck)\}$$

Passen we dit op (12) toe, zo zien we dat:

$$e^{k(cs-\sqrt{s(s+a)}} - e^{-\{(1-c)s+\frac{1}{2}a\}k}$$

de Laplace-transformatie is van:

$$\begin{array}{ll} t < (1-c)k & 0 \\ t > (1-c)k & \tfrac{1}{2}a\, e^{-\frac{1}{2}a(t+ck)}\, \dfrac{k}{\sqrt{(t+ck)^2-k^2}}\, I_1\left(\tfrac{1}{2}a\sqrt{(t+ck)^2-k^2}\right) \end{array}$$

Stellen we hierin

$$s = \sigma \;;\quad t = y \;;\quad k = bx$$

zo zien we als hierboven, dat van de functie:

$$\begin{array}{ll} y < (1-c)bx & G(x,y) = 0 \\ y > (1-c)bx & G(x,y) = \tfrac{1}{2}a\, e^{-\frac{1}{2}a(y+bcx)}\, \dfrac{bx}{\sqrt{(y+bcx)^2-b^2x^2}} \cdot \\ & \cdot\, I_1\left(\tfrac{1}{2}a\sqrt{(y+bcx)^2-b^2x^2}\right) \end{array}$$

de 2 dimensionale Laplace-transformatie bedraagt:

$$\frac{1}{s-bc\sigma+b\sqrt{\sigma(\sigma+a)}} - L_x^1\left\{ e^{-\frac{1}{2}abx}\, e^{-b(1-c)x\sigma} \right\}$$

Zo nu weer:

$$f(\sigma) = L^2\{ F(y)\, U_{10} \}$$

volgt op dezelfde wijze, dat :

$$\frac{f(\sigma)}{s-bc\sigma+b\sqrt{\sigma(\sigma+a)}}$$

de Laplace-transformatie is van de functie:

$$y < (1-c)bx \qquad 0$$

$$y > (1-c)bx \qquad e^{-\frac{1}{2}abx}\, F\{y-(1-c)bx\} +$$

$$+ \int_{(1-c)\delta x}^{y} \tfrac{1}{2}abx\, e^{-\frac{1}{2}a(\eta+bcx)} \frac{1}{\sqrt{(\eta+bcx)^2-b^2x^2}}\, I_1\left(\tfrac{1}{2}a\sqrt{(\eta+bcx)^2-b^2x^2}\right) F(y-\eta)\,d\eta \qquad (43)$$

Substitueer in (42)

$b = \alpha$ en $b^2a = \gamma$ $\qquad a = \frac{\gamma}{\alpha^2}$

Zo is:

$$\frac{f(\sigma)}{s+\sqrt{\alpha^2\sigma^2+\gamma\sigma}}$$

de tweedimensionale Laplace-transformatie van:

$$y < \alpha x \qquad G(x,y) = 0$$

$$y > \alpha x \qquad g(x,y) = e^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\alpha}x}\, F(y-\alpha x) +$$

$$+ \int_{\alpha x}^{y} \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\alpha}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\alpha^2}\eta} \frac{x}{\sqrt{\eta^2-\alpha^2x^2}}\, I_1\left(\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\alpha^2}\sqrt{\eta^2-\alpha^2x^2}\right) F(y-\eta)\,d\eta \qquad (44)$$

Substitueer in (43)

$bc = \beta$ $\qquad b^2 = (\beta^2+\alpha^2) = \vartheta^2$ $\qquad ab^2 = \gamma$

$ab = \frac{\gamma}{\delta}$ $\qquad a = \frac{\gamma}{\delta^2}$

Dan blijkt:

$$\frac{f(\sigma)}{s-\beta\sigma+\sqrt{\delta^2\sigma^2+\gamma\sigma}}$$

de tweedimensionale Laplace-transformatie te zijn van de functie

$$y < (\delta-\beta)x \qquad H(x,y) = 0$$

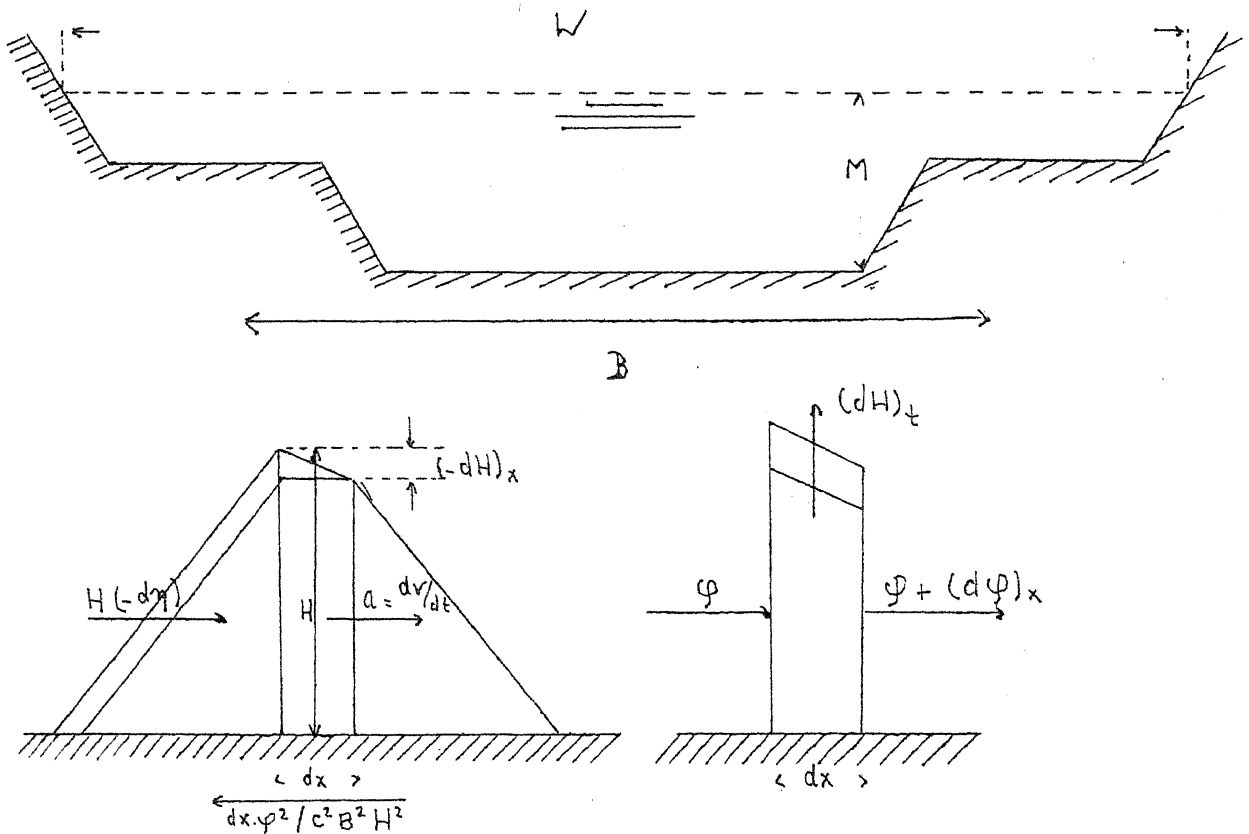
$$y > (\delta-\beta)x \qquad H(x,y) = e^{-\frac{\gamma}{2\delta}x}\, F\{y-(\delta-\beta)x\} +$$

$$+ \int_{(\delta-\beta)x}^{y} \frac{\gamma}{2\delta}\, x\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\delta^2}(\eta+\beta x)} \frac{1}{\sqrt{(\eta+\beta x)^2-\delta^2x^2}}\, I_1\left(\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\delta^2}\sqrt{(\eta+\beta x)^2-\delta^2x^2}\right) F(y-\eta)\,d\eta \qquad (45)$$

2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM-O.
TELEF. 51660-56643

Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)
te 's-Gravenhage
16e Voordracht: 9 Juni 1954.
Spreker: Ir R.W.Trense.

Als toepassing van de voorgaande theorie zou ik een probleem aan de orde willen stellen betreffende een verschijnsel, welke bekend staat onder de naam hoogwatergolf. Hoe plant zich een min of meer plotseling optredende peilsverhoging op een rivier voort



Afleiding van het stelsel differentiaalvergelijkingen der niet stationaire beweging.

We gaan van de volgende vereenvoudigende veronderstellingen uit:

1° In het stromingsprofiel is de snelheid constant gedacht. Bij een debiet φ en een gemiddelde breedte B krijgen we dan voor deze snelheid V:

$$V = \frac{\varphi}{BH}$$

2° De variatie van V met x is verwaarloosbaar klein of m.a.w. $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$

Voor de versnelling is in verband met (2°) te schrijven:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{BH}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\varphi}{BH^2}\frac{\partial H}{\partial t}$$

De krachten die in horizontale richting werken zijn de waterdruk en de wrijving. De eerste bedraagt per breedte-eenheid $H(-dH)_x$

De wrijvingskracht is volgens de stelling van De Chézy te berekenen uit:

$$V = C\sqrt{RI} = C\sqrt{HI}$$

$$I = \frac{V^2}{C^2H} = \frac{2}{C^2B^2H^3}$$

en wel is ze dan gelijk aan:

$$\frac{\varphi^2}{C^2B^2H^3} H\,dx = \frac{\varphi^2}{C^2B^2H^2}\,dx$$

Verwaarlozen we in de uitdrukking voor $\frac{dV}{dt}$ verder nog de laatste term zo volgt bij toepassing van de stelling van d'Alembert:

$$H(-dH)_x - \frac{\varphi^2}{C^2B^2H^2}\,dx = \frac{H\,dx}{g}\,\frac{1}{BH}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Delen we linker en rechter lid door $-Hdx$ en brengen we alle termen naar het linkerlid over zo ontstaat

$$\frac{(dH)_x}{dx} + \frac{1}{gBH}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\varphi^2}{C^2B^2H^3} = 0$$

ofwel

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{gBH}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\varphi^2}{C^2B^2H^3} = 0 \qquad (46)$$

De tweede vergelijking die de stroming beheerst is de continuïteits-vergelijking.
Beschouw een elementje met de afmetingen dx, 1, H.
In dit elementje stroomt in de tijd dt naar binnen:

$$\{\varphi - (\varphi + d\varphi_x)\}\,dt$$

terwijl naar boven een hoeveelheid stroomt:

$$W\,dx(dH)_t$$

Gelijkstelling geeft:

$$-(d\varphi)_x\,dt = W\,dx(dH)_t$$

Delen we linker en rechterlid door $-W\,dx\,dt$ en brengen we de term van het rechterlid naar het linkerlid over, zo ontstaat

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{W}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \qquad (47)$$

Kiezen we het tijdstip $t=0$ zodanig, dat de beweging voor dit tijdstip stationair is en dat net na dit tijdstip de verstoring intreedt.
Als we de storing in H en φ weergeven door η en q hebben we dus:

$$\left.\begin{aligned} H(x,t) &= H(x,0) + \eta(x,t) \\ \varphi(x,t) &= \varphi(0) + q(x,t) \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

Hierbij zijn dus $\eta(x,0)$ en $q(x,0)$ gelijk aan nul.
Uit (48) volgt:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H(x,0)}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (49); \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H(x,0)}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (50)$$

In verband met de stationaire toestand tot en met het tijdstip t=0 is

$$\frac{\partial H(x,0)}{\partial x} + \frac{\varphi_o^2}{C^2B^2H^3} = 0 \quad (51)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_o}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t} \quad (52)$$

(46) en (47) gaan hiermee over in

$$\frac{\partial H(x,0)}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{gBH}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\varphi_o^2}{C^2B^2H^3} + \frac{2\varphi_o q}{C^2B^2H^3} + \frac{q^2}{C^2B^2H^3} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{W}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Hierbij is nog niet gebruik gemaakt van (51).
Gebeurt zulks, zo ontstaat als tevens de term $\frac{q^2}{C^2B^2H^3}$ verwaarloosd wordt, het vergelijkingsstelsel:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \dfrac{1}{gBH}\dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{2\varphi_o q}{C^2B^2H^3} = 0 \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{1}{W}\dfrac{q}{x} = 0 \end{cases} \quad (53)$$

Dit stelsel denken we ons nu gelineariseerd m.a.w. alle coëfficiënten beschouwen we als constanten.
Differentieren we de eerste vergelijking partieel naar x en de tweede naar t

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \dfrac{1}{gBH}\dfrac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} + \dfrac{2\varphi_o}{C^2B^2H^3}\dfrac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \dfrac{1}{W}\dfrac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} = 0 \end{cases} \quad (54)$$

Trekken we de tweede vergelijking van het aan (53) aequivalente stelsel (54) met $\frac{W}{gBH}$ vermenigvuldigd van de eerste af zo ontstaat

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{W}{gBH}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{2\varphi_o}{C^2B^2H^3}\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Hiervan trekken we de tweede vergelijking van (53) met $\frac{2\varphi_o W}{C^2B^2H^3}$ vermenigvuldigd af en krijgen tenslotte:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{W}{gBH}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{2\varphi_o W}{C^2B^2H^3}\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

Met $\frac{W}{gBH} = \alpha^2$ en $\frac{2\varphi_o W}{C^2B^2H^3} = \gamma$ (55)

luidt deze vergelijking

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \alpha^2\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \gamma\frac{\partial\eta}{\partial t} = 0 \tag{56}$$

Verwaarlozen we in de uitdrukking voor $\frac{dV}{dt}$ de term $V\frac{\partial V}{\partial x}$ niet geheel maar zetten we hiervoor

$$\frac{\varphi}{B^2H^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

zo krijgen we inplaats van (46) de iets scherpere vergelijking

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{gBH}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\varphi}{gB^2H^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\varphi^2}{C^2B^2H^3} = 0 \tag{57}$$

welke tezamen met de continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{W}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \tag{47}$$

een simultaan stelsel vormt.
Dezelfde substituties (48) tot en met (52) voeren het stelsel over in

$$\begin{cases} \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{1}{gBH}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\varphi_o}{gB^2H^2}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{q}{gB^2H^2}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{2\varphi_o q}{C^2B^2H^3} + \frac{q^2}{C^2B^2H^3} = 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{1}{W}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

We verwaarlozen de termen $\frac{q}{gB^2H^2}\frac{\partial q}{\partial x}$ en $\frac{q^2}{C^2B^2H^3}$ en krijgen hierdoor

$$\begin{cases} \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{1}{gBH}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\varphi_o}{gB^2H^2}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{2\varphi_o q}{C^2B^2H^3} = 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{1}{W}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{58}$$

hetgeen tenslotte om te zetten is in:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \frac{W}{gBH}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\varphi_o W}{gB^2H^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial t} - \frac{2\varphi_o W}{C^2B^2H^3}\frac{\partial\eta}{\partial t} = 0$$

Met:

$$\alpha^2 = \frac{W}{gBH}\ ;\ \beta = \frac{\varphi_o W}{2gB^2H^2}\ ;\ \gamma = \frac{2\varphi_o W}{C^2B^2H^3} \tag{59}$$

wordt de vergelijking

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \alpha^2\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - 2\beta\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial t} - \gamma\frac{\partial\eta}{\partial t} = 0 \tag{60}$$

Bekijken we nu de oplossing met tweedimensionale Laplace-transformaties van de differentiaalvergelijking (56)

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \alpha^2\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \gamma\frac{\partial\eta}{\partial t} = 0$$

als de randvoorwaarden luiden

$$\eta(0,t) = A(t) \qquad L_t'\{\eta(0,t)\} = a(\sigma)$$
$$\eta_x'(0,t) = B(t) \qquad L_t'\{\eta_x'(0,t)\} = b(\sigma)$$
$$\eta(x,0) = 0 \qquad \eta_t'(x,0) = 0$$

Een tweedimensionale Laplace-transformatie zet de differentiaalvergelijking om in:

$$s^2L^2\{\eta(x,t)\} - sL_t'\{\eta(0,t)\} - L_t'\{\eta_x(0,t)\} -$$
$$-\alpha^2\sigma^2L^2\{\eta(x,t)\} + \alpha^2\sigma L_x'\{\eta(x,0)\} + \alpha^2L_x'\{\eta_t'(x,0)\} -$$
$$-\gamma\sigma L^2\{\eta(x,t)\} + L_x'\{\eta(x,0)\} = 0$$

Hieruit ontstaat door invoering van de randvoorwaarden:

$$\{s^2 - (\alpha^2\sigma^2 + \gamma\sigma)\}L^2\{\eta(x,t)\} = s\,a(\sigma) - b(\sigma)$$
$$(s + \sqrt{\alpha^2\sigma^2+\gamma\sigma})(s - \sqrt{\alpha^2\sigma^2+\gamma\sigma})\,L^2\{\eta(x,t)\} = sa(\sigma) - b(\sigma)$$

We dragen er nu zorg voor, dat $s = \sqrt{\alpha^2\sigma^2+\gamma\sigma}$ een wortel is van het rechterlid.
Dit levert ons de geldigheidsvoorwaarde

$$b(\sigma) = \sqrt{\alpha^2\sigma^2+\gamma\sigma}\;a(\sigma) \tag{61}$$

Tevens is dan:

$$L^2\{\eta(x,t)\} = \frac{a(\sigma)}{s + \sqrt{\alpha^2\sigma^2+\gamma\sigma}} \tag{62}$$

Volgens (44) vinden we hieruit voor $\eta(x,t)$:

Voor $t < \alpha x$ $\qquad \eta(x,t) = 0$

Voor $t > \alpha x$ $\qquad \eta(x,t) = e^{-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{\alpha}x}A(t-\alpha x) +$

$$+\int_{\alpha x}^{t} \tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\alpha}\,e^{-\frac{\gamma}{2\alpha^2}}\,\frac{x}{\sqrt{\tau^2-\alpha^2x^2}}\,I_1\!\left(\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\alpha^2}\sqrt{\tau^2-\alpha^2x^2}\right)A(t-\tau)\,d\tau$$

De voortplantingssnelheid van het begin der storing is in dit geval:

$$\frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{B}{W}}\sqrt{gH} \tag{63}$$

Bekijken we vervolgens de iets scherpere differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - \alpha^2\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - 2\beta\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial t} - \gamma\frac{\partial\eta}{\partial t} = 0 \tag{60}$$

met dezelfde randvoorwaarden

$$\eta(0,t) = A(t) \qquad L'_t\{\eta(0,t)\} = a(\sigma)$$
$$\eta_x(0,t) = B(t) \qquad L'_t\{\eta'_x(0,t)\} = b(\sigma)$$
$$\eta(x,0) = 0 \qquad \eta'_t(x,0) = 0$$

(60) wordt door een tweedimensionale Laplace transformatie omgezet in:

$$s^2L^2\{\eta(x,t)\} - sL'_t\{\eta(0,t)\} - L'_t\{\eta'_x(0,t)\} -$$
$$-\alpha^2\sigma^2L^2\{\eta(x,t)\} + \alpha^2\sigma L'_x\{\eta(x,0)\} + \alpha^2L'_x\{\eta'_t(x,0)\} -$$
$$-2\beta s\sigma L^2\{\eta(x,t)\} + 2\beta\sigma L'_t\{\eta(0,t)\} + 2\beta sL'_x\{\eta(x,0)\} - 2\beta\eta(0,0)$$
$$-\gamma\sigma L^2\{\eta(x,t) + L'_x\{\eta(x,0)\} = 0$$

Met de randvoorwaarden volgt hieruit

$$(s^2 - 2\beta s\sigma - \alpha^2\sigma^2 - \gamma\sigma)\,L^2\{\eta(x,t)\} = (s - 2\beta\sigma)\,a(\sigma) - b(\sigma)$$
$$\{(s-\beta\sigma)^2 - (\beta^2+\alpha^2)\sigma^2 - \gamma\sigma)\}L^2\{\eta(x,t)\} = (s - 2\beta\sigma)\,a(\sigma) - b(\sigma)$$
$$(s-\beta\sigma + \sqrt{(\beta^2+\alpha^2)\sigma^2+\gamma\sigma})(s-\beta\sigma - \sqrt{(\beta^2+\alpha^2)\sigma^2+\gamma\sigma})\,L\{\eta(x,t)\} =$$
$$= (s - 2\beta\sigma)\,a(\sigma) - b(\sigma)$$

Om de holomorphie te verzekeren, moet het rechterlid de wortel bezitten

$$s = \beta\sigma + \sqrt{(\beta^2+\alpha^2)\sigma^2+\gamma\sigma}$$

hetgeen de voorwaarde oplevert

$$b(\sigma) = (-\beta\sigma + \sqrt{(\beta^2+\alpha^2)\sigma^2+\gamma\sigma})\,a(\sigma) \qquad (64)$$

terwijl tevens:

$$L^2\{\eta(x,t)\} = \frac{a(\sigma)}{s-\beta\sigma + \sqrt{\delta^2\sigma^2+\gamma\sigma}} \qquad (65)$$

zo $\quad ^2 = {}_+{}^2$

Maar dan vinden we voor $\eta(x,t)$ volgens (45):

Voor $t < (\delta - \beta)x$ $\qquad \eta(x,t) = 0$

Voor $t > (\delta - \beta)x$ $\qquad \eta(x,t) = e^{-\frac{\gamma}{2\delta}x}\,A\{t-(\delta-\beta)x\} +$

$$+\int_{(\delta-\beta)x}^{t} \frac{\gamma x}{2\delta}\,e^{-\frac{\gamma}{2\delta^2}(\tau+\beta x)}\,\frac{1}{\sqrt{(\tau+\beta x)^2-\delta^2x^2}}\,I_1\left(\frac{\gamma}{2\delta^2}\sqrt{(\tau+\beta x)^2-\delta^2x^2}\right)A(t-\tau)\,d\tau \qquad (66)$$

Voor de voortplantingssnelheid van het begin der storing vinden we in dit geval:

$$\frac{1}{\delta - \beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\varphi_o^2 W^2}{4g^2B^4H^4} + \frac{W}{gBH} - \frac{\varphi_o W}{2gB^2H^2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{W}{gBH} + \frac{\varphi_o^2 W^2}{4g^2B^4H^4} + \frac{\varphi_o W}{2gB^2H^2}}}{\frac{W}{gBH}}$$

Noem $\sqrt{\frac{B}{W}}\ \sqrt{gH} = U$; $\frac{\varphi_o}{BH} = V_o$

zo is

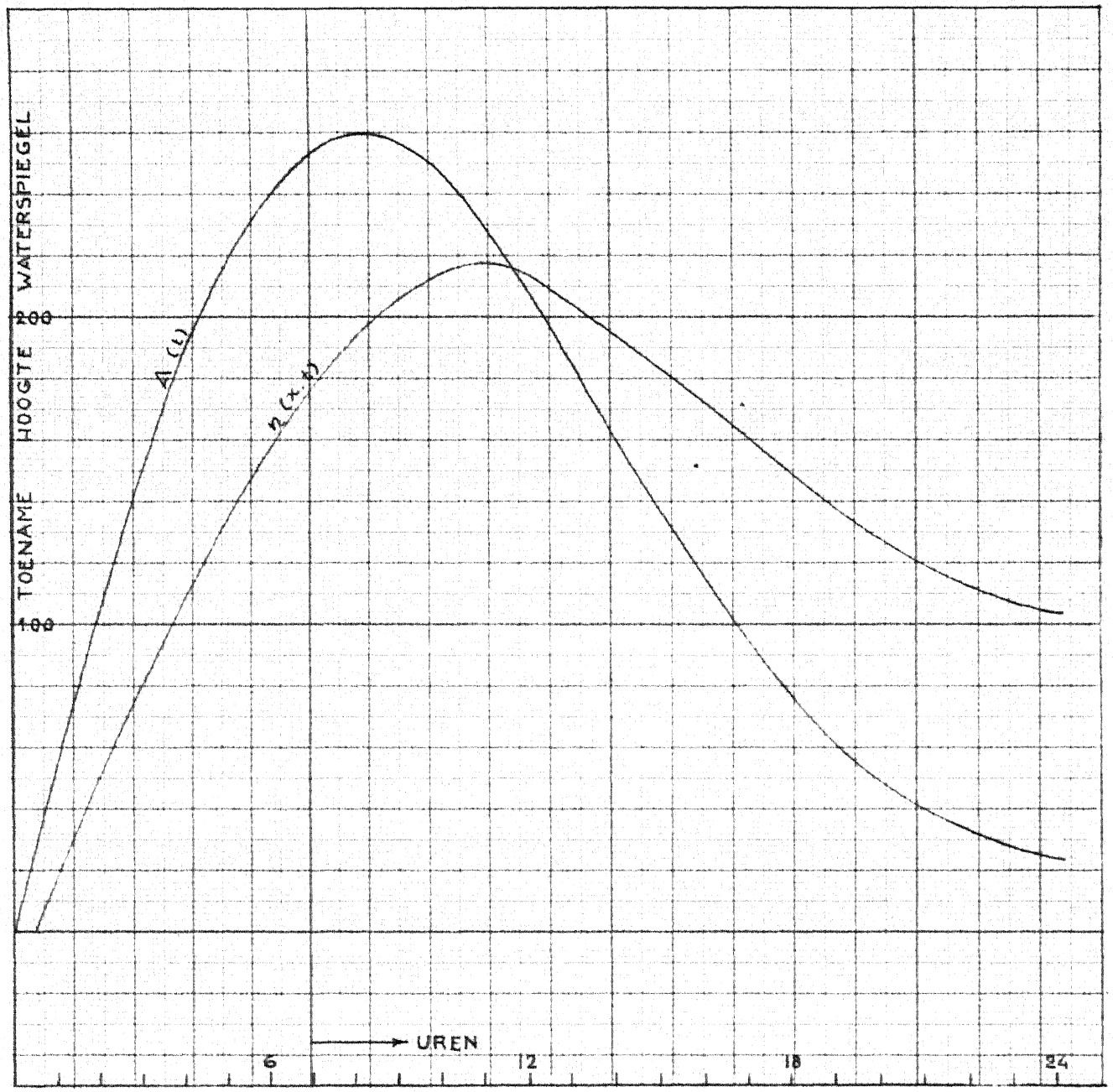
$$V = \frac{1}{\delta - \beta} = \frac{\sqrt{\frac{1}{U^2} + \frac{V_o^2}{4U^2} + \frac{V_o}{2U^2}}}{\frac{1}{U^2}} = \frac{V_o}{2} + \sqrt{U^2 + \frac{V_o^2}{4}}$$

De andere punten planten zich met een geringere snelheid voort. Ter illustratie is de vervorming berekend van een storing

$$A(t) = \frac{t}{22000}\ e^{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{t}{22000}\right)^2\right\}}$$

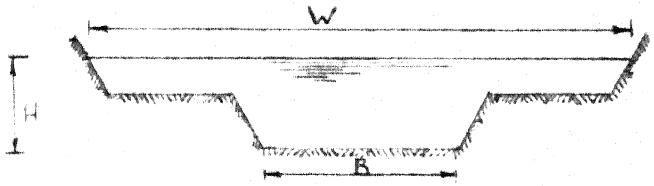
ter plaatse x=18800, als de gegevens van het kanaalprofiel verder luiden H=5,50 m; W=B=100 m; φ_o=3500 m^3/sec C^2=5000.

Van deze berekening werd het resultaat verder opgedragen in bijgaande grafiek.



$$A(t) = \frac{t}{22000}\, e^{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{t}{28800}\right)^2\right\}}$$

$$\eta(x,t) = e^{-\frac{\gamma}{2\delta}x}\, A\{t-(\delta-\beta)x\} + \int_{(\delta-\beta)x}^{t} \frac{\gamma}{2\delta}\, x\, e^{-\frac{\gamma}{2\delta^2}(\tau+\beta x)}\, \frac{1}{\sqrt{(\tau+\beta x)^2-\delta^2x^2}}\, I_1\left(\frac{\gamma}{2\delta}\sqrt{(\tau+\beta x)^2-\delta^2x^2}\right) A(t-\tau)\, d\tau$$



$$\alpha^2 = \frac{W}{BgH} \qquad \beta = \frac{Q_o W}{2gB^2H^3} \qquad \gamma = \frac{2Q_o W}{c^2 B^2 H^2} \qquad \delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$H = 5.50$ $\quad W = B = 100\ m$ $\quad Q_o = 3500\ m^3/sec$ $\quad x = 18800\ m$ $\quad c^2 = 5000$

$\alpha = 0.135$ $\quad \beta = 0.058$ $\quad \gamma = 8{,}4 \times 10^{-5}$ $\quad \delta = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 0{,}147$

MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM-O.

TELEF. 51660-56643

Cursus Methoden der Mathematische Physica (vervolg)
te 's-Gravenhage
Aanvulling van de 16e Voordracht
Spreker: Ir R.W.Trense.

Bij het behandelde probleem van de hoogwatergolf kan de bewegingsvergelijking nog verder verscherpt worden, terwijl bovendien de continuiteitsvergelijking kan worden uitgebreid met een z.g. "regenfunctie". De verscherping van de bewegingsvergelijking verkrijgen we door een nadere beschouwing van $\frac{dV}{dt}$. Hierin is $V = \frac{Q}{BH}$. Zo B als constant wordt opgevat, is:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q}{BH}\right) + \frac{Q}{BH}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{BH}\right) = \frac{1}{BH}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{B^2H^2}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{BH^2}\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{Q^2}{B^2H^3}\frac{\partial H}{\partial x}$$

gesubstitueerd in:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{dV}{dt} + \frac{Q^2}{C^2B^2H^3} = 0$$

ontstaat:

$$\left(1 - \frac{Q^2}{gB^2H^3}\right)\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{Q}{gBH^2}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{gBH}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{gB^2H^2}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{Q^2}{C^2B^2H^3} = 0.$$

Bij de continuiteitsvergelijking kunnen we er rekening mee houden, dat er gedurende de voortschrijding van een hoogwatergolf op de beschouwde strekking de mogelijkheid bestaat van een plaatselijke toevoer van regenwater. [1] De strekking is dan niet "bronvrij". Geven we dit brondebiet per strekkende lengte-eenheid algemeen weer door R(x,t) zo wordt de continuiteitsvergelijking

$$-(dQ)_x + R(x,t)dx = W\,dx\,\frac{\partial H}{\partial t},$$

ofwel

$$W\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = R(x,t).$$

We stellen weer

$$H(x,t) = H_o(x) + \eta(x,t)$$
$$Q(x,t) = Q_o + q(x,t)$$

waarin $\eta(x,t)$ en $q(x,t)$ de storingen voorstellen van H en Q.
Na substitutie en linearisatie, wordt de bewegingsvergelijking:

---

1) Op dit verschijnsel werd ik attent gemaakt door Ir P.J. Wemelsfelder, Hoofdingenieur Rijkswaterstaat.

$$\frac{\partial H_o(x)}{\partial x}\left(1 - \frac{Q_o^2}{gB^2H_o^3}\right) + \frac{Q_o^2}{C^2B^2H_o^3} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\left(1 - \frac{Q_o^2}{gB^2H_o^3}\right) - \frac{Q_o}{gBH_o^2}\frac{\partial \eta}{\partial t} +$$

$$+ \frac{1}{gBH_o}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{Q_o}{gB^2H_o^2}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{2Q_oq}{C^2B^2H_o^3} = 0.$$

Voor de evenwichtstoestand geldt

$$\frac{\partial H_o(x)}{\partial x}\left(1 - \frac{Q_o^2}{gB^2H_o^3}\right) + \frac{Q_o^2}{C^2B^2H_o^3} = 0$$

Na vermenigvuldiging met W ontstaat dan ook de vergelijking

$$\left(1 - \frac{Q_o^2}{gB^2H_o^3}\right)W\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{Q_oW}{gBH_o^2}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{W}{gBH_o}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{Q_oW}{gB^2H_o^2}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{2Q_oW}{C^2B^2H_o^3}q = 0.$$

Terwijl voor de continuiteitsvergelijking te schrijven is

$$W\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = R(x,t)$$

Zij $\left(1 - \frac{Q_o^2}{gB^2H_o^3}\right)W = W'$; $\frac{W}{gBH_o} = \alpha^2$; $\frac{Q_oW}{2gB^2H_o^3} = \beta$

$$\frac{2Q_oW}{C^2B^2H_o^3} = \gamma$$

Als we voorlopig R(x,t) nul stellen is dus allereerst het stelsel op te lossen:

$$W'\frac{\partial \eta}{\partial x} - 2\beta B\frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha^2\frac{\partial q}{\partial t} + 2\beta\frac{\partial q}{\partial x} + \gamma q = 0$$

$$W\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Met als randvoorwaarden

$\eta(o,t) = A(t)$ $\qquad L'_t\{\eta(o,t)\} = a(\sigma)$

$\eta(x,o) = 0$

$q(o,t) = C(t)$ $\qquad L'_t\{q(o,t)\} = c(\sigma)$

$q(x,o) = 0$

Passen we op het stelsel een 2 dimensionale Laplace Transformatie toe

$$W'sL^2\{\eta\} - W'a(\sigma) - 2\beta B\sigma L^2\{\eta\} + \alpha^2\sigma L^2\{q\} +$$

$$+ 2\beta sL^2\{q\} - 2\beta c(\sigma) + \gamma L^2\{q\} = 0$$

$$W\sigma L^2\{\eta\} + sL^2\{q\} - c(\sigma) = 0$$

ofwel

$$(W's - 2\beta B\sigma)L^2\{\eta\} + (\alpha^2\sigma + 2\beta s + \gamma)L^2\{q\} = W'a(\sigma) + 2\beta c(\sigma)$$

$$W\sigma L^2\{\eta\} + sL^2\{q\} = c(\sigma),$$

zodat

$$L^2\{\eta\} = \frac{s\,a(\sigma) - \frac{\alpha^2\sigma + \gamma}{W'}\,c(\sigma)}{s^2 - 2\beta\frac{B+W}{W'}\,s\sigma - \frac{W}{W'}(\alpha^2\sigma^2 + \gamma\sigma)}$$

Zij $\frac{B+W}{W'}\beta = \beta_c$; $\frac{W}{W'}\alpha^2 = \alpha_c^2$; $\frac{W}{W'}\gamma = \gamma_c$

$$\alpha_c^2 + \beta_c^2 = \delta_c^2$$

$$L^2\{\eta\} = \frac{s\,a(\sigma) - \frac{\alpha^2\sigma + \gamma}{W'}\,c(\sigma)}{(s - \beta_c\sigma + \sqrt{\delta_c^2\sigma^2 + \gamma_c\sigma})(s - \beta_c\sigma - \sqrt{\delta_c^2\sigma^2 + \gamma_c\sigma})}$$

In verband met de eis van holomorfie in het gebied $Rs > 0$; $R\sigma > 0$ krijgen we de voorwaarde

$$(\beta_c\sigma + \sqrt{\delta_c^2\sigma^2 + \gamma_c\sigma})\,a(\sigma) = \frac{\alpha^2\sigma + \gamma}{W'}\,c(\sigma),$$

zodat

$$L^2\{\eta\} = \frac{a(\sigma)}{s - \beta_c\sigma + \sqrt{\delta_c^2\sigma^2 + \gamma_c\sigma}},$$

Inverse transformatie voert tot:

$t < (\delta_c - \beta_c)x \qquad \eta(x,t) = 0$

$t > (\delta_c - \beta_c)x \qquad \eta(x,t) = e^{-\frac{\gamma_c}{2\delta_c}x}\,A\{t-(\delta_c-\beta_c)x +$

$$+ \int_{(\delta_c-\beta_c)x}^{t} \frac{\gamma_c x}{2\delta_c}\, e^{-\frac{\gamma_c}{2\delta_c^2}(\tau+\beta_c x)} \frac{1}{\sqrt{(\tau+\beta_c x)^2 - \delta_c^2 x^2}} \cdot$$

$$\cdot\, I_1\left(\frac{\gamma_c}{2\delta_c^2}\sqrt{(\tau+\beta_c x)^2 - \delta^2{}_c x^2}\right) A(t-\tau)\,d\tau$$

$$L^2\{q\} = \frac{sc(\sigma) - \{W\sigma a(\sigma) + 2\beta\frac{B+W}{W'}\sigma c(\sigma)\}}{(s - \beta_c\sigma + \sqrt{\delta_c^2\sigma^2 + \gamma_c\sigma})(s - \beta_c\sigma - \sqrt{\delta_c^2\sigma^2 + \gamma_c\sigma})},$$

met als eis

$$(\beta_c\sigma + \sqrt{\delta_c^2\sigma^2 + \gamma_c\sigma})\,c(\sigma) = W\sigma a(\sigma) + 2\beta_c\sigma c(\sigma),$$

ofwel

$$(-\beta_c\sigma + \sqrt{\delta_c^2\sigma^2 + \gamma_c\sigma})\,c(\sigma) = W\sigma a(\sigma)$$

$$(\delta_c^2\sigma^2 - \beta_c^2\sigma^2 + \gamma_c\sigma)c(\sigma) = W\sigma(\beta_c\sigma + \sqrt{\delta_c^2\sigma^2 + \gamma_c\sigma})a(\sigma)$$

$$\frac{\alpha_c^2\sigma^2 + \gamma_c\sigma}{W}\, c(\sigma) = \sigma(\beta_c\sigma + \sqrt{\delta_c^2\sigma^2 + \gamma_c\sigma})a(\sigma)$$

$$(\beta_c\sigma + \sqrt{\delta_c^2\sigma^2 + \gamma_c\sigma})a(\sigma) = \frac{\alpha^2\sigma + \gamma}{W'}c(\sigma).$$

Dezelfde voorwaarde dus als reeds werd afgeleid.
Hiermee wordt

$$L^2\{q\} = \frac{C(\sigma)}{s - \beta_c\sigma + \sqrt{\delta_c^2\sigma^2 + \gamma_c\sigma}}$$

Transformatie terug levert:

$$t < (\delta_c - \beta_c)x \qquad q(x,t) = 0$$

$$t > (\delta_c - \beta_c)x \qquad q(x,t) =$$

$$= e^{\frac{\gamma_c}{2\delta_c}x}\, C\{t-(\delta_c - \beta_c)x\} +$$

$$+ \int_{(\delta_c - \beta_c)x}^{t} \frac{\gamma_c x}{2\delta_c}\, e^{\frac{\gamma_c}{2\delta_c^2}(\tau + \beta_c x)} \frac{1}{\sqrt{(\tau+\beta_c)^2 - \delta_c^2 x^2}}$$

$$I_1\left(\frac{\gamma_c}{2\delta_c^2}\sqrt{(\tau+\beta_c x)^2 - \delta_c^2 x^2}\right) \cdot C(t-\tau)d\tau$$

Het begin van de storing plant zich met een snelheid voort:

$$\frac{1}{\delta_c - \beta_c} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c^2 + \beta_c^2} - \beta_c} = \frac{\sqrt{\alpha_c^2 + \beta_c^2} + \beta_c}{c^2} = \sqrt{\frac{1}{\alpha_c^2} + \left(\frac{\beta_c}{\alpha_c^2}\right)^2} + \frac{\beta_c}{\alpha_c^2},$$

$$U^2 = \frac{}{\alpha_c^2} = \frac{W'}{W}\frac{B}{W}gH_o \qquad U = \sqrt{1 - \frac{Q_o^2}{gB^2H_o^3}}\sqrt{\frac{B}{W}}\sqrt{gH_o}$$

$$\frac{\beta_c}{\alpha_c^2} = \frac{B+W}{W'}\,\frac{Q_o W}{2gB^2H_o^2}\,\frac{W'}{W}\frac{B}{W}gH_o = \frac{B+W}{2W}\,\frac{Q_o}{BH_o} = \frac{B+W}{2W}V_o$$

$$\frac{1}{\delta_c - \beta_c} = \sqrt{U^2 + \left(\frac{B+W}{2W}V_o\right)^2} + \frac{B+W}{2W}V_o$$

Voeren we nu de regenfunctie in

Zij:

$$L^2\{R(x,t)\} = r(s,\sigma)$$

Het stelsel differentiaalvergelijkingen wordt hiermee na transformatie

$$(W's-2\beta B\sigma)L^2\{\eta\} + (\alpha^2\sigma+2\beta s+\gamma)L^2\{q\} = W'a(\sigma)+2\beta c(\sigma)$$

$$W\sigma L^2\{\eta\} + sL^2\{q\} = c(\sigma) + r(s,\sigma).$$

Noemen we η_o de hoogwatergolf zonder regen en η_r de verandering hiervan door de regen, zo is

$$L^2\{\eta_r\} = L^2\{\eta_o\} - \frac{\frac{\alpha^2\sigma + 2\beta s + \gamma}{W'} r(s,\sigma)}{(s-\beta_c\sigma+\sqrt{\delta_c^2\sigma^2+\gamma_c\sigma})(s-\beta_c\sigma-\sqrt{\delta_c^2\sigma^2+\gamma_c\sigma})}$$

Een oplossing is alleen mogelijk als $r(s,\sigma)$ deelbaar is door

$$s-\beta_c\sigma-\sqrt{\delta_c^2\sigma^2+\gamma_c\sigma}$$

Zij bijv.

$$r(s,\sigma) = (s-\beta_c\sigma-\sqrt{\delta_c^2\sigma^2+\gamma_c\sigma})\,u(s,\sigma)$$

$$L^2\{\eta_r\} = L^2\{\eta_o\} - \frac{(\alpha^2\sigma+2\beta s+\gamma)u(s,\sigma)}{W'(s-\beta_c\sigma+\sqrt{\delta_c^2\sigma^2+\gamma_c\sigma}}$$

Zij nu $= \frac{\alpha^2\sigma + 2\beta s + \gamma}{W'} u(s,\sigma) = h(s,\sigma)$

en zij de inverse transformatie van $h(s,\sigma)$: $H(x,t)$

Nu is $\frac{1}{s-\beta_c\sigma+\sqrt{\delta_c^2\sigma^2+\gamma_c\sigma}}$ de tweedimensionale Laplace-Transformatie van

$t < (\delta_c - \beta_c)x$ $\qquad G(x,y) = 0$

$t > (\delta_c - \beta_c)x$ $\qquad G(x,y) = e^{-\frac{\gamma_c}{2\delta_c}} U_{o1}\{x_1 t-(\delta_c-\beta_c)x\} +$

$$+ \frac{\gamma_c}{2\delta_c} x\, e^{-\frac{\gamma_c}{2\delta_c^2}(t+\beta_c x)} \frac{1}{\sqrt{(t+\beta_c x)^2-\delta_c^2 x^2}} I_1\left(\frac{\gamma_c}{2\delta_c^2}\sqrt{(t+\beta_c x)^2-\delta_c^2 x_2^2}\right),$$

zodat dus

$$\eta_r(x,t) = \eta_o(x,t) + G(x,y)^* \; H(x,y) =$$

$$= \eta_o(x,t) + \int_0^x \int_0^t G(\xi,\tau)H(x-\xi,\, t-\tau)\,d\xi\,d\tau.$$