

Colloquium:

Mathematische problemen uit de praktijk.

Voordracht op 20 October 1954.

door

Prof. Dr R. Timman.

De integratiemethode van Riemann voor hyperbolische
partiële differentiaalvergelijkingen.

1. De functie van Green.

Verschillende problemen uit de potentiaaltheorie, zoals het probleem van Dirichlet, kunnen opgelost worden met behulp van een functie van Green.

Deze oplossingsmethode is gebaseerd op de formule van Green

$$\iint_G (U \Delta V - V \Delta U) dO = \int_C \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS \quad (1)$$

voor twee functies U en V analytisch in het gebied G, begrensd door een gesloten kromme C. De formule volgt direct uit het welbekende divergentietheorema

$$\iint_G \operatorname{div} \underline{a} dO = \int_C (\underline{a} \cdot \underline{n}) ds.$$

Wij kunnen n.l. de uitdrukking

$$U \cdot \Delta V - V \Delta U \quad \text{schrijven als de} \\ \operatorname{div} [U \cdot \operatorname{grad} V - V \operatorname{grad} U] .$$

Substitutie geeft het resultaat.

In het geval, dat V in het punt P een logarithmische singulariteit heeft, dus de $V = \ln r + W$ (W analytisch) kunnen wij deze eerst door een klein cirkeltje uitsluiten en daarna tot de limiet overgaan. Het resultaat is

$$\iint_0 (U \Delta V - V \Delta U) dO = \int_C \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds + 2\pi U_P.$$

Indien, zoals bij het probleem van Dirichlet, nu alleen de randwaarden van U gegeven zijn, terwijl $\Delta U = 0$ moet zijn, proberen wij een functie V zo te bepalen, dat

1. $\Delta V = 0$
2. $V = \ln r + W$, waarbij W analytisch is in G
3. $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ op C .

In dit geval vinden wij

$$U_p = \frac{1}{2\pi} \int_C U \frac{\partial V}{\partial n} ds.$$

zodat U in het gebied G met behulp van de functie V in haar randwaarden wordt uitgedrukt. V wordt de functie van Green genoemd.

2. De algemene formule van Green.

Wij beschouwen nu een algemene lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde in twee variabelen

$$L[u] = a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + 2a_{13} u_x + 2a_{23} u_y + a_{33} u = \rho$$

waarbij a_{ik} en ρ analytisch zijn in een gebied G .

Allereerst proberen wij de differentiaaluitdrukking $M[V]$ te vinden, zodanig, dat

$$V L[u] - u M[V]$$

weer de divergentie van een vector \underline{a} is.

$$\begin{aligned} & a_{11} V u_{xx} + 2a_{12} V u_{xy} + a_{22} V u_{yy} + 2a_{13} V u_x + 2a_{23} V u_y + a_{33} V u = \\ & = \frac{\partial}{\partial y} [a_{12} V u_x + a_{22} V u_y + 2a_{23} V u] + a_{33} V u - u_x (a_{11} V)_x - u_y (a_{12} V)_y + \\ & \quad - (2a_{13} V)_x u - u_x (a_{12} V)_y - u_y (a_{22} V)_y - 2(a_{13} V)_y u = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} [a_{11} V u_x + a_{12} V u_y + 2a_{13} V u] + \frac{\partial}{\partial y} [a_{12} V u_x + a_{22} V u_y + 2a_{23} V u] + \\ & \quad + a_{33} V u - \frac{\partial}{\partial x} [u (a_{11} V)_x + u (a_{12} V)_y] - \frac{\partial}{\partial y} [u (a_{12} V)_x + u (a_{22} V)_y] + \\ & \quad + u [(a_{11} V)_{xx} + 2(a_{12} V)_{xy} - 2(a_{13} V)_x + (a_{22} V)_{yy} - 2(a_{23} V)_y] \end{aligned}$$

zodat wij vinden met de geadjungeerde differentiaalvorm

$$M[V] = (a_{11}V)_{xx} + 2(a_{12}V)_{xy} + (a_{22}V)_{yy} + 2(a_{13}V)_x + 2(a_{23}V)_y + a_{33}V$$

$$V L[U] - U M[V] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} [a_{11}V U_x + a_{12}V U_y + 2a_{13}UV - U(a_{11}V)_x - U(a_{12}V)_y] + \\ + \frac{\partial}{\partial y} [a_{12}V U_x + a_{22}V U_y + 2a_{23}UV - U(a_{12}V)_x - U(a_{22}V)_y].$$

Het verband tussen L en M is wederkerig: $M[U]$ is de geadjungeerde van $L[U]$ en omgekeerd.

Immers, als

$$M[U] = b_{11}U_{xx} + 2b_{12}U_{xy} + b_{22}U_{yy} + 2b_{13}U_x + 2b_{23}U_y + b_{33}U$$

dan is

$$b_{11} = a_{11}, \quad b_{22} = a_{22}, \quad b_{12} = a_{12}$$

$$\{b_{13} + a_{13}\} = (a_{11})_x + (a_{12})_y$$

$$\{b_{23} + a_{23}\} = (a_{12})_x + (a_{22})_y$$

$$\{b_{33} - a_{33}\} = (a_{11})_{xx} + 2(a_{12})_{xy} + (a_{22})_{yy} = 2(a_{13})_x - 2(a_{23})_y = \\ = (b_{13} - a_{13})_x + (b_{23} - a_{23})_y.$$

De vector blijkt de componenten te hebben

$$a_1 = a_{11}(V U_x - U V_x) + a_{12}(V U_y - U V_y) + (2a_{13} - a_{11}x - a_{12}y) UV$$

$$a_2 = a_{12}(V U_x - U V_x) + a_{22}(V U_y - U V_y) + (2a_{23} - a_{12}x - a_{22}y) UV.$$

Indien $b_{ik} = a_{ik}$ heet de uitdrukking zelf-geadjungeerd en dan zijn de coëfficiënten van U en V nul.

Volgens het divergentietheorema is nu

$$\iint \{ V L[u] - u L[V] \} dO = - \int (a_{11} n_1 + a_{22} n_2) ds,$$

als n_1 en n_2 de componenten van de normaal zijn.

Het rechterlid wordt

$$\begin{aligned} & \int [V \{ (a_{11} n_1 + a_{12} n_2) u_x + (a_{12} n_1 + a_{22} n_2) u_y \} - u \{ a_{11} n_1 + a_{12} n_2 \} u_x + \{ a_{12} n_1 + a_{22} n_2 \} u_y] ds \\ & + \int [(2a_{12} - a_{11}x - a_{12}y) n_1 + (2a_{22} - a_{12}x - a_{22}y) n_2] u \cdot V \cdot ds. \end{aligned}$$

Als de uitdrukking zelf-geadjungeerd is, wordt de differentiatie in de normaalrichting, zoals die bij de potentiaalvergelijking voorkomt, vervangen door een differentiatie in de richting

$$v_1 = a_{11} n_1 + a_{12} n_2$$

$$v_2 = a_{12} n_1 + a_{22} n_2$$

die wel de conormaal wordt genoemd.

In dit geval kunnen wij schrijven:

$$\begin{aligned} \iint [V L[u] - u L[V]] dO &= - \int [V \frac{\partial u}{\partial v} - u \frac{\partial V}{\partial v}] ds + \\ &+ \int [(2a_{12} - a_{11}x - a_{12}y) n_1 + (2a_{22} - a_{12}x - a_{22}y) n_2] u V ds. \end{aligned}$$

3. De methode van Riemann voor het probleem van Cauchy.

Om de methode van Riemann voor hyperbolische vergelijkingen uiteen te zetten, beschouwen wij eerst de karakteristieken van de hyperbolische vergelijking, die de integraalkrommen zijn van de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}$$

en voor deze vergelijking reëel zijn.

Indien a_{11} , a_{12} en a_{22} continu zijn, gaan er door ieder punt twee karakteristieken.

Het probleem van Cauchy voor de vergelijking is nu:

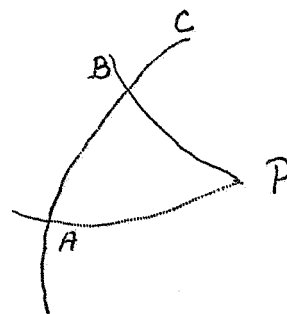
Gevraagd wordt de oplossing van de hyperbolische partiële differentiaalvergelijking

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + 2a_{13} u_x + 2a_{23} u_y + a_{33} u = 0$$

waarvoor op een gegeven glatte boog σ van een kromme, die in geen enkel punt aan een karakteristiek raakt, de functie U en haar afgeleiden gegeven zijn.

Wij proberen de functie te bepalen in een punt, zo gelegen, dat twee karakteristieken door dat punt een segment uit C snijden, waarop deze functiewaarden zijn gegeven.

Op het gebied, begrensd door deze twee karakteristieken en het stuk van C passen wij onze stelling toe.



Langs een karakteristiek valt de richting van de conormaal langs de karakteristieke kromme zelf. Dit wordt direct duidelijk uit de uitdrukking, immers de conormaal is de richting, toegevoegd aan die van de normaal op de kromme.

Deze normaal (n_1, n_2) voldoet n.l. aan

$$a_{11} n_1^2 + 2 a_{12} n_1 n_2 + a_{22} n_2^2 = 0$$

of wel

$$n_1 v_1 + n_2 v_2 = 0,$$

zodat (v_1, v_2) loodrecht op de normaal staat en dus langs de karakteristiek valt.

Om de verdere berekening te vereenvoudigen, voeren wij de karakteristieken als nieuwe coördinaatlijnen in. $\xi = \text{const.}$ $\eta = \text{const.}$

$$\xi = \xi(x, y)$$

$$\eta = \eta(x, y).$$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x.$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + u_{\xi\xi\xi} \xi_x \xi_{xx} + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_{\eta\eta\eta} \eta_x \eta_{xx} + 2 u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x.$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y.$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + u_{\xi\xi\xi} \xi_y \xi_{yy} + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_{\eta\eta\eta} \eta_y \eta_{yy} + 2 u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y.$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_{\xi\xi} \xi_{xy} + u_{\eta\eta} \eta_{xy}.$$

De getransformeerde vergelijking wordt

$$\begin{aligned}
 & (a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \eta_x + a_{22} \eta_x^2) U_{\xi\xi} + \\
 & + 2 \{ a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) + a_{22} \xi_y \eta_y \} U_{\xi\eta} + \\
 & + (a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2) U_{\eta\eta} + \\
 & + \dots U_{\xi} + \dots U_{\eta} + \dots U = 0
 \end{aligned}$$

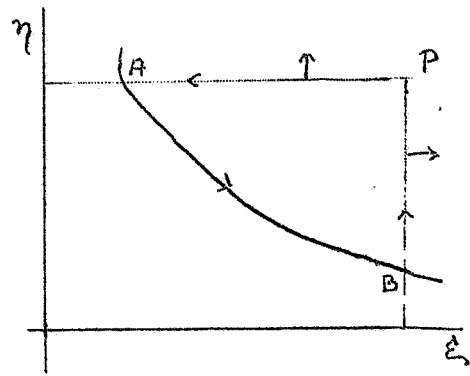
Daar de coördinaatlijnen karakteristieken zijn, is zowel de coëfficiënt van $U_{\xi\xi}$ als van $U_{\eta\eta}$ nul, zodat wij een vergelijking van de vorm

$$U_{\xi\eta} + a U_{\xi} + b U_{\eta} + c U = 0$$

verkrijgen.

De geadjungeerde uitdrukking is:

$$\begin{aligned}
 M[U] = & U_{\xi\eta} - a U_{\xi} - b U_{\eta} + \\
 & + (c - 2a_{\xi} - 2b_{\eta}) U.
 \end{aligned}$$



Langs een kromme $\xi = \text{const.}$ is:

$$\begin{aligned}
 \underline{m} &= (1, 0) \\
 \begin{cases} \nu_1 = 0 \\ \nu_2 = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Langs een kromme $\eta = \text{const.}$ is

$$\begin{aligned}
 \underline{m} &= (0, 1) \\
 \begin{cases} \nu_1 = 1 \\ \nu_2 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

De formule van Green wordt

$$\begin{aligned}
 \iint \{ V L[U] - U L[V] \} dO = & + \int_P^A (V U - U V) d\xi - \int_A^B (V U_{\nu} - U V_{\nu}) ds + \\
 & - \int_B^P (V U_{\eta} - U V_{\eta}) d\eta + \int_P^A 2 B U V d\xi + \\
 & - \int_B^P 2 a U V d\eta - 2 \int_A^B (a_{\eta_1} + b_{\eta_2}) U V ds.
 \end{aligned}$$

Wij kunnen de integralen langs de stukken AP en BP partieel integreren

$$\int_P^A (V u_\xi - u v_\xi) d\xi = -[uV]_P^A - 2 \int_P^A u v_\xi d\xi$$

$$\int_B^P (V u_\eta - u v_\eta) d\eta = -[uV]_B^P - 2 \int_B^P u v_\eta d\eta$$

Laat nu $V(\xi, \eta) = R_p(\xi, \eta)$ een functie zijn, die aan de volgende voorwaarden voldoet.

1. $M[V] = 0$.

2. Op AP: $v_\xi - bV = 0$

Op BP: $v_\eta - aV = 0$

3. $V_p = 1$.

Daar u voldoet aan $L[u] = 0$, krijgen wij dan

$$0 = -u_A v_A + 2u_p v_p - u_B v_B - \int_A^B (V u_\eta - u v_\eta) ds - 2 \int_A^B (a m_1 + b m_2) u v ds$$

zodat u_p direct in de randwaarden uitgedrukt wordt, als de functie V , de functie van Riemann gevonden kan worden.

Colloquium:

Mathematische problemen uit de praktijk.

2e Voordracht op 17 November 1954.

door

Prof. Dr R. Timman.

De integratiemethode van Riemann voor hyperbolische
partiële differentiaalvergelijkingen.

De functie van Riemann is niet geheel het analogon van de functie van Green voor elliptische differentiaalvergelijkingen. Immers deze moest voldoen aan de volgende eisen.

1). Zij heeft in het punt P een logarithmische singulariteit; is dus van de vorm

$$G(\xi, \eta; \xi_p, \eta_p) = R(\xi, \eta; \xi_p, \eta_p) \log \rho + \Phi(\xi, \eta; \xi_p, \eta_p),$$

waarbij R en Φ regulier zijn en $R(\xi_p, \eta_p; \xi_p, \eta_p) = 1$ is.

2). G voldoet aan de geadjungeerde vergelijking

$$M[G(\xi, \eta; \xi_p, \eta_p)] = 0.$$

Brengen wij dit over op de hyperbolische vergelijking

$$u_{\xi\eta} + au_{\xi} + bu_{\eta} + cu = 0,$$

dan wordt het analogon van $\rho = \sqrt{(\xi - \xi_p)(\eta - \eta_p)}$.

Substitutie in de geadjungeerde vergelijking

$$M[u] = u_{\xi\eta} - au_{\xi} - bu_{\eta} + (c - 2a_{\xi} - 2b_{\eta})u = 0$$

geeft:

$$M[R] \log \rho + \frac{1}{2} \frac{R_{\eta} - aR}{\xi - \xi_p} + \frac{1}{2} \frac{R_{\xi} - bR}{\eta - \eta_p} + \text{regulier} = 0,$$

zodat R voldoet aan

$$M[R] = 0$$

$$R_{\eta} - aR = 0 \quad \text{voor} \quad \xi = \xi_p$$

$$R_{\xi} - bR = 0 \quad \text{voor} \quad \eta = \eta_p$$

$$R = 1 \quad \text{in P,}$$

dus juist aan de voorwaarden, die aan de functie van Riemann gesteld waren.

Voorbeelden.

1. De kabelvergelijking.

Wij beschouwen een kabel met weerstand R, zelfinductie L, capaciteit C en lekconstante G per lengteëenheid. Noem de potentiaal in het punt x $V(x)$ en de stroomsterkte $I(x)$, dan moeten

$V(x)$ en $I(x)$ voldoen aan de vergelijkingen

$$L \frac{\partial J}{\partial t} + RJ = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$C \frac{\partial V}{\partial t} + GV = -\frac{\partial J}{\partial x},$$

die door eliminatie van I overgaan in de vergelijking van de tweede orde

$$LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (LG + CR) \frac{\partial V}{\partial t} + RGV = 0.$$

De karakteristieken zijn hier gegeven door

$$LC dx^2 - dt^2 = 0,$$

of wel

$$\xi = t - \sqrt{LC} \cdot x,$$

$$\eta = t + \sqrt{LC} \cdot x.$$

Transformatie naar de karakteristieke coördinaten ξ en η geeft

$$4LC \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} + (LG + RC) \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + RGV = 0,$$

of wel

$$V_{\xi\eta} + aV_{\xi} + aV_{\eta} + bV = 0.$$

Om de functie van Riemann te kunnen bepalen, vereenvoudigen wij de vergelijking door de substitutie

$$V = e^{-a(\xi+\eta)} U(\xi, \eta).$$

Dan voldoet U aan de vergelijking

$$U_{\xi\eta} + c^2 U = 0.$$

waarbij

$$c^2 = b - a^2 = \frac{RG}{4LC} - \left(\frac{LG+RC}{4LC} \right)^2 = \left(\frac{LG-RC}{4LC} \right)^2.$$

Wij zoeken nu een oplossing, die een functie is van $\rho = \sqrt{(\xi - \xi_p)(\eta - \eta_p)}$ alleen. De vergelijking in ρ wordt dan

$$U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} U_{\rho} + 4c^2 U = 0.$$

Dit is een vergelijking van Bessel van de orde 0 voor de variabele $2c\rho$. De oplossing, die voor $\rho = 0$ de waarde 1 aanneemt, is

$$J_0(2c\rho) = J_0 \left\{ 2c \sqrt{(\xi - \xi_p)(\eta - \eta_p)} \right\}.$$

Dit is inderdaad de functie van Riemann voor de vergelijking.

Inderdaad is langs $\xi = \xi_0$ $U_{\eta} = 0$ en langs $\eta = \eta_0$ $U_{\xi} = 0$.

Met behulp van deze functie van Riemann kunnen wij nu verschillende problemen voor deze vergelijking oplossen.

a) Gegeven een oneindig lange kabel: $-\infty < x < +\infty$ met beginpotentiaal $V(x,0) = f(x)$ en stroomverdeling $I(x,0) = g(x)$.

Voor de functie V zijn dan voor $t = 0$ dus gegeven

$$V(x,0) = f(x)$$

$$V_t = -G/C f(x) - 1/C g'(x).$$

De voorwaarden voor de functie

$$U = e^{+a(\xi+\eta)} V = e^{+2at} V$$

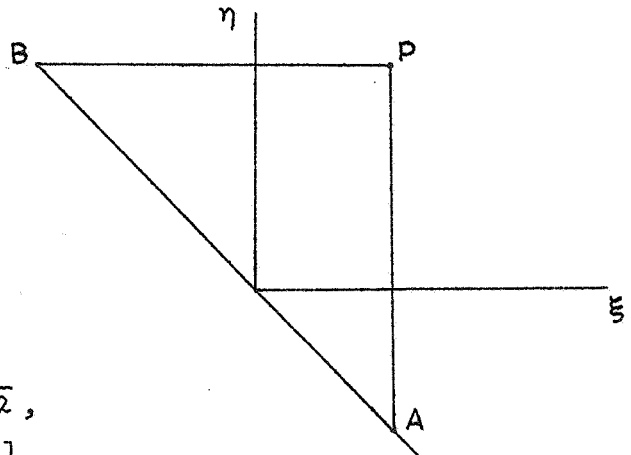
worden dan voor $t = 0$

$$U = f(x)$$

$$U_t = (2a - G/C) f(x) - \frac{1}{C} g'(x) = 2ef(x) - \frac{1}{C} g'(x).$$

In het (ξ, η) vlak zijn de beginvoorwaarden gegeven langs de lijn $\xi + \eta = 0$ en in dat vlak geeft de formule van Riemann

$$U_P = \frac{1}{2} (U_A \cdot R_A + U_B \cdot R_B) + \frac{1}{2} \int_A^B [R \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \frac{\partial R}{\partial \eta}] ds.$$

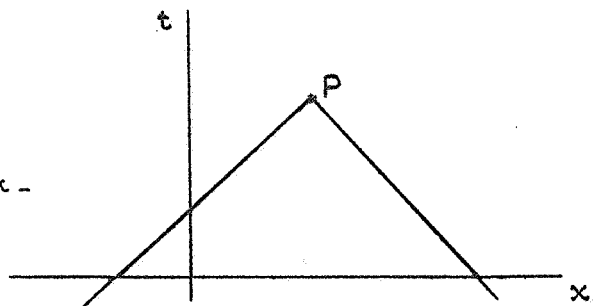


De normaal heeft de richtingscoëfficiënten $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; de richtingscoëfficiënten van de conormaal zijn eveneens $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, zodat de conormaal met de normaal samenvalt. Terugtransformeren naar het (x,t) vlak geeft: (met $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$)

$$U_P = \frac{1}{2} f(x_P - vt_P) + \frac{1}{2} f(x_P + vt_P) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_P - vt_P}^{x_P + vt_P} \left\{ 2ef(x) - \frac{1}{C} g'(x) \right\} I_0 \left\{ 2e\sqrt{t_P^2 - LC(x-x_P)^2} \right\} dx -$$

$$- \frac{1}{2} C \int_{x_P - vt_P}^{x_P + vt_P} f(x) \frac{I_1 \left\{ 2e\sqrt{t_P^2 - LC(x-x_P)^2} \right\}}{\sqrt{t_P^2 - LC(x-x_P)^2}} dx.$$



b) Wij beschouwen nu het geval van een half oneindige aanvankelijk stroom en spanningsloze kabel, waar op het tijdstip $t = 0$ een spanning E wordt aangelegd, die constant wordt gehouden.

De randvoorwaarden zijn dan

$$x=0, t>0 \quad V=E \quad x=0, t<0 \quad V=0$$

$$t=0 \quad V=0 \quad J=0.$$

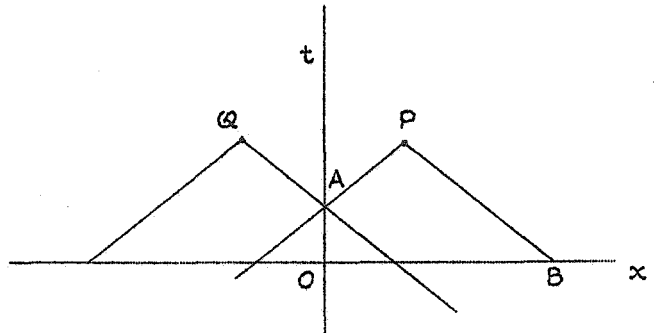
Uit de vergelijkingen volgt, dat voor $t = 0$ ook geldt

$$\frac{\partial J}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

De normale afgeleide V_x langs $x = 0$ is echter niet bekend.

Wij passen nu de stelling van Riemann toe op twee punten P en Q, die symmetrisch liggen t.o.v. de lijn $x = 0$. In Q is de potentiaal identiek nul.

Langs de lijn $x = 0$ is de conormaal weer gelijk aan de normaal.



Toepassen van de formule van Riemann geeft

$$\begin{aligned} V_P &= \frac{1}{2} E + \int_A^Q \left\{ V \cdot \frac{\partial R}{\partial x} + V_x \cdot R \right\} dt = \\ &= \frac{1}{2} E + E \int_0^{t_p - x_p/v} \frac{I_1 \left\{ 2c \sqrt{(t_p - t)^2 - x_p^2/v^2} \right\}}{\sqrt{(t_p - t)^2 - x_p^2/v^2}} dt + \int_0^{t_p - x_p/v} V_x \cdot I_1 \left\{ 2c \sqrt{(t_p - t)^2 - x_p^2/v^2} \right\} dt \end{aligned}$$

Voor het punt $Q(-x_p, t_p)$ krijgen wij

$$0 = \frac{1}{2} E - E \int_0^{t_p - x_p/v} \frac{I_1 \left\{ 2c \sqrt{(t_p - t)^2 - x_p^2/v^2} \right\}}{\sqrt{(t_p - t)^2 - x_p^2/v^2}} dt + \int_0^{t_p - x_p/v} V_x \cdot I_1 \left\{ 2c \sqrt{(t_p - t)^2 - x_p^2/v^2} \right\} dt.$$

Eliminatie van V_x geeft direct het resultaat

$$\begin{aligned} V_P &= 2E \int_0^{t_p - x_p/v} \frac{I_1 \left\{ 2c \sqrt{(t_p - t)^2 - x_p^2/v^2} \right\}}{\sqrt{(t_p - t)^2 - x_p^2/v^2}} dt \quad \text{voor } t_p > x_p/v. \\ &= 0 \quad \quad \quad t_p < x_p/v. \end{aligned}$$

2. De vergelijkingen voor de niet-stationaire eendimensionale gasstroming.

De stromingsvergelijkingen voor de niet-stationaire eendimensionale gasstroming zijn

$$\rho(u_t + uu_x) = -p_x.$$

$$p_t + (pu)_x = 0.$$

Te eerste schrijven wij als

$$u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 + \int \frac{dp}{\rho} \right)_x = 0.$$

Wij voeren nu een snelheidspotentiaal φ in, zodanig, dat

$$u = \varphi_x$$

$$q = -\frac{1}{2} u^2 - \int \frac{dp}{\rho} = \varphi_t$$

en bedenken, dat voor een gas, waarbij p alleen van ρ afhangt (barotropisch gas)

$$\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_x^2 = b$$

een functie is van ρ alleen en omgekeerd.

De tweede vergelijking kunnen wij nu schrijven als

$$u_x + \frac{p_t}{\rho} + u \frac{p_x}{\rho} = 0$$

of

$$\varphi_{xx} + \frac{d \ln \rho}{db} \left[\varphi_{tt} + 2\varphi_x \varphi_{xt} + \varphi_x^2 \varphi_{xx} \right] = 0.$$

Stel nu $\frac{db}{d \ln \rho} = \rho \cdot \frac{db}{d\rho} = -a^2$, waarbij a een functie is van $\varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_x^2$, dan wordt dit

$$(a^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx} - 2\varphi_x \varphi_{xt} - \varphi_{tt} = 0$$

een niet-lineaire vergelijking voor φ .

Wij maken haar lineair door de Legendre transformatie

$$u = \varphi_x \quad q = \varphi_t \quad f(u, q) = ux + qt - \varphi$$

$$x = f_u \quad t = f_q$$

en voeren u en q als nieuwe variabelen in

$$f_{qq}(a^2 - u^2) + 2uf_{uq} - f_{uu} = 0$$

met als karakteristieke vergelijking

$$(a^2 - u^2) du^2 - 2ududq - dq^2 = 0.$$

De karakteristieke krommen zijn een schaar in het (u, q) vlak, bepaald door de differentiaalvergelijkingen

$$\pm a du = u du + dq = d\left(\frac{1}{2} u^2 + q\right)$$

$$\pm du = \frac{d\left(\frac{1}{2} u^2 + q\right)}{a} = -dA,$$

waarbij A een functie is van $\frac{1}{2} u^2 + q$.

De karakteristieken zijn bepaald door

$$\begin{cases} 2\lambda = u + A \\ 2\mu = -u + A \end{cases}$$

De vergelijking op de karakteristieke coördinaten wordt nu:

$$f_{\lambda\mu} + \frac{1-a'}{2a} (f_{\lambda} + f_{\mu}) = 0,$$

waarbij a als een functie van $\lambda + \mu$ opgevat moet worden.

Wij gaan nu na, welke vorm deze vergelijking voor een isentropische stroming, waarbij

$$p = C \cdot \rho^{\gamma}.$$

Dan is

$$b = -\int \frac{dp}{\rho} = -C\gamma \int \rho^{\gamma-2} d\rho = -C \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = q + \frac{1}{2} u^2$$

en

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = C \cdot \gamma \cdot \rho^{\gamma-1} = -(q + \frac{1}{2} u^2)(\gamma-1)$$

en

$$dA = \frac{-d(\frac{1}{2}u^2 + q)}{\sqrt{(\gamma-1)\{-q - \frac{1}{2}u^2\}}}$$

zodat

$$A = \lambda + \mu = \frac{2}{\sqrt{\gamma-1}} \sqrt{-q - \frac{1}{2}u^2} = \frac{2a}{\gamma-1}$$

Dus wordt

$$\frac{1-a'}{2a} = \frac{-\gamma+3}{2(\gamma-1)} \cdot \frac{1}{\lambda+\mu}$$

Stel

$$\frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)} = n,$$

dan wordt dus de vergelijking

$$f_{\lambda\mu} + \frac{n}{\lambda+\mu} (f_{\lambda} + f_{\mu}) = 0.$$

De functie van Riemann moet voldoen aan de geadjungeerde vergelijking

$$R_{\lambda\mu} - n \left(\frac{R}{\lambda+\mu} \right)_{\lambda} - n \left(\frac{R}{\lambda+\mu} \right)_{\mu} = 0$$

en de randvoorwaarden

$$R(\lambda', \mu'; \lambda, \mu) = 1$$

$$R_{\lambda} - \frac{n}{\lambda+\mu} R = 0 \quad \text{voor } \mu = \mu'$$

$$R_{\mu} - \frac{n}{\lambda+\mu} R = 0 \quad \text{voor } \lambda = \lambda'.$$

Deze functie van Riemann kan expliciet worden aangegeven.
Wij verdrijven weer in de vergelijking

$$R_{\lambda\mu} - \frac{n}{\lambda+\mu} (R_{\lambda} + R_{\mu}) + \frac{2n}{(\lambda+\mu)^2} R = 0$$

de term met de eerste afgeleiden door te stellen

$$R = \rho \cdot \Omega$$

$$\rho \cdot \Omega_{\lambda\mu} + \left[\rho_{\mu} - \frac{n}{\lambda+\mu} \rho \right] \Omega_{\lambda} + \left[\rho_{\lambda} - \frac{n}{\lambda+\mu} \rho \right] \Omega_{\mu} + \left[\rho_{\lambda\mu} - \frac{n}{\lambda+\mu} (\rho_{\lambda} + \rho_{\mu}) + \frac{2n}{(\lambda+\mu)^2} \rho \right] \Omega = 0$$

dus: $\frac{\rho_{\mu}}{\rho} = \frac{\rho_{\lambda}}{\rho} = \frac{n}{\lambda+\mu}$

$$\rho = C \cdot (\lambda+\mu)^n.$$

Voor de constante kiezen wij $(\lambda'+\mu')^{-n}$. Dan wordt de vergelijking voor Ω

$$\Omega_{\lambda\mu} + \frac{n(1-n)}{(\lambda+\mu)^2} \Omega = 0$$

en de randvoorwaarden:

$$\Omega_{\lambda} = 0 \text{ voor } \mu = \mu'$$

$$\Omega_{\mu} = 0 \text{ voor } \lambda = \lambda'.$$

Wij proberen nu aan de vergelijking te voldoen door een functie van de variabele

$$t = - \frac{(\lambda-\lambda')(\mu-\mu')}{(\lambda+\mu)(\lambda'+\mu')}$$

te zoeken.

Dit geeft de gewone differentiaalvergelijking

$$t(1-t) \frac{d^2\Omega}{dt^2} + (1-2t) \frac{d\Omega}{dt} - n(1-n)\Omega = 0.$$

Dit is een hypergeometrische differentiaalvergelijking met

$$\alpha = 1-n; \beta = n; \gamma = 1$$

met als oplossing de hypergeometrische functie

$$\Omega(\lambda, \mu; \lambda', \mu') = F \left\{ 1-n, n; 1, - \frac{(\lambda-\lambda')(\mu-\mu')}{(\lambda+\mu)(\lambda'+\mu')} \right\}.$$

Colloquium:

Mathematische Problemen uit de praktijk

Voordracht op 1 December 1954

door

T.C. Braakman

Integraalvergelijkingen van het Wiener-Hopf type

1. Inleiding.

1.1. Tweezijdige Laplace-transformatie.

We verstaan onder tweezijdige Laplace-transformatie de toevoeging van een functie $\varphi(u)$ aan een functie $f(x)$, waarbij $\varphi(u)$ wordt gedefinieerd door

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} f(x) dx, \quad (1)$$

waarbij we aannemen dat $f(x)$ een zodanige functie is, dat $\varphi(u)$ althans in een zeker gebied van het complexe u -vlak regulier is. Wat betreft dit regulariteitsgebied volgt uit (1) dat

$\varphi(u) = \int_{-\infty}^0 e^{ux} f(x) dx + \int_0^{+\infty} e^{ux} f(x) dx$, en het is direct duidelijk dat als de eerste integraal convergeert voor zekere $u = u_1$, deze ook convergeert voor alle u met $\text{Re } u > u_1$, terwijl wanneer de tweede integraal bestaat voor $u = u_2$, deze eveneens zin heeft voor alle u met $\text{Re } u < u_2$. Hieruit volgt, dat we bij de tweezijdige integraaltransformatie volgens Laplace te maken hebben met een convergentiestrook in het u -vlak, in tegenstelling tot de eenzijdige Laplace-transformatie, die aanleiding geeft tot convergentie-halfvlakken.

In zekere zin kan men er bezwaar tegen maken, om aan de tweezijdige Laplace-transformatie te veel zelfstandige betekenis toe te kennen. Inderdaad kunnen we deze integraaltransformatie ook opvatten als een complexe Fourier-transformatie. De Fouriertransformatie wordt gedefinieerd door de toevoeging:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} h(\tau) d\tau \quad (2)$$

terwijl uit het integraaltheorema van Fourier de formule voor de inverse transformatie volgt:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} g(\omega) d\omega \quad (3)$$

Nemen we nu aan dat u ligt in de convergentiestrook van $\varphi(u)$ en we zetten $u = \gamma - i\omega$, dan levert (1)

$$\varphi(\gamma - i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \cdot e^{\gamma x} f(x) \cdot dx,$$

zodat $\frac{\varphi(\gamma - i\omega)}{\sqrt{2\pi}}$, opgevat als functie van ω , de Fourier-getransformeerde is van $e^{\gamma x} f(x)$.

Hieruit en uit (3) volgt de formule voor de inverse transformatie van (1):

$$e^{\gamma x} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \varphi(\gamma - i\omega) d\omega,$$

of:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\gamma + i\omega)x} \varphi(\gamma - i\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{-ux} \varphi(u) du \end{aligned} \quad (4)$$

Van de eigenschappen van deze integraaltransformatie zullen wij er slechts één nodig hebben. Dit is echter tevens de belangrijkste, nl.:

Wanneer $\varphi_1(u)$ de beeldfunctie is van $f_1(x)$ en $\varphi_2(u)$ van $f_2(x)$, en $\varphi_1(u)$ en $\varphi_2(u)$ hebben een gemeenschappelijke convergentiestrook, dan is binnen deze strook het product van $\varphi_1(u)$ en $\varphi_2(u)$ de beeldfunctie van $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(x - \tau) d\tau$.

Het bewijs is zeer eenvoudig, immers de beeldfunctie van $f(x)$ is:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(x - \tau) d\tau dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} f_2(x - \tau) dx d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{u\tau} f_1(\tau) d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut} f_2(t) dt = \end{aligned}$$

$= \varphi_1(u) \cdot \varphi_2(u)$, waarbij we hebben aangenomen, dat $f_1(x)$ en $f_2(x)$ zich zo gedragen, dat we de integratie-volgorde mochten verwisselen.

1.2. Integraalvergelijkingen van het type $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot K(x-y) dy$. (5).

De hierboven afgeleide eigenschap voor de complexe Fourier-transformatie doet vermoeden, dat integraalvergelijkingen van het type (5) een speciale rol zullen spelen en dat oplossing met behulp van integraaltransformatie mogelijk zal zijn.

Inderdaad blijken integraalvergelijkingen van dit type in het geval dat K exponentieel afneemt voor grote waarden van |x|, eenvoudig oplosbaar te zijn. We zullen de volgende stelling bewijzen:

Als $u = u^*$ een n-voudig nulpunt is van de functie $1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut} K(t) dt$ en $Q(x)$ is een willekeurig polynoom van hoogstens $(n-1)^e$ graad, dan is $Q(x) \cdot e^{-u^*x}$ een oplossing van (5).

Immers, omdat u^* een n-voudig nulpunt is, geldt:

$$\left[\frac{d^i}{du^i} \left(1 - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ut} K(t) dt \right) \right]_{u=u^*} = 0 \text{ voor } i = 0, \dots, n-1.$$

dus: $\int_{-\infty}^{+\infty} t^i e^{u^*t} K(t) dt = 1$ voor $i = 0$
 $= 0$ voor $i = 1, \dots, n-1$.

Hieruit volgt: $\int_{-\infty}^{+\infty} P_{n-1}(t) e^{u^*t} K(t) dt = P_{n-1}(0)$ als P_{n-1} een wille-

keurig polynoom van hoogstens $(n-1)^e$ graad is.

Er geldt derhalve:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(y) e^{-u^*y} K(x-y) dy = e^{-u^*x} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x-t) e^{+u^*t} K(t) dt = e^{-u^*x} Q(x)$$

waarmee het beweerde is aangetoond.

1.3. Definitie van de integraalvergelijkingen van Wiener en Hopf.

Hoewel het uit theoretisch oogpunt natuurlijk interessant is, dat integraalvergelijkingen van het type (5) zo eenvoudig zijn op te lossen, is het nut voor de praktijk minder groot, aangezien niet veel praktische problemen aanleiding geven tot een integraalvergelijking van het type (5). Evenwel is er een type integraalvergelijkingen dat zeer veel op (5) lijkt, nl.

$$f(x) = \int_0^{+\infty} f(y) K(x-y) dy \quad (6)$$

en dat veel meer praktische betekenis heeft. Tal van mathematische problemen uit de hydrodynamica (theorie der oppervlakte golven) voeren naar deze vergelijking, evenals een bekend probleem van Milne over de temperatuurverdeling in een steratmosfeer (dit zullen we later als voorbeeld behandelen) en problemen betreffende reflectie in metalen. Verder voeren problemen uit de diffractietheorie tot de verwante integraalvergelijking van de eerste soort

$$g(x) = \int_0^{\infty} f(y) K(x-y) dy . \quad (7)$$

Zowel bij (6) als bij (7) wordt verondersteld dat $K = O(e^{-\epsilon|x|})$ met $\epsilon > 0$, voor grote $|x|$. Vergelijkingen van het type (6) en (7) zijn evenwel in het geheel niet zo eenvoudig op te lossen als (5) en het is de verdienste van Wiener en Hopf dat zij een vernuftige oplosmethode hebben aangegeven, gebruikmakend van de tweezijdige Laplace-transformatie. Vandaar dat deze vergelijkingen met hun namen worden aangeduid.

We zullen deze oplosmethode slechts bespreken voor vergelijking (6) aangezien voor beide soorten integraalvergelijkingen het essentiële van de methode geheel gelijk is. Type (7) zullen we daarna toelichten aan de hand van een voorbeeld uit de diffractietheorie.

Mathematische Problemen uit de praktijk

Voordracht op 15 December 1954

door

T.C. Braakman

Integraalvergelijkingen van het Wiener-Hopf type (II)2. De methode van Wiener en Hopf.

Het probleem is dus een voor $x > 0$ gedefinieerde functie $f(x)$ te bepalen, die voldoet aan integraalvergelijking (6):

$$f(x) = \int_0^{\infty} f(y) K(x-y) dy,$$

waarin $K(x) = O(e^{-\epsilon|x|})$ voor grote $|x|$, met $\epsilon > 0$.

We zullen alle oplossingen bepalen, die voor grote x minder sterk oneindig worden dan een exponentiële functie met een positieve exponent $< \epsilon$. Zonder de algemeenheid te schaden, nemen we $\epsilon = 1$, dus $K(x) = O(e^{-|x|})$ voor grote $|x|$ en we beperken ons tot functies $f(x)$, die voldoen aan:

$$f(x) = O(e^{\alpha x}) \text{ voor grote } x, \text{ met } \alpha \text{ een willekeurige, maar vaste constante } < 1. \quad (8)$$

Als eerste stap naar de oplossing schrijven we de integraalvergelijking in wat we de "normaalvorm" zouden kunnen noemen:

$$g(x) = f(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) K(x-y) dy \quad (9)$$

waarin per definitie

$$f(x) = 0 \text{ voor } x < 0 \quad ; \quad g(x) = 0 \text{ voor } x > 0, \quad (10)$$

terwijl $g(x)$ voor $x < 0$ wordt gedefinieerd door het rechterlid van (9):

$$g(x) = - \int_0^{\infty} f(y) \cdot K(x-y) dy \text{ voor } x < 0.$$

Hiermee is de vergelijking in een vorm gebracht, die zich uitstekend leent voor tweezijdige Laplace-transformatie.

Een (ogenschijnlijk ernstig) nadeel is, dat we nu te maken hebben met twee onbekende functies.

De tweezijdige Laplace-getransformeerden van $f(x)$, $g(x)$ en $K(x)$ noemen we respectievelijk $\varphi(u)$, $\gamma(u)$ en $\kappa(u)$.

Volgens (1) en (10) is:

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \int_0^{\infty} e^{ux} f(x) dx \\ \gamma(u) &= \int_{-\infty}^0 e^{ux} g(x) dx \\ \kappa(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} K(x) dx\end{aligned}\tag{11}$$

Een belangrijk punt in onze beschouwing is nu de vraag, in welk gebied van het u -vlak deze getransformeerden regulier zijn op grond van de gemaakte veronderstellingen omtrent het asymptotisch gedrag van $K(x)$ en $f(x)$.

Uit (11) en (8) blijkt eenvoudig, dat $\varphi(u)$ regulier is in het halfvlak $\operatorname{Re} u < -\alpha$.

Uit de definitie van $g(x)$ voor $x < 0$ zien we dat voor $x \rightarrow -\infty$ $g(x) = O(e^x)$, zodat $\gamma(u)$ regulier is in het halfvlak $\operatorname{Re} u > -1$.

$\kappa(u)$ tenslotte heeft op grond van het asymptotisch gedrag van $K(x)$ de convergentiestrook $|\operatorname{Re} u| < 1$.

$\varphi(u)$, $\gamma(u)$ en $\kappa(u)$ hebben dus de gemeenschappelijke convergentiestrook $-1 < \operatorname{Re} u < -\alpha$ en wanneer we nu de Laplace-transformatie toepassen op vergelijking (9), gebruikmakend van de op pag. 2 bewezen convolutiestelling voor deze integraaltransformatie, geldt voor $-1 < \operatorname{Re} u < -\alpha$:

$$\gamma(u) = \varphi(u) \cdot (1 - \kappa(u)).\tag{12}$$

Voor het volgende zullen we gebruik maken van de volgende hulpstelling:

De functie $1 - \kappa(u)$ heeft hoogstens eindig veel nulpunten in iedere strip $|\operatorname{Re} u| \leq \beta < 1$. Wanneer we deze nulpunten aanduiden met u_1, \dots, u_m kunnen we $1 - \kappa(u)$ voor $|\operatorname{Re} u| \leq \beta$ als volgt voorstellen:

$$1 - \kappa(u) = \frac{\sigma_+(u)}{\sigma_-(u)} \cdot \prod_{i=1}^m (u - u_i),\tag{13}$$

waarin $\sigma_+(u)$ een reguliere functie is zonder nulpunten in het halfvlak $\operatorname{Re} u \geq -\beta$, terwijl $\sigma_-(u)$ een reguliere functie zonder nulpunten is in het halfvlak $\operatorname{Re} u \leq +\beta$.

Bewijs:

Onder vrij algemene voorwaarden voor $K(x)$ kunnen we bewijzen dat $\kappa(u)$ uniform in $\operatorname{Re} u$ naar 0 nadert als $|\operatorname{Im} u| \rightarrow \infty$ binnen een strip $|\operatorname{Re} u| \leq \beta_0 < 1$. We zullen ons in deze algemene gevallen evenwel niet verdiepen; wanneer we aannemen dat $K(x)$ differentieerbaar is en we integreren partieel in de formule voor $\kappa(u)$:

$$\begin{aligned} \kappa(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) \cdot e^{ux} dx = \left[\frac{K(x) \cdot e^{ux}}{u} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{u} \int_{-\infty}^{\infty} K'(x) \cdot e^{ux} dx = \\ &= -\frac{1}{u} \int_{-\infty}^{\infty} K'(x) \cdot e^{ux} dx = O\left(\frac{1}{|u|}\right) \text{ als } |\operatorname{Re} u| < 1, \end{aligned}$$

zien we direct in, dat $\kappa(u) \rightarrow 0$, dus $1-\kappa(u) \rightarrow 1$ als $|\operatorname{Im} u| \rightarrow \infty$ binnen $|\operatorname{Re} u| \leq \beta_0 < 1$, uniform in $\operatorname{Re} u$.

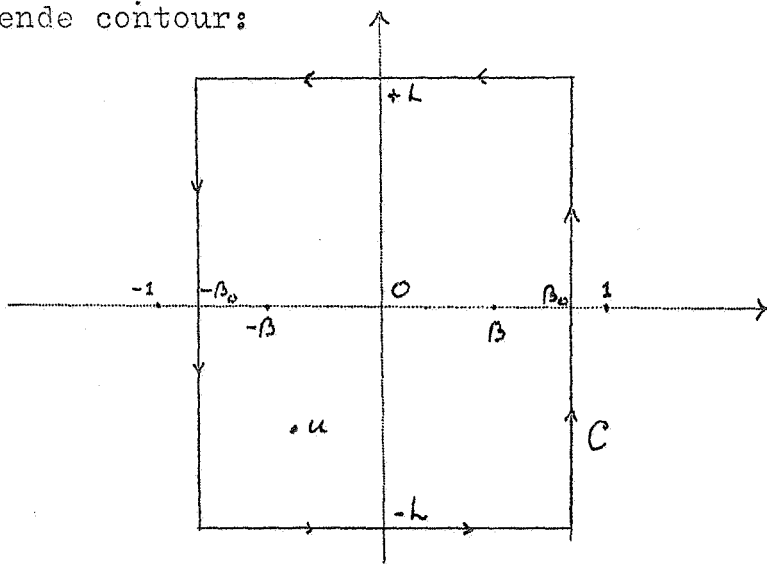
Hieruit volgt onmiddellijk de juistheid van de bewering, dat $1-\kappa(u)$ slechts eindig veel nulpunten heeft in een strip $|\operatorname{Re} u| \leq \beta_0 < 1$. Zij nu:

$$\tau(u) = (1-\kappa(u)) \cdot \frac{(u^2-1)^{m/2}}{\prod_{i=1}^k (u-u_i)} \cdot \left(\frac{u+1}{u-1}\right)^k, \quad (14)$$

waarin we k nog zullen bepalen. Zij $\beta < \beta_0 < 1$.

Voor $|\operatorname{Re} u| \leq \beta_0$ is $\tau(u)$ een reguliere functie zonder nulpunten, en $\tau(u) \rightarrow 1$ uniform in $\operatorname{Re} u$, als $|\operatorname{Im} u| \rightarrow \infty$. Beschouw nu de functie $\log \tau(u)$. Als $\operatorname{Im} u$ loopt van $-\infty$ tot $+\infty$, zal $\log \tau(u)$ toenemen met een veelvoud van $2\pi i$, en we bepalen nu k zo, dat deze toename juist 0 is. Nadat k hierdoor is vastgelegd geldt voor $\log \tau(u)$: deze functie is regulier voor $|\operatorname{Re} u| \leq \beta_0$ en nadert uniform in $\operatorname{Re} u$ naar 0 als $|\operatorname{Im} u| \rightarrow \infty$ binnen deze strip.

We gaan nu de integraalformule van Cauchy toepassen op $\log \tau(u)$ en het volgende contour:



Voor $|\operatorname{Re} u| \leq \beta < \beta_0$ geldt:

$$\log \tau(u) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\log \tau(v)}{v-u} dv.$$

We laten nu $L \rightarrow \infty$; de bijdrage langs de horizontale stukken nadert dan tot 0 op grond van de eigenschappen van $\log \tau(u)$, en er komt: voor $|\operatorname{Re} u| < \beta_0$ is:

$$\log \tau(u) = \log \tau_+(u) - \log \tau_-(u) \quad (15)$$

met:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_+(u) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta_0 - i\infty}^{-\beta_0 + i\infty} \frac{\log \tau(v)}{v-u} dv \right\} \\ \tau_-(u) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_0 - i\infty}^{\beta_0 + i\infty} \frac{\log \tau(v)}{v-u} dv \right\} \end{array} \right. , \quad (16)$$

waarin $\log \tau_+(u)$ regulier en begrensd is voor $\operatorname{Re} u \gg -\beta$ en $\log \tau_-(u)$ regulier en begrensd voor $\operatorname{Re} u \leq \beta$.

Wanneer we nu nog nemen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_+(u) = \tau_+(u) \cdot (u+1)^{-k - \frac{m}{2}} \\ \sigma_-(u) = \tau_-(u) \cdot (u-1)^{-k + \frac{m}{2}} \end{array} \right. , \quad (17)$$

voldoen $\sigma_+(u)$ en $\sigma_-(u)$ aan de eisen in onze hulpstelling gesteld, terwijl voor $|\operatorname{Re} u| \leq \beta$ uit (14), (15) en (17) inderdaad volgt:

$$1 - \kappa(u) = \frac{\sigma_+(u)}{\sigma_-(u)} \cdot \prod_{i=1}^m (u - u_i)$$

Alvorens terug te keren tot (12), merken we op dat de techniek, welke hierboven is gedemonstreerd, en welke ten doel heeft de functie $1 - \kappa(u)$, regulier in een strip, binnen deze strip te schrijven als het quotiënt van twee functies, die ieder regulier zijn in een halfvlak, terwijl deze halfvlakken tezamen het gehele complexe vlak overdekken, eenvoudiger is in het geval van een even kern: $K(x) = K(-x)$.

Bij onze praktische voorbeelden hebben we meestal hiermee te maken. In dit geval is het evident dat ook $\kappa(u)$ even is, en dientengevolge treden de nulpunten van $1 - \kappa(u)$ slechts op in paren: $m = 2n$, en kunnen dus worden voorgesteld door $\pm u_1, \pm u_2, \dots, \pm u_n$. Hieruit volgt dat we $k = 0$ moeten nemen, immers

$$\tau(u) = (1 - \kappa(u)) \cdot \frac{(u^2 - 1)^n}{\prod_{i=1}^n (u^2 - u_i^2)}$$

is ook een even functie, en de toename van $\log \tau(u)$ voor $\operatorname{Im} u \rightarrow +\infty$, resp. $-\infty$ is zeker 0.

Nu keren we terug naar (12). Met behulp van de hulpstelling is de oplossing nu eenvoudig te vinden. We nemen aan, dat u_1, \dots, u_m alle nulpunten zijn van $1 - \kappa(u)$ in de strip $|\operatorname{Re} u| \leq \alpha$, waarin α de constante is uit (8) en we bepalen β zo dat $\alpha < \beta < 1$, terwijl er

geen nieuwe nulpunten liggen in $|\operatorname{Re} u| \leq \beta$. Met deze β passen we de hulpstelling toe en volgens (12) en (13) geldt derhalve voor $-1 < \operatorname{Re} u \leq -\beta$:

$$\frac{\gamma(u)}{\sigma_+(u)} = \frac{\varphi(u)}{\sigma_-(u)} \prod_{i=1}^m (u-u_i) \quad (18)$$

Uit de hulpstelling en de vroeger gemaakte opmerkingen omtrent de regulariteitsgebieden van $\gamma(u)$ en $\varphi(u)$ volgt, dat in (18) de linkerkant een reguliere functie is in het halfvlak $\operatorname{Re} u \geq -\beta$, terwijl het rechterlid een reguliere functie voorstelt voor $\operatorname{Re} u \leq +\beta$.

Op grond hiervan kunnen we beide leden beschouwen als elkaars analytische voortzetting en definiëren deze beide functies tezamen een functie in het gehele complexe vlak die nergens in het eindige een singulariteit bezit, dus een gehele functie $E(u)$.

Uit (18) volgt dan:

$$\varphi(u) = \frac{\sigma_-(u) \cdot E(u)}{\prod_{i=1}^m (u-u_i)} \quad (19)$$

$$\gamma(u) = \sigma_+(u) \cdot E(u)$$

$E(u)$ zal in het algemeen een polynoom zijn, en uit het gedrag voor grote $|u|$ van $\varphi(u)$, $\gamma(u)$, $\sigma_+(u)$ en $\sigma_-(u)$ kunnen we afleiden dat het polynoom van hoogstens de graad $K + \frac{m}{2}$ is. We gaan dit niet precies na, maar zullen dit liever aan voorbeelden toelichten.

(19) bepaalt nu de gezochte $f(x)$. Met behulp van de omkeerformule voor de tweezijdige Laplace transformatie is nu immers:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \varphi(u) \cdot e^{-ux} dx \quad (20)$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \gamma(u) \cdot e^{-ux} dx$$

Uit (19) en (20) valt direct af te leiden dat in overeenstemming met onze definities geldt: $f(x) = 0$ voor $x < 0$, $g(x) = 0$ voor $x > 0$. Hiermee is $f(x)$ dus bepaald. Het bewijs dat de in (20) gedefinieerde functie inderdaad voldoet aan (6) en dat deze functie zich zodanig gedraagt voor grote x als we hebben aangenomen in (8), laten we achterwege. We zullen nu enige voorbeelden gaan behandelen en wel als eerste een heel eenvoudig geval, nl. de vergelijking van Lalesco met $K(x) = \lambda e^{-|x|}$ en daarna twee voorbeelden uit de praktijk, die (dus!) veel moeilijker zijn.

Colloquium:

Mathematische Problemen uit de praktijk

Voordrachten op 12 en 26 Januari 1955

door

T C. Braakman

Integraalvergelijkingen van het Wiener-Hopf type (III)

3. Enige voorbeelden.

3.1 De integraalvergelijking van Lalesco.

Bij deze vergelijking hebben wij te maken met de kern $K(x) = \lambda e^{-|x|}$:

$$f(x) = \lambda \int_0^{\infty} f(y) \cdot e^{-|x-y|} dy, \quad \lambda \text{ reëel} \quad (21)$$

Wij gaan volgens de in 2. beschreven methode te werk, en brengen (21) dus eerst in normaalvorm, geldig voor alle x:

$$g(x) = f(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-|x-y|} dy,$$

terwijl wij oplossingen voor f(x) zoeken van de gedaante:

$$f(x) = 0 \text{ (} e^{\alpha x} \text{) voor grote } x, \text{ met } \alpha < 1,$$

In dit geval is: $\kappa(u) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} \cdot e^{-|x|} dx = \frac{2\lambda}{1-u^2}$, regulier voor $|\operatorname{Re} u| < 1$. Vergelijking (12) levert nu dus:

voor $-1 < \operatorname{Re} u < -\alpha$ geldt $\gamma(u) = \varphi(u) \left(1 - \frac{2\lambda}{1-u^2}\right)$, of:

$$\gamma(u) = \varphi(u) \cdot \frac{u^2 - \nu^2}{u^2 - 1} \quad (22)$$

met: $\nu = \sqrt{1-2\lambda}$.

Vermenigvuldiging van (22) met (u+1) levert:

$$(u+1) \gamma(u) = \varphi(u) \cdot \frac{u^2 - \nu^2}{u-1} \quad \text{voor } -1 < \operatorname{Re} u < -\alpha,$$

en nu is het linkerlid regulier in het halfvlak $\operatorname{Re} u > -1$, het rechterlid voor $\operatorname{Re} u < -\alpha$ en op grond van de overwegingen, genoemd op pag. 9 kunnen wij daarom besluiten, dat beide leden gelijk moeten zijn aan een gehele functie E(u), dus:

$$\varphi(u) = \frac{u-1}{u^2 - \nu^2} \cdot E(u) \quad (23)$$

Wij eisen nu, dat $\varphi(u) = O\left(\frac{1}{u}\right)$ voor grote $|u|$; in dat geval moet $E(u)$ dus gelijk zijn aan een constante en tenslotte blijkt derhalve:

$$\varphi(u) = c \cdot \frac{u - 1}{u^2 - \nu^2} \quad (24)$$

Op grond van onze aanname betreffende het asymptotisch karakter van $f(x)$ moet $\varphi(u)$ regulier zijn voor $\text{Re } u < -\alpha$, zodat uit (24) blijkt, dat wij alleen oplossingen voor $f(x)$ van de gezochte gedaante zullen vinden als $\text{Re}(\nu) > -1$. Dit betekent, dat $\lambda > 0$ moet zijn. Wij vinden dus bij de homogene integraalvergelijking (21) het continue eigenwaardenspectrum $\lambda > 0$.

Uit (24) volgt nu $f(x)$:

$$f(x) = \frac{c}{2\pi i} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \frac{u - 1}{u^2 - \nu^2} \cdot e^{-ux} du \quad \text{met } -1 < \beta < -\nu$$

Wij sluiten de integratieweg met een grote halve cirkel naar rechts. ($x > 0$). Toepassing van het Lemma van Jordan toont aan dat de halve cirkel ~~geen bijdrage~~ levert, en wij vinden:

$$f(x) = \text{Const} \left\{ (\nu - 1)e^{-\nu x} + (\nu + 1)e^{\nu x} \right\} \quad (25)$$

3.2. De integraalvergelijking van Milne.

Door de buitenste lagen van een ster vindt doorlopend een enorm energietransport in de vorm van warmtestraling plaats, komend uit het inwendige. Bij het passeren van deze buitenste lagen wordt een deel van de straling geabsorbeerd of verstrooid. Een gecompliceerd astrophysisch probleem is nu de vraag wat onder bepaalde aannamen de temperatuurverdeling in een steratmosfeer zal zijn in wat men in eerste benadering een stationaire toestand zou kunnen noemen. Milne heeft een dergelijk probleem tot een integraalvergelijking van het Wiener-Hopf type herleid. Voor uitgebreide literatuur hierover zij verwezen naar het boek van E. Hopf: *Mathematical Problems of Radiative Equilibrium*.

Wij behoeven ons evenwel niet te beperken tot de astrophysica; een analoge integraalvergelijking treedt namelijk op bij andere wijzen van energietransport, zoals bijv. bij de beweging van langzame neutronen. Daarom leiden wij eerst een algemene transportvergelijking af. Neem aan dat wij te maken hebben met bewegende partikeltjes, waarvan wij de beweging bepalen door de radiusvector \vec{r} , die de plaats van het deeltje aangeeft, de snelheidsvector \vec{v} , en de tijdscoördinaat A .

Tengevolge van botsingen en absorptie zal de snelheid van een deeltje in richting en grootte kunnen veranderen.

Zij $f(\vec{r}, \vec{v}, t)dv$ de waarschijnlijkheid dat een partikeltje ten tijde t in het punt \vec{r} een snelheid heeft tussen \vec{v} en $\vec{v} + d\vec{v}$. Bezien wij nu $f(\vec{r}, \vec{v}, t + dt)d\vec{v}$ dan is het duidelijk, dat de volgende mogelijkheden aanwezig zijn:

- 1e. een partikeltje is in de tijd dt in \vec{r} aangekomen als gevolg van zijn beweging zonder meer,
- 2e. een partikeltje kreeg tengevolge van een botsing een snelheid tussen \vec{v} en $\vec{v} + d\vec{v}$,
- 3e. een partikeltje waarvan de snelheid oorspronkelijk tussen \vec{v} en $\vec{v} + d\vec{v}$ lag, voldoet nu niet meer aan die als tengevolge van verstrooiing of absorptie.

Noemen wij nu $P(\vec{v}, \vec{v}_0)d\vec{v}_0$ de waarschijnlijkheid dat een partikeltje met snelheid \vec{v}_0 in de tijd dt tengevolge van een botsing een snelheid krijgt tussen \vec{v} en $\vec{v} + d\vec{v}$ en $P_T(\vec{v})d\vec{v}$ de totale waarschijnlijkheid dat een deeltje met snelheid tussen \vec{v} en $\vec{v} + d\vec{v}$ tengevolge van verstrooiing of absorptie een snelheid krijgt, die niet meer in dat interval ligt. Is er geen absorptie, dan is: $P_T(\vec{v}) = \int P(\vec{v}_0, \vec{v})d\vec{v}_0$.

Er zal nu gelden:

$f(\vec{r}, \vec{v}, t + dt) = f(\vec{r} - \vec{v}dt, \vec{v}, t) - P_T(\vec{v}) \cdot f(\vec{r}, \vec{v}, t)dt + \left\{ \int P(\vec{v}, \vec{v}_0) \cdot f(\vec{r}, \vec{v}_0, t) d\vec{v}_0 \right\} dt$, waarbij moet worden geïntegreerd over alle snelheden \vec{v}_0 die consistent zijn met de behoudswetten van impuls en energie. Met behulp van reeksontwikkeling volgt hieruit de transportvergelijking:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) f - P_T \cdot f + \int P(\vec{v}, \vec{v}_0) \cdot f(\vec{r}, \vec{v}_0, t) d\vec{v}_0$$

en voor een stationaire toestand dus:

$$(\vec{v} \cdot \nabla) f = - P_T \cdot f + \int P(\vec{v}, \vec{v}_0) \cdot f(\vec{r}, \vec{v}_0) d\vec{v}_0 \quad (26)$$

Wij gaan ons nu beperken tot een half oneindig medium en isotrope verstrooiing (Milne-probleem) en zullen om de gedachten te bepalen het probleem bespreken voor het geval van beweging van langzame neutronen.

De veronderstellingen zijn dat wij werken in een halfruimte $z > 0$ en dat geen neutronen in deze ruimte binnenkomen door het vlak $z = 0$. Verder dat de functie f uit (26) niet afhangt van x en y en van de grootte van de snelheden. Inplaats van met f werken wij met de functie Ψ , d.i. het aantal neutronen per volume-eenheid, en de veronderstelling is dus dat Ψ alleen afhangt van z en van de cosinus μ van de hoek tussen de bewegingsrichting van een neutron en de positieve

was. Voorts wordt aangenomen dat bij een botsing geen energie verloren gaat, terwijl wij onder Γ de totale waarschijnlijkheid per tijdseenheid van een botsing verstaan. De (constante) grootte der neutronensnelheid zij v_0 . (26) gaat nu over in:

$$v_0 \mu \frac{d\psi}{dz} + \Gamma \psi = \int_{-1}^{+1} \psi(z, \mu') \cdot P(\mu, \mu') d\mu' \quad (27)$$

Tenslotte veronderstellen wij ter verdere vereenvoudiging dat geldt: $P(\mu, \mu') = \frac{1}{2} \Gamma$. Wij voeren nu v_0 in als eenheid van snelheid, en de gemiddelde vrije weglengte van de neutronen als lengte-eenheid, en (27) levert dan de eenvoudige transportvergelijking

$$\mu \frac{d\psi}{dz} + \psi = \frac{1}{2} \psi_0 \quad (28)$$

$$\text{waarin } \psi_0(z) = \int_{-1}^{+1} \psi(z, \mu) d\mu \quad (29)$$

$\psi_0(z)$ is de neutronendichtheid.

Als randvoorwaarde hebben wij nog:

$$z=0: \text{ voor } \mu > 0 \text{ is } \psi(0, \mu) = 0 \quad (30)$$

Dat wil zeggen dat er geen neutronen van buiten af in het medium komen.

Substitueren wij nu $\psi(z, \mu) = \chi(z, \mu) e^{-\frac{z}{\mu}}$ in (28), dan vinden wij eenvoudig de volgende relaties:

$$\psi(z, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{2\mu} \int_0^z \psi_0(z') e^{\frac{z'-z}{\mu}} dz' & \text{voor } \mu > 0 \\ -\frac{1}{2\mu} \int_z^\infty \psi_0(z') e^{\frac{z'-z}{\mu}} dz' & \text{voor } \mu < 0 \end{cases} \quad (31)$$

Integreren wij (31) nu naar μ tussen -1 en +1:

$$\begin{aligned} \psi_0(z) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\mu} \int_0^z \psi_0(z') \cdot e^{\frac{z'-z}{\mu}} dz' d\mu - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{1}{\mu} \int_z^\infty \psi_0(z') e^{\frac{z'-z}{\mu}} dz' d\mu = \\ &= (\text{substitueer respectievelijk } \mu = \frac{1}{s} \text{ en } \mu = -\frac{1}{s} \text{ en verwissel de integratievolgorde)} = \frac{1}{2} \int_0^z \psi_0(z') \int_1^\infty \frac{e^{s(z'-z)}}{s} ds dz' + \\ &+ \frac{1}{2} \int_z^\infty \psi_0(z') \cdot \int_{-1}^0 \frac{e^{-s(z'-z)}}{s} ds \cdot dz' = \frac{1}{2} \int_0^\infty \psi_0(z') \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds \cdot dz' \end{aligned}$$

De neutronen-dichtheid ψ_0 voldoet dus aan een integraalvergelijking van het Wiener-Hopf type: (de integraalvergelijking van Milne)

$$\psi_0(x) = \int_0^\infty \psi_0(y) \cdot K(x-y) dy \quad (32)$$

met als kern
$$K(x) = \frac{1}{2} \int_{|x|}^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds, \quad (33)$$

welke verwant is aan de exponentiële integraalfunctie: $K(x) = \frac{1}{2} Ei(-|x|)$

Wij brengen (32) eerst weer in normaalvorm:

$$g(x) = \Psi_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \Psi_0(y) \cdot \int_{|x-y|}^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds \cdot dy,$$
 geldig voor alle x ,
 met $\Psi_0(x) = 0$ voor $x < 0$, $g(x) = 0$ voor $x > 0$ terwijl wij veronderstellen
 dat voor grote x : $\Psi_0(x) = O(e^{\alpha x})$ met $\alpha < 1$ (De kern $K(x) = O(e^{-|x|})$
 voor grote $|x|$).

Wij hebben in dit geval:

$$\begin{aligned} K(u) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} \int_{|x|}^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds \cdot dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t|x|}}{t} dt \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t} \left\{ \int_0^{\infty} e^{(t+u)x} dx + \int_0^{\infty} e^{(-t+u)x} dx \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t} \cdot \left\{ \int_0^{\infty} \frac{1}{t+u} + \frac{1}{t-u} \right\} = \frac{1}{2u} \cdot \log \frac{1+u}{1-u}, \end{aligned}$$

geldig voor $|\operatorname{Re} u| < 1$.

Vergelijking (42) wordt dus in dit geval: ($\Psi_0(u)$ zij de Laplace-transform van $\Psi_0(x)$, regulier voor $\operatorname{Re} u < -\alpha$)

$$f(u) = \Psi_0(u) \cdot \left(1 - \frac{1}{2u} \log \frac{1+u}{1-u} \right) \quad (34)$$

Met behulp van reeksontwikkeling voor kleine u blijkt direct, dat $u=0$ een dubbel nulpunt is van de functie $1-K(u)$, terwijl ook bewezen kan worden dat deze functie geen andere nulpunten heeft in de strip $|\operatorname{Re} u| < 1$ door na te gaan hoe het argument van de functie verandert bij rondgaan langs de rand van dit gebied. Wij voeren dit niet uit.

Wij gaan nu op $1-K(u)$ de stelling van pag. 6 toepassen. In dit geval is $m=2$, $k=0$ en volgens (13) en (17) geldt:

$$1 - \frac{1}{2u} \log \frac{1+u}{1-u} = u^2 \cdot \frac{\sigma_+(u)}{\sigma_-(u)} \text{ in een strip } |\operatorname{Re} u| \leq \beta_0 < 1 \quad (35)$$

met:
$$\sigma_+(u) = \frac{1}{u+1} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta_0-i\infty}^{-\beta_0+i\infty} \frac{\log \tau(v)}{v-u} dv \right\},$$
 regulier en
 zonder nulpunten voor $\operatorname{Re} u \geq -\beta_0$; (36a)

$$\tau_-(u) = (u-1) \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_0-i\infty}^{\beta_0+i\infty} \frac{\log \tau(v)}{v-u} dv \right\},$$
 regulier en
 zonder nulpunten voor $\operatorname{Re} u \leq +\beta_0$; (36b)

$$\tau(u) = \frac{u^2-1}{u^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2u} \log \frac{1+u}{1-u} \right) \quad (37)$$

Op grond van de gegeven theorie is nu volgens (19)

$$\varphi_0(u) = \frac{1}{u^2} \cdot \sigma_-(u) \cdot E(u),$$

terwijl uit de eis: $\varphi_0(u) = 0$ ($\frac{1}{|u|}$) voor grote $|u|$ volgt, dat de gehele functie $E(u)$ een constante moet zijn, dus:

$$\varphi_0(u) = c \cdot \frac{u-1}{u^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_0-i\infty}^{\beta_0+i\infty} \frac{\log \tau(v)}{v-u} dv \right\} \quad (38)$$

vervolgens

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta_0-i\infty}^{-\beta_0+i\infty} \varphi_0(u) \cdot e^{-ux} du \quad (39)$$

Wij vereenvoudigen (38) nog iets. Is namelijk $\text{Re } u < 0$ (en dat is het geval langs de integratieweg in (39)) dan kunnen wij de integratieweg in (38) verleggen tot langs de imaginaire as en, gebruik makend van het feit dat $\tau(v)$ een even functie is, kunnen wij ook zetten:

$$\varphi_0(u) = c \cdot \frac{u-1}{u^2} \cdot \exp \left\{ \frac{u}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\log \tau(it)}{t^2 + u^2} dt \right\} \quad (40)$$

In de praktijk is (39) in de buurt van $x=0$ ontwikkeld en zijn zo numerieke gegevens over de neutronendichtheid verkregen.

Voor meer bijzonderheden (bijv. de bepaling van de constante c in (40)) zij verwezen naar: Sneddon-Fourier Transforms.



Colloquium
Mathematisch Problemen uit de praktijk.
 Voordracht op 9 Februari 1955.
 door
 Ir R.W.Trense.

Enkele toepassingen van "Barycentrische Coördinaten".

1. De barycenter rekening of barycentrische calculus is ruim 128 jaar oud. In 1827 verscheen hierover de eerste publicatie van Möbius. Sedertdien is ze weer in het vergeetboek geraakt, hoewel ze benut werden kan voor zeer elegante afleidingen van oude en nieuwe stellingen, hetgeen naar de spreker hoopt genoegzaam uit zijn lezing zal blijken.

Wat zijn barycentrische coördinaten? Het is het eenvoudigst bij de invoering de historische gang te volgen en achteraf na te gaan, welke hun geometrische betekenis is.

Voor de plaatsbepaling in het platte vlak, dacht Möbius zich in drie willekeurige doch vaste punten A, B en C van dit vlak, drie hoeveelheden massa, met een grootte van respectievelijk x, y en z, waarbij steeds $x+y+z = 1$. Door het zwaartepunt van deze massa's is nu een punt D eenduidig bepaald. Kent men omgekeerd de plaats van het punt D, zo kan men de massa's x, y en z enkel op een manier zodanig kiezen, dat hun zwaartepunt met D samenvalt. Bij invoering van negatieve massacoördinaten x, y en z bestrijkt men niet enkel het veld binnen ABC doch ook het gebied erbuiten. Kortom x, y en z vervullen geheel de functie van coördinaten. Om een

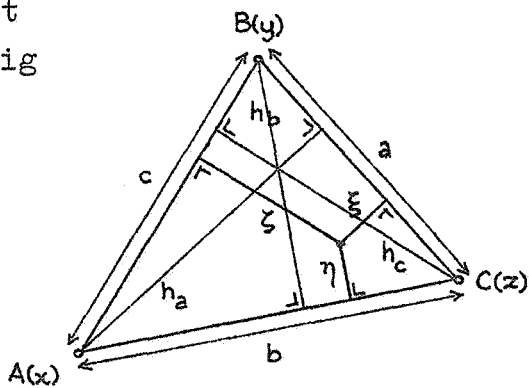


Fig. 1. Basisdriehoek.

inzicht te krijgen in de geometrische betekenis van x, y en z passen we de momentstelling toe om de rechten BC, CA en AB als as en vinden:

$$xh_a = (x + y + z) \xi = \xi \quad x = \frac{\xi}{h_a}$$

$$y = \frac{\eta}{h_b}, \quad z = \frac{\zeta}{h_c}$$

In wezen zijn de barycentrische coördinaten dus niets anders dan driehoekskoördinaten echter met drie verschillende lengteëenheden, n.l. h_a , h_b en h_c .

Toepassing. Beschouw een rechthoekige basisdriehoek als in fig. 2 aangegeven.

Uit $x + y + z = 1$ volgt:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{1} = 1$$

ofwel:

$$z = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

en daar $\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} ab$

$$z = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$$

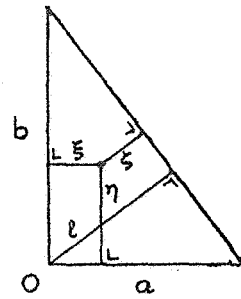


Fig. 2 Rechthoekige basisdriehoek.

d.i. de afstandsformule van een punt tot een rechte.

Door de betrekking $x + y + z = 1$ is in barycentrische formules een der coördinaten steeds te elimineren. Het gebruik van alle drie coördinaten maakt echter, dat de uitdrukkingen een meer symmetrische vorm verkrijgen en is hierom te prefereren. Beperkt men zich tot twee, bijvoorbeeld y en z , zo kan men in een ander vlak z ten opzichte van y Cartesiaans uitzetten en krijgt men van elke metrische figuur in het vlak ABC een afbeelding in het (y, z) vlak. De transformatieformules, die deze afbeelding beheersen zijn lineair en kunnen gemakkelijk worden afgeleid. Zij het punt D in het vlak ABC Cartesiaans bepaald door de coördinaten X en Y (zie figuur 3). Passen we de momentstelling toe ten opzichte van de rechte AB zo geldt

$$Y(x+y+z) = Y = zb \sin A \quad (1)$$

Bij toepassing van deze stelling ten opzichte van de rechte AC krijgen we:

$$(X \sin A - Y \cos A)(x+y+z) = X \sin A - Y \cos A = yc \sin A \quad (2)$$

Uit (2) en (1) volgt: $X \sin A - zb \cos A \sin A = yc \sin A$

$$X = yc + zb \cos A \quad (3)$$

Daar de transformatieformules lineair zijn gaan rechte lijnen in het ABC-vlak in rechte lijnen van het (y, z) -vlak over. Voor de afbeelding van het inwendige deel van driehoek ABC vindt men dan ook het gearceerde gedeelte van figuur 2. (Immers $y > 0$, $z > 0$, $y + z \leq 1$). In het algemeen volgt uit de lineariteit der transformatieformules, dat iedere gesloten figuur in het ABC-vlak ook in het (y, z) -vlak een gesloten gedaante behoudt, zo gaat de cirkel

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = R^2$$

over in:

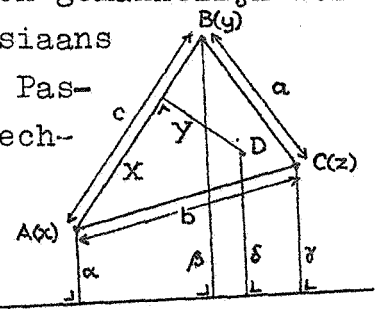


Fig. 3. Basisdriehoek in het metrische vlak.

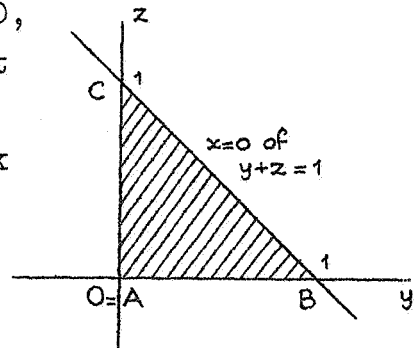


Fig. 4. Basisdriehoek in het barycentrische vlak.

$$(yc + zb \cos A - X_0)^2 + (zb \sin A - Y_0)^2 = R^2$$

ofwel

$$\begin{aligned} \left\{ (y-y_0)c + (z-z_0)b \cos A \right\}^2 + \left\{ (z-z_0)b \sin A \right\}^2 &= R^2 \\ c^2(y-y_0)^2 + 2bc \cos A (y-y_0)(z-z_0) + b^2(z-z_0)^2 &= R^2 \end{aligned}$$

in het algemeen dus in een ellips.

Als $A = 90^\circ$ zijn de hoofdassen evenwijdig aan de y en z as. Is tevens $b = c$ zo blijft het beeld een cirkel. Noemen we φ de hoek, die een der assen met de y as maakt, welke doet er niet toe, zo is φ te berekenen uit

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{4bc \cos A}{c^2 - b^2}$$

Als $A \neq 90^\circ$ en $c = b$ zo maken de hoofdassen een hoek van 45° en van 135° met de y as.

Bij de hierna volgende berekeningen zal herhaaldelijk een metrisch oppervlakteëlementje in de barycentrische coördinaten moeten worden getransformeerd. De hiervoor benodigde formule wordt als volgt afgeleid. Zij ω het oppervlak van driehoek ABC en dO het metrisch oppervlakteëlementje $dX dY$.

$$\text{Uit (2) volgt: } \frac{\partial y}{\partial X} = \frac{1}{c}; \quad \frac{\partial y}{\partial Y} = -\frac{\cos A}{c \sin A}$$

$$\text{Uit (1) volgt: } \frac{\partial z}{\partial X} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial Y} = \frac{1}{b \sin A}$$

Volgens Jacobi is:

$$\begin{aligned} dy dz &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} \end{vmatrix} dX dY = \begin{vmatrix} \frac{1}{c} & -\frac{\cos A}{c \sin A} \\ 0 & \frac{1}{b \sin A} \end{vmatrix} dX dY = \\ &= \frac{1}{bc \sin A} dX dY = \frac{1}{2\omega} dO \end{aligned}$$

$$\text{zodat } dO = 2\omega dy dz \quad (3)$$

Bij het eerste voorbeeld, dat we bekijken zullen, zijn een aantal integralen benodigd, die we om het betoog niet te onderbreken, nu reeds zullen afleiden. De bedoelde integralen zijn:

$$\begin{aligned} \Sigma_x &= \iiint_{\Omega} x dy dz; & \Sigma_y &= \iiint_{\Omega} y dy dz; & \Sigma_z &= \iiint_{\Omega} z dy dz \\ \Sigma_{xx} &= \iiint_{\Omega} x^2 dy dz; & \Sigma_{yy} &= \iiint_{\Omega} y^2 dy dz; & \Sigma_{zz} &= \iiint_{\Omega} z^2 dy dz \\ \Sigma_{xy} &= \iiint_{\Omega} xy dy dz; & \Sigma_{xz} &= \iiint_{\Omega} xz dy dz; & \Sigma_{yz} &= \iiint_{\Omega} yz dy dz \end{aligned}$$

In het eerste voorbeeld stelt Ω het oppervlak voor van de basisdriehoek in het barycentrisch. We vinden in dit geval voor de integralen:

$$\Sigma_y = \iiint_{\Omega} y dy dz = \int_0^1 y dy \int_0^{1-y} dz = \int_0^1 (y-y^2) dy = \left[\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\Sigma_z = \iiint_{\Omega} z dy dz = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_x &= \iiint x \, dy \, dz = \iiint (1-y-z) \, dy \, dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \\ \Sigma_{yy} &= \iiint y^2 \, dy \, dz = \int_0^1 y^2 \, dy \int_0^{1-y} dz = \int_0^1 (y^2 - y^3) \, dy = \left[\frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

$$\Sigma_{zz} = \iiint z^2 \, dy \, dz = \frac{1}{12}$$

$$\Sigma_{yz} = \iiint yz \, dy \, dz = \int_0^1 y \, dy \int_0^{1-y} z \, dz = \int_0^1 y \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{1-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 [y - 2y^2 + y^3] \, dy = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} y^2 - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{4} y^4 \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \frac{6-8+3}{12} = \frac{1}{24}$$

$$\Sigma_{xx} = \iiint (1-y-z)^2 \, dy \, dz = \Omega + \Sigma_{yy} + \Sigma_{zz} - 2 \Sigma_y - 2 \Sigma_z + 2 \Sigma_{yz} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{2}{6} - \frac{2}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\Sigma_{xy} = \iiint (1-y-z)y \, dy \, dz = \Sigma_y - \Sigma_{yy} - \Sigma_{yz} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

$$\Sigma_{xz} = \iiint (1-y-z)z \, dy \, dz = \Sigma_z - \Sigma_{yz} - \Sigma_{zz} = \frac{1}{6} - \frac{1}{24} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$

Als eerste voorbeeld zullen we van barycentrische coördinaten gebruik makende, het traagheidsmoment bepalen van een driehoek ten opzichte van een willekeurige as.

Nemen we hiervoor de driehoek van fig.3. Zij l de as ten opzichte waarvan het traagheidsmoment moet worden afgeleid. Noem de afstanden van de punten A, B, C en D ten opzichte van l : α , β , γ en δ . Volgens (3) is de grootte van een willekeurig oppervlakteelementje bepaald door $dO = 2\omega \, dy \, dz$. Zij dit elementje om het punt D gelegen. De afstand δ van D ten opzichte van l vindt men uit de momentenstelling.

$$(x+y+z) \delta = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

$$\delta = \alpha x + \beta y + \gamma z \quad (4)$$

Zo ρ de massabelegging per oppervlakteëenheid is krijgt men voor het traagheidsmoment:

$$\begin{aligned}I &= \rho \iint \delta^2 \, dO = 2\rho\omega \iint (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \, dy \, dz = \\ &= 2\rho\omega \left[\alpha^2 \Sigma_{xx} + \beta^2 \Sigma_{yy} + \gamma^2 \Sigma_{zz} + 2\alpha\beta \Sigma_{xy} + 2\alpha\gamma \Sigma_{xz} + \right. \\ &\quad \left. + 2\beta\gamma \Sigma_{yz} \right] =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P\omega}{12} (2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma) = \\
&= \frac{P\omega}{12} \left\{ (\alpha + \beta)^2 + (\beta + \gamma)^2 + (\gamma + \alpha)^2 \right\} = \\
&= \frac{P\omega}{3} \left\{ \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma + \alpha}{2}\right)^2 \right\} \quad (5)
\end{aligned}$$

We vinden dus het verbluffende resultaat, dat men voor de berekening van het traagheidsmoment, de massa van de driehoek in drie gelijke delen geconcentreerd denken kan op de middens van de zijden van de driehoek.

Bij het volgende probleem, de bepaling van de normaalspanningen, die op een vlakke doorsnede opgewekt worden door een willekeurige normaalkracht zullen we ons eerst beperken tot homogene doorsneden. Een homogene doorsnede van willekeurige vorm

(zie fig. 5) is in het punt E belast door een drukkracht P. Gevraagd wordt de neutrale as te bepalen en de spanningsverdeling over de doorsnede. Principieel komt de oplossing hierop neer, dat we door invoering van barycentrische coördinaten in staat zijn op zeer eenvoudige wijze alle normaalspanningen en krachten, die op de doorsnede werken, te ontbinden in drietallen hieraan evenwijdige componenten, die door drie vaste punten, de basispunten A, B en C van de doorsnede gaan. Het evenwichtsprobleem wordt hiermee teruggebracht tot een drietal lineaire evenwichtsvraagstukken, die kunnen worden opgelost zonder gebruikmaking van traagheidsellipsen en daarop toe te passen pooltheorie. De dragers A, B en C van de massa's x, y en z kiezen we willekeurig over de doorsnede verspreid. Na keuze van deze plaats, kunnen de barycentrische coördinaten van het punt E worden bepaald, hetzij door middel van (1) en (2) hetzij direct door middel van ontbinding van krachten.

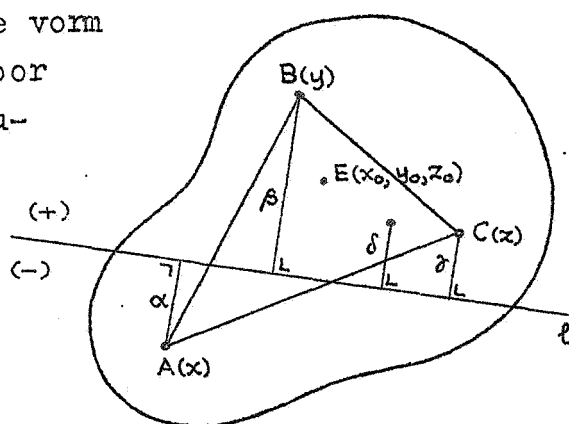


Fig. 5. Doorsnede van een belast lichaam.

Noemen we deze barycentrische coördinaten greep: (x_0, y_0, z_0) . Zij l de onbekende neutrale as. De onbekende afstanden van A, B en C ten opzichte van l noemen we α , β en γ , waarbij een positieve en negatieve oever van l dient te worden onderscheiden. Voor de afstand van een willekeurig punt D, welke barycentrisch bepaald is door (x, y, z) hebben wij bij het vorig vraagstuk reeds gevonden:

$$\delta = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

Volgens de wet van Hooke is de spanning in het punt D, zo K een evenredigheidsfactor is:

$$\sigma = K \delta$$

Hierbij is K te berekenen door σdO over de gehele doorsnede te sommeren en gelijk aan P te stellen.

$$P = K \iint_0 (\alpha x + \beta y + \gamma z) dO = 2 \omega K \iint_{\Omega} (\alpha x + \beta y + \gamma z) dy dz \quad (6)$$

Ω betekent nu het barycentrisch beeld van de gehele doorsnede! Met de reeds ingevoerde notaties voor de integralen van (6):

$$P = 2 \omega K (\alpha \Sigma_x + \beta \Sigma_y + \gamma \Sigma_z) \quad (7)$$

waaruit

$$K = \frac{P}{2 \omega (\alpha \Sigma_x + \beta \Sigma_y + \gamma \Sigma_z)} \quad (8)$$

De spanning $\sigma = K \delta$ levert in het punt D een kracht $2 \omega K \delta dy dz$. Een kracht ter grootte van de eenheid in het punt D , loodrecht op de doorsnede, is direct in drie componenten, welke in de punten A , B en C evenwijdig aan deze eenheidskracht werken te ontbinden, immers is de grootte van deze componenten respectievelijk x , y en z .

Bijgevolg heeft het krachtje $2 \omega K \delta dy dz$ de componenten:

$$\begin{aligned} \text{in A:} & \quad 2 \omega K \delta x dy dz \\ \text{in B:} & \quad 2 \omega K \delta y dy dz \quad \text{en} \\ \text{in C:} & \quad 2 \omega K \delta z dy dz \end{aligned}$$

$$\text{waarbij} \quad \delta = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

De componenten van P in deze punten zijn $P x_0$, $P y_0$ en $P z_0$.

Daar er evenwicht is, moet $P x_0$ gelijk zijn aan de som van de in A werkende componenten der spankrachtjes, welke weer op alle delen der doorsnede werken, d.w.z.

$$P x_0 = 2 \omega K \iint_{\Omega} (\alpha x + \beta y + \gamma z) x dy dz \quad (9)$$

Evenzo:

$$P y_0 = 2 \omega K \iint_{\Omega} (\alpha x + \beta y + \gamma z) y dy dz \quad (10)$$

$$P z_0 = 2 \omega K \iint_{\Omega} (\alpha x + \beta y + \gamma z) z dy dz \quad (11)$$

welke vergelijkingen in verband met (6) afhankelijk blijken te zijn.

Immers ontstaat door optelling en door $x+y+z = x_0+y_0+z_0 = 1$ te stellen weer formule (6).

Met de notatie van de integralen, krijgen we uit (8), (10) en (11)

$$(\alpha \Sigma_x + \beta \Sigma_y + \gamma \Sigma_z) y_0 = \alpha \Sigma_{xy} + \beta \Sigma_{yy} + \gamma \Sigma_{yz}$$

$$(\alpha \Sigma_x + \beta \Sigma_y + \gamma \Sigma_z) z_0 = \alpha \Sigma_{xz} + \beta \Sigma_{yz} + \gamma \Sigma_{zz}$$

In verband met (8) wordt:

$$\sigma = \frac{P(\alpha x + \beta y + \gamma z)}{2 \omega (\alpha \Sigma_x + \beta \Sigma_y + \gamma \Sigma_z)}$$

ofwel

$$2 \omega \sigma (\alpha \sum_x + \beta \sum_y + \gamma \sum_z) = P(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

We krijgen dus het vergelijkingstelsel in α , β en γ .

$$\left. \begin{aligned} \alpha(2 \omega \sigma \sum_x - P_x) + \beta(2 \omega \sigma \sum_y - P_y) + \gamma(2 \omega \sigma \sum_z - P_z) &= 0 \\ \alpha(y_0 \sum_x - \sum_{xy}) + \beta(y_0 \sum_y - \sum_{yy}) + \gamma(y_0 \sum_z - \sum_{yz}) &= 0 \\ \alpha(z_0 \sum_x - \sum_{xz}) + \beta(z_0 \sum_y - \sum_{yz}) + \gamma(z_0 \sum_z - \sum_{zz}) &= 0 \end{aligned} \right\} (12)$$

Een oplossing, die geen nuloplossing is, is alleen mogelijk zo

$$\begin{vmatrix} 2 \omega \sigma \sum_x - P_x & 2 \omega \sigma \sum_y - P_y & 2 \omega \sigma \sum_z - P_z \\ y_0 \sum_x - \sum_{xy} & y_0 \sum_y - \sum_{yy} & y_0 \sum_z - \sum_{yz} \\ z_0 \sum_x - \sum_{xz} & z_0 \sum_y - \sum_{yz} & z_0 \sum_z - \sum_{zz} \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

Hieruit is σ voor elk punt (x, y, z) te berekenen.

Toepassing.

Kernberekening van een rechthoekige doorsnede.

Als we α gelijk aan nul stellen wordt de neutrale as een exemplaar van de stralenbundel door A; de bijbehorende drukpunten liggen op de grens van de z.g. kern. Het deel, dat beantwoordt aan $\alpha=0$, vinden we dan ook gemakkelijk door in de laatste twee vergelijkingen van het stelsel (12) α nul te stellen en β en γ te elimineren.

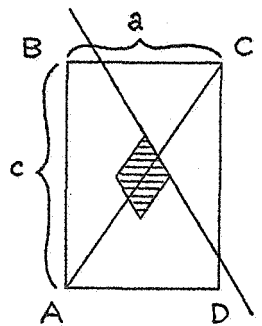


Fig.6. Homogene doorsnede.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} y_0 \sum_y - \sum_{yy} & y_0 \sum_z - \sum_{yz} \\ z_0 \sum_y - \sum_{yz} & z_0 \sum_z - \sum_{zz} \end{vmatrix} = 0 \\ & y_0 z_0 \sum_z \sum_y - y_0 \sum_y \sum_{zz} - z_0 \sum_z \sum_{yy} + \sum_{yy} \sum_{zz} = \\ & = y_0 z_0 \sum_z \sum_y - y_0 \sum_z \sum_{yz} - z_0 \sum_y \sum_{yz} + \sum_{yz}^2 \\ & y_0 (\sum_z \sum_{yz} - \sum_y \sum_{zz}) + z_0 (\sum_y \sum_{yz} - \sum_z \sum_{yy}) + \sum_{yy} \sum_{zz} - \sum_{yz}^2 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Voor de rechthoekige doorsnede zullen nu de grootheden \sum bepaald moeten worden, waarbij met vrucht gebruik gemaakt kan worden van symmetrie-overwegingen.

$$\sum_y = \iint_{\frac{1}{2}\Omega} y_1 dy dz + \iint_{\frac{1}{2}\Omega} y_2 dy dz =$$

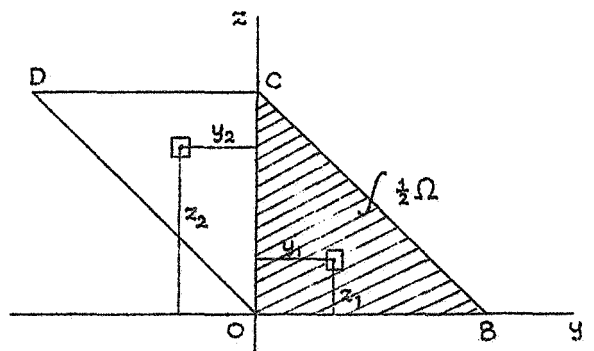


Fig.7. Barycentrisch beeld van rechthoek ABCD.

$$= \iint_{\frac{1}{2}\Omega} (y_1 + y_2) dy dz = 0$$

$$\sum_z = \iint_{\frac{1}{2}\Omega} (z_1 + z_2) dy dz = \iint_{\frac{1}{2}\Omega} dy dz = \frac{1}{2}$$

$$\sum_x = \Omega - \sum_y - \sum_z = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{yy} = 2 \iint_{\frac{1}{2}\Omega} y_1^2 dy dz = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \sum_{zz} &= \iint_{\frac{1}{2}\Omega} z_1^2 dy dz + \iint_{\frac{1}{2}\Omega} (1-z_1)^2 dy dz = \\ &= \iint_{\frac{1}{2}\Omega} dy dz + 2 \iint_{\frac{1}{2}\Omega} z_1^2 dy dz - 2 \iint_{\frac{1}{2}\Omega} z_1 dy dz = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{yz} = \iint_{\frac{1}{2}\Omega} y_1 z_1 dy dz + \iint_{\frac{1}{2}\Omega} y_2 z_2 dy dz =$$

$$= \iint_{\frac{1}{2}\Omega} y_1 z_1 dy dz - \iint_{\frac{1}{2}\Omega} y_1 (1-z_1) dy dz =$$

$$= 2 \iint_{\frac{1}{2}\Omega} y_1 z_1 dy dz - \iint_{\frac{1}{2}\Omega} y_1 dy dz = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{xx} &= \Omega + \sum_{yy} + \sum_{zz} - 2\sum_y - 2\sum_z + 2\sum_{yz} = \\ &= 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - 0 - 1 - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\sum_{xy} = \sum_y - \sum_{yy} - \sum_{yz} = 0 - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = -\frac{1}{12}$$

$$\sum_{xz} = \sum_z - \sum_{yz} - \sum_{zz} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

Vullen we in (14) de gevonden waarden in, zo krijgen we:

$$y_0 \left\{ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{12} \right) - 0 \right\} + z_0 \left\{ 0 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \right) \right\} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{12} \right)^2 = 0 \rightarrow$$

$$-6y_0 - 12z_0 + 7 = 0 \rightarrow 6y_0 + 12z_0 = 7 \quad (15)$$

Nu is volgens (1) en (2)

$$z = \frac{Y}{b \sin A} = \frac{Y}{a} ; \quad y = \frac{X}{c} - \frac{Y}{a}$$

zodat de rechte (15) in Cartesiaansche coördinaten de gedaante krijgt

$$\frac{6X}{c} - \frac{6Y}{a} + 12 \frac{Y}{a} = 7 \rightarrow aX + cY = \frac{7}{6} ac$$

d.w.z. een rechte door de punten $(\frac{1}{2}c, \frac{2}{3}a)$ en $(\frac{2}{3}c, \frac{1}{2}a)$. De rest van de begrenzingen van de kern volgt uit symmetrie-overwegingen.

Met een kleine kunstgreep is ook de spanningsverdeling te berekenen voor het geval van zuivere buiging.

Zij de doorsnede van fig. 8 belast door de momentsvector M.

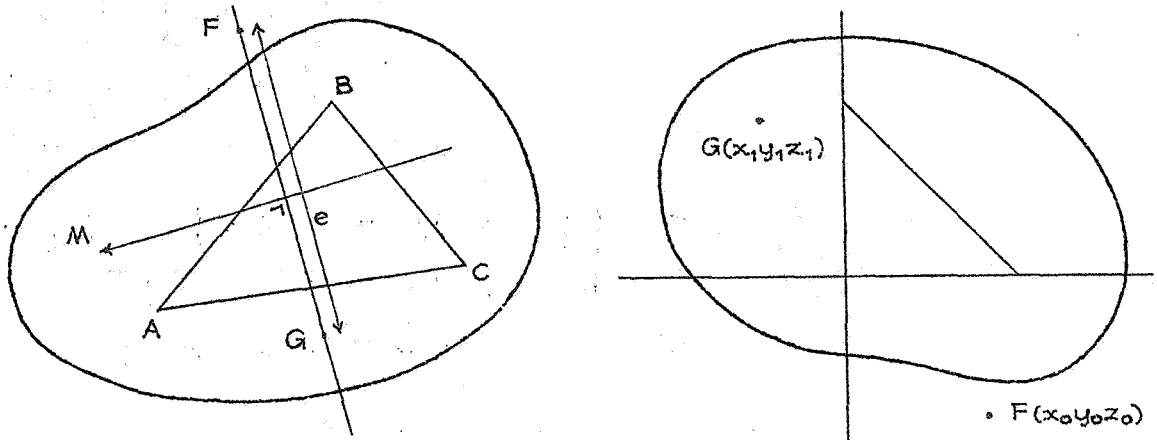


Fig. 8. Doorsnede, belast op zuivere buiging.

Op een willekeurige rechte, die hier loodrecht op staat, kieze men twee willekeurige punten F en G op een willekeurige onderlinge afstand e . In F denke men zich een druk werkend van $P = \frac{M}{e}$ en in G van: $-P$. Beide krachten kunnen dan tezamen M vervangen. Dientengevolge krijgt men bij beschouwing van het evenwicht in de punten A, B en C

$$\left. \begin{aligned} P(x_0 - x_1) &= 2\omega K(\alpha \sum_{xx} + \beta \sum_{xy} + \gamma \sum_{xz}) \\ P(y_0 - y_1) &= 2\omega K(\alpha \sum_{xy} + \beta \sum_{yy} + \gamma \sum_{yz}) \\ P(z_0 - z_1) &= 2\omega K(\alpha \sum_{xz} + \beta \sum_{yz} + \gamma \sum_{zz}) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

een afhankelijk stelsel vergelijkingen.

Immers krijgt men bij optelling: $0 = 0$. Een equivalent stelsel is:

$$\frac{\alpha \sum_{xx} + \beta \sum_{xy} + \gamma \sum_{xz}}{x_0 - x_1} = \frac{\alpha \sum_{xy} + \beta \sum_{yy} + \gamma \sum_{yz}}{y_0 - y_1} = \frac{\alpha \sum_{xz} + \beta \sum_{yz} + \gamma \sum_{zz}}{z_0 - z_1} \quad (17).$$

Nu is $\sigma = K \delta = K(\alpha x + \beta y + \gamma z)$.

In de middelste van (16) gesubstitueerd:

$$P(y_0 - y_1)(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 2\omega \sigma (\alpha \sum_{xy} + \beta \sum_{yy} + \gamma \sum_{xz})$$

Uiteindelijk moeten α , β , γ voldoen aan het stelsel

$$\begin{aligned} \alpha \left\{ 2\omega \sigma \sum_{xy} - P(y_0 - y_1)x \right\} + \beta \left\{ 2\omega \sigma \sum_{yy} - P(y_0 - y_1)y \right\} + \gamma \left\{ 2\omega \sigma \sum_{yz} - \right. \\ \left. - P(y_0 - y_1)z \right\} = 0 \\ \alpha \left\{ (y_0 - y_1) \sum_{xx} - (x_0 - x_1) \sum_{xy} \right\} + \beta \left\{ (y_0 - y_1) \sum_{xy} - (x_0 - x_1) \sum_{yy} \right\} + \\ + \gamma \left\{ (y_0 - y_1) \sum_{xz} - (x_0 - x_1) \sum_{yz} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha \left\{ (z_0 - z_1) \sum_{xx} - (x_0 - x_1) \sum_{xz} \right\} + \beta \left\{ (z_0 - z_1) \sum_{xy} - (x_0 - x_1) \sum_{yz} \right\} + \gamma \left\{ (z_0 - z_1) \sum_{xz} - (x_0 - x_1) \sum_{zz} \right\} = 0.$$

Een oplossing is alleen mogelijk zo:

$$\left| \begin{array}{ccc} 2\omega\sigma \sum_{xy} - P(y_0 - y_1)x & 2\omega\sigma \sum_{yy} - P(y_0 - y_1)y & 2\omega\sigma \sum_{yz} - P(y_0 - y_1)z \\ (y_0 - y_1) \sum_{xx} - (x_0 - x_1) \sum_{xy} & (y_0 - y_1) \sum_{xy} - (x_0 - x_1) \sum_{yy} & (y_0 - y_1) \sum_{xz} - (x_0 - x_1) \sum_{yz} \\ (z_0 - z_1) \sum_{xx} - (x_0 - x_1) \sum_{xz} & (z_0 - z_1) \sum_{xy} - (x_0 - x_1) \sum_{yz} & (z_0 - z_1) \sum_{xz} - (x_0 - x_1) \sum_{zz} \end{array} \right| = 0$$

(18)

Uit (18) is σ op te lossen en dus is de spanning voor alle punten (x, y, z) te berekenen.

COLLOQUIUM

Mathematische problemen uit de praktijk

Voordracht op 23 Februari 1955

door

Ir R.W. Trense

Enkele toepassingen van Barycentrische coördinaten

(Vervolg)

Toepassing van de berekening van buigspanningen.

Zij een ongewapende rechthoekige doorsnede belast door een momentenvector M , welke loodrecht op AB staat. Deze kunnen we vervangen door een drukkracht $P = \frac{M}{h}$ in E werkend en een trekkracht $-\frac{M}{h}$ in F , waarbij E en F de middens zijn van BC en AD .

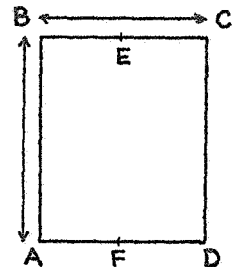


Fig. 9

In barycentrische coördinaten zijn E en F bepaald door respectievelijk

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= \frac{1}{2}, & z_0 &= \frac{1}{2} \text{ en} \\ x_1 &= 1, & y_1 &= -\frac{1}{2}, & z_1 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

De vergelijking (18) wordt voor dit geval:

$$\begin{vmatrix} bh \sigma \left(-\frac{1}{12}\right) \frac{M}{h} x & bh \sigma \left(\frac{1}{6}\right) \frac{M}{h} y & bh \sigma \left(-\frac{1}{12}\right) \frac{M}{h} z \\ 1x \frac{1}{3} + 1x \left(-\frac{1}{12}\right) & 1x \left(-\frac{1}{12}\right) + 1x \left(\frac{1}{6}\right) & 1x \frac{1}{4} + 1x \left(-\frac{1}{12}\right) \\ 0 + 1x \frac{1}{4} & 0 + 1x \left(-\frac{1}{12}\right) & 0 + 1x \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0$$

of na uitwerking

$$\sigma = \frac{M(-x+y+z)}{\frac{1}{6} bh^2} = \frac{M(2y+2z-1)}{\frac{1}{6} bh^2}$$

Bij overgang tot Cartesiaanse coördinaten hebben we de transformatieformules:

$$\begin{aligned} z &= \frac{Y}{b} & y &= \frac{-X}{h} - \frac{Y}{b} \\ \sigma &= \frac{M\left(\frac{2X}{h}-1\right)}{\frac{1}{6} bh^2} = \frac{M\left(X-\frac{1}{2}h\right)}{\frac{1}{12} bh^3} \end{aligned}$$

We zullen nu afzien van de beperking, dat de doorsneden homogeen moeten zijn en zullen allereerst nagaan wat de consequenties hiervan zijn voor de spanningsbepaling bij de belasting door een willekeurige normaalkracht

Beschouwen we een niet homogene doorsnede, zoals b.v. van figuur 10, die in het punt Q belast is door een normaalkracht P. De ontwikkeling gaat hierbij geheel analoog aan die voor homogene doorsnedes en men krijgt dezelfde uitkomst (13) mits men nu aan de grootheden Σ , die hierin voor-

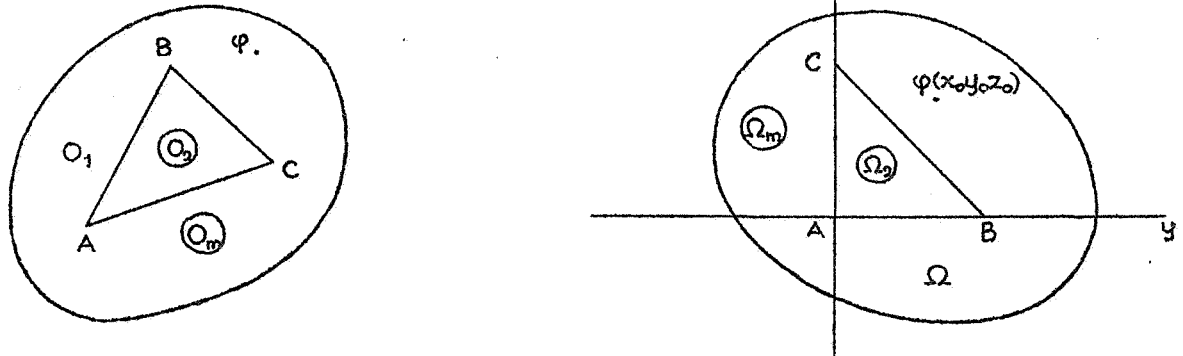


Fig.10 Doorsnede van een heterogeen lichaam. Metrisch en barycentrisch.

komen een gewijzigde betekenis geeft zoals

$$\Sigma_x = \iint_{\Omega_1} x \, dy \, dz + n_2 \iint_{\Omega_2} x \, dy \, dz + \dots + n_m \iint_{\Omega_m} x \, dy \, dz.$$

$$\Sigma_{xy} = \iint_{\Omega_1} xy \, dy \, dz + n_2 \iint_{\Omega_2} xy \, dy \, dz + \dots + n_m \iint_{\Omega_m} xy \, dy \, dz$$

waarbij:

$$n_2 = \frac{E_2}{E_1} ; n_3 = \frac{E_3}{E_1} \dots n_m = \frac{E_m}{E_1}$$

E_1 = elasticiteits modulus van de i^e doorsnede.

Toepassing.

Zij de betondoorsnede van figuur 11 in het punt $X_0=23,34$; $Y_0=13,44$ belast door een drukkracht $P=31000$ kg. De barycentrische coördinaten van het punt bedragen $x_0=0,222$; $y_0=0,330$, $z_0=0,448$.

Gevraagd wordt de spanningsverdeling in het ongescheurde stadium, als dus de wet van Hooke geldt en geen delen spanningsloos blijven.

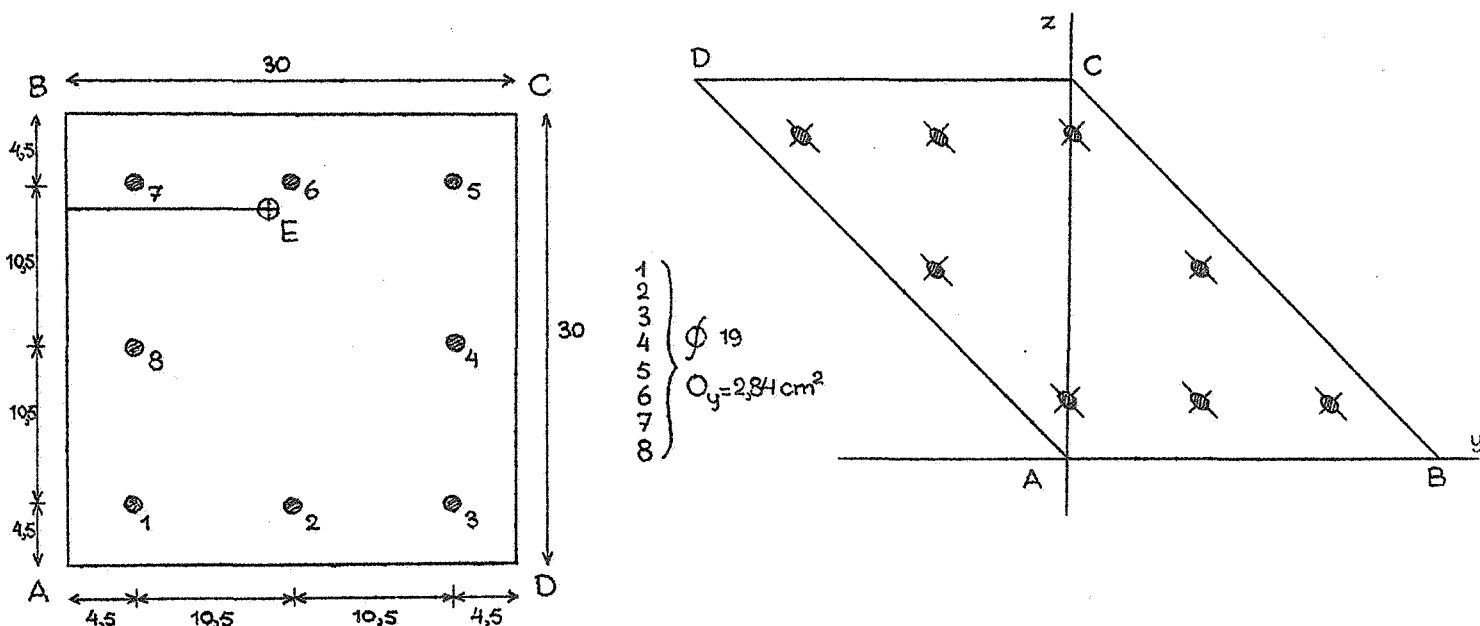


Fig.11. Betondoorsnede, metrisch en barycentrisch.

Voor de coëfficiënten Σ krijgen we in het algemeen

$$\Sigma_{y=0} = 0 + \frac{n0y}{ac} \sum_1^m y_i ; \quad \Sigma_z = \frac{1}{2} + \frac{n0y}{ac} \sum_1^m z_i ; \quad \Sigma_x = \frac{1}{2} + \frac{n0y}{ac} \sum_1^m x_i$$

$$\Sigma_{yy} = \frac{1}{6} + \frac{n0y}{ac} \sum_1^m y_i^2 ; \quad \Sigma_{yz} = -\frac{1}{12} + \frac{n0y}{ac} \sum_1^m y_i z_i ;$$

$$\Sigma_{zz} = \frac{1}{3} + \frac{n0y}{ac} \sum_1^m z_i^2$$

$$\Sigma_{xx} = \frac{1}{3} + \frac{n0y}{ac} \sum_1^m x_i^2 ; \quad \Sigma_{xy} = -\frac{1}{12} + \frac{n0y}{ac} \sum_1^m x_i y_i ; \quad \Sigma_{xz} = \frac{1}{4} + \frac{n0y}{ac} \sum_1^m x_i z_i$$

waarbij 0_y de doorsnede van een wapeningsstaaf voorstelt, m het aantal staven en $n = \frac{E_y}{E_b} = 14$.

Berekenen we $\sum_1^m x_i$; $\sum_1^m y_i$ etc.

$x_1 = 0,85$	$y_1 = 0$	$z_1 = 0,15$	$y_1^2 = 0$
$x_2 = 0,85$	$y_2 = -0,35$	$z_2 = 0,50$	$y_2^2 = 0,1225$
$x_3 = 0,85$	$y_3 = -0,70$	$z_3 = 0,85$	$y_3^2 = 0,4900$
$x_4 = 0,50$	$y_4 = -0,35$	$z_4 = 0,85$	$y_4^2 = 0,1225$
$x_5 = 0,15$	$y_5 = 0$	$z_5 = 0,85$	$y_5^2 = 0$
$x_6 = 0,15$	$y_6 = 0,35$	$z_6 = 0,50$	$y_6^2 = 0,1225$
$x_7 = 0,15$	$y_7 = 0,70$	$z_7 = 0,15$	$y_7^2 = 0,4900$
$x_8 = 0,50$	$y_8 = 0,35$	$z_8 = 0,15$	$y_8^2 = 0,1225$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
$\sum_1^8 x_i = 4,00$	$\sum_1^8 y_i = 0$	$\sum_1^8 z_i = 4,00$	$\sum_1^8 y_i^2 = 1,47$

$y_1 z_1 = 0$	$z_1^2 = 0,0225$
$y_2 z_2 = -0,175$	$z_2^2 = 0,2500$
$y_3 z_3 = -0,595$	$z_3^2 = 0,7225$
$y_4 z_4 = -0,2975$	$z_4^2 = 0,7225$
$y_5 z_5 = 0$	$z_5^2 = 0,7225$
$y_6 z_6 = 0,175$	$z_6^2 = 0,2500$
$y_7 z_7 = 0,105$	$z_7^2 = 0,0225$
$y_8 z_8 = 0,0525$	$z_8^2 = 0,0225$
<hr/>	<hr/>
$\sum_1^8 y_i z_i = -0,735$	$\sum_1^8 z_i^2 = 2,7350$

$$\sum_1^8 x_i x_i = \sum_1^8 (1 - y_i - z_i)^2 = m + \sum_1^8 y_i y_i + \sum_1^8 z_i z_i - 2 \sum_1^8 y_i - 2 \sum_1^8 z_i + 2 \sum_1^8 y_i z_i =$$

$$= 8 + 1,47 + 2,735 - 0 - 8 - 1,47 = 2,735$$

$$\sum_1^8 x_i y_i = \sum_1^8 (1 - y_i - z_i) y_i = \sum_1^8 y_i - \sum_1^8 y_i y_i - \sum_1^8 y_i z_i = 0 - 1,47 + 0,735 = -0,735$$

$$\sum_1^8 x_i z_i = \sum_1^8 (1 - y_i - z_i) z_i = \sum_1^8 z_i - \sum_1^8 y_i z_i - \sum_1^8 z_i z_i = 4,00 + 0,735 - 2,735 = 2,00.$$

Hiermee zijn voor de betondoorsnede de coëfficiënten Σ te bepalen op

$$\Sigma_y = 0 + \frac{15 \times 2,84}{900} x_0 = 0 \quad \Sigma_z = \frac{1}{2} + 0,0474 \times 4 = 0,6893$$

$$\Sigma_x = \frac{1}{2} + 0,0474 \times 4 = 0,6893 \quad \Sigma_{yy} = \frac{1}{6} + 0,0474 \times 1,47 = 0,2364$$

$$\Sigma_{yz} = -\frac{1}{12} + 0,0474 \times (-0,735) = -0,1181$$

$$\Sigma_{zz} = \frac{1}{3} + 0,0474 \times 2,735 = 0,4631$$

$$\Sigma_{xx} = \frac{1}{3} + 0,0474 \times 2,735 = 0,4631$$

$$\Sigma_{xy} = -\frac{1}{12} + 0,0474 \times (-0,735) = -0,1181$$

$$\Sigma_{xz} = \frac{1}{4} + 0,0474 \times 2,00 = 0,3448$$

Bij substitutie in (13) ontstaat hiermee:

$$\begin{vmatrix} 620\sigma - Px & -Py & 620\sigma - Pz \\ 0,3456 & -0,2364 & 0,3456 \\ -0,0360 & +0,1181 & -0,1543 \end{vmatrix} = 0$$

$$-0,0043 (620\sigma - Px) + 0,0409 (-Py) + 0,0323 (620\sigma - Pz) = 0$$

of wel: $\sigma = -0,00025 Px + 0,00236 Py + 0,00186 Pz$ en daar $P = 31000 \text{ kg}$.

$$\sigma = -7,75x + 73,16y + 57,66z$$

Men houde wel in het oog, dat dit de betonspanningen zijn, de ijzerspanningen zijn $15x$ zo hoog

$$\sigma_y = -116x + 1097y + 865z$$

De neutrale as krijgt men door σ gelijk nul te stellen. Haar barycentrische formule luidt dus:

$$-7,75x + 73,16y + 57,66z = 0$$

Uit (1) volgt: $z = \frac{Y}{b \sin A} = \frac{Y}{30}$

Uit (2) volgt: $y = \frac{X}{c} - \frac{Y}{c \operatorname{tg} A} = \frac{X}{30} - \frac{Y}{30}$

In Cartesiaanse coördinaten wordt de formule van de neutrale as dan ook

$$454X - 87Y = 1290$$

Bijzondere punten hierop zijn:

$(X=2,85, Y=0)$ en $(X=8,61, Y=30)$

Uitbreiding van de idee der barycentrische coördinaten tot de ruimte.

De basisdriehoek wordt hierbij

vervangen door een basis tetraeder ABCD met in de hoekpunten de massa's x, y, z en u zodanig, dat $x+y+z+u=1$ (zie figuur 12)

We zien onmiddellijk het verband met tetraeder coördinaten. Immers volgt uit de momentstelling t.o.z. van de vlakken BDC, ADC, ABD en ABC

$$x h_A = (x+y+z+u) \xi \rightarrow x h_A = \xi \rightarrow x = \frac{\xi}{h_A}$$

Evenzo $y = \frac{\eta}{h_B}$, $z = \frac{\zeta}{h_C}$, $u = \frac{\chi}{h_D}$

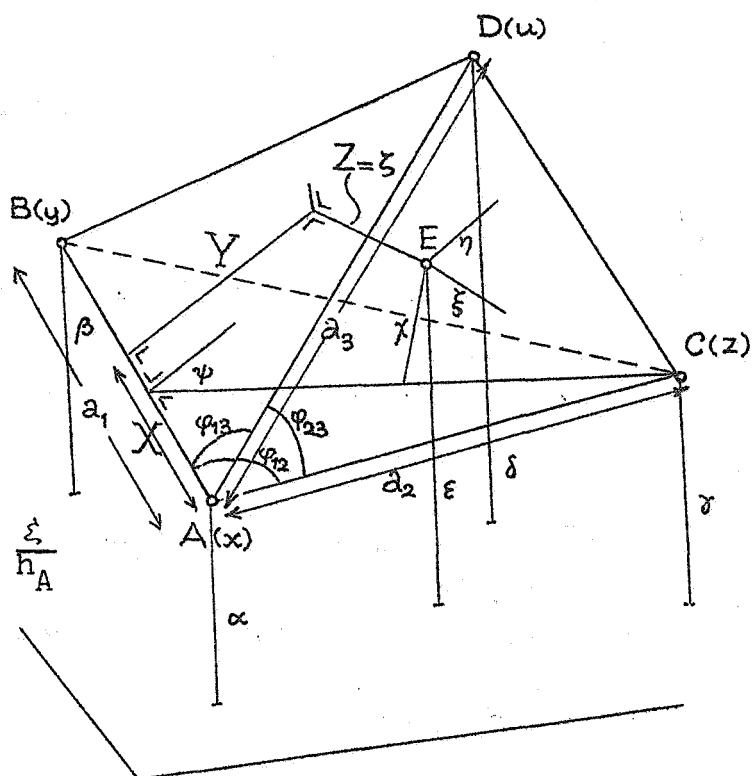


Fig.12 Basis tetraeder. Metrisch.

Toepassing op een rechthoekige tetraeder, zoals in figuur 13 weergegeven

Uit $(x+y+x+u=1)$ volgt:

$$\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} + \frac{\zeta}{c} + \frac{\chi}{l} = 1$$

$$\chi = 1 - \left(\frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} + \frac{\zeta}{c} \right)$$

$$\frac{1}{3} l \text{ Opp } \Delta ABC = \frac{1}{6} abc$$

$$16(\text{Opp } \Delta ABC)^2 = \sum 1_i^2 1_k^2 - 2 \sum 1_i^4$$

$$i=1,2,3$$

$$k=1,2,3$$

Met de waarden voor l_1, l_2 en l_3 krijgen we

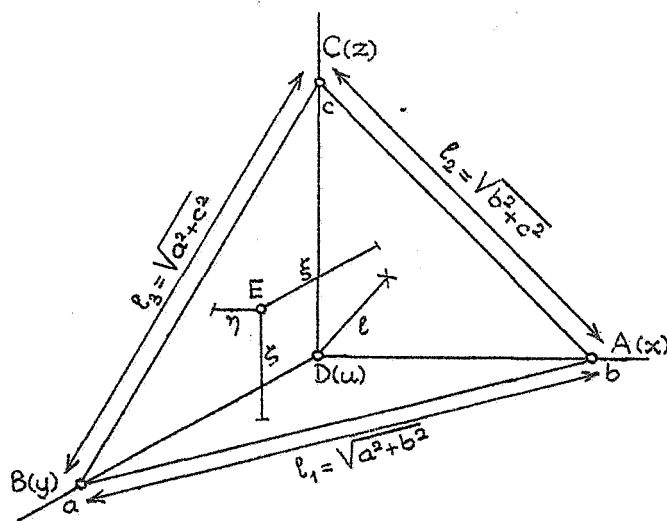


Fig.13. Bijzondere basis tetraeder.

$$\text{Opp } \Delta ABC = \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}$$

zodat:

$$x = \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \right)$$

Bekijken we ook het verband met Cartesiaanse coördinaten.

Een der transformatie formules hebben we al

$$z = Z = z h_c \quad (19)$$

Bepalen we het moment om AB, waarbij het zwaartekrachtsveld in de richting EG kan worden gedacht

$$Y = u a_3 \sin \varphi_{13} + z h_c \cotg \psi \quad (20)$$

De momentstelling t.o.z. van het vlak EFG levert ons:

$$xX + z(-X - a_1 \cos \varphi_{12}) - y(a_1 - X) - u(a_3 \cos \varphi_{13} - X) = 0$$

$$X(x+y+z+u) = X = z a_1 \cos \varphi_{12} + y a_1 + u a_3 \cos \varphi_{13} \quad (21)$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = a_1 \quad \frac{\partial X}{\partial z} = a_1 \cos \varphi_{12} \quad \frac{\partial X}{\partial u} = a_3 \cos \varphi_{13}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = h_c \cotg \psi \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = a_3 \sin \varphi_{13}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = h_c \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = 0$$

$$dX \, dY \, dZ = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \cos \varphi_{12} & a_3 \cos \varphi_{13} \\ 0 & h_c \cotg \psi & a_3 \sin \varphi_{13} \\ 0 & h_c & 0 \end{vmatrix} dy \, dz \, du =$$

$$= a_1 a_3 \sin \varphi_{13} h_c = 6 \omega \, dy \, dz \, du \quad (22)$$

waarbij ω de inhoud is van de basistetraeder.

Met het bovenstaande is analoog aan het tweedimensionale probleem het traagheidsmoment te bepalen van de tetraeder ABCD t.o.z. van een willekeurig plat vlak. Als de afstanden van de punten A, B, C, D en E t.o.z. van dit vlak $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en ϵ bedragen zo volgt uit de momentstelling t.o.z. van dit vlak

$$\epsilon(x+y+z+u) = \epsilon = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta u$$

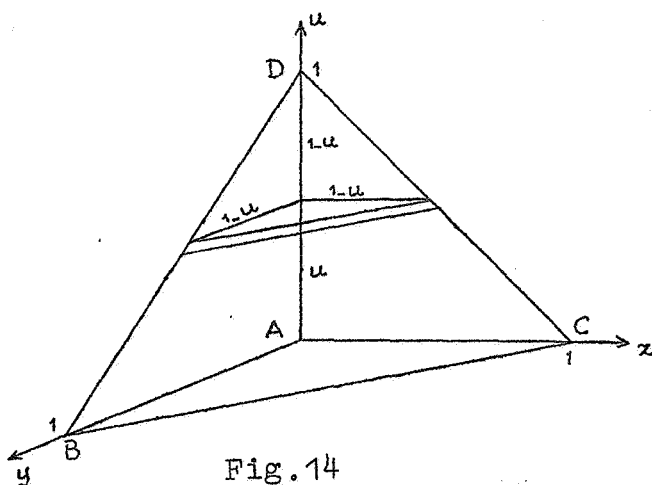


Fig. 14
Basistetraeder. Barycentrisch

De gevraagde grootheid I bedraagt hiermee

$$I = \iiint_{\Omega} 6\omega \rho (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta u)^2 dy dz du$$

welke bij invoering van de integraalbeeldingen Σ_{xx}, Σ_{xy} etc. omgevormd wordt tot

$$I = 6\omega \rho \left\{ \alpha^2 \Sigma_{xx} + \beta^2 \Sigma_{yy} + \gamma^2 \Sigma_{zz} + \delta^2 \Sigma_{uu} + 2\alpha\beta \Sigma_{xy} + 2\alpha\gamma \Sigma_{xz} + 2\alpha\delta \Sigma_{xu} + 2\beta\gamma \Sigma_{yz} + 2\beta\delta \Sigma_{yu} + 2\gamma\delta \Sigma_{zu} \right\} \quad (23)$$

Ω stelt voor dit geval de inhoud van de barycentrische basistetraeder voor.

We berekenen

$$\begin{aligned} \Sigma_{uu} &= \iiint_{\Omega} u^2 dy dz du = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-u)^2 u^2 du = \frac{1}{2} \int_0^1 (u^4 - 2u^3 + u^2) du = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} u^5 - \frac{2}{4} u^4 + \frac{1}{3} u^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{60} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{uy} &= \iiint_{\Omega} uy dy dz du = \int_0^1 u du \int_0^{1-u} y(1-u-y) dy = \\ &= \int_0^1 u du \left[-\frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{2} (1-u)y^2 \right]_0^{1-u} = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-u)^3 u du = \frac{1}{6} \int_0^1 (-u^4 + 3u^3 - 3u^2 + u) du = \\ &= \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{120} \end{aligned}$$

Uit symmetrie overwegingen kunnen we voor de andere grootheden nog meer opschrijven:

$$\Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} = \Sigma_{zz} = \frac{1}{60}, \quad \Sigma_{xy} = \Sigma_{xz} = \Sigma_{xu} = \Sigma_{yz} = \Sigma_{yu} = \Sigma_{zu} = \frac{1}{120}$$

In (23) gesubstitueerd krijgen we

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{10} \omega \rho \{ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta \} = \\ &= \frac{1}{40} \omega \rho \{ 3\alpha^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2 + 3\delta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma + 2\beta\delta + 2\gamma\delta \} + \\ &+ \frac{1}{40} \omega \rho \{ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma + 2\beta\delta + 2\gamma\delta \} = \\ &= \frac{1}{10} \omega \rho \left\{ \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)^2 \right\} + \\ &+ \frac{4}{10} \omega \rho \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

M.a.w. om dit traagheidsmoment te bepalen kan men op de middens van de ribben $\frac{1}{10}$ deel van de massa aangebracht denken en $\frac{4}{10}$ deel in het zwaartepunt, het traagheidsmoment van deze massadelen is dan gelijk aan het traagheidsmoment van de tetraeder.

Colloquium

Mathematische problemen uit de praktijk.

Voordracht op 9 Maart 1955.

door

J.A.Geurst.

Stationnaire oppervlakte golven (I).

1. Inleiding.

Oppervlaktegolven in de hydrodynamica zijn golven, die ontstaan aan het z.g. vrije oppervlak van een vloeistof, als gevolg van de beweging van die vloeistof onder invloed van de zwaartekracht. Het zijn dus gravitatiegolven. We veronderstellen, dat de vloeistofbeweging is

a) zonder viscositeit (beweging van een ideale vloeistof): er treden geen tangentiële drukken op.

b) rotatievrij (zonder wervels): de rotatie $\oint \underline{v} \, ds = 0$ voor elke gesloten kromme, die samentrekbaar is in het beschouwde gebied. Hieruit volgt, dat de snelheid van de vloeistof $\underline{v} (u,v,w)$ is af te leiden van een snelheidspotentiaal φ , dus

$$(1) \quad u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y, \quad w = \varphi_z.$$

c) incompressibel: de dichtheid is constant. De continuïteitsvergelijking wordt dan

$$(2) \quad u_x + v_y + w_z = 0, \quad \text{of} \quad \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0.$$

De bewegingsvergelijkingen voor de vloeistof worden nu:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{px}{\rho} \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{py}{\rho} - g \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{pz}{\rho} \end{aligned}$$

waarbij we hebben aangenomen, dat de gravitatie werkt in de richting van de negatieve y-as. ρ is de dichtheid van de vloeistof, $p(x,y,z,t)$ de druk en g de gravitatieconstante.

We kunnen deze vergelijkingen ook anders schrijven nl.

$$(4) \quad \begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + wu_z &= -\frac{px}{\rho} \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z &= -\frac{py}{\rho} - g \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z &= -\frac{pz}{\rho} \end{aligned}$$

(vergelijkingen van Euler).

Integratie m.b.v. (1) levert:

$$\frac{p}{\rho} + gy + \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) = f(t)$$

Door wijziging van φ kan men deze vergelijking in de volgende gedaante schrijven:

$$(5) \quad \frac{p}{\rho} + gy + \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) = 0$$

waarbij p nu het drukverschil met de constante atmosferische druk is (wet van Bernouilli).

Kinematische randvoorwaarde:

Aan de rand (vrije oppervlak en rand van een voorwerp, dat zich eventueel in de vloeistof bevindt) veronderstellen we dat een vloeistofdeeltje aan de rand gedurende zijn beweging aan die rand blijft. Stel vergelijking van de rand $f(x,y,z,t) = 0$, dan geldt dus

$$(6) \quad \frac{df}{dt} = f_t + uf_x + vf_y + wf_z = 0$$

voor het vrije oppervlak $y = \eta(x,z,t)$ geldt dus

$$\eta_t + u\eta_x - v + w\eta_z = 0$$

$$(7) \text{ of } \quad \eta_t + \varphi_x \eta_x + \varphi_z \eta_z = \varphi_y$$

2. Linearisatie.

Hierbij nemen we aan, dat de snelheden van de vloeistofdeeltjes en de verplaatsingen van de rand samen met hun afgeleiden "infiniteesmaal" zijn, d.w.z. we veronderstellen dat φ en η (we beschouwen geen voorwerp in de vloeistof) ontwikkeld kunnen worden naar een kleine parameter ε , als volgt:

$$(8) \quad \begin{aligned} \varphi &= \varepsilon \varphi^1 + \varepsilon^2 \varphi^2 + \varepsilon^3 \varphi^3 + \dots \\ y &= \eta^0 + \varepsilon \eta^1 + \varepsilon^2 \eta^2 + \dots \\ \text{verder } p &= \varepsilon p^1 + \varepsilon^2 p^2 + \dots \end{aligned}$$

Deze reeksen behoeven niet in de gewone zin te convergeren. Het zijn asymptotische reeksen. φ_i, η_i, p_i zijn z.g. termen van de i^e orde. Combinatie van (7) en (8) en vergelijking van termen van dezelfde orde levert:

$$(9) \quad \begin{aligned} 0^e \text{ orde: } & \eta_t^0 = 0 \\ 1^e \text{ orde: } & \eta_t^1 + \varphi_x^1 \eta_x^0 + \varphi_z^1 \eta_z^0 = \varphi_y^1 \\ 2^e \text{ orde: } & \eta_t^2 + \varphi_x^2 \eta_x^0 + \varphi_z^2 \eta_z^0 = \\ & = \varphi_y^2 - \varphi_x^1 \eta_x^1 - \varphi_z^1 \eta_z^1 - \eta^1 (\varphi_{xy}^1 \eta_x^0 + \varphi_{zy}^1 \eta_z^0 - \varphi_{yy}^1) \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen zijn geldig voor $y = \eta^0(x,z,t)$. Combinatie van (8) en (5) geeft:

$$\begin{aligned}
 & 0^{\text{e}} \text{ orde: } \eta^0 = 0 \\
 (10) \quad & 1^{\text{e}} \text{ orde: } g\eta^1 + \varphi_t^1 = -\frac{p^1}{e} \\
 & 2^{\text{e}} \text{ orde: } g\eta^2 + \varphi_t^2 + \frac{1}{2}\{(\varphi_x^1)^2 + (\varphi_y^1)^2 + (\varphi_z^1)^2\} + \\
 & \quad + \eta^1 \varphi_{ty}^1 = -\frac{p^2}{e} .
 \end{aligned}$$

Beschouwen we alleen 1^e orde benaderingen, dan leveren (9) en (10) na eliminatie van η

$$(11) \quad \varphi_{tt}^1 + g\varphi_y^1 = -\frac{p_t^1}{e} \quad \text{voor } y = 0$$

3. Voorbeeld van stationnaire oppervlaktegolven:

Hierbij zijn alle optredende functies onafhankelijk van x . We kunnen de beweging dus als 2-dimensionaal beschouwen. Het gaat nu om het volgende probleem:

gevraagd $\varphi(x, y; t)$, die voldoet aan

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad \text{voor } y < 0$$

met als randvoorwaarde

$$\varphi_{tt} + g\varphi_y = -\frac{pt}{e} \quad \text{voor } y = 0$$

waarbij $p = P \delta(x) e^{-i\omega t}$

($\delta(x)$ is de delta-functie van Dirac).

Bovendien eisen we in overeenstemming met (8) dat φ begrensd blijft voor $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ ($y < 0$).

1^e methode:

Om op dit geval Fourier-transformatie naar x te kunnen toepassen, moeten we gebruik maken van een kunstgreep (afkomstig van Rayleigh). We veronderstellen nl. - in tegenstelling tot de condities geformuleerd in de inleiding- dat we aanvankelijk te maken hebben met een wrijvingskracht, die evenredig is met de snelheid, componenten $-\nu \varphi_x$, $-\nu \varphi_y$, $-\nu \varphi_z$, waarbij ν een constante > 0 is. Deze kracht verstoort het rotatievrije karakter van de beweging niet. Verder stellen we $\varphi = \psi(x, y) e^{-i\omega t}$.

Het gaat er dus om een ψ te vinden, die voldoet aan

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \quad y < 0$$

met voor $y = 0$ als randvoorwaarde

$$(12) \quad -\omega^2 \psi + g\psi_y - i\nu\omega\psi = \frac{i\omega}{e} P \delta(x) .$$

De termen $-i\nu\omega\psi$ komt van een extra term $\nu\varphi$ in de vergelijking van Bernouilli, dus een extra term $\nu\varphi_t$ in (11).

We passen nu Fourier-transformatie toe:

$$\bar{\psi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \psi(x) dx$$

moet voldoen aan

$$-s^2 \bar{\psi} + \bar{\psi}_{yy} = 0 \quad y < 0$$

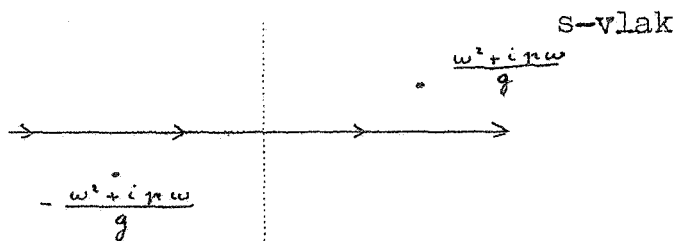
(13) dus $\bar{\psi} = e^{|s|y} A(s)$, want tengevolge van de wrijvingskracht: $\psi \rightarrow 0$ voor $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ ($y < 0$)

(13) in de vrije-randvoorwaarde:

$$-\omega^2 A + g|s|A - i n \omega A = \frac{i\omega}{e} P$$

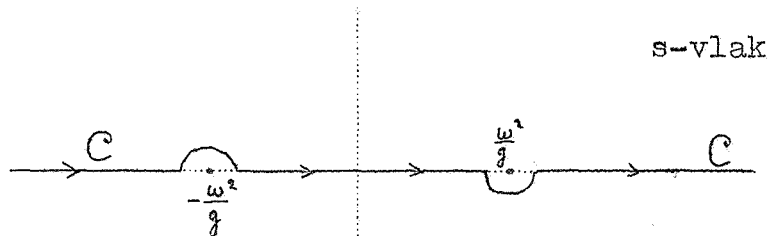
(14) dus $A = \frac{i\omega}{e} P \frac{1}{g|s| - \omega^2 - i n \omega}$ en

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \frac{i\omega}{e} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-isx} e^{|s|y}}{g|s| - \omega^2 - i n \omega} ds$$

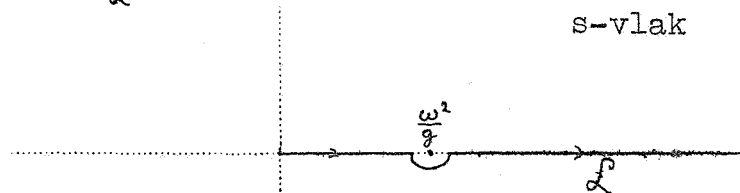


Laten we nu $n \rightarrow 0$, dan komt er

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \frac{i\omega}{e} P \int_C \frac{e^{-isx} e^{|s|y}}{g|s| - \omega^2} ds$$



(15) of $\psi = \frac{i\omega}{\pi e} P \int_C \frac{\cos sx e^{s y}}{gs - \omega^2} ds$



Colloquium
Mathematische problemen uit de praktijk.
 Voordracht op 23 Maart 1955.

door

J. A. Geurst.

Stationnaire oppervlakte golven (II).

3. (Vervolg)

2^e methode (volgens Stoker).

Hierbij beschouwen we het stationnaire geval als de limiettoestand van een beginwaardeprobleem voor $t \rightarrow \infty$. Fysisch is dit ook de meest voor de hand liggende opvatting.

We vragen dus allereerst naar de oplossing van het volgende beginwaardeprobleem:

$\varphi(x, y, t)$ te bepalen uit:

$$(16) \quad \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad (y < 0, t > 0)$$

met als beginvoorwaarde

$$(17) \quad \varphi(x, 0, 0) = \varphi_t(x, 0, 0) = p(x, 0) = 0 \text{ en als randvoorwaarde}$$

$$(18) \quad \varphi_{tt} + g \varphi_y = -\frac{p_t}{\rho} \text{ voor } y = 0 \quad (t > 0)$$

(19) waarbij $p(x, t) = P \delta(x) e^{-i\omega t}$ ($t > 0$) de overdruk aan het vrije oppervlak voorstelt. Voor de oplossing gebruiken we weer F-transformatie naar x .

$$\bar{\varphi}(s, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \varphi(x, y, t) dx$$

$$(16) \text{ wordt } -s^2 \bar{\varphi} + \bar{\varphi}_{yy} = 0.$$

(20) dus $\varphi(s, y, t) = A(s, t) e^{|s|y}$, want de oplossing $\varphi(x, y, t)$ moet begrensd blijven voor $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ ($y < 0$).

Combinatie van (3) en (4) en toepassing van F-transformatie geeft:

$$\bar{\varphi}_{tt} + g \bar{\varphi}_y = P \frac{i\omega}{\rho} e^{-i\omega t} \quad (y = 0)$$

of met (20)

$$(21) \quad A_{tt} + g|s|A = P \frac{i\omega}{\rho} e^{-i\omega t}$$

uit (17) volgt verder $A(s, 0) = A_t(s, 0) = 0$.

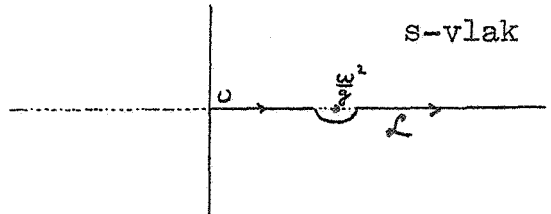
$$(22) \text{ Dus: } A(s, t) = P \frac{i\omega}{\rho} \int_0^t e^{-i\omega(t-\tau)} \frac{\sin \sqrt{g|s|} \tau}{\sqrt{g|s|}} d\tau.$$

Met behulp van de omkeerformule krijgen we dan:

$$\varphi(x, y, t) = \frac{i\omega}{2\pi\rho} P \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|s|y} e^{-isx} \int_0^t \frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\sqrt{g|s|}} \sin \sqrt{g|s|} \tau d\tau ds$$

$$(23) = \frac{i\omega}{\pi\rho} P \int_0^{\infty} e^{sy} \cos sx \int_0^t \frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\sqrt{gs}} \sin \sqrt{gs} \tau d\tau ds.$$

Nu gaan we het gedrag na van $\varphi(x, y, t)$ voor $t \rightarrow \infty$. Daartoe veranderen we de integratieweg van s in de contour L . Vervolgens vervangen we de sinus door complexe e-machten en integreren naar τ .



$$(24) \quad \varphi(x, y, t) = P \frac{i\omega e^{-i\omega t}}{\pi\rho} \int_L e^{sy} \cos sx \cdot \left\{ \underbrace{-\frac{1}{2\sqrt{gs}} \frac{e^{i(\sqrt{gs}+\omega)t}}{\sqrt{gs}+\omega}}_{(\alpha)} - \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{gs}} \frac{e^{-i(\sqrt{gs}-\omega)t}}{\sqrt{gs}-\omega}}_{(\beta)} + \frac{1}{gs-\omega^2} \right\} ds$$

We laten nu zien dat (α) en (β) voor $t \rightarrow \infty$ geen bijdrage leveren. We nemen de tak van de 2-waardige functie \sqrt{s} , die op de positieve reële as positief is. Als $\text{Im. } s < 0$ voor s in het rechterhalfvlak, dan geldt

$$\text{Re } i(\sqrt{gs} \pm \omega) > 0.$$

(α) heeft geen singulariteiten op de positieve reële as. We kunnen L dus weer veranderen in de positieve reële as en m.b.v. partiële integratie (of lemma van Riemann-Lebesgue) vinden we dat de bijdrage van (α) zich gedraagt als $\frac{1}{t}$ voor $t \rightarrow \infty$. Voor (β) splitsen we de integratieweg L in het gedeelte langs de reële as en in de halve cirkel contour om $s = \frac{\omega^2}{g}$. Voor het eerste gedeelte geldt hetzelfde als voor (α) , dus als $\frac{1}{t}$ voor $t \rightarrow \infty$. Op de halve cirkel contour geldt echter $\text{Re } -i(\sqrt{gs}-\omega) < 0$, dus voor $t \rightarrow \infty$ verdwijnt de bijdrage tot de integraal.

Resultaat: voor $t \rightarrow \infty$

$$(25) \quad \varphi(x, y, t) \rightarrow P \frac{i\omega}{\pi\rho} e^{-i\omega t} \int_L \frac{\cos sx e^{sy}}{gs-\omega^2} ds$$

in overeenstemming met (15).

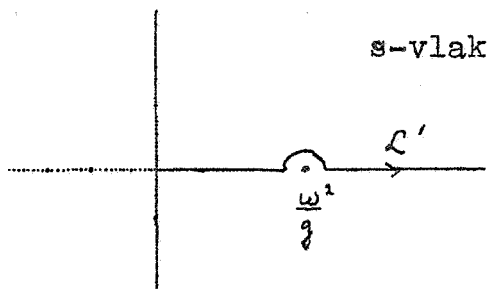
We tonen nu nog aan, dat (25) inderdaad de snelheidspotential voorstelt van golven, die naar oneindig weglopen. Daarvoor moeten we dus het gedrag nagaan voor $x \rightarrow \pm\infty$. Wegens de symmetrie nemen we $x \rightarrow +\infty$. We doen weer hetzelfde als voor $t \rightarrow \infty$ en vervangen $\cos sx$ door

complexe e-machten. Dus

$$(26) \quad \varphi(x,y,t) \rightarrow -P \frac{\omega}{\rho} e^{-i\omega t} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \underbrace{\frac{e^{sy} e^{isx}}{gs - \omega^2}}_{(A)} ds + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_L \underbrace{\frac{e^{sy} e^{-isx}}{gs - \omega^2}}_{(B)} ds \right\} .$$

Als $x \rightarrow \infty$, dan bijdrage (B) $\rightarrow 0$. Dit zien we door L weer te splitsen in een stuk langs de reële as en een halve cirkel contour om $s = \frac{\omega^2}{g}$ in het onder halfvlak. Om de bijdrage van (A) te krijgen, trekken we de contour L over de pool $s = \frac{\omega^2}{g}$ heen, waarbij we natuurlijk het residu in die pool in rekening moeten brengen. De contour L gaat over in L'.

Analoog aan zopas geldt bijdrage (A) langs L' verdwijnt voor $x \rightarrow \infty$. Het residu in de pool blijft dus slechts over.



$$(27) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x,y,t) = \varphi(x,y) \rightarrow -\frac{P\omega}{g\rho} e^{\frac{\omega^2}{g}y} e^{i\left(\frac{\omega^2}{g}x - \omega t\right)} \quad \text{voor } x \rightarrow \infty .$$

We hebben dus inderdaad een uitgaande harmonische golf met voortplantingssnelheid $c = \frac{g}{\omega}$. De voortplantingssnelheid is afhankelijk van de frequentie ω . We hebben te doen met dispersie. Voeren we het golfgetal $\sigma = \frac{2\pi}{\lambda}$ in, dan komt er

$$\sigma = \frac{\omega^2}{g} \quad \text{of} \quad \lambda = \frac{2\pi g}{\omega^2}$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad \text{dus} \quad \lambda = \frac{gT^2}{2\pi}$$