

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

TC 24

Mathematische problemen uit de warmtege-  
leidingstheorie

Cursus 1954/55.

H.A. Lauwerier.



1955

Mathematische problemen uit de warmtegeleidingstheorie

door

Dr H.A. Lauwerier

21 October 1954

I.1. Algemene Inleiding

Dat deel van de wiskunde dat haar onderwerpen ontleent aan de ons omringende natuur pleegt men meestal aan te duiden met de naam toegepaste wiskunde, of in andere talen Mathematical Physics of Mathematische Physik. Dat deze benamingen onjuist en misleidend zijn, behoeft geen commentaar meer. Het gaat in de mathematische physica, bij gebrek aan betere benaming, namelijk niet om de physica, maar om de mathematica en meestal worden bepaalde fysieke verschijnselen en wetten in een wiskundig gewaad gestoken en als uitgangspunt gekozen van een min of meer uitvoerige mathematische problematiek.

In het bekende tweedelige werk van Courant en Hilbert "Mathematische Physik" zal men dan ook nauwelijks Physik aantreffen. Anderzijds is het natuurlijk wel waar, dat men in de mathematische physica zich er voortdurend van bewust is, dat problemen uit de praktijk met behulp van de ontwikkelde methoden en hulpmiddelen inderdaad aangepakt en opgelost kunnen worden, maar de nadruk valt steeds op de mathematische methoden en minder op de toepassingen.

Het blijkt namelijk, dat verschillende fysieke verschijnselen een zelfde mathematische beschrijving toelaten en dus met dezelfde mathematische hulpmiddelen opgelost kunnen worden. Er zijn dus in feite twee manieren om de onderwerpen van de mathematische physica aan te vatten.

De gebruikelijke methode is een systematische behandeling van wiskundige methoden waarbij van elke methode de verschillende toepassingen worden bestudeerd. Dit is de gevolgde methode in o.a. het boek van Courant en Hilbert. Deze methode is voor een handboek zeer geschikt, maar bij deze cursus volgen wij een andere methode. Wij nemen namelijk een bepaald fysisch onderwerp

waarbij er geen voorkeursrichting is, zal om symmetrieredenen de warmtestroom in een punt van een isotherm loodrecht op deze isotherm verlopen.

Als basis voor de warmtegeleidingstheorie van isotrope media kiezen wij nu het volgende:

De hoeveelheid warmte welke een oppervlakteelement  $d$  van een isotherm van binnen naar buiten passert in een tijdelement  $dt$  is gelijk aan

$$- K \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma dt \quad (2.2)$$

waarbij  $K$  een constante is en  $\partial/\partial n$  differentiatie langs de naar buiten gerichte normaal van het oppervlak voorstelt.

De uitdrukking 2.2 geldt ook algemeen voor een willekeurig oppervlakteelement  $d\sigma$ . Dit blijkt uit de volgende overweging.

Beschouw een infinitesimaal viervlakje PABC met rechte hoeken in P en laat PAB in het raakvlak van P aan de door P gaande isotherm liggen. Door PAC en PBC passeert geen warmtestroom. Die door PAB en ABC heffen elkaar op, terwijl  $\frac{d\sigma}{dn}$  niet verandert.

Uit de toestand ten tijde  $t$  kunnen wij de toestand op een later tijdstip afleiden. Dit geschiedt met behulp van een partiële differentiaalvergelijking, de warmtevergelijking, welke in feite de overgang van twee toestanden welke onmiddellijk op elkaar volgen, b.v.  $t$  en  $t + dt$ , beschrijft.

Deze warmtevergelijking kunnen wij op twee wijzen afleiden, namelijk in micro en in macro. Bij de afleiding in micro bekijken wij wat er gebeurt met een infinitesimaal blokje ( $dx_1, dx_2, dx_3$ ). Bij de afleiding in macro wordt een willekeurig brok medium beschouwd.

De afleiding in macro zullen wij later geven, omdat hiervoor nog wat voorbereiding nodig is. Wij geven nu de afleiding in micro. Beschouw een blokje bepaald door  $a_1 < x_1 < a_1 + da_1$ . De warmtestroom in b.v. de  $X_1$  richting is van binnen naar buiten gerekend:

$$K \left\{ \frac{\partial T(a_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial T(a_1 + da_1)}{\partial x_1} \right\} da_2 da_3 dt$$

of

$$- K \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} da_1 da_2 da_3 dt$$

In alle richtingen tezamen dus

$$- K \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right) da_1 da_2 da_3 dt \quad (2.3)$$

waarbij er geen voorkeursrichting is, zal om symmetrieredenen de warmtestroom in een punt van een isotherm loodrecht op deze isotherm verlopen.

Als basis voor de warmtegeleidingstheorie van isotrope media kiezen wij nu het volgende:

De hoeveelheid warmte welke een oppervlakteelement  $d$  van een isotherm van binnen naar buiten passert in een tijdelement  $dt$  is gelijk aan

$$- K \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma dt \quad (2.2)$$

waarbij  $K$  een constante is en  $\partial/\partial n$  differentiatie langs de naar buiten gerichte normaal van het oppervlak voorstelt.

De uitdrukking 2.2 geldt ook algemeen voor een willekeurig oppervlakteelement  $d\sigma$ . Dit blijkt uit de volgende overweging.

Beschouw een infinitesimaal viervlakje PABC met rechte hoeken in P en laat PAB in het raakvlak van P aan de door P gaande isotherm liggen. Door PAC en PBC passeert geen warmtestroom. Die door PAB en ABC heffen elkaar op, terwijl  $\frac{d\sigma}{\partial n}$  niet verandert.

Uit de toestand ten tijde  $t$  kunnen wij de toestand op een later tijdstip afleiden. Dit geschiedt met behulp van een partiële differentiaalvergelijking, de warmtevergelijking, welke in feite de overgang van twee toestanden welke onmiddellijk op elkaar volgen, b.v.  $t$  en  $t + dt$ , beschrijft.

Deze warmtevergelijking kunnen wij op twee wijzen afleiden, namelijk in micro en in macro. Bij de afleiding in micro bekijken wij wat er gebeurt met een infinitesimaal blokje ( $dx_1, dx_2, dx_3$ ). Bij de afleiding in macro wordt een willekeurig brok medium beschouwd.

De afleiding in macro zullen wij later geven, omdat hiervoor nog wat voorbereiding nodig is. Wij geven nu de afleiding in micro. Beschouw een blokje bepaald door  $a_1 < x_1 < a_1 + da_1$ . De warmtestroom in b.v. de  $X_1$  richting is van binnen naar buiten gerekend:

$$K \left\{ \frac{\partial T(a_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial T(a_1 + da_1)}{\partial x_1} \right\} da_2 da_3 dt$$

of

$$- K \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} da_1 da_2 da_3 dt$$

In alle richtingen tezamen dus

$$- K \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right) da_1 da_2 da_3 dt \quad (2.3)$$

De warmtetoename van het blokje in dt is gelijk aan

$$\rho c \{ T(t + dt) - T(t) \} da_1 da_2 da_3$$

of

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} da_1 da_2 da_3 dt \quad (2.4)$$

De constanten  $\rho$  en  $c$  zijn specifieke eigenschappen van het medium, nl. de dichtheid en de specifieke warmte.

De totale warmtebalans levert, dat de som van 2.3 en 2.4 nul is. Aldus vindt men

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = \frac{\rho c}{K} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.5)$$

Bij de afleiding van de warmtevergelijking 2.5 zijn nog stilzwijgend enkele veronderstellingen gemaakt, zoals de constantheid van  $K$  en ook dat in het medium geen warmte ontwikkeld wordt (chemische reactie). Later zullen wij een warmtevergelijking ook voor deze gevallen afleiden. Voorlopig beschouwen wij dus een medium, dat thermisch isotroop en homogeen is, waarin geen warmte ontwikkeld (of onttrokken) wordt. De combinatie  $K/\rho c$  wordt gewoonlijk  $\kappa$  genoemd. Kelvin noemde  $\kappa$  de "diffusivity". Wij zullen echter een zodanige tijdschaal kiezen, dat  $\kappa = 1$ . M.a.w. wij houden ons bezig met de vergelijking

$$\sum_i \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.6)$$

### 1.3. Randvoorwaarden.

Aan de oppervlakte van het medium hebben wij de volgende typen van voorwaarden:

a. De temperatuur is een voorgeschreven functie van de tijd:

$$T = g(x_1, x_2, x_3, t)$$

b. Het medium is geïsoleerd, zodat de warmtestroom door elk oppervlakteelement = 0.

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

waarbij  $n$  de normaal op het oppervlak is.

c. Een voorgeschreven warmtestroom aan het oppervlak:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = g(x_1, x_2, x_3, t)$$

d. Het medium straalt warmte uit in een omgeving van temperatuur  $T_0$ :

$$K \frac{\partial T}{\partial n} + H(T - T_0) = 0 \quad (\text{wet van Newton})$$

e. Aan een scheidingsvlak tussen twee homogene media met de warmtegeleidingscoëfficiënten  $K_1$  en  $K_2$  heeft men

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = T_2 \\ K_2 \frac{\partial T_1}{\partial n} = K_1 \frac{\partial T_2}{\partial n} \end{array} \right.$$

De problemen welke men in de warmtegeleidingstheorie ontmoet, zijn meestal van het volgende type. Van een medium kent men de thermische toestand op een bepaald tijdstip. Aan het oppervlak heeft men een combinatie van randvoorwaarden a - d. Men vraagt nu de thermische toestand op een willekeurig later tijdstip. In sommige gevallen is men tevreden met de stationaire toestand, d.w.z. de limiet waartoe de functie van de temperatuurverdeling voor grote waarden van  $t$  nadert.

#### I.4. Een oneindig uitgebreid medium met gegeven begintoestand.

Wij nemen aan, dat de begintoestand slechts van één richtingsvariabele  $x$  afhangt. De warmtevergelijking is dus

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$\text{en voor } t = 0 \quad T = g(x). \quad (4.2)$$

Dit simpele geval geeft, zoals zal blijken, al aanleiding tot heel wat problemen. Een gebruikelijke methode van oplossen is het principe van scheiding der variabelen. Stel eens, dat  $T = f_1(x)f_2(t)$  een oplossing van 4.1. voorstelt. Dan is

$$\frac{f_1'}{f_1} = \frac{f_2'}{f_2}$$

hetgeen alleen kan, wanneer beide leden een constante b.v.  $-\lambda^2$  voorstellen. Hierdoor wordt 4.1. gesplitst in twee gewone differentiaalvergelijkingen nl.

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} + \lambda^2 f_1 = 0 \quad \frac{df_2}{dt} + \lambda^2 f_2 = 0 \quad (4.3)$$

Hieraan wordt voldaan door

$$f_1 = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x \quad f_2 = B e^{-\lambda^2 t}. \quad (4.4)$$

Gebruikmakend van het superpositiebeginsel nl., dat een lineaire combinatie van oplossingen van 4.1 een nieuwe oplossing van 4.1. levert, is dus b.v.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t} \cos \lambda x \phi(\lambda) d\lambda$$

een oplossing van 4.1. Aangezien 4.5, een even functie van  $x$  is, kunnen wij hier alleen wat mee bereiken, indien ook  $g(x)$  even is. Voorlopig nemen wij dit maar aan, en tevens veronderstellen wij, dat  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx$  bestaat.

Aanpassing aan de begin-voorwaarde geeft:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda x \phi(\lambda) d\lambda \quad (4.6)$$

Hieruit kan  $\phi(\lambda)$  gevonden worden met behulp van het omkeertheorema van Fourier:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xu \, du \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt \quad (4.7)$$

indien  $\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty$  en  $f(x)$  continu en van begrensde variatie in elk eindig interval. Uit 4.6, volgt dus

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \cos \lambda u \, du. \quad (4.8)$$

Indien echter in 4.5,  $\phi(\lambda)$  een constante =  $c$  is, is niet meer aan de voorwaarden van het omkeertheorema van Fourier voldaan. In dat geval kan de integraal 4.5, gemakkelijk uitgerekend worden. Schrijf b.v.

$$c \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t + \lambda x i} d\lambda$$

stel  $\lambda - \frac{x i}{2t} = u$  en neem weer de reële as. Aldus ontstaat

$$c e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 t} du$$

dus

$$c \cdot \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad (4.9)$$

Kiezen wij om redenen die straks zullen blijken  $c = \frac{1}{2\pi}$ , dan hebben wij dus gevonden, dat

$$S(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \quad (4.10)$$

een oplossing van 4.1. voorstelt. Deze oplossing blijkt enige merkwaardige eigenschappen te bezitten. Men heeft nl.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x, t) dx = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(x, t) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

De betrekking 4.11 betekent dat de in het medium aanwezige totale warmtehoeveelheid, de eenheid, niet verandert. Dit is fysisch zonder meer duidelijk. Mathematisch volgt het uit integratie van 4.1. naar  $x$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} T(x,t) dx = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad (4.13)$$

De betrekking 4.12 betekent, dat op  $t = 0$  alle warmte is opgehoopt in het punt  $x = 0$ . De door 4.11. en 4.12. voorgestelde functie heet de "deltafunctie" en wordt geschreven als  $\delta(x)$  dus

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \\ \delta(x) = 0 \quad x \neq 0. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

eigenlijk hebben wij hiermede het gebruikelijke gebied van het mathematische functiebegrip verlaten. Echter blijkt, dat de deltafunctie nooit zelfstandig optreedt, maar steeds in relatie met andere functies nl.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \quad (4.15)$$

Uitgaande van deze gedachte heeft Schwartz kort geleden het functiebegrip dienovereenkomstig uitgebreid en voor het gebruik van deze deltafunctie een strenge mathematische basis gelegd.

Wij keren nu weer terug tot het oorspronkelijke probleem 4.1. en 4.2. De aanvangsvoorwaarde splitsen wij in zijn elementen, elk waarvan een deltafunctie voorstelt nl.

$$T = g(\xi) d\xi \delta(x - \xi) \quad (4.16)$$

De bij de beginvoorwaarde 4.16. behorende oplossing is volgens 4.10

$$\frac{g(\xi) d\xi}{2\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ - \frac{(x - \xi)^2}{4t} \right\} \quad (4.17)$$

Het superpositiebeginsel levert

$$\begin{array}{l} t = 0 \quad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \delta(x - \xi) d\xi \\ \text{en dus} \\ t > 0 \quad T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \end{array} \quad (4.18)$$

Achteraf verifiëren wij nog even het gedrag van 4.18 voor  $t \rightarrow 0$ .



Substitutie  $\xi = x + 2t^{\frac{1}{2}}u$  geeft

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x + 2t^{\frac{1}{2}}u) e^{-u^2} du$$

Is dus  $g(x)$  continu en is het gedrag voor  $x \rightarrow \infty$  zodanig, dat uniforme convergentie verzekerd is, dan is inderdaad

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-u^2} du = g(x)$$

zodat 4.18. aan alle eisen voldoet.

De functie  $g(x)$  in 4.18 hoeft niet even of oneven te zijn. Wij laten nu zien hoe in dit algemene geval de oplossing met behulp van de Fourier transformatie gevonden kan worden. De stelling waarvan wij ook later nog gebruik zullen maken is als volgt:

Als 
$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iut} dt \quad (4.19)$$

is 
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-ixu} du \quad (4.20)$$

wanneer voldaan is aan één der volgende voorwaarden

- a.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dx < \infty$  en  $f(x)$  continu en van beperkte variatie.
- b.  $f(x)$  continu en van beperkte variatie, voor  $x \rightarrow \pm\infty$  convergeert  $f$  monotoon naar 0,  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  en  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  bestaan.

Indien  $f(t)$  even is, is ook  $F(u)$  even en kunnen 4.19 en 4.20 in reële vorm gebracht worden en ontstaan de zogenaamde cosinustransforms.

Wij herhalen nog even het gestelde probleem

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \\ t = 0 \quad T = g(x) \end{array} \right.$$

De oplossing zoeken wij in de vorm

$$T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t + \lambda xi} \phi(\lambda) d\lambda. \quad (4.21)$$

Voor  $t = 0$  is dus

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda xi} \phi(\lambda) d\lambda. \quad (4.22)$$

Toepassing van het omkeertheorem van Fourier geeft dus, mits  $\phi(\lambda)$  aan de bijbehorende voorwaarden voldoet

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda ui} g(u) du. \quad (4.23)$$

Substitutie van 4.23. in 4.21. geeft

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t + \lambda x i} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u i} g(u) du \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t + \lambda(x-u)i} d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}} du
 \end{aligned}$$

in overeenstemming met 4.8.

-----

Mathematische problemen uit de warmtegeleidingstheorie

door

Dr H.A. Lauwerier

4 November 1954

I.5. Een lichaam begrensd door twee evenwijdige vlakken

Het volgende voorbeeld toont enkele geheel andere aspecten van de warmtegeleidingstheorie; i.h.b. wordt hier het effect van de randvoorwaarden gedemonstreerd.

Beschouw de "plak"  $0 < x < a$  waarvan de grensvlakken op de nul-temperatuur gehouden worden en waarbij de begintemperatuur bekend is:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} & 0 < x < a \\ T = 0 & x=0, x=a \\ T = g(x) & t=0 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

We passen wederom het principe van scheiding der variabelen toe. De combinatie

$$e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x \quad (5.2)$$

blijkt voor alle waarden van  $\lambda$  aan de differentiaalvergelijking te voldoen maar slechts voor speciale waarden van  $\lambda$  lukt het om de randvoorwaarden  $T = 0$  bij  $x = 0$  en  $x = a$  te bevredigen, n.l.

$$\lambda = \frac{n\pi}{a} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (5.3)$$

Deze  $\lambda$ 's noemt men de eigenwaarden van het probleem en de bijpassende functies (5.2), n.l.

$$V_n = e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad (5.4)$$

de eigenfuncties.

Eigenlijk is het begrip "eigenwaarde" niet scherp gedefinieerd, want men zou b.v. even goed  $\lambda^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{n\pi}{a}}$  de eigenwaarde kunnen noemen. Voorlopig zullen we nog geen behoefte hebben aan een

scherpe definitie van eigenwaarde. De hoofdzaak is, dat er een reeks eigenfuncties (5.4) bestaat welke gerangschikt kunnen worden volgens hun gedrag voor  $t \rightarrow \infty$ .

Elke eigenfunctie is een oplossing van de warmtevergelijking en de randvoorwaarden. Om nu aan de beginvoorwaarde aan te kunnen passen zoeken we de oplossing in de vorm

$$T = \sum_1^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{a^2}}. \quad (5.5)$$

Voor  $t = 0$  is formeel

$$g(x) = \sum_1^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a}. \quad (5.6)$$

We nemen nu aan, dat  $g(x)$  in het interval  $(0, a)$  begrensd is en aan de voorwaarden van Dirichlet voldoet en dus ontwikkeld kan worden in een Fourier reeks. De coëfficiënten  $A_n$  zijn derhalve de Fouriercoëfficiënten van  $g(x)$

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} g(x) dx. \quad (5.7)$$

Het is gemakkelijk in te zien, dat de reeks (5.5) met de Fouriercoëfficiënten  $A_n$  van (5.7) uniform convergeert voor  $t \geq t_0 > 0$  en  $0 \leq x \leq a$ , en dat in dit gebied aan de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden voldaan is. Dat aan de beginvoorwaarde voldaan is volgt uit een stelling van Abel.

Indien  $g(x)$  niet aan de voorwaarden van Dirichlet voldoet maar toch of begrensd is of zodanig is dat  $\int_{-a}^a |g(x)| dx$  bestaat,

geldt (5.6) weliswaar niet meer, maar toch blijkt (5.5) aan alle eisen te voldoen en voor  $t \rightarrow 0$  inderdaad  $g(x)$  op te leveren.

Volgens een stelling van Fejér is namelijk (5.6) wel sommeerbaar in de zin van Cesàro hetgeen wil zeggen dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$$

waarbij  $S_n = \sum_1^n A_k \sin \frac{k\pi x}{a}$  bestaat en in elk continuïteitspunt

van  $g(x)$  inderdaad  $g(x)$  voorstelt. Een kleine uitbreiding van de stelling van Abel laat dan zien dat hieruit volgt dat voor  $t \rightarrow 0$  (5.5)  $g(x)$  oplevert.

We brengen nu een kleine complicatie aan n.l. door de randvoorwaarden van (5.1) te wijzigen in

$$\begin{cases} T = T_1 & x = 0 \\ T = T_2 & x = a \end{cases} \quad (5.8)$$

We gaan nu a.v. te werk. Denk de oplossing  $T(x,t)$  opgebouwd uit twee bestanddelen  $U$  en  $V$ , waarbij  $U$  en  $V$  voldoen aan:

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dx^2} = 0 \\ U = T_1 & x = 0 \\ U = T_2 & x = a \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial t} \\ V = 0 & x = 0, x = a \\ V = g(x) - U & t = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

Het eerste probleem is stationnair en gemakkelijk op te lossen

$$U = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{a} \quad (5.11)$$

Het tweede probleem hebben we reeds opgelost n.l.

$$V = \sum_1^{\infty} B_n \sin \frac{n \pi x}{a} \quad (5.12)$$

met

$$B_n = A_n - \frac{2}{a} \int_0^a \left\{ T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{a} \right\} \sin \frac{n \pi x}{a} dx$$

waarbij  $A_n$  door (5.7) gegeven is. Na een kleine reductie is

$$B_{n_s} = A_n - \frac{2 \{ T_1 - (-1)^n T_2 \}}{n \pi} \quad (5.13)$$

zodat de gevraagde oplossing er als volgt uitziet

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{-T_1 + (-1)^n T_2}{n} + \frac{\pi}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi u}{a} g(u) du \right\} \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}} \quad (5.14)$$

We maken het vervolgens nog wat moeilijker door  $T_1$  ook van de tijd afhankelijk te nemen. Het probleem is a.v.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \\ \left\{ \begin{array}{l} T = \phi(t) \\ T = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array} \\ T = g(x) \quad t = 0 \end{array} \right. \quad (5.15)$$

We stellen weer  $T = U + V$  waarbij  $U$  aan (5.1) voldoet en  $V$  aan

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial V}{\partial t} \\ \left\{ \begin{array}{l} V = \phi(t) \\ V = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array} \\ V = 0 \quad t = 0 \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Vervolgens passen we op (5.16) weer het superpositiebeginsel toe n.l. door de variabele randvoorwaarde op te bouwen uit elementaire stukjes corresponderend met de randvoorwaarde (5.8).

Laat  $F(x,t)$  de oplossing zijn van

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial F}{\partial t} \\ \left\{ \begin{array}{l} F = 1 \\ F = 0 \\ F = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \\ t = 0 \end{array} \end{array} \right. \quad (5.17)$$

De oplossing van (5.16) waarbij de voorwaarde bij  $x = 0$  vervangen is door

$$\begin{cases} v = 0 & t < \tau \\ v = \phi(\tau) & \tau < t < \tau + d\tau \\ v = 0 & t > \tau + d\tau \end{cases}$$

is dan

$$\phi(\tau) F(x, t-\tau) - F(x, t-\tau-d\tau)$$

of

$$\phi(\tau) \cdot \frac{\partial}{\partial t} F(x, t-\tau) d\tau$$

Het superpositiebeginsel levert daarmee als oplossing van (5.16)

$$\int_0^{\tau} \frac{\partial}{\partial t} F(x, t-\tau) \phi(\tau) d\tau \quad (5.18)$$

Deze speciale toepassing van het superpositiebeginsel op een tijdafhankelijke randvoorwaarde staat ook bekend als het principe van Duhamel (1833).

Volgens (5.14) is

$$F(x, t) = 1 - \frac{x}{a} - \frac{2}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{a} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 t}{a^2}\right)$$

De oplossing van (5.15) kan nu gemakkelijk samengesteld worden.

### I.6. Algemene theorie

We beginnen met enkele begrippen uit de tensorrekening. Beschouw steeds een Cartesiaans assenstelsel  $X_1, X_2, X_3$  met coördinaten  $x_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

Onder een tensor van de  $k^e$  orde verstaan we een stelsel van functies met  $k$  indices ( $i_j = 1, 2, 3$ ):

$$T_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_1, x_2, x_3) \quad (6.1)$$

zodanig, dat deze componenten bij overgang op een ander assenstelsel getransformeerd worden als het product van  $k$  vectoren

De gevallen  $k = 0$  en  $k = 1$  corresponderen met de begrippen scalar en vector. De belangrijkste eigenschappen van tensoren zijn

1. Het product van twee tensoren is weer een tensor.
2. Identificering van indices levert weer een tensor op.

Onder identificering van indices verstaan we het volgende. Indien in (6.1) de indices  $i_1$  en  $i_2$  geïdentificeerd worden past men sommatie over deze indices toe:

$$T_{i_1 i_1 i_3 \dots i_k} = T_{11 i_3 \dots i_k} + T_{22 i_3 \dots i_k} + T_{33 i_3 \dots i_k}$$

waardoor een nieuw stelsel met twee indices minder ontstaat. Dit is dus een nieuwe tensor met orde  $k = 2$ .

Een eenvoudig voorbeeld is het scalarproduct van twee vectoren  $a_i (a_1, a_2, a_3)$  en  $b_i (b_1, b_2, b_3)$  n.l.

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Zodra duidelijk is, dat men met tensoren werkt worden sommatietekens steeds weggelaten, omdat de sommatie door de gelijkheid van indices wordt aangegeven.

Een belangrijke rol speelt de differentiaaloperator

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \text{ welke de rol van symbolische vector speelt.}$$

Uitgaande van een scalar  $s$  is dus  $\frac{\partial s}{\partial x_i}$  een vector, de z.g. gradiënt van  $s$ .

Uitgaande van een vector  $v_i$  is dus  $\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ , het scalarproduct van  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  en  $v_i$  een scalar, de z.g. divergentie van  $v_i$ .

De temperatuur  $T$  in een medium is een scalarfunctie van plaats en tijd. De gradiënt van  $T$  n.l.  $\frac{\partial T}{\partial x_i}$  is een vector welke de

richting van het maximale temperatuur - verval aangeeft.

De warmtestroom welke optreedt tengevolge van de temperatuursverschillen wordt enerzijds bepaald door de temperatuur-gradiënt, anderzijds door de eigenschappen van het medium.

Men definieert nu de vector van de warmtestroomdichtheid  $S_i$  door

$$S_i = - K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (6.2)$$

waarbij in de tensor  $K_{ij}$  de eigenschappen van het medium opgesloten liggen.

De hoeveelheid warmte die door een oppervlakteelement  $d\sigma$  met normaalvector  $n_i$  passeert is



$$n_i S_i d\sigma \quad (6.3)$$

of

$$-n_i K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} d\sigma \quad (6.4)$$

Het feit, dat de hoeveelheid warmte in een gesloten systeem niet verandert, wordt uitgedrukt in de z.g. continuïteitsvergelijking. Beschouw daartoe een georiënteerd infinitesimaal blokje met ribben  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Volgens (6.3) is de hoeveelheid warmte welke in  $dt$  sec. instroomt gelijk aan

$$- \frac{\partial}{\partial x_i} S_i dx dy dz dt \quad (6.5)$$

In dit tijdsinterval heeft het blokje een hoeveelheid warmte opgenomen gelijk aan

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz dt \quad (6.6)$$

Men heeft dus de volgende continuïteitsvergelijking

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} S_i = 0 \quad (6.7)$$

Indien plaatselijk nog extra warmte wordt opgewekt b.v.

$A(x_1, x_2, x_3, t)$  per tijdseenheid en volumeeenheid moet aan (6.7) deze term nog extra toegevoegd worden:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} S_i = A(x_1, x_2, x_3, t) \quad (6.8)$$

De warmtevergelijking ontstaat tenslotte door substitutie van (6.2) in (6.8)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} (K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}) + A(x_1, x_2, x_3, t) \quad (6.9)$$

We vermelden voorts de stelling van Gauss welke zegt dat een volumeintegraal van een divergentie van een vector veranderd kan worden in een oppervlakteintegraal van de normaal van de vector:

$$\int_{\text{vol}} \frac{\partial}{\partial x_i} v_i d\tau = \int_{\text{opp}} n_i v_i d\sigma \quad (6.10)$$

Het bewijs hiervan verloopt doorgaans in verschillende trappen, waarbij een willekeurig lichaam in convexe delen wordt verdeeld en

waarbij een convex deel zelf weer in een bundel cilindertjes evenwijdig aan de  $X_1$  richting wordt verdeeld. Partiële integratie reduceert dan de drievoudige integraal van  $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$  tot een tweevoudige enz.

Met behulp van deze stelling van Gauss kan met tot een afleiding in macro van de warmtevergelijking komen.

De totale winst aan warmte is per tijdseenheid gelijk aan

$$\iiint (e^c \frac{\partial T}{\partial t}) d\tau$$

hiervan komt voor rekening op de warmteopname aan het oppervlak

$$- \iint (n_i S_i) d\sigma$$

en de inwendige warmteproductie

$$\iiint (A) d\tau$$

dus

$$\iiint \left\{ e^c \frac{\partial T}{\partial t} - A \right\} d\tau + \iint (n_i S_i) d\sigma = 0$$

Volgens Gauss dus

$$\iiint \left\{ e^c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} S_i - A \right\} d\tau = 0 \quad (6.11)$$

Aangezien dit voor elk volumedeel geldt volgt hieruit de warmtevergelijking (6.8) of (6.9)

De integraalvergelijking (6.11) is eigenlijk iets algemener omdat deze ook discontinuïteiten en deltafuncties in de integraal toelaat, b.v.  $A = \delta(x_1 - a_1) \delta(x_2 - a_2) \delta(x_3 - a_3)$ .

---

Mathematische problemen uit de warmtegeleidingstheorie.

door

Dr H.A.Lauwerier

18 November 1954.

I.7. Diffusie

Het verschijnsel van diffusie kan op analoge wijze beschreven worden als de warmteoverdracht. Bij diffusie heeft men materieoverdracht en worden verschillen in concentratie uitgewist. Bij diffusie beschouwt men meestal een gasvormig of vloeibaar medium waarin een bepaalde stof zich bevindt b.v. rook in lucht, kleurstof in water. We beschouwen voorlopig het eenvoudige geval van een stilstaand medium waarin zich een enkelvoudige stof bevindt. De toestand kan beschreven worden met een concentratie gemeten b.v. als massa per volume-eenheid of aantal moleculen per volume-eenheid. We zullen praktisch blijven en de concentratie  $c$  in  $\text{kg/m}^3$  uitdrukken.

Tengevolge van concentratieverschillen treedt een materie-transport op, dat analoog aan de warmtestroomdichtheid (6.2) beschreven kan worden met de vector van de materiestroomdichtheid

$$Q_i = -D_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_j} \quad (7.1)$$

waarbij  $D_{ij}$  de diffusietensor is.

Meestal is de diffusietensor isotroop en heeft men slechts te maken met een enkele diffusiecoëfficiënt  $D$  en dan is dus

$$Q_i = -D \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (7.2)$$

De hoeveelheid materie welke in  $dt$  sec. een oppervlakte-elementje  $d\sigma$  passeert wordt (zie 6.3) uitgedrukt als

$$n_i Q_i d\sigma dt \quad (7.3)$$

De dimensie van  $D$  is blijkbaar opp/tijd.

Ook hier geldt weer de continuïteitsvergelijking (zie 6.7)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} Q_i \quad (7.4)$$

en verkrijgt men door substitutie van (7.2) de diffusievergelijking

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \quad (7.5)$$

of

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c \quad (7.6)$$

indien D niet van de plaats afhangt. Voor zeer verdunde oplossingen is D onafhankelijk van de concentratie en geldt (7.6).

### I.8. Poreuze media.

We beschouwen hierin de stroming van een compressibele vloeistof in een poreus medium b.v. olie in een laag zandsteen. De stuwende kracht welke de vloeistof doet stromen is de druk p welke de dimensie kracht/opp of  $[ml^{-1}t^{-2}]$  heeft. Analoog aan (6.2) en (7.1) is de vector van de vloeistofstroomdichtheid

$$v_i = - \lambda_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad (8.1)$$

waarbij  $\lambda_{ij}$  de permeabiliteitstensor heet. Meestal is  $\lambda_{ij}$  isotroop en dan schrijft men gewoonlijk na afsplitsing van de viscositeitsconstante  $\mu$ , dimensie  $[ml^{-1}t^{-1}]$

$$v_i = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (8.2)$$

waarbij  $k$  de permeabiliteit heet, dimensie  $[l^2]$ .

De vergelijking (8.1) of (8.2) staat bekend als de wet van Darcy (H. Darcy, Les fontaines publiques de Dijon, 1856). Men kan aan het rechterlid van (8.2) nog een uitwendige kracht toevoegen, b.v.

$$v_i = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (8.3)$$

$$\Phi = \frac{k}{\mu} (p+V)$$

waarin  $V$  de potentiaal van de uitwendige kracht is. Bij in rekening brengen van de zwaartekracht is b.v.  $V = -\rho g z$ , waarbij de notatie wel voor zichzelf spreekt.

De hoeveelheid vloeistof welke in dt sec. door een oppervlakte-element  $d\sigma$  stroomt is gelijk aan  $v_i n_i d\sigma$ . Dit is dus een volume. In massa uitgedrukt moet nog met de dichtheid  $\rho$  vermenigvuldigd worden.

De onvernietigbaarheid van de massa komt weer tot uitdrukking in de continuïteitsvergelijking

$$\epsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho v_i = 0 \quad (8.4)$$

Hierbij stelt  $\epsilon$  de porositeit van het medium voor d.w.z. het voor vloeistof beschikbare vrije volume als fractie van het totale

volume.

Uit (8.3) en (8.4) kan nog geen bruikbare vergelijking afgeleid worden omdat er twee afhankelijke variabelen  $p$  en  $\rho$  optreden. Als ontbrekende relatie heeft men echter nog de toestandsvergelijking

$$\rho = \rho_0 \exp c(p-p_0) \quad (8.5)$$

welke voor een compressibele vloeistof geldt. Zonder moeite vindt men nu,  $V$  verwaarlozende,

$$\Delta \rho = \frac{c \epsilon \mu}{k} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (8.6)$$

dus weer het type van de warmtevergelijking.

### I.9. Andere coördinaten.

In Cartesiaanse coördinaten is de warmtevergelijking

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T \quad (9.1)$$

met

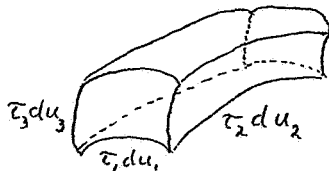
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (9.2)$$

In een ander coördinaten stelsel  $x_1, x_2, x_3 \rightarrow u_1, u_2, u_3$  vinden we een ingewikkelder vorm welke of met behulp van de transformatieformules afgeleid kan worden of door een rechtstreekse "fysische" beschouwing gevonden kan worden.

We kiezen het eenvoudige geval dat het nieuwe coördinatenstelsel weer orthogonaal is. Het lijnelement is dan

$$ds^2 = \tau_1^2 du_1^2 + \tau_2^2 du_2^2 + \tau_3^2 du_3^2$$

waarbij  $\tau_i$  een functie van  $(u_1, u_2, u_3)$  is. Beschouw nu een volumeelement gevormd door vlakken  $u_i = \text{constant}$



dan geeft toepassing van de warmtebalans meteen

$$\tau_1 \tau_2 \tau_3 \frac{\partial T}{\partial t} = \sum \frac{\partial}{\partial u_i} \left\{ \frac{\tau_2 \tau_3}{\tau_i} \frac{\partial T}{\partial u_i} \right\} \quad (9.3)$$

zodat dus

$$\Delta = \frac{1}{\tau_1 \tau_2 \tau_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{\tau_2 \tau_3}{\tau_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{\tau_3 \tau_1}{\tau_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \right) \right\} \quad (9.4)$$

a. Cylindercoördinaten  $x = r \cos \varphi$   
 $y = r \sin \varphi$   
 $z = z$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

b. Bolcoördinaten  $x = r \cos \varphi \sin \theta$   
 $y = r \sin \varphi \sin \theta$   
 $z = r \cos \theta$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

I.10. Een diffusieprobleem.

We denken ons het volgende experiment uitgevoerd. Twee even grote reageerbuisjes zijn gevuld resp. met schoon water en water waarin een kleurstof is opgelost. Nu worden ze verticaal op elkaar geplaatst zodanig dat de vloeistofspiegels aan elkaar grenzen. Gemakshalve hebben we even een impermeabel wandje aangebracht tussen de beide vloeistoffen. We trekken dit nu voorzichtig weg en dan begint een diffusieproces waarbij de scherpe scheiding tussen de vloeistoffen vervaagt.

Met enige voor de hand liggende vereenvoudigingen kunnen we het volgende mathematische model opstellen

$$\left\{ \begin{array}{l} D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t} \quad -\infty < x < +\infty \\ c = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c_0 & x > 0 \end{cases} \quad t = 0 \\ c \rightarrow 0 \quad x \rightarrow -\infty \\ c \rightarrow c_0 \quad x \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (10.1)$$

Dit is een bijzonder geval van het in I.4. behandelde probleem.

Volgens (4.18) is de oplossing

$$c = c_0 \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi \quad (10.2)$$

of, indien we de errorfunctie invoeren volgens

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (10.3)$$

$$c = \frac{c_0}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \quad (10.4)$$

De errorfunctie komt veel voor bij problemen uit de warmtegeleiding enz. en daarom vermelden wij nog enige belangrijke eigenschappen van deze functie.

Duidelijk is  $\operatorname{erf} \infty = 1$

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf} x$$

Vaak schrijft men het complement  $1 - \operatorname{erf} x$  als  $\operatorname{erfc} x$ , dus

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \quad (10.5)$$

De errorfunctie kan worden ontwikkeld in een machtreeks

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1) n!} \quad (10.6)$$

of voor grote  $x$  in een asymptotische reeks

$$\operatorname{erfc} x = \sqrt{\pi} e^{-x^2} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!} x^{-2n-1} \quad (10.7)$$

### I.11. Een cilindrisch probleem.

Beschouw een oneindig lange cilinder en laat de begintemperatuur op  $t = 0$  gegeven zijn door  $T = f(r)$ . Het oppervlak houden we op constante temperatuur die we als nul-temperatuur kunnen kiezen. De vergelijkingen zijn

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial t} & 0 < r < a \\ T = 0 & r = a \\ T = f(r) & t = 0. \end{cases} \quad (11.1)$$

Stellen we

$$T = e^{-\lambda^2 t} v$$

waarbij  $v$  een functie van alleen  $r$  is, dan voldoet  $v$  aan

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + \lambda^2 v = 0 \quad (11.2)$$

De z.g. vergelijking van Bessel

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + v = 0 \quad (11.3)$$

heeft de fundamentele oplossingen

$$\begin{array}{ll} J_0(r) & \text{met} \quad J_0(r) \rightarrow 1 \quad r \rightarrow 0 \\ Y_0(r) & \text{met} \quad Y_0(r) \sim \frac{2}{\pi} \left\{ \ln \frac{r}{2} + \gamma \right\} \quad r \rightarrow 0. \end{array}$$

Gemakkelijk leidt men af

$$J_0(r) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!n!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \quad (11.4)$$

De oplossing van (11.2) is dus  $A J_0(\lambda r) + B Y_0(\lambda r)$ .  
Voor  $r \rightarrow 0$  moet  $T$  en dus  $v$  eindig blijven en volgt  $B = 0$ . (de ontbrekende randvoorwaarde!).

De gewenste oplossing van (11.1) moet dus opgebouwd worden als een lineaire combinatie van oplossingen

$$e^{-\lambda^2 t} J_0(\lambda r) \quad (11.5)$$

De randvoorwaarde bij  $r = a$  geeft de eigenwaarden

$$J_0(\lambda_k a) = 0. \quad (11.6)$$

Gemakkelijk is in te zien dat de eigenwaarden reëel zijn.

Wij bewijzen n.l.

$$\int_0^a J_0(\lambda r) J_0(\mu r) r dr = \begin{cases} 0 & \lambda \neq \mu \\ \frac{a^2}{2} J_0'^2(\lambda a) & \lambda = \mu. \end{cases} \quad (11.7)$$

mits  $J_0(\lambda a) = J_0(\mu a) = 0$ .

We bewijzen dit als volgt. Schrijf even  $v = J_0(\lambda r), w = J_0(\mu r)$ .

Volgens (11.3) is

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = -\lambda^2 r v; \quad \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = -\mu^2 r w$$

dus

$$v \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) - w \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = (\lambda^2 - \mu^2) r v w$$

Voor  $\lambda \neq \mu$  volgt dan (11.7). Als  $\lambda = \mu$  laten we  $\mu \rightarrow \lambda$  maar met loslating van de conditie  $J_0(\mu a) = 0$ . We vinden dan

$$\int_0^a r v^2 dr = - \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\lambda a J_0(\mu a) J_0'(\lambda a)}{\lambda^2 - \mu^2} = \frac{a^2}{2} J_0'^2(\lambda a)$$

Indien  $\lambda_k$  een complexe eigenwaarde is, is ook  $\lambda_k^*$  er een. De integrand in (11.7) is dan positief terwijl de integraal = 0 is. Dit leidt dus tot een tegenspraak.

We trachten nu de oplossing van (11.1) te vinden in de vorm van een reeks



$$T = \sum_0^{\infty} a_k e^{-\lambda_k^2 t} J_0(\lambda_k r) \quad (11.8)$$

Indien deze voorstelling mogelijk is kunnen we de coëfficiënten evenals bij de Fourier reeks op de volgende wijze vinden:

$$t \rightarrow 0 \quad f(r) = \sum a_k J_0(\lambda_k r) \quad (11.9)$$

$$a_k = \left\{ \int_0^a J_0(\lambda_k r) f(r) r dr \right\} : \left\{ \int_0^a J_0(\lambda_k r) J_0(\lambda_k r) r dr \right\} \quad (11.10)$$

dus volgens (11.7)

$$a_k = \frac{2}{a^2 J_0'(\lambda_k a)} \int_0^a J_0(\lambda_k r) f(r) r dr. \quad (11.11)$$

Mathematische problemen uit de warmtegeleidingstheorie.

door

Dr H.A. Lauwerier

2 December 1954.

II 1. De Laplace transformatie

Onder de Laplace getransformeerde van  $F(t)$  verstaan we de functie  $f(s)$  gedefinieerd door

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (1.1)$$

We beschouwen slechts die functies  $F(t)$  die aan de volgende eisen voldoen

1.  $F(t)$  R-integreerbaar in  $(0, \infty)$

2.  $\int_0^T |F(t)| dt < \infty$  voor elke  $T$ .

3.  $\int_T^{\infty} e^{-s_0 t} F(t) dt$  bestaat voor een zekere  $s_0$  en voor elke  $T$ .

Eenvoudige eigenschappen van L-transforms zijn

Stelling 1. Bestaat  $L\{F(t)\}$  voor  $s = s_0$  dan ook voor  $s$  met  $\text{Re } s > \text{Re } s_0$ .

Stelling 2. Bestaat  $L\{F(t)\}$  voor  $s = s_0$  dan is  $f(s)$  in het gebied  $\text{Re } s > \text{Re } s_0$  een reguliere analytische functie.

Er is dus een halfvlak  $\text{Re } s > \alpha$  waarin  $f(s)$  bestaat en een reguliere analytische functie is;  $\alpha$  heet de convergentie abscis.

Rekenregels

$$f(s) \doteq F(t)$$

$$\frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \doteq F(at)$$

$$sf(s) - F(0) \doteq D F(t)$$

$$s^2 f(s) - sF(0) - F'(0) \doteq D^2 F(t)$$

$$\frac{f(s)}{s} \doteq \int_0^t F(\tau) d\tau$$

$$-Df(s) \doteq tF(t)$$

$$\int_s^{\infty} f(\sigma) d\sigma \doteq \frac{1}{t} F(t)$$

$$f(s-a) \doteq e^{at} F(t)$$

$$e^{-as} f(s) \doteq U(t-a) F(t-a)$$

Voorbeelden.

$$\frac{1}{s} \doteq 1$$

$$\frac{k!}{s^{k+1}} \doteq t^k$$

$$\frac{1}{s-a} \doteq e^{at}$$

$$\frac{e^{-as}}{s} \doteq U(t-a)$$

$$\frac{s}{s^2+a^2} \doteq \cos at$$

$$\frac{a}{s^2+a^2} \doteq \sin at$$

$$\frac{-\gamma - \ln s}{s} \doteq \ln t$$

Convolutieregel

Als  $f_1(s) \doteq F_1(t)$  en  $f_2(s) \doteq F_2(t)$  dan is in het gemeenschappelijke convergentiehalflak

$$f_1(s)f_2(s) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau \quad (1.2)$$

Het rechterlid van (1.2) heet de convolutie van  $F_1$  en  $F_2$  en wordt soms als  $F_1 * F_2$  geschreven.

De belangrijke eigenschap van de Laplace transforms is de omkeerstelling welke eenvoudig uit het omkeertheorema van de Fowier integralen afgeleid kan worden.

Omkeerregel.

Convergeert  $L\{F(t)\}$  absoluut voor  $s > \beta$  en is  $F(t)$  van beperkte variatie, dan is

$$\frac{F(t+0)+F(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} e^{st} f(s) ds \quad (1.3)$$

waarbij de integratieweg een verticaal  $p = \operatorname{Re} s > \beta$  is.

Uit de omkeerregel kunnen we een interessante eigenschap afleiden n.l.

$$\frac{f(s^{\frac{1}{2}})}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-u^2/4t} F(u) du. \quad (1.4)$$

De (formele) afleiding is a.v.

$$\begin{aligned} \frac{f(s^{\frac{1}{2}})}{s^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} e^{st} \frac{f(s^{\frac{1}{2}})}{s^{\frac{1}{2}}} ds = \frac{1}{\pi i} \int_{L_2} e^{s^2 t} f(s) ds = \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{L_2} e^{s^2 t} \int_0^\infty e^{-su} F(u) du ds = \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty F(u) du \int_{L_2} e^{s^2 t - su} ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-u^2/4t} F(u) du. \end{aligned}$$

De delta functie.

De delta functie  $\delta(t)$  voldoet aan de selectieregel

$$\int_a^b f(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = f(t) \quad a < t < b \quad (1.5)$$

De Laplace transform is derhalve de eenheid

$$1 \doteq \delta(t) \quad (1.6)$$

De convolutieregel is hiermede in overeenstemming.

Substitutie van  $F(t) = f(t-a)$  en  $f(s) = e^{-as}$  in (1.4) geeft

$$\frac{e^{-as^{\frac{1}{2}}}}{s^{\frac{1}{2}}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}} \quad (1.7)$$

Substitutie van  $F(t) = U(t-a)$  en  $f(s) = \frac{1}{s} e^{-as}$  geeft

$$\frac{e^{-as^{\frac{1}{2}}}}{s} \doteq \operatorname{erfc} \frac{a}{2\sqrt{t}} \quad (1.8)$$

Toepassing op een lineair warmtegeleidingsprobleem.

Beschouw het gebied  $x > 0$  met

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.9)$$

en aan de rand  $T = F(t)$  (1.10)

De begintemperatuur zij  $= 0$ .

Pas nu op de temperatuur de Laplace transformatie toe

$$v = \int_0^\infty e^{-st} T(x,t) dt$$

De L. transform  $v$  voldoet blijkbaar aan

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - sv = 0 \quad x > 0$$

$$v = f(s) \equiv L \{ F(t) \}$$

De oplossing is

$$v = f(s) e^{-s^{\frac{1}{2}} x}.$$

a.  $F(t)$  is een constante  $T_0$ . Dan is  $f(s) = \frac{1}{s} T_0$  en de oplossing is volgens (1.8)

$$T = T_0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{t}}.$$

b.  $F(t)$  willekeurig. Volgens de convolutieregel is wegens

$$f(s) \doteq F(t) \quad \text{en} \quad e^{-s^{\frac{1}{2}} x} \doteq \frac{x}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-x^2/4t}$$

de oplossing

$$T = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t F(\tau) \frac{e^{-x^2/4(t-\tau)}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau.$$

#### Een eigenwaarden probleem.

We beschouwen nog eens het probleem van een eindig gebied  $0 < x < a$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.11)$$

$$\begin{array}{ll} \text{met de randvoorwaarden} & x = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ & x = a \quad T = T_0 \\ \text{en de beginconditie} & t = 0 \quad T = 0. \end{array} \quad (1.12)$$

Laplace transformatie geeft

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - sv = 0 \quad 0 < x < a$$

met

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dv}{dx} = 0 & x = 0 \\ v = T_0/s & x = a. \end{array} \right.$$

$$\text{De oplossing is} \quad v = T_0 \frac{\operatorname{Ch}xs^{\frac{1}{2}}}{s\operatorname{Ch}as^{\frac{1}{2}}} \quad (1.13)$$

Volgens de omkeerregel is

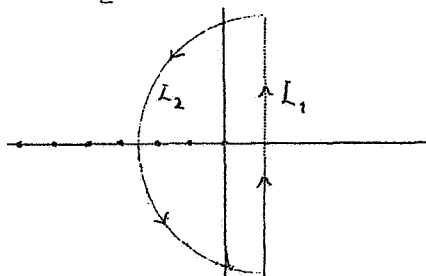
$$T = T_0 \frac{1}{2\pi i} \int e^{st} \frac{\operatorname{Ch}xs^{\frac{1}{2}}}{s\operatorname{Ch}as^{\frac{1}{2}}} \quad (1.14)$$

waarbij de weg een verticaal rechts van de imaginaire as is.

De integraal is een analytische functie met polen in

$$s = 0 \quad \text{en} \quad s = -\frac{(k+\frac{1}{2})^2 \pi^2}{a^2} \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

Beschouw nu de contour  $L_1+L_2$  uit de nevenstaande figuur.  $L_1$  is een rechte en  $L_2$  een aansluitende halve cirkel met straal  $R$ .



De cirkel is zodanig gekozen dat de reële as juist tussen twee polen in wordt gesneden. Beschouw nu (1.14) met deze contour. De bijdrage van de cirkelboog nadert voor  $R \rightarrow \infty$  tot nul. We hebben dus slechts te maken met de bijdrage van  $L_1$  voor  $R \rightarrow \infty$ . Anderzijds is de integraal over  $L_1+L_2$  juist gelijk aan de som van de residuen van de ingesloten polen. Hieruit volgt dus

$$T/T_0 = \text{Res}(s=0) + \sum_0^{\infty} \text{Res} \left\{ s = - \frac{(k+\frac{1}{2})^2 \pi^2}{a^2} \right\} \quad (1.15)$$

of

$$T/T_0 = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos \frac{(2k+1) \pi x}{2a} \exp - \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{4a^2}$$

Voor  $t \rightarrow 0$  is (1.15) slecht convergent. We kunnen op de volgende wijze een goed convergente ontwikkeling afleiden. Daar toe gaan we weer uit van de Laplace transform (1.13). Het principe is dat een ontwikkeling voor kleine  $t$  correspondeert met een voor grote  $s$ .

$$\text{Aldus is} \quad V/T_0 = \frac{e^{xs^{\frac{1}{2}}} + e^{-xs^{\frac{1}{2}}}}{s e^{as^{\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{1}{1+e^{-2as^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \frac{1}{s} \left\{ e^{(x-a)s^{\frac{1}{2}}} + e^{-(x+a)s^{\frac{1}{2}}} \right\} \sum_0^{\infty} (-1)^n e^{-2ans^{\frac{1}{2}}}$$

dus

$$v = \frac{T_0}{s} \sum_0^{\infty} (-1)^n \exp -s^{\frac{1}{2}} \left\{ (2n+1)a-x \right\} + \frac{T_0}{s} \sum_0^{\infty} (-1)^n \exp -s^{\frac{1}{2}} \left\{ (2n+1)a+x \right\}.$$

Term voor term transformerend vinden we aldus i.v.m (1.8)

$$T/T_0 = \sum_0^{\infty} (-1)^n \text{erfc} \frac{(2n+1)a-x}{2\sqrt{t}} + \sum_0^{\infty} (-1)^n \text{erfc} \frac{(2n+1)a+x}{2\sqrt{t}} \quad (1.16)$$

Voor  $x=0$ ;  $\frac{t}{a^2} = 1$  is b.v.

$$T=2T_0 \left\{ \text{erfc} \frac{1}{2} - \text{erfc} \frac{3}{2} + \text{erfc} \frac{5}{2} - \dots \right\} = 2T_0 \{ 0.4795 - 0.0339 + 0.0004 - \dots \}$$

en voor  $\frac{t}{a^2} < 1$  nog beter in tegenstelling tot (1.15).



$I_0(z)$  hangt met de vroeger behandelde Bessel functie  $J_0(z)$  als volgt samen

$$I_0(z) = J_0(zi).$$

De oplossing van 2-2 is

$$v = T_0 \frac{I_0(r\sqrt{s})}{s I_0(a\sqrt{s})} \quad 2-7$$

Het rechterlid van 2-7 is een eenwaardige analytische functie van  $s$  met enkelvoudige polen, bepaald door  $s I_0(a\sqrt{s}) = 0$ .

Is  $\alpha_n$  ( $\alpha_n > 0$ ) de  $n^e$  wortel van

$$J_0(a\alpha) = 0 \quad n=1,2,\dots$$

dan zijn de polen van  $v$

$$s = 0 \quad \text{en} \quad s = -\alpha_n^2 \quad n=1,2,\dots$$

De residuen zijn  $T_0$  en  $\frac{2T_0}{a} \frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_n J_0'(a\alpha_n)}$

Het origineel van  $v$  is dus

$$T = T_0 \left\{ 1 + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n^2 t} \frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_n J_0'(a\alpha_n)} \right\} \quad 2-8$$

De oplossing 2-8 is goed bruikbaar voor grote waarden van  $t$ , voor kleine waarden van  $t$  is de convergentie slecht.

Een goede ontwikkeling voor kleine  $t$  kan men verkrijgen door het rechterlid van 2-7 naar grote  $s$  te ontwikkelen. Hierbij moeten we nog onderscheid maken tussen een ontwikkeling waarbij  $r/a$  klein is, en dus  $r\sqrt{s}$  matig en waarbij  $r/a$  niet klein is.

In elk geval hebben we de asymptotische ontwikkeling van de Bessel-functie  $I_0(z)$  nodig. Deze volgt gemakkelijk uit de integraalvoorstelling 2-4.

De substitutie  $\cos t = 1 - 2u^2$  geeft

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} e^z \int_{-1}^1 e^{-2u^2 z} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

dus  $I_0(z) \sim \frac{1}{\pi} e^z \sum_0^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2u^2 z} u^{2n} du$

met  $c_n = (-1)^n \binom{-1/2}{n}$

De asymptotische ontwikkeling van  $I_0(z)$  is tenslotte

$$I_0(z) \sim \frac{e^z}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2) c_n}{(2z)^{n+1/2}}$$



of

$$I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 + \sum_1 \frac{1^2 3^2 \dots (2n-1)^2}{n! 2^{3n} z^n} \right\} \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left( 1 + \frac{1}{8z} + \dots \right).$$

2-9

Aldus vindt men in het geval van  $r/a$  niet klein

$$v \sim \frac{T_0 a^{\frac{1}{2}}}{s r^{\frac{1}{2}}} e^{-s^{\frac{1}{2}} (a-r)} \frac{1 + \frac{1}{8rs^{\frac{1}{2}}} \dots}{1 + \frac{1}{8as^{\frac{1}{2}}} \dots}$$

$$= \frac{T_0 a^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left\{ 1 + \frac{a-r}{8ars^{\frac{1}{2}}} \dots \right\} \frac{e^{-s^{\frac{1}{2}}(a-r)}}{s}.$$

2-10

Dit moet nu teruggetransformeerd worden. Vroeger (1-8) hebben we gevonden dat

$$\frac{e^{-as^{\frac{1}{2}}}}{s} \doteq \operatorname{erfc} \frac{a}{2\sqrt{t}}$$

Het origineel van  $\frac{e^{-as^{\frac{1}{2}}}}{s^{\frac{3}{2}}}$  kan hieruit worden afgeleid met behulp van integratie naar  $a$ .

Echter is ook bekend (1-7) dat

$$\frac{e^{-as^{\frac{1}{2}}}}{s^{\frac{3}{2}}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$$

Algemeen volgt nu het origineel van  $\frac{e^{-as^{\frac{1}{2}}}}{s^{\lambda+\frac{1}{2}}}$  uit de convolutieregel toegepast op de genoemde transform en  $\frac{1}{s^\lambda}$  waarvan het origineel

$$\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ is.}$$

$$\frac{e^{-as^{\frac{1}{2}}}}{s^{\frac{1}{2}+\lambda}} = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} e^{-\frac{a^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{\frac{1}{2}}} \quad 2-11$$

We schrijven alleen maar de eerste term van de uit 2-10 volgende reeksontwikkeling op.

Men heeft voor kleine  $t$  dus

$$T \sim \frac{T_0 a^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \operatorname{erfc} \frac{a-r}{2\sqrt{t}} \dots \quad 2-12$$

Voor  $r = 0$  gaat dit blijkbaar niet meer op. In dit geval moeten we ontwikkelen

$$v(0) = \frac{T_0}{s I_0(a\sqrt{s})}$$

We vinden

$$v(0) \sim T_0 \sqrt{2\pi a} \frac{e^{-as \cdot \frac{1}{2}}}{s^{\frac{3}{4}}} \left\{ 1 - \frac{1}{8as^{\frac{1}{2}}} \dots \right\}. \quad 2-13$$

De eerste term van de ontwikkeling in  $t$  is dus

$$T \sim \frac{T_0 \sqrt{2a}}{\Gamma(\frac{1}{4})} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{4}\tau} d\tau. \quad 2-14$$

Voor fijnproevers op het gebied van Bessel functies zij vermeld dat hiervoor het volgende kan worden geschreven

$$T \sim \frac{T_0 a}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{8t}} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2}{8t}\right).$$

Een soortgelijk probleem maar van geheel andere aard is de warmtegeleiding in het buitengebied van een cilinder.

Beschouw b.v.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial t} \\ T = T_0 \\ T = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} r > a \\ r = a \\ t = 0 \end{array} \quad 2-15$$

Hierbij hebben we de  $K_0(z)$  functie nodig. Uit 2.6 volgt evenals voor de  $I_0(z)$  de asymptotische voorstelling voor  $z$  positief reëel:

$$K_0(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)^2}{n! 2^{3n} z^n} \right\} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left( 1 - \frac{1}{8z} \dots \right). \quad 2-16$$

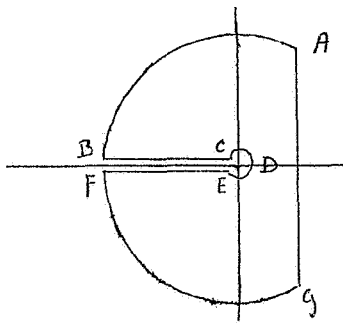
De oplossing van het Laplace-getransformeerde probleem is

$$v = T_0 \frac{K_0(r\sqrt{s})}{s K_0(a\sqrt{s})} \quad 2-17$$

Het is duidelijk dat hier alleen de  $K_0$  functie optreedt omdat  $v$  immers van  $r \rightarrow \infty$  naar nul moet gaan.

Het rechterlid van 2-17 is nu een meerwaardige analytische functie. Aangezien  $K_0(z)$  geen nulpunten bezit is er slechts de vertakkingsnede langs de negatieve reële  $as$ .

Gebruikmakend van het omkeertheoremema van de Laplace transform beschouwen we de weg als aangegeven in bijgaande figuur.



$$T = \frac{T_0}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{st} \frac{K_0(r\sqrt{s})}{sK_0(a\sqrt{s})} ds.$$

De bijdrage van het kleine cirkeltje CDE is  $2\pi i$  in de limiet. De bijdrage van de grote kwartcirkels AB en FG convergeert naar nul.

Op CB stellen we  $s = u^2 e^{\frac{\pi i}{2}}$ . De bijdrage is

$$2 \int_{\delta}^{\infty} e^{-u^2 t} \frac{K_0(rue^{\frac{1}{2}\pi i})}{K_0(aue^{\frac{1}{2}\pi i})} \frac{du}{u} = 2 \int_{\delta}^{\infty} e^{-u^2 t} \frac{J_0(ur) - iY_0(ur)}{J_0(ua) - iY_0(ua)} \frac{du}{u}$$

aangezien

$$K_0(ze^{\frac{\pi i}{2}}) = -\frac{1}{2}\pi i \{ J_0(z) - iY_0(z) \}.$$

Op FE stellen we evenzo  $s = u^2 e^{-\frac{\pi i}{2}}$  waarna minus de complex toegevoegde waarde wordt verkregen.

Tenslotte vinden we

$$T = T_0 \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u^2 t} \frac{J_0(ur) Y_0(ua) - Y_0(ur) J_0(ua)}{J_0^2(au) + Y_0^2(au)} \frac{du}{u} \right\} \quad 2-18$$

Voor kleine waarden van  $t$  ontwikkelen we weer 2-17 naar grote  $s$ . Met behulp van 2.16 is

$$\frac{v}{T_0} \sim \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-(r-a)s^{\frac{1}{2}}}}{s} \left\{ 1 + \frac{r-a}{8ars^{\frac{1}{2}}} \dots \right\} \quad 2-19$$

en dus

$$\frac{T}{T_0} \sim \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{erfc} \frac{r-a}{2\sqrt{t}} + \dots \quad 2-20$$

Voor grote waarden van  $t$  kunnen we ook 2-17. naar kleine  $s$  ontwikkelen

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_0} &= \frac{-\ln \frac{r\sqrt{s}}{2} - \gamma - \dots}{s \left( -\ln \frac{a\sqrt{s}}{2} - \gamma \dots \right)} \\ &= \frac{1}{s} \left\{ 1 - \frac{\ln \frac{r}{a}}{-\ln \sqrt{s} - \ln \frac{a}{2} - \gamma} \dots \right\} \end{aligned} \quad 2-21$$

Het origineel van  $\frac{-1}{s(\ln s + a)}$  is voor grote waarden van  $t$  gelijk aan  $\frac{1}{\ln t - a}$  zoals eenvoudig uit de complexe omkeerformule volgt.

Dus

$$\frac{T}{T_0} \sim 1 - \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln\left(\frac{2}{a}\sqrt{t}\right) - \gamma} \dots \dots \dots \quad 2-22$$

(Verg. Carslaw & Jaeger C.of H. §127).

Mathematische problemen uit de warmtegeleidingstheorie

door

Dr H.A. Lauwerier

17 Februari 1955

II 3. Bronnen, putten en de stelling van Green

We hebben vroeger reeds gezien dat de lineaire warmtevergelijking

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad 3-1$$

de oplossing

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2(\kappa \pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}}, \quad 3-2$$

bezit, welke de volgende eigenschap heeft

$$t \rightarrow 0 \quad \varphi \rightarrow 0 \quad \text{tenzij } x = \xi \quad 3-3$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi \, dx = 1.$$

Deze oplossing kan men interpreteren als de warmtegeleiding tengevolge van een momentane bron van de sterkte 1 op de plaats  $x = \xi$ . Dit wil zeggen, dat op  $t = 0$  een eenheid warmte aan het medium wordt toegevoegd op de plaats  $x = \xi$ .

In drie dimensies geeft een momentane warmtebron van de sterkte  $Q$  op de plaats  $(\xi, \eta, \zeta)$  de volgende oplossing

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{Q}{8(\kappa \pi t)^{3/2}} \exp - \left\{ \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4\kappa t} \right\}, \quad 3-4$$

waarbij

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz = Q. \quad 3-5$$

Is  $Q$  negatief dan spreken we van een warmteput. (Eng. source en sink).

Uit 3-4 kunnen soortgelijke oplossingen worden afgeleid. Indien b.v. op  $t = 0$  op een cilindrisch oppervlak met straal  $\rho$  warmte wordt toegevoegd b.v.  $\rho Q \, d\theta \, dz$  per oppervlakte element is de oplossing

$$\begin{aligned}
 & \rho Q \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, z, t) dz = \\
 & = \frac{\rho Q}{4\pi\kappa t} \int_0^{2\pi} e^{-\{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \theta\}/4\kappa t} \\
 & = \frac{Q'}{4\pi\kappa t} e^{-(r^2 + \rho^2)/4\kappa t} I_0\left(\frac{r\rho}{2\kappa t}\right) \quad 3-6
 \end{aligned}$$

waarbij  $Q' = 2\pi\rho Q$ .

Beschouwen we een continue bron in  $(\xi, \eta, \zeta)$  met de productie van  $\phi(t)dt$  warmte in  $dt$  dan is de bijbehorende oplossing

$$\frac{1}{8(\kappa\pi)^{3/2}} \int_0^t \phi(\tau) e^{-\frac{r^2}{4\kappa(t-\tau)}} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \quad 3-7$$

Is  $\phi(t)$  constant, dan vindt men

$$\frac{Q}{4\pi\kappa r} \operatorname{erfc} \frac{r}{\sqrt{4\kappa t}} \quad 3-8$$

Voor  $t \rightarrow \infty$  nadert dit tot de stationnaire oplossing  $\frac{Q}{4\pi\kappa r}$ .

De methode van spiegelen welke in de potentiaaltheorie een belangrijke rol speelt kan met veel succes ook op warmtegeleidingsproblemen worden toegepast.

Beschouw b.v. het volgende probleem

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad x > 0 \\ t = 0 \quad T = f(x) \\ x = 0 \quad T = 0 \end{array} \right. \quad 3-9$$

Plaats een bron  $f(\xi)d\xi$  op de plaats  $x = \xi$  en een put  $-f(\xi)d\xi$  op de plaats  $x = -\xi$ .

De fundamentele oplossing is

$$\frac{f(\xi)d\xi}{2\sqrt{\kappa\pi t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa t}} \right\}$$

Integratie over  $\xi$  levert de gevraagde oplossing

$$T = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^{\infty} f(\xi) \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\kappa t}} \right\} d\xi. \quad 3-10$$

Het volgende probleem is bijzonder interessant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \\ t = 0 \\ x = 0 \\ x = a \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 < x < a \\ T = f(x) \\ T = 0. \end{array} \quad 3-11$$

De oplossing kan onmiddellijk worden neergeschreven, n.l.

$$T = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int_0^a f(\xi) \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi-2na)^2}{4\kappa t}} - e^{-\frac{(x+\xi-2na)^2}{4\kappa t}} \right\} d\xi \quad 3-12$$

Vroeger hebben we evenwel een geheel andere uitdrukking gevonden n.l.

$$T = \frac{2}{a} \int_0^a f(\xi) \sum_1^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi \xi}{a} e^{-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{a^2}} d\xi \quad 3-13$$

We vinden dus een merkwaardige identiteit n.l.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} e^{-\frac{(x-\xi-2na)^2}{4\kappa t}} - \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+\xi-2na)^2}{4\kappa t}} &= \dots \\ &= \frac{4\sqrt{\pi\kappa t}}{a} \sum_1^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi \xi}{a} e^{-\frac{\kappa n^2 \pi^2 t}{a^2}}. \end{aligned} \quad 3-14$$

Deze identiteit is niet zo eenvoudig rechtstreeks te bewijzen. Het lukt b.v. met behulp van de theorie der thetafuncties en ook met residuekening.

We stellen nu algemeen het volgende probleem

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \\ t = 0 \\ \text{aan de rand} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} T = f(x, y, z) \\ T = \varphi(x, y, z, t). \end{array} \quad 3-15$$

Dit probleem kunnen we oplossen met behulp van een z.g. functie van Green. Deze functie  $G(P, P', t)$  stelt de warmteverdeling in  $P(x, y, z)$  ten tijde  $t$  voor tengevolge van een momentane bron bij  $P'(x', y', z')$  ter sterkte 1, wanneer het oppervlak  $S$  hierbij op temperatuur 0 gehouden wordt.

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \Delta G = \frac{\partial G}{\partial t} \\ \text{aan } S \quad G = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\text{vol.}} G(P, P', t) \psi(P, t) dV_p = \psi(P', 0) \text{ voor elke } \psi. \end{array} \right. \quad 3-16$$

Men heeft nu

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ T(P, \tau) G(P, P', t - \tau) \right\} = \kappa \left\{ G \Delta T - T \Delta G \right\},$$

en na integratie

$$\int_0^{t-\epsilon} \left[ \int_{\text{vol.}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ T(P, \tau) G(P, P', t - \tau) \right\} dV_p \right] d\tau = \kappa \int_0^{t-\epsilon} d\tau \int_{\text{vol.}} (G \Delta T - T \Delta G) dV_p.$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} & \int T(P, t - \epsilon) G(P, P', \epsilon) dV_p - \int T(P, 0) G(P, P', t) dV_p = \\ & = \kappa \int_0^{t-\epsilon} d\tau \int_{\text{opp}} (G \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial G}{\partial n}) dS_p = -\kappa \int_0^{t-\epsilon} d\tau \int_{\text{opp}} T \frac{\partial G}{\partial n} dS_p \end{aligned}$$

waarbij  $\frac{\partial}{\partial n}$  differentiatie volgens de naar buiten gerichte normaal is en tenslotte voor  $\epsilon \rightarrow 0$

$$T(P', t) = \int f(P) G(P, P', t) dV_p - \kappa \int_0^t d\tau \int_{\text{opp}} \varphi(P, \tau) \frac{\partial G(P, P', t - \tau)}{\partial n} dS_p. \quad 3-17$$

Aldus kunnen we  $T$  rechtstreeks in  $G$  uitdrukken.

Toepassing

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad x > 0 \\ x = 0 \quad T = \phi(t) \\ t = 0 \quad T = f(x). \end{array} \right. \quad 3-18$$

De Greense functie is (zie 3.9)

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi t}} \left\{ e^{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa t}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4\kappa t}} \right\},$$



dus is

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi t}} \int_0^{\infty} f(x') \left\{ e^{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa t}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4\kappa t}} \right\} dx' + \frac{x}{2\sqrt{\kappa\pi}} \int_0^t \phi(\tau) \frac{e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau. \quad 3-19$$

Indien we uitgaan van een probleem als 3-15 maar met een stralingsvoorwaarde aan de rand

$$\frac{\partial T}{\partial n} + h(T - T_0) = 0 \quad 3-20$$

kunnen we eveneens van een functie van Green gebruik maken. De functie  $G$  voldoet dan bij de rand aan

$$\frac{\partial G}{\partial n} = hG. \quad 3-21$$

Zoals we gezien hebben lukt het soms de functie van Green met behulp van "spiegelen" te vinden. In moeilijker gevallen moeten we van de Laplace transformatie gebruik maken.

Beschouw bijvoorbeeld het volgende probleem

$$\begin{cases} \kappa \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \right\} = \frac{\partial G}{\partial t} & r \leq a \\ G = 0 & r = a \end{cases}$$

Stel nu i.v.m. 3-6

$$G = \frac{1}{4\pi\kappa t} e^{-\frac{r^2+r'^2}{4\kappa t}} I_0\left(\frac{rr'}{2\kappa t}\right) + w$$

waarbij voor  $t = 0$   $w = 0$ . Uit de tabellen van de Laplace transformatie volgt

$$\bar{G} = \bar{u} + \bar{w} \quad \text{met} \quad \bar{u} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\kappa} I_0(qr') K_0(qr) & r > r' \\ \frac{1}{2\pi\kappa} I_0(qr) K_0(qr') & r < r' \end{cases}$$

waarbij  $q = \sqrt{p/\kappa}$ .

De functie  $\bar{w}$  voldoet aan

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{w}}{dr} - q^2 \bar{w} = 0$$

Uit de randvoorwaarde  $\bar{G} = 0$  bij  $r = a$  volgt voor  $\bar{w}$

$$\bar{w} = A I_0(qr)$$

$$A I_0(qa) + \frac{1}{2\pi\kappa} I_0(qr') K_0(qa) = 0$$

zodat

$$\bar{G} = \frac{I_0(qr')}{2\pi\kappa I_0(qa)} \left\{ I_0(qa) K_0(qr) - I_0(qr) K_0(qa) \right\} \quad r > r'$$

Terugtransformatie geeft volgens de residuen bij de nulpunten  $\pm \alpha_n$  van  $J_0(a\alpha)$

$$G = \frac{1}{\pi a^2} \sum_1^{\infty} \frac{J_0(r\alpha_n) J_0(r'\alpha_n)}{J_1^2(a\alpha_n)} e^{-\kappa\alpha_n^2 t}.$$


---

Mathematische problemen uit de warmtegeleidingstheorie.

door

Dr H.A. Lauwerier

3 Maart 1955.

II 4. Brownse beweging.

Een deeltje voert bewegingen over een rechte uit in de vorm van stapjes van gelijke lengte hetzij voorwaarts hetzij achterwaarts, met gelijke waarschijnlijkheid  $\frac{1}{2}$ .

Indien het deeltje start in de oorsprong 0 en elk stapje de lengte van de eenheid heeft kan na N stappen het deeltje zich bevinden in een der punten

-N -N+1 ..... -1 0 1 ..... N-1 en N.

We vragen nu naar de waarschijnlijkheid  $W(k,N)$  dat het deeltje zich na N stappen in het punt k bevindt.

Een eenvoudige redenering laat zien dat  $W(k,N)$  gelijk is aan de coëfficiënt van  $t^k$  in

$$\phi(t) = \left\{ \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \right\}^N, \quad (4.1)$$

dus

$$W(k,N) = \frac{N!}{\left(\frac{N+k}{2}\right)! \left(\frac{N-k}{2}\right)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N, \quad (4.2)$$

mits k en N van dezelfde pariteit zijn. Is van k en N één even en de ander oneven dan is natuurlijk  $W(k,N) = 0$ .

De waarschijnlijkheidsverdeling (4.2) is symmetrisch t.o.v. de oorsprong. De variantie is

$$\overline{k^2} = \sum_{-N}^{+N} k^2 W(k,N).$$

Met behulp van de voortbrengende functie (4.1) vinden we

$\sum_{-N}^{+N} k^2 W(k,N) = \left\{ \frac{d}{dt} \left( t \frac{d}{dt} \right) \phi(t) \right\}_{t=1} = N$ , dus is de spreiding of de r.m.s. verplaatsing (= root mean square)

$$\sqrt{\overline{k^2}} = \sqrt{N}. \quad (4.3)$$

Voor zeer grote N en matige k kunnen we (4.2) asymptotisch benaderen met behulp van de formule van Stirling

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \frac{1}{2} \log 2\pi + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4.4)$$

Voor  $N \rightarrow \infty$   $k \ll N$  is dan

$$\log W(k, N) \sim (N + \frac{1}{2}) \log N - \frac{1}{2}(N+k+1) \log \left( \frac{N}{2} \left( 1 + \frac{k}{N} \right) \right) - \frac{1}{2}(N-k+1) \log \left( \frac{N}{2} \left( 1 - \frac{k}{N} \right) \right) - \frac{1}{2} \log 2\pi - N \log 2$$

$$\sim (N + \frac{1}{2}) \log N - \frac{1}{2} \log 2\pi - N \log 2 - \frac{1}{2}(N+k+1) \left\{ \log \frac{N}{2} + \frac{k}{N} - \frac{k^2}{2N^2} \dots \right\} -$$

$$- \frac{1}{2}(N-k+1) \left\{ \log \frac{N}{2} - \frac{k}{N} - \frac{k^2}{2N^2} \dots \right\}$$

$$\sim -\frac{1}{2} \log N + \log 2 - \frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{k^2}{2N},$$

zodat dus asymptotisch

$$W(k, N) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} e^{-\frac{k^2}{2N}}. \quad (4.5)$$

Indien het deeltje stapjes ter lengte  $\ell$  uitvoert is de waarschijnlijkheid  $W(x) \Delta x$  dat het zich na  $N$  verplaatsingen in het interval  $(x, x + \Delta x)$  bevindt gelijk aan

$$W(x) \Delta x = W(k, N) \frac{\Delta x}{2\ell},$$

waarbij  $x = k\ell$ . Dus

$$W(x) = \frac{1}{(2\pi N \ell^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2N \ell^2}}.$$

Voert het deeltje  $n$  elementaire verplaatsingen per tijdseenheid uit dan is de waarschijnlijkheid  $W(x, t) \Delta x$  dat het zich op tijd  $t$  in het interval  $(x, x + \Delta x)$  bevindt gelijk aan

$$W(x, t) \Delta x = \frac{1}{2 \sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \Delta x, \quad (4.6)$$

waarbij

$$D = \frac{1}{2} n \ell^2. \quad (4.7)$$

Analoog aan (4.3) is de gemiddelde weglengte (r.m.s.weg)

$$\sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{Dt}. \quad (4.8)$$

Formule (4.6) stelt de oplossing voor van een diffusieprobleem

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t},$$

waarbij op  $t = 0$  een eenheid materie als puntbron in de oorsprong aanwezig is.

Het blijkt dus m.a.w. dat het discrete probleem van de toevallige verplaatsingen asymptotisch aequivalent is aan een diffusieprobleem met een diffusiecoëfficiënt welke gelijk is aan het gemiddelde van het kwadraat van de totale verplaatsing in de tijdseenheid.

De moleculaire diffusie is feitelijk een gevolg van de toevallige bewegingen, Brownse beweging, welke de moleculen uitvoeren. Het boven beschreven beeld van een lineaire Brownse beweging met elementaire verplaatsingen van constante lengte blijkt inderdaad een diffusieprobleem op te leveren, maar anderzijds is het toch een te vergaande idealisatie van de physische Brownse beweging waarbij de elementaire verplaatsingen zowel naar richting als naar lengte toevallig zijn in die zin althans dat de elementaire verplaatsingen zelf weer aan een statistische verdelingswet voldoen.

Het in de aanvang beschouwde probleem gaan we daarom aanzienlijk generaliseren. We beschouwen een deeltje dat in de ruimte vectoriële verplaatsingen  $\vec{r}(x,y,z)$  uitvoert. De verplaatsingen zelf volgen een waarschijnlijkheidsverdeling. De kans op een verplaatsing  $\vec{r}$  met  $\vec{r}_0 < \vec{r} < \vec{r}_0 + d\vec{r}$  is  $\tau dx dy dz$  met

$$\tau dx dy dz = \frac{1}{(2/3 \pi \ell^2)^{3/2}} \exp - \frac{3\vec{r}_0^2}{2\ell^2} dx dy dz. \quad (4.9)$$

De kans dat de absolute waarde  $r$  van de verplaatsing in het interval  $r_0 < r < r_0 + dr$  ligt is dus

$$\sigma dr = \iiint \tau dx dy dz,$$

waarbij het integratiegebied bepaald is door

$$r_0 < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < r_0 + dr.$$

Zonder moeite vinden we

$$\sigma dr = \frac{4 r^2}{(2/3 \pi \ell^2)^{3/2}} \exp - \frac{3r_0^2}{2\ell^2} r. \quad (4.10)$$

De r.m.s. verplaatsing in absolute waarde is  $\ell$  (middelbare weglengte). De r.m.s. verplaatsing in een bepaalde richting is  $\ell/\sqrt{3}$ . We laten nu een deeltje vanuit de oorsprong een z.g. random walk van  $N$  stappen uitvoeren en we vragen weer naar de kans  $W_N dx dy dz$  dat de resulterende totale verplaatsing in het inter-

val  $\vec{r}_0 < \vec{r} < \vec{r}_0 + d\vec{r}$  ligt.  
Men heeft daarvoor

$$W_N(\vec{r}_0) dx dy dz = \int \dots \int \prod_1^N \tau(r_j) dx_j dy_j dz_j, \quad (4.11)$$

waarbij de 3N-voudige integratie uitgestrekt wordt over het gebied bepaald door

$$\begin{aligned} \left| \sum_1^N x_j - x_0 \right| &< \frac{1}{2} dx \\ \left| \sum_1^N y_j - y_0 \right| &< \frac{1}{2} dy \\ \left| \sum_1^N z_j - z_0 \right| &< \frac{1}{2} dz \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dit ziet er zo nogal onhandelbaar uit. Echter maken we nu gebruik van een kunstgreep. De discontinue integraal van Dirichlet

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma t} \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \begin{cases} 1 & |\gamma| < |\alpha| \\ 0 & |\gamma| > |\alpha| \end{cases}$$

kunnen we zodanig in (4.11) invoeren dat de eindige integratiegrenzen (4.12) wegvallen en het integratiegebied zich naar het oneindige mag uitstrekken.

Stel daartoe  $\alpha_x = \frac{1}{2} dx$   $\gamma_x = \sum_1^N x_j - x_0$  enz.  
en schrijf voor (4.11)

$$W_N(r_0) dx dy dz = \frac{1}{\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \left\{ \prod_1^N \tau(\vec{r}_j) dx_j dy_j dz_j \right\} \cdot \left\{ \prod \frac{\sin(\frac{1}{2} t_x dx)}{t_x} \right\} e^{i \sum \gamma_x t_x} dt_x dt_y dt_z,$$

dus i.v.m.  $\frac{\sin(\frac{1}{2} t_x dx)}{t_x} \hookrightarrow \frac{1}{2} dx$

$$W_N(r_0) dx dy dz = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vec{r}_0 \cdot \vec{t}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{r} \cdot \vec{t}} \tau(\vec{r}) dx dy dz \right\}^N dt_x dt_y dt_z. \quad (4.13)$$

De factor tussen accolades in het rechterlid van (4.13) kunnen

we gemakkelijk uitwerken.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\vec{r} \cdot \vec{t}}{l^2 t^2}} \tau(\vec{r}) dx dy dz = \left(\frac{2}{3} \pi l^2\right)^{-3/2} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\vec{r} \cdot \vec{t}}{2l^2} - \frac{3r^2}{2l^2}} dx dy dz =$$

$$= e^{-\frac{1}{6} \frac{t^2}{l^2}},$$

zodat (4.13) overgaat in

$$W_N(\vec{r}_0) dx dy dz = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{t}}{6} - \frac{Nl^2 t^2}{6}} dt_x dt_y dt_z.$$

Ook dit kunnen we integreren, en tenslotte is

$$W_N(\vec{r}_0) dx dy dz = \left(\frac{2}{3} \pi N l^2\right)^{-3/2} e^{-\frac{3r_0^2}{2Nl^2}} dx dy dz. \quad (4.14)$$

Veronderstelt men weer dat het deeltje n verplaatsingen per tijdseenheid uitvoert en voert men weer een diffusiecoëfficiënt D in, door middel van

$$D = \frac{1}{6} n l^2$$

dan gaat (4.14) over in

$$W(\vec{r}, t) d\vec{r} = (4\pi Dt)^{-3/2} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} d\vec{r}, \quad (4.15)$$

hetgeen weer geïnterpreteerd kan worden als de oplossing van een diffusieprobleem

$$D \Delta c = \frac{\partial c}{\partial t}$$

met een puntbron van de intensiteit 1 op het begintijdstip  $t = 0$ .

Dit verband met diffusie kan ook op rechtstreekse wijze afgeleid worden.

De fractie van het aantal deeltjes dat zich in een volume-eenheid bevindt stellen we voor door  $c(\vec{r}, t)$ . Op het tijdstip  $t$  beschouwen we een bepaald volumeëlement  $dx dy dz$  en we laten dit  $\Delta t$  seconden aan zijn lot over. Dan is

$c(\vec{r}, t + \Delta t) dx dy dz = \sum$  kans dat een deeltje, dat zich aanvankelijk in de positie  $\vec{r}_0$  bevond zich na  $\Delta t$  seconden in het betreffende volumeëlement bevindt:

$$c(\vec{r}, t + \Delta t) d\vec{r} = (4\pi D \Delta t)^{-3/2} d\vec{r} \iiint c(\vec{r}_0, t) e^{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}{4D \Delta t}} d\vec{r}_0 =$$

$$= (4\pi D \Delta t)^{-3/2} \int \int \int c(\vec{r} + \vec{\epsilon}, t) e^{-\frac{\epsilon^2}{4D\Delta t}} d\vec{\epsilon}.$$

Ontwikkel nu  $c(\vec{r} + \vec{\epsilon}, t)$  volgens Taylor

$$c(\vec{r} + \vec{\epsilon}, t) = c(\vec{r}, t) + \vec{\epsilon} \cdot \frac{\partial c}{\partial \vec{r}} + \dots$$

Slechts de termen welke even in de componenten  $\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z$  van  $\vec{\epsilon}$  zijn geven een bijdrage:

$$\begin{aligned} c(\vec{r}, t + \Delta t) &= (4\pi D \Delta t)^{-3/2} \int \int \int \left\{ c(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \sum \epsilon_x^2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \dots \right\} e^{-\frac{\epsilon^2}{4D\Delta t}} d\vec{\epsilon} \\ &= c(\vec{r}, t) + D \Delta t \sum \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + O(\Delta t^2), \end{aligned}$$

Dus tenslotte voor  $\Delta t \rightarrow 0$

$$D \left\{ \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right\} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (4, 16)$$

de diffusievergelijking.

In de voorgaande beschouwingen hebben we aangenomen dat de deeltjes zich onafhankelijk t.o.v. elkaar bewegen a.h.w. als een systeem van mathematische punten die niet kunnen botsen. We gaan nu echter een probleem bekijken waarbij juist dit botsen een essentiële rol speelt nml. de coagulatie van een emulsie, een groot aantal kleine bolletjes vloeistof die in een andere vloeistof gedispergeerd zijn, bv. vetdruppeltjes in water (melk). De bolletjes voeren elementaire verplaatsingen uit en zullen vaak tegen elkaar botsen. Indien de bolletjes electrisch geladen zijn hetgeen bij een stabiele emulsie het geval is (melk) betekent een botsing een wijziging in de baan van de deeltjes; is echter door een of andere oorzaak de electrische lading weggenomen, dan heeft een botsing catastrofale gevolgen, de deeltjes vloeien samen tot een groter bolletje. Dit verschijnsel heet samenvloeking of coagulatie (melk schift).

Beschouw nu een systeem met twee soorten deeltjes welke zich onafhankelijk t.o.v. elkaar bewegen met diffusiecoëfficiënten  $D_1$  en  $D_2$ . De verdelingsfuncties zijn overeenkomstig (4.15)

$$\begin{aligned} W_1 d\vec{r} &= (4\pi D_1 t)^{-3/2} e^{-\frac{r_1^2}{4D_1 t}} d\vec{r} \\ W_2 d\vec{r} &= (4\pi D_2 t)^{-3/2} e^{-\frac{r_2^2}{4D_2 t}} d\vec{r}. \end{aligned}$$



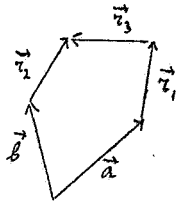
Een deeltje van de eerste soort bevindt zich aanvankelijk in  $A(\vec{a})$  en verplaatst zich als  $\vec{r}_1$ . Een deeltje van de tweede soort bevindt zich in  $B(\vec{b})$  en verplaatst zich als  $\vec{r}_2$ .

Wij vragen nu naar de verdelingsfunctie van

$$\vec{r}_3 = \vec{b} - \vec{a} + \vec{r}_2 - \vec{r}_1 .$$

Dit is

$$W_3 d\vec{r} = (4\pi D_1 t)^{-3/2} (4\pi D_2 t)^{-3/2} \left\{ \exp - \sum \left\{ \frac{x_1^2}{4D_1 t} + \frac{(x_1 + a_x - b_x + x_3)^2}{4D_2 t} \right\} \right\} d\vec{r}_1 .$$



Na enig rekenen volgt gemakkelijk

$$W_3 d\vec{r} = (4\pi D_3 t)^{-3/2} e^{-\frac{r_3^2}{4D_3 t}} dr ,$$

met

$$D_3 = D_1 + D_2 . \quad (4.17)$$

De beweging van het ene deeltje t.o.v. het andere geschiedt dus met de schijnbare diffusiecoëfficiënt  $D_1 + D_2$ .

Beschouw nu een systeem met bolletjes  $R_1$  en  $R_2$ . De bijbehorende diffusiecoëfficiënten zijn  $D_1$  en  $D_2$ . Nu geldt dat

$$D_1 R_1 = D_2 R_2 = \text{constant} .$$

We fixeren een bolletje  $R_1$  en we gaan na wat in  $\Delta t$  seconden de kans op een botsing met een bolletje  $R_2$  is.

Daartoe lossen we even het volgende diffusieprobleempje op

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} = (D_1 + D_2) \Delta c, \\ c = c_0 & t = 0, & r > R_1 + R_2, \\ c = 0 & r = R, & t > 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

De oplossing is

$$c = c_0 \left( 1 - \frac{R}{r} + \frac{2R}{r\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r-R}{\sqrt{Dt}}} e^{-\xi^2} d\xi \right),$$

waarbij  $R = R_1 + R_2$  en  $D = D_1 + D_2$ .

Het aantal deeltjes dat per seconde het boloppervlak  $r = R$  passeert is

$$4\pi DR^2 \left( \frac{\partial c}{\partial r} \right)_R \approx 4\pi DRc_0 \left( 1 + \frac{R}{\sqrt{\pi Dt}} \right).$$

Hieruit volgt dus dat het aantal botsingen per volumeëenheid in  $\Delta t$  seconden tussen deeltjes  $R_1, D_1$  in de concentratie  $c_1$  en deeltjes  $R_2, D_2$  in de concentratie  $c_2$  gelijk is aan

$$4\pi (D_1 + D_2) (R_1 + R_2) c_1 c_2 \left( 1 + \frac{R_1 + R_2}{\sqrt{\pi (D_1 + D_2) t}} \right) \Delta t. \quad (4.19)$$

Beschouw nu een systeem waarin alle soorten bolletjes DR voorkomen.

Deeltjes  $R_1$  zullen met deeltjes  $R_2$  samenvloeien tot deeltjes  $R_3$  met  $R_1^3 + R_2^3 = R_3^3$ . We kunnen nu a.v. een integraalvergelijking afleiden welke de coagulatie beschrijft.

Indien  $W(R, t)$  het aantal deeltjes per volumeëenheid met een straal gelijk aan of groter dan  $R$  is, dan wordt hierin verandering aangebracht op twee wijzen

1. botsing met  $R_1 > R, R_2 > R$  er verdwijnt een deeltje  $> R$ .
2. botsing met  $R_1 < R, R_2 < R, R_3 > R$ , er ontstaat een deeltje  $> R$ .

dus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & - 4\pi \int_R^\infty \int_R^\infty (D_1 + D_2) (R_1 + R_2) W(R_1, t) W(R_2, t) dR_1 dR_2 + \\ & + 4\pi \int_{\substack{R_1^3 + R_2^3 > R^3 \\ R_1 < R \\ R_2 < R}} (D_1 + D_2) (R_1 + R_2) W(R_1, t) W(R_2, t) dR_1 dR_2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Hieruit kunnen we ruwweg iets te weten komen over het totaal aantal deeltjes

$$N = W(0, t).$$

Stel nml.  $(D_1 + D_2) (R_1 + R_2) = c = \text{constant}$ . Dan volgt uit (4.20)

$$\frac{dN}{dt} = - 4 \pi c N^2,$$

waaruit na integratie

$$N = \frac{N_0}{4 \pi c N_0 t + 1}, \quad (4.21)$$

hetgeen bekend staat als de wet van Smoluchowski.

Met behulp van Laplacetransformatie kan vervolgens ook (4.20) worden opgelost. Op de integralen in het rechterlid van (4.20) kan nml. de convolutieregel toegepast worden. De uitwerking is echter nogal bewerkelijk.