

Colloquium

"Niet-lineaire verschijnselen"

door

Prof.Dr S.C. van Veen

(4 November 1955 te Delft)

I

1) Fasevlak en fase-krommen.

Wij zullen ons zeer vaak bezighouden met de bestudering van de oplossingskrommen van dynamische vergelijkingen van het algemene type

$$\ddot{x} = f(x) \quad (1)$$

{f(x) kan worden geïnterpreteerd als kracht werkende op massaeenheid). Hoewel de integratie van (1) reeds bij eenvoudige vorm van f(x) tot onoplosbare moeilijkheden kan voeren, volgt door invoering van de "arbeids-integraal"

$$-V(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 + V(x) = h = \text{constant. (energie-integraal)} \quad (3)$$

Men krijgt een duidelijke voorstelling voor het verloop van de energie door afbeelding op een (x,y)-vlak, waarin $\dot{x}=y$.

Dit vlak heet fasevlak, de bijbehorende krommen:

$$\frac{y^2}{2} + V(x) = h$$

vormen de fasekrommen. Een punt P(x,y) geeft een fasepunt, en geeft verband tussen x en de snelheid bij x.

h is een veranderlijke parameter. Door ieder punt P(x₁,y₁) gaat in het algemeen 1 fasekromme, waarvan de bijbehorende h wordt bepaald uit

$$\frac{y_1^2}{2} + V(x_1) = h.$$

Voorbeeld: lineaire trilling:

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad (c > 0).$$

fasekrommen: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2 = h$. (wet van behoud van arbeidsvermogen)

$$\text{of } \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (\alpha = \sqrt{\frac{2h}{c}}, \beta = \sqrt{\frac{2h}{m}}). \text{ (ellipsen)}$$

fasesnelheid = snelheid punt op fasekromme.

Wij zullen ons in hoofdzaak bezighouden met stelsels met 1 graad van vrijheid, die in het fasevlak worden voorgesteld door soortgelijke krommen.

De differentiaalvergelijkingen zijn in het algemeen van de gedaante:

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \quad (4)$$

Iedere differentiaalvergelijking van de 2e orde:

$$\ddot{x} = Q(x, \dot{x})$$

kan tot de vorm (4) worden gereduceerd door te stellen $y = \dot{x}$, zodat

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \quad (4a)$$

De differentiaalvergelijking van de fasekromme volgt direct uit (4):

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$$

waardoor in het algemeen de richting van de raaklijn aan de fasekromme in (x,y) wordt bepaald. Deze richting is onbepaald als tegelijk in een punt (x_0, y_0)

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0.$$

Definitie: Een punt (x_0, y_0) waarin $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, heet een singulier punt. Ieder ander punt van het fasevlak, waarvoor dus niet gelijktijdig $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ heet een gewoon punt.

Stelling van Cauchy: Door ieder gewoon punt van het fasevlak gaat één en slechts één fasekromme.

Uit (4) volgt, dat in een singulier punt de snelheid van het beeldpunt in het fasevlak $= 0$. Het punt verkeert momenteel in rust.

In het speciale geval (4a) is in een singulier punt zowel $\dot{x}$ als $\ddot{x} = 0$.

Dus snelheid en versnelling $= 0$ (evenwicht).

In zulke gevallen geldt:

singuliere punten zijn punten van evenwicht.

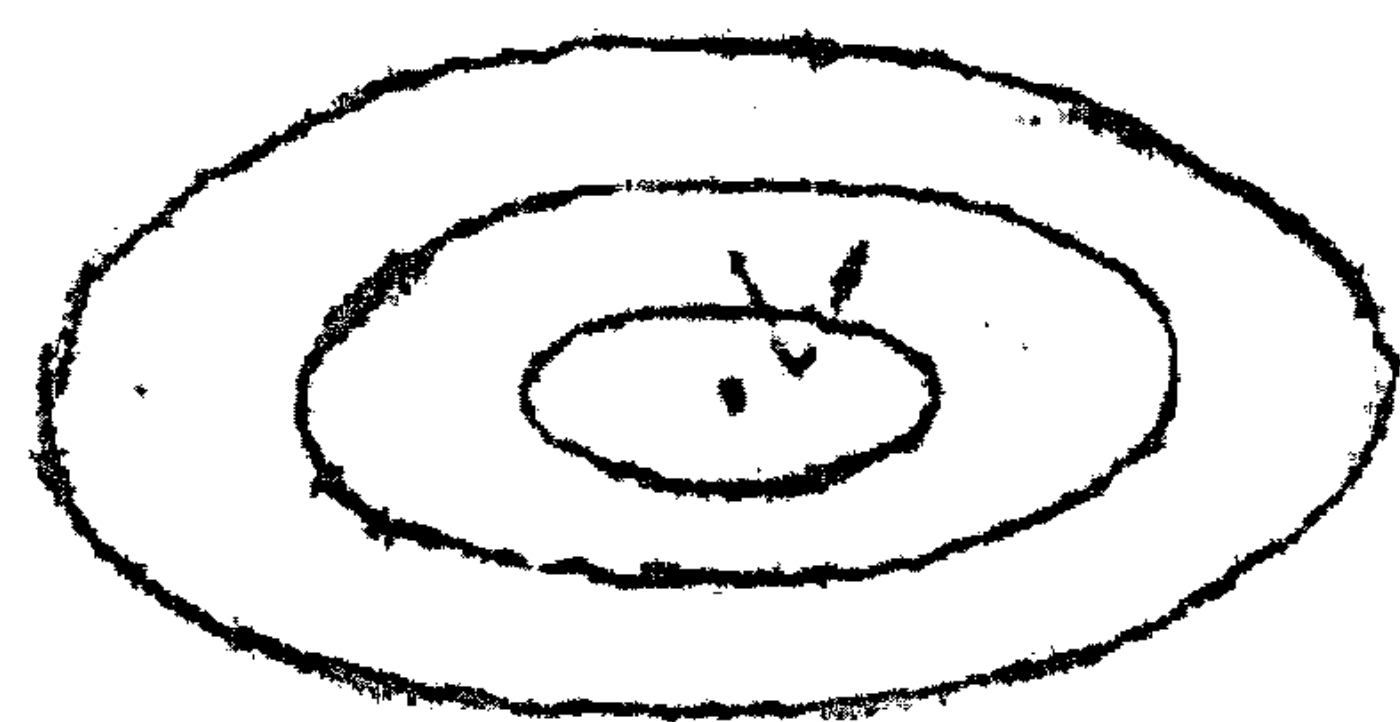
De enige fasebaan door het singuliere punt (x_0, y_0) is de ontaarde fasebaan, die bestaat uit het punt (x_0, y_0) alleen. Hieruit volgt, dat een fasebaan, die op zeker tijdstip door een gewoon punt (x,y) gaat, voor geen enkele eindige waarde van t door (x_0, y_0) gaat.

Er zijn echter soms speciale banen, die een singulier punt onbepaald kunnen naderen voor $t \rightarrow +\infty$ (eigenbanen)

Wij zullen ons voorlopig hoofdzakelijk bezig houden met de studie der fasekrommen in de omgeving der singuliere punten.

2) Verdeling der singuliere punten in soorten.

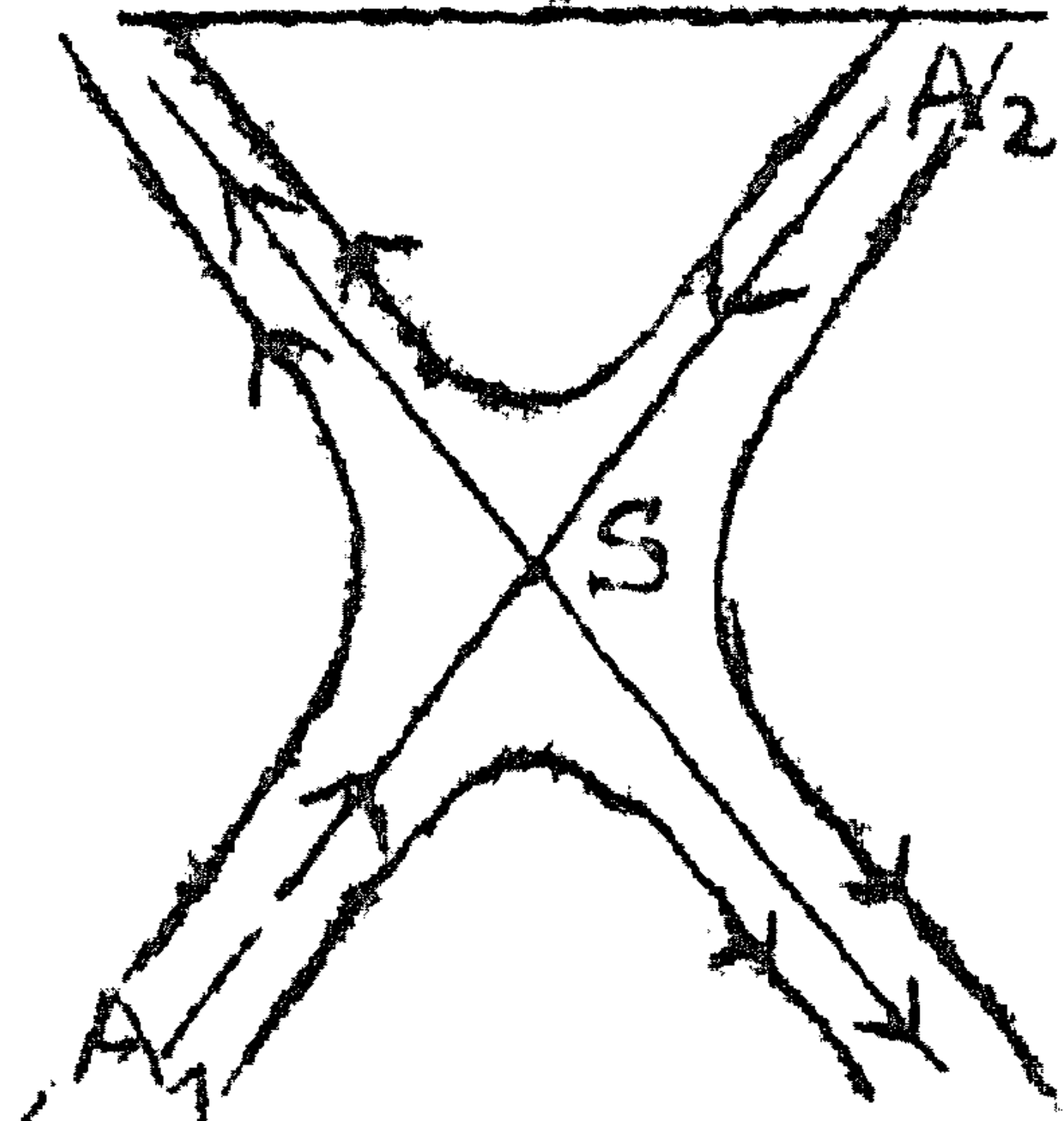
- a) Wervel-punten: Een wervel-punt V is een singulier punt, dat door geen enkele fasekromme wordt benaderd.



Voorbeeld: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Singulier punt V omringd door een stelsel gesloten fasekrommen.

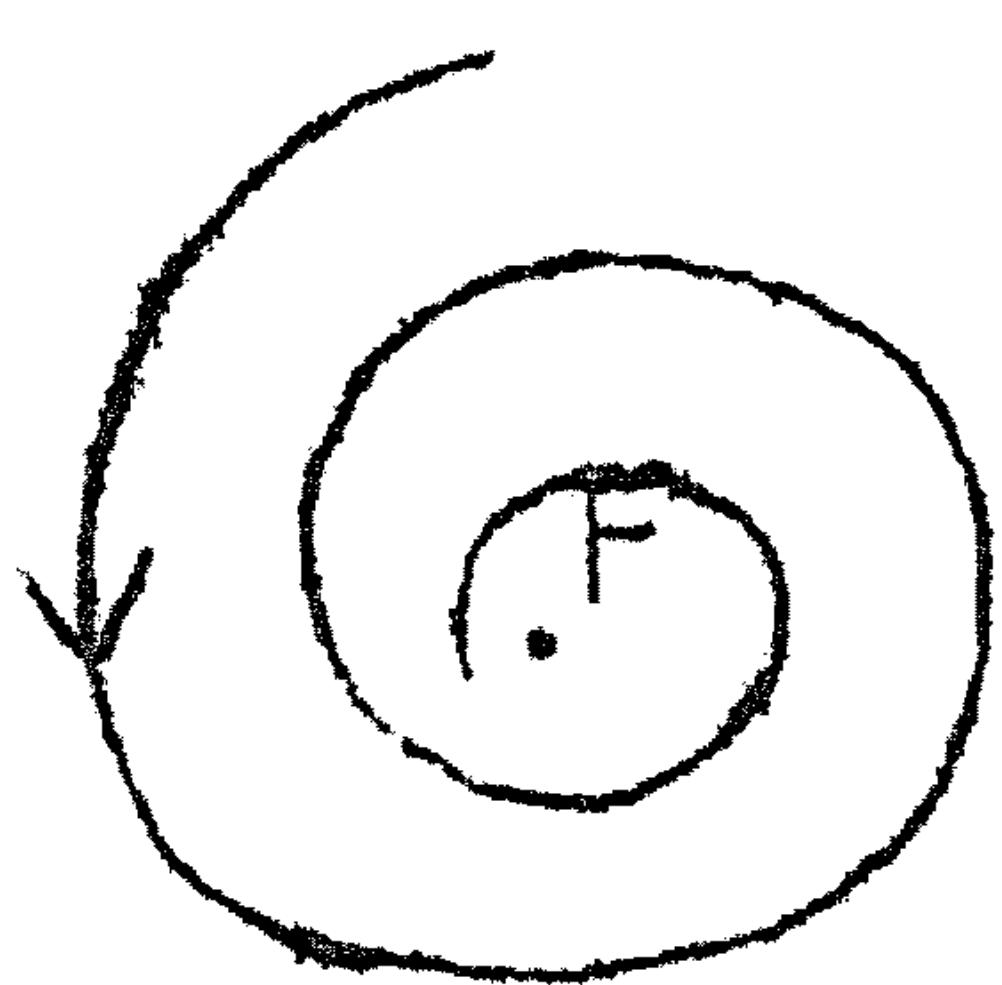
- b) Zadelpunten:



Een zadelpunt S is een singulier punt, dat door vier banen wordt benaderd. Twee banen A_1S en A_2S naderen het zadelpunt voor $t \rightarrow +\infty$, twee andere, A_3S en A_4S voor $t \rightarrow -\infty$. Daartussen ligt een continuum van hyperboolvormige fasekrommen.

Voorbeeld: $\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$ (instabiele beweging).

- c) foci (brandpunten): Een focus is een singulier punt, dat door de

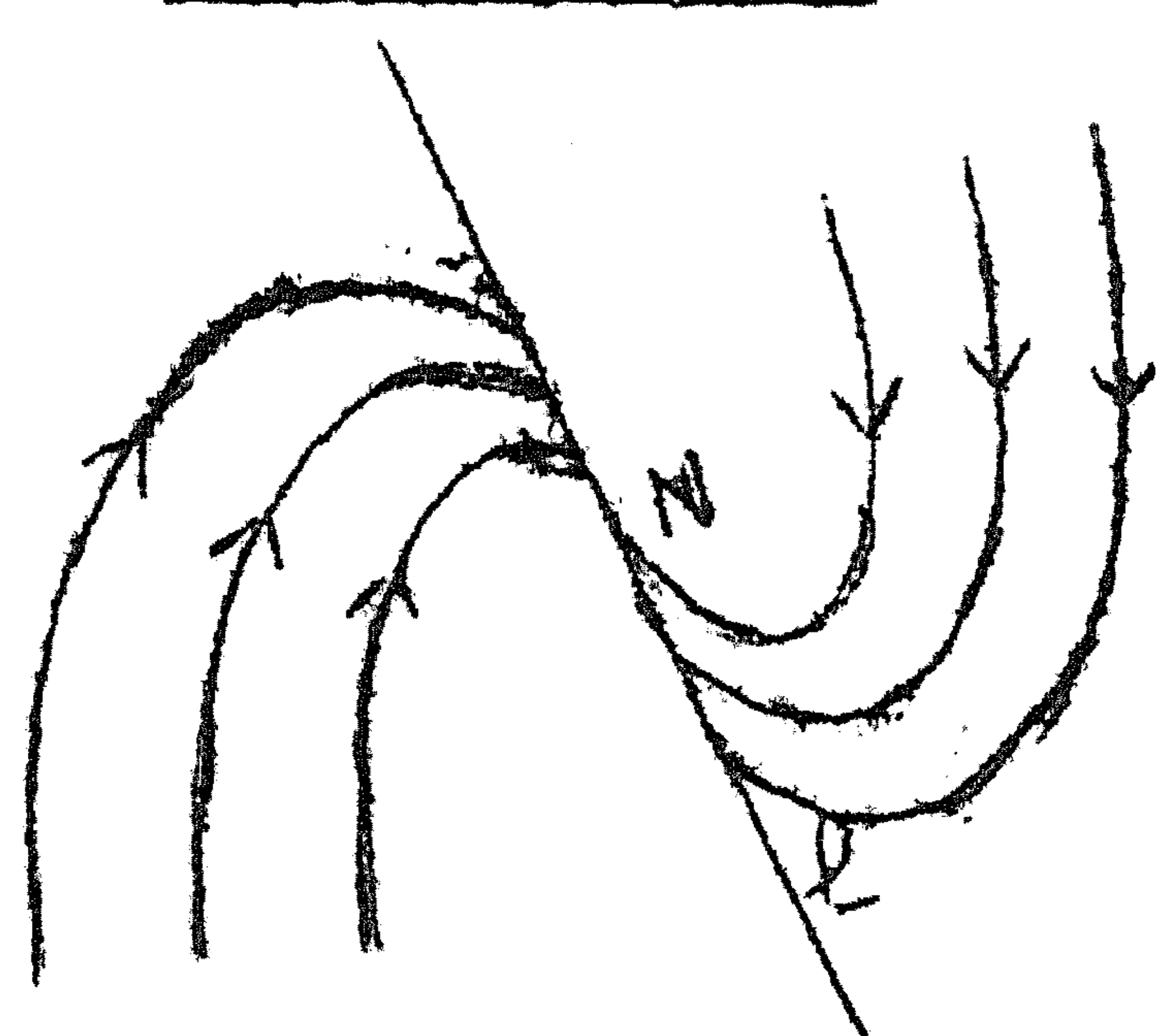


fasebanen wordt benaderd, zonder een bepaalde richting, volgens spiraalbanen. Door ieder gewoon punt gaat 1 spiraalbaan. Als F onbepaald benaderd wordt voor $t \rightarrow +\infty$, dan heet F een stabiele focus. Als F wordt benaderd voor $t \rightarrow -\infty$, dan wordt de aange-

geven pijlrichting omgedraaid, en dan spreekt men over een instabiele focus.

Voorbeeld: $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ als $b^2 - \omega_0^2 < 0$ (gedempte trilling).

- d) knooppunten: Een knooppunt N is een singulier punt, dat door



fasebanen wordt benaderd als in deze figuur. De raaklijn nadert tot de richting l.

Als N wordt benaderd voor $t \rightarrow +\infty$ (figuur), dan heet het knooppunt N stabiel. In het tegengestelde geval ($t \rightarrow -\infty$) heet het punt instabiel.

3) Nadere bestudering van het zadelpunt. Fasebaan bij instabiele beweging.

Differentiaalvergelijking: $m\ddot{x} - cx = 0$ ($c > 0$) of

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$$

$$x = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$$

Stel $\dot{x} = y$; $\dot{y} = \omega_0^2 x$; $\frac{dy}{dx} = \omega_0^2 \frac{x}{y}$ $\rightarrow y^2 - \omega_0^2 x^2 = C$

fasekrommen zijn hyperbolen. Asymptoten ontstaan voor $C=0$.

$$y = \pm \omega_0 x.$$

4) Nadere bestudering van een focus. Gedempte trilling.

Differentiaalvergelijking: $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ met $b^2 - \omega_0^2 < 0$.

$$x = x_0 e^{-bt} \cos(\omega_1 t + \alpha); \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}.$$

fasekrommen: $\frac{dx}{dt} = y$; $\frac{dy}{dt} = -2by - \omega_0^2 x$. of: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2by + \omega_0^2 x}{y}$.

Bij integratie door substitutie: $y = ux$:

$$y^2 + 2bxy + \omega_0^2 x^2 = C \cdot e^{\frac{2b}{\omega_1} \arctg \frac{y+bx}{\omega_1 x}}$$

Poolcoördinaten: $\omega_1 x = u = e \cos \varphi$.
 $y + bx = v = e \sin \varphi$. $\left. \begin{array}{l} \omega_1 x = u = e \cos \varphi \\ y + bx = v = e \sin \varphi \end{array} \right\} e = C_1 e^{\frac{b\varphi}{\omega_1}}, \quad C_1 = \sqrt{C}.$

5) Nadere bestudering van een knooppunt. Aperiodieke gedempte trilling.

Differentiaalvergelijking: $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ met $b^2 - \omega_0^2 > 0$,

karacteristieke vergelijking bezit 2 verschillende reële wortels $-r_1$ en $-r_2$.

$$x = A e^{-r_1 t} + B e^{-r_2 t}$$

fasekrommen: $(xr_1 + y)^{r_1} = C(xr_2 + y)^{r_2} \longrightarrow v = Cu^a \quad (a = \frac{r_2}{r_1} > 1).$

Colloquium
"Niet-lineaire verschijnselen"

door
Prof.Dr S.C. van Veen
(18 November 1955 te Delft)

II

6) Fasekrommen bij niet-lineaire conservatieve stelsels in de buurt van singuliere punten.

Bij de eenvoudige differentiaalvergelijking

$$\ddot{x} = f(x)$$

bestaat de energie-integraal:

$$\frac{y^2}{2} + V(x) = h \quad \text{met} \quad V(x) = - \int_0^x f(u) du, \quad \frac{dx}{dt} = y \quad (1)$$

voor gegeven h stelt (1) een kromme van constante energie in het fasevlak voor. Beweging onmogelijk voor $h - V(x) < 0$.

Evenwicht voor $f(x)=0$, d.w.z. $V'(x)=0$, m.a.w. de potentiële energie heeft een extreme waarde in een evenwichtspunt.

Uit (1) volgt:

- 1°. De fasekrommen zijn symmetrisch t.o.v. de x -as.
- 2°. Deze banen snijden de x -as loodrecht ($\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y} = \infty$); zij bezitten een horizontale raaklijn in de punten waar $f(x)=0$, als tenminste in deze punten niet tegelijk $y=0$ (singulier punt).
- 3°. De singuliere punten liggen op de x -as in de nulpunten x_k van $f(x)$.

Voor een topologisch beeld van de fase-banen gaan wij in twee stappen te werk.

- a) eerst construeren wij een hulpdiagram voor het verschil $h - V(x)$ (fig. 1),
- b) daarna tekenen wij in een ander diagram $\frac{y}{\sqrt{2}}$ als functie van x (fig. 2).

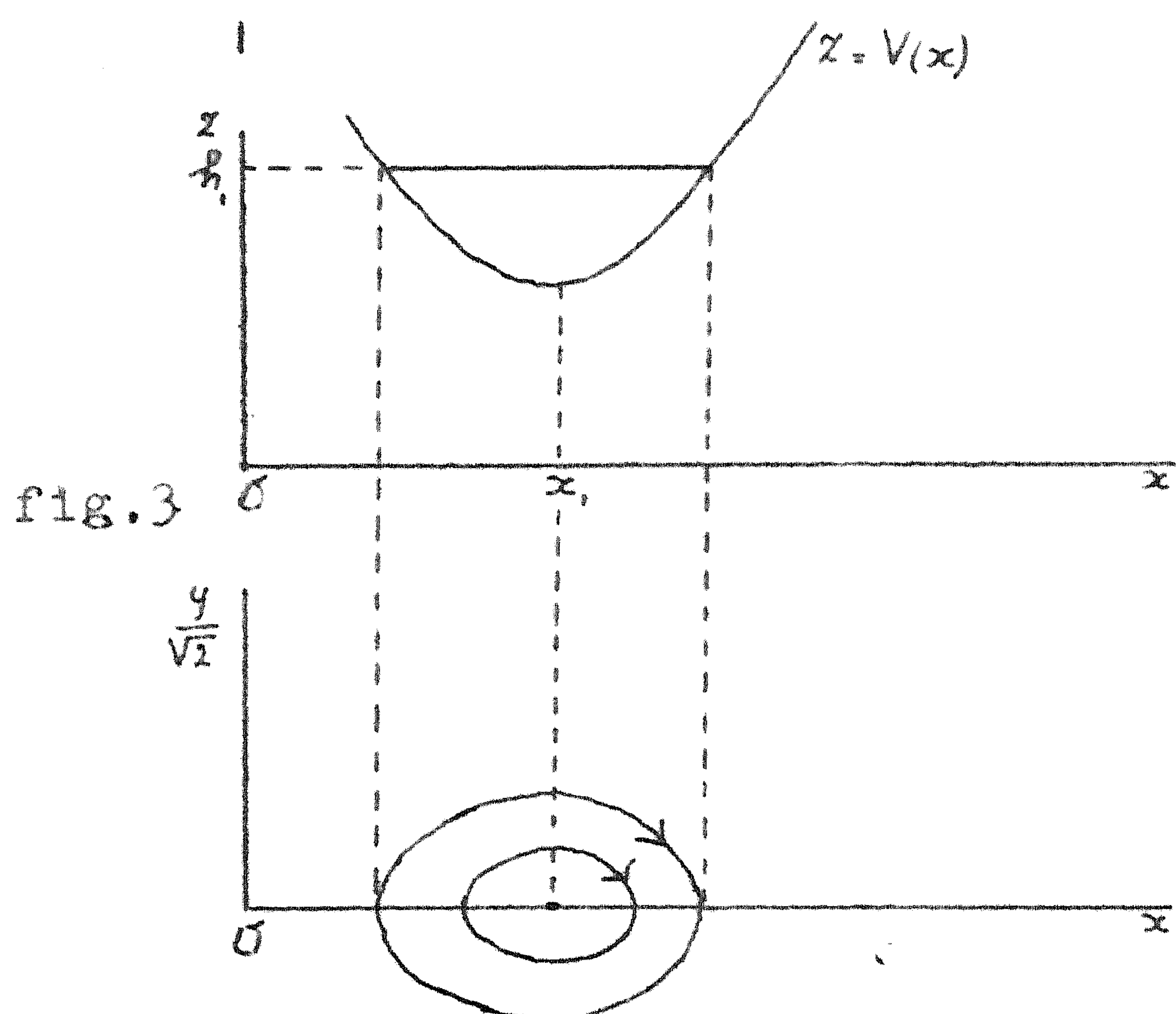
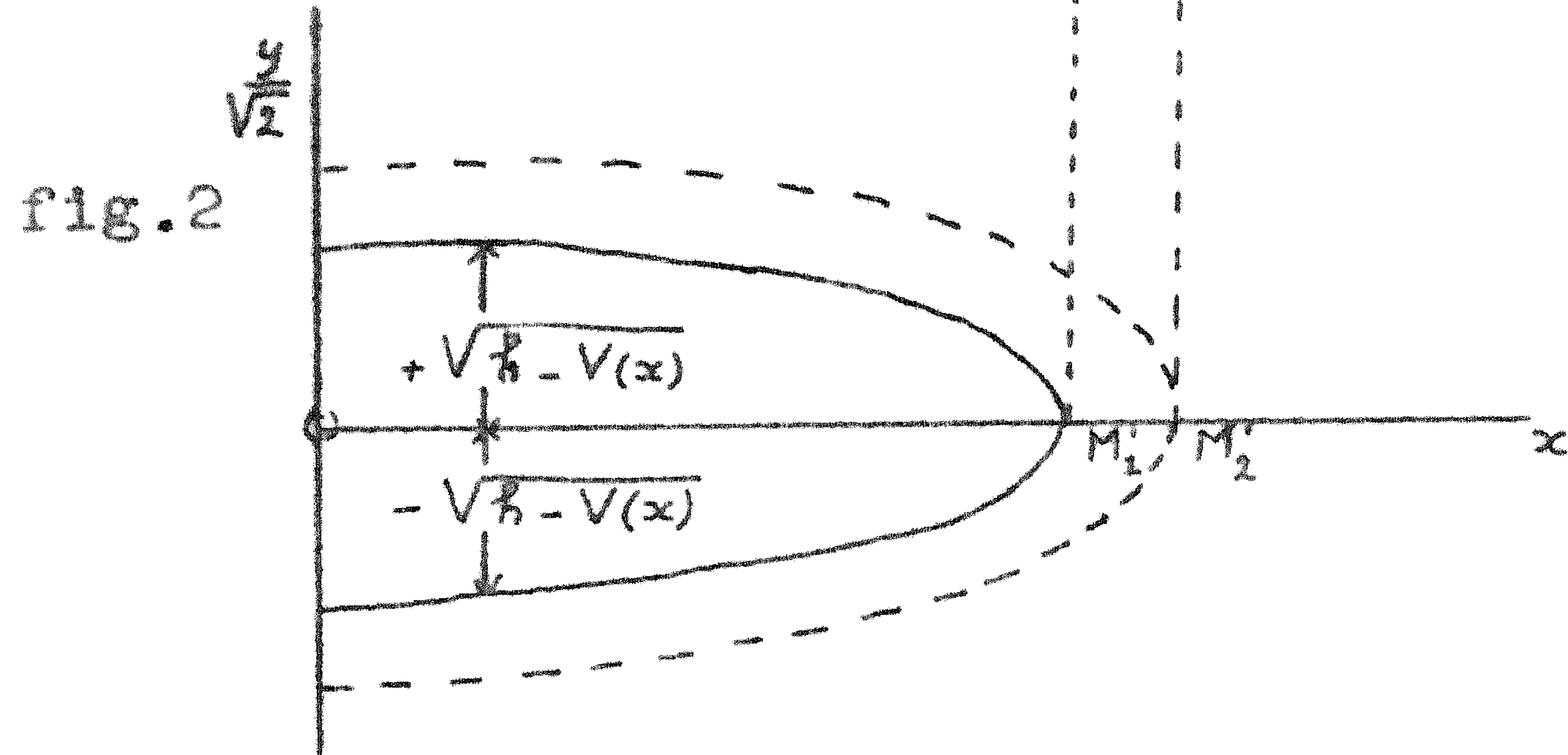
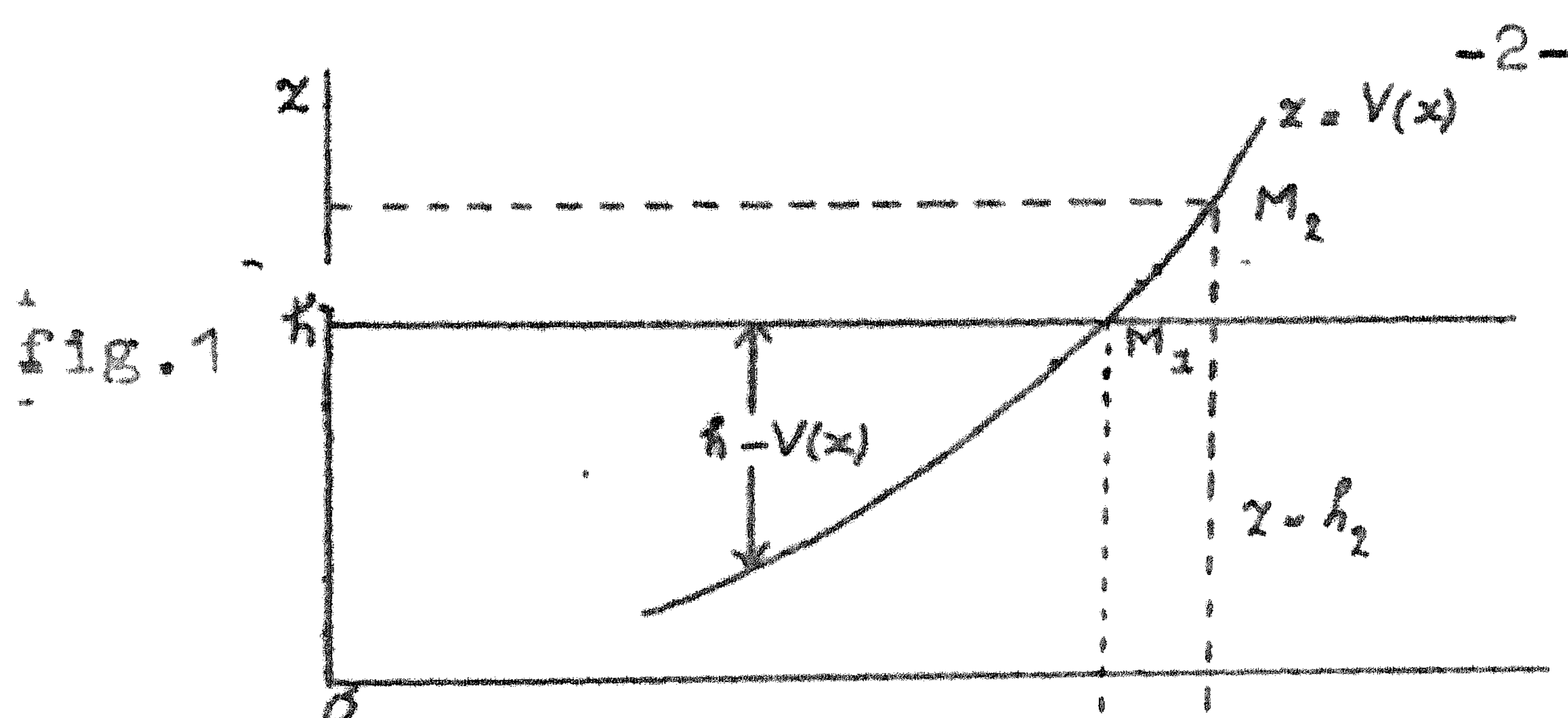


Fig. 2 geeft het fasediagram behorende bij fig.1 (coördinaten x en $\frac{y}{\sqrt{2}}$). De fasekrommen zijn reëel links van M_1 . Bij toenemende h ($h=h_2$) verschuift M_1 naar M_2 .

In fig. 3 is dezelfde constructie gegeven voor het geval, dat $V(x)$ een minimum heeft voor $x=x_1$

7. Analytische methode.

Aangenomen, dat $V(x)$ een minimum bereikt voor $x=x_1$, dan is

$$f(x) = a_1(x-x_1) + \frac{a_2}{2!}(x-x_1)^2 + \dots$$

$$V(x) = -\int_0^x f(u)du = h_0 - \left[\frac{a_1}{2!}(x-x_1)^2 + \frac{a_2}{3!}(x-x_1)^3 + \dots \right]$$

met

$$a_1 = f'(x_1) = -V''(x_1), \quad a_2 = f''(x_1) = -V'''(x_1), \dots \text{enz.}$$

Door de transformatie: $x=x_1+\xi$, $y=\eta$ gaat de energie-integraal $\frac{y^2}{2} + V(x)=h$ over in

$$\frac{\eta^2}{2} + h_0 - \left[\frac{a_1 \xi^2}{2!} + \dots + \frac{a_k \xi^{k+1}}{(k+1)!} + \dots \right] = h. \quad (1)$$

Geval I: $a_1 \neq 0$. $V(x)$ en de rechte $z=h_0$ hebben in $x=x_1$ een contact van de eerste orde. $V(x_1)$ is minimum, dus $V'(x_1)=0$, $V''(x_1)>0$, dus $a_1 < 0$.

Voor $h=h_0$ blijkt uit (1): $\xi = \eta = 0$ is singulier punt (wervelpunt). Voor $h-h_0 = \alpha > 0$ levert de ontwikkeling van de termen van de laagste graad:

$$\frac{\eta^2}{2} + \frac{|a_1| \xi^2}{2} = \alpha. \text{ (ellipsen). (stabiele beweging)}$$

Geval II: $a_1=0$.

Wij nemen meer algemeen aan $a_1=a_2=\dots a_{k-1}=0$, $a_k \neq 0$. k is dan noodzakelijk oneven en $a_k < 0$, omdat $V(x_1)$ een minimum is. $h=h_0$ geeft weer een geïsoleerd punt (singulier punt), een wervelpunt voor de fasebanen. Voor $h-h_0 = \alpha > 0$ geven de termen tot de $(k+1)^e$ graad:

$$\frac{\eta^2}{2} + \frac{|a_k| \xi^{k+1}}{(k+1)!} = \alpha.$$

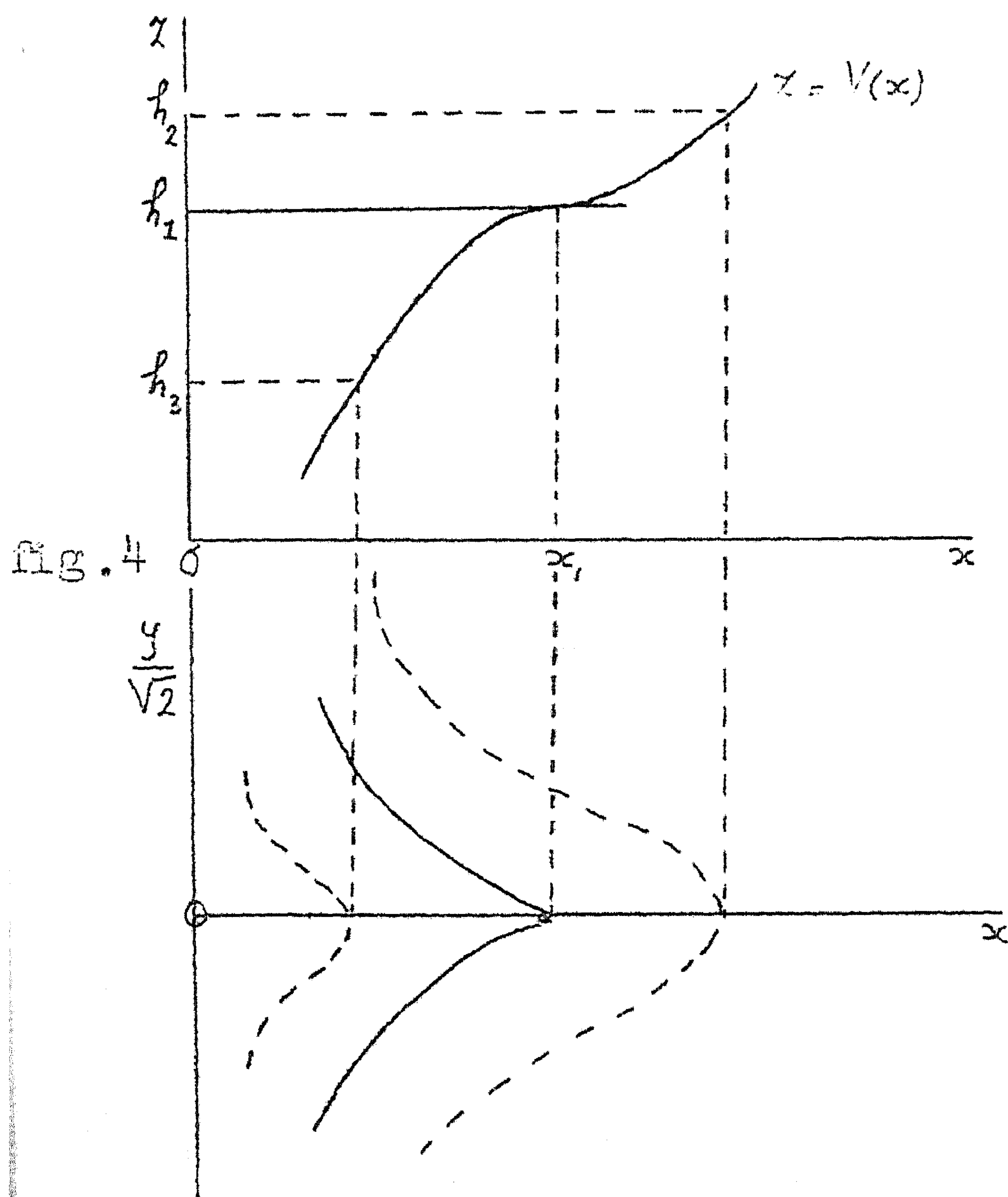
Ook deze vergelijking geeft een stelsel gesloten krommen, die echter zelfs voor kleine ξ en η aanmerkelijk van ellipsen verschillen. Het is dus verkeerd om zelfs voor kleine trillingen zulk een beweging te "lineariseren".

Wanneer $V(x)$ voor $x=x_1$ een maximumwaarde bereikt, is de behandeling analoog, alleen gaat de vergelijking dan in eerste instantie over in

$$\frac{\eta^2}{2} - \frac{a_1 \xi^2}{2} = \alpha \text{ (hyperbolen), resp. } -\frac{\eta^2}{2} - \frac{a_k \xi^{k+1}}{(k+1)!} = \alpha, \text{ die sterk afwijken van hyperbolen. (kromlijnige asymptoten!)}$$

In de gevallen II is de beweging instabiel.

Geval III: De potentiaalkromme $z=V(x)$ heeft een buigpunt voor $x=x_1$, met een horizontale raaklijn (fig. 4)



$$a_1 = -V'''(x_1) = 0$$

De eerste term $a_k \neq 0$ moet van even orde zijn ($k=2,4,\dots$), omdat $h-V(x)$ van teken wisselt voor $x=x_1$.

Voor $h=h_1$ gaat de fasekromme in de omgeving van $(\xi=0, \eta=0)$ over in:

$$\eta^2 = \frac{2a_k}{(k+1)!} \xi^{k+1} \text{ (k even) (keerpunt)}$$

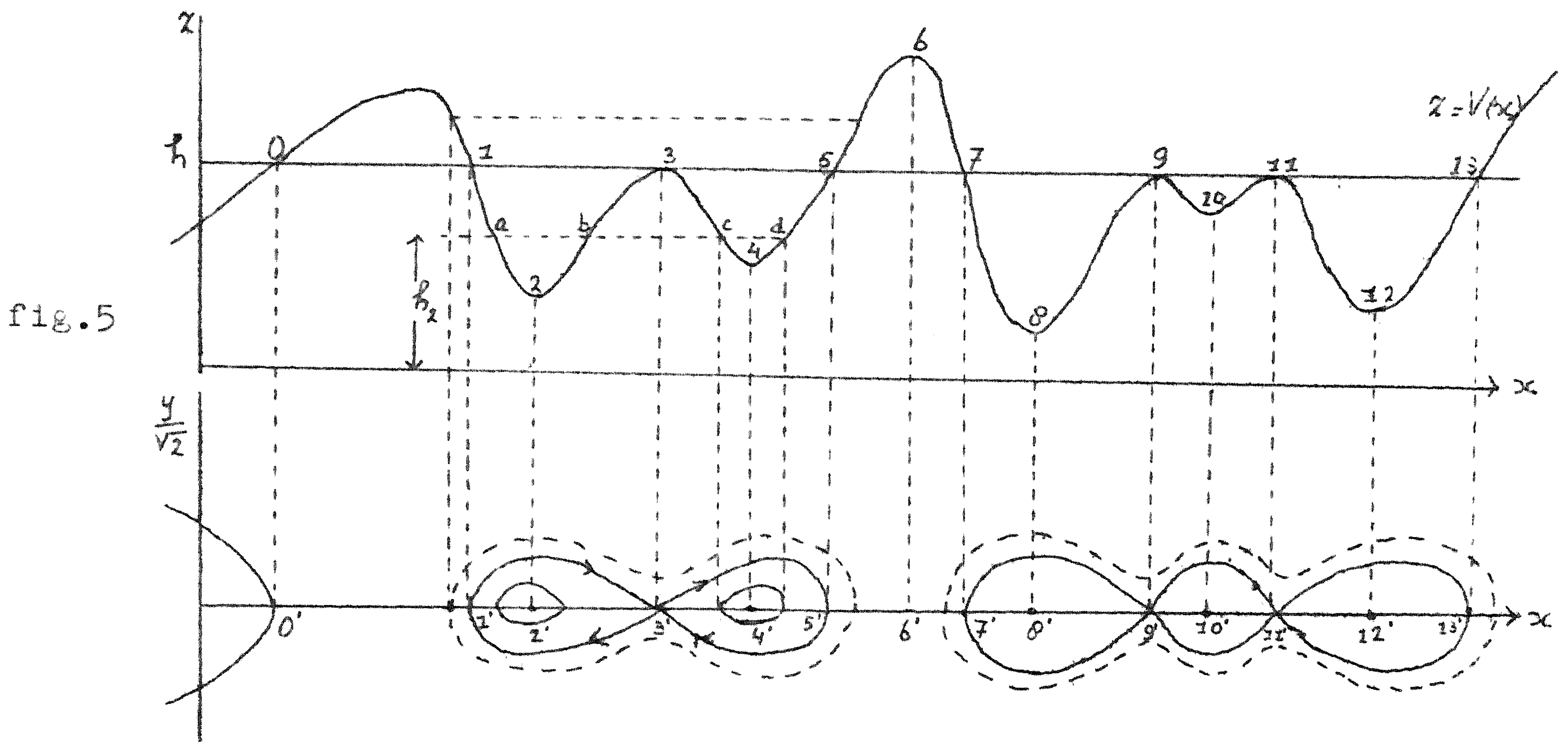
Ook hier is de beweging in de omgeving van het singuliere punt instabiel. De voorgaande beschouwingen voeren tot de volgende conclusies:

Stelling I: Wanneer de potentiële energie $V(x)$ een minimum bereikt voor $x=x_1$, dan is het punt $(x_1, 0)$ een punt van stabiel evenwicht. (Lagrange)

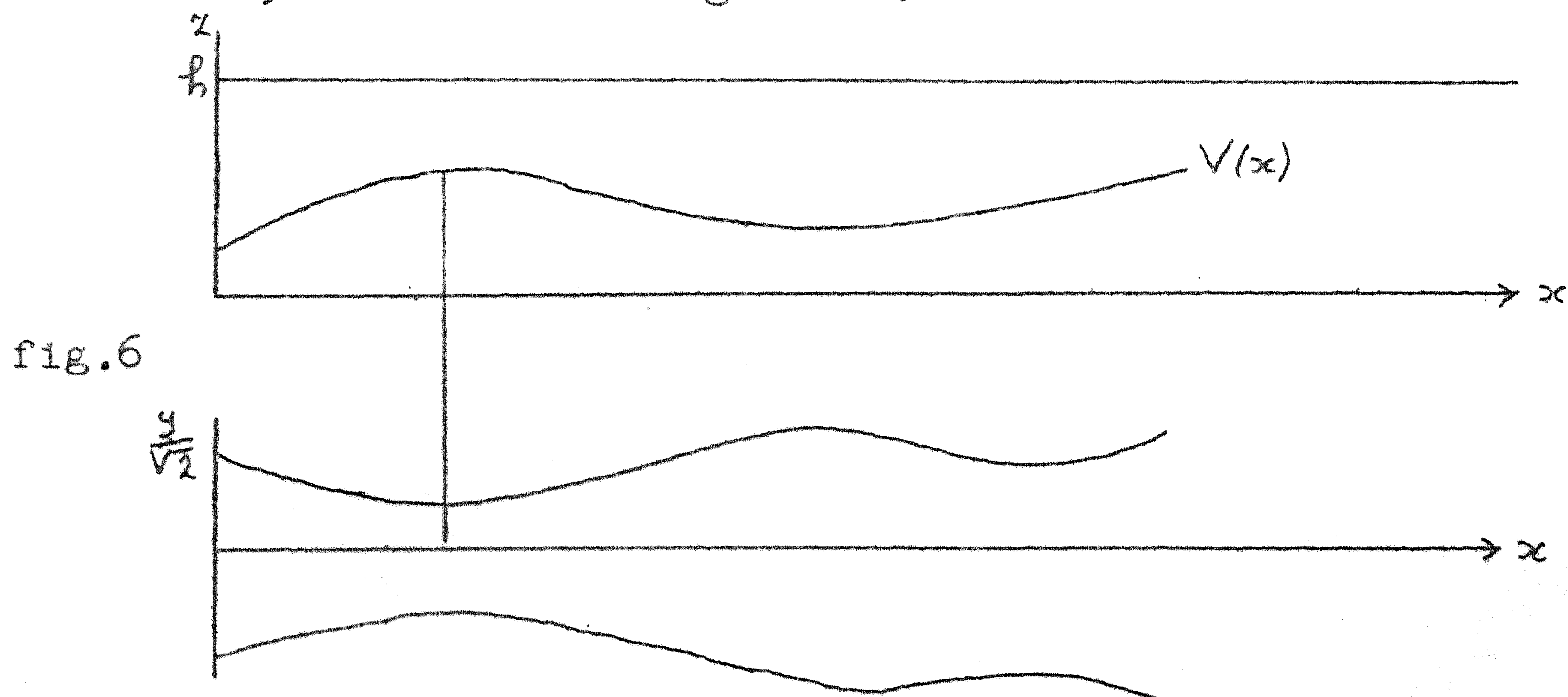
Stelling II: Wanneer de potentiële energie $V(x)$ voor $x=x_1$ een stationnaire waarde bereikt, die geen minimum is, dan is het evenwicht instabiel. (Liapounoff).

8. Algemene beschouwing der krommen in het fasevlak. Separatrix.

Om een overzicht te verkrijgen van het totale verloop der fasekrommen, kan men als volgt te werk gaan (zie fig. 5). Het uitgangspunt is wederom de energievergelijking: $\frac{y^2}{2} + V(x) = h$.



- Voor $h < V(x)$ voor alle waarden van x is geen beweging mogelijk. Dit is in onze figuur tussen 0 en 1, 5 en 7 en rechts van 13.
- $h > V(x)$ voor alle waarden van x (zie fig. 6). Dan verandert y nooit van teken, maar alleen in grootte.



- c) $V_{\max}(x) > h > V_{\min}(x)$. (verondersteld wordt, dat er geen horizontale raaklijn tussen de rechten $z=h$ en de kromme $Z=V(x)$ aanwezig is).
 Voorbeeld fig.5; $h=h_2$. Tussen a en b is beweging mogelijk. 2 is een wervelpunt. Door verandering van h_2 ontstaat een familie van gesloten krommen om het punt 2, welke een "eiland" vormen in het fase-vlak. Evenzo tussen c en d. (wervelpunt 4).
- d) bij monotone daling onder het energieniveau h wordt de beweging mogelijk en dit levert een kromme die naar het oneindige gaat. Voorbeeld: links van 0.
- e) $h=V(x_1)$ voor zekere $x=x_1$. Tussen 2 en 3 zal de beweging asymptotisch tot punt 3 naderen. Punt 3 is zadelpunt. De eilanden om wervelpunt 2 groeien en blijven periodieke bewegingen voorstellen voor $h_2 \rightarrow h$. Voor $h_2=h_3$ gaat het periodieke karakter verloren, omdat de tijd nodig voor het bereiken van een zadelpunt, oneindig is. Voor $h_2=h$ ontstaat er om de beide wervelpunten een singuliere kromme van lemniscatische vorm, met een dubbelpunt in 3. Deze scheidt de gesloten krommen om 3' en 4' afzonderlijk van de (gestippelde) gesloten kromme van andere soort, die behoort bij een energie constante $> h$, en die de beide wervelpunten 2 en 4 gelijktijdig omloopt.
- Zulk een kromme draagt daarom de naam van separatrix. Wanneer de rechte h de energiekromme in 2 opeenvolgende maxima raakt, zoals in 9 en 11, dan krijgen wij een separatrix in kettingvorm, die de 3 punten 8', 10' en 12' omloopt.
- Voor zulke waarden van h verandert de topologische structuur van de fasekrommen van karakter. Men spreekt hier van "bifurcatie".
- Uit voorgaande elementaire beschouwingen volgt de stelling:
Een gesloten fasekromme omsluit steeds een oneven aantal singuliere punten (wervelpunten en zadelpunten). Het aantal wervelpunten, dat omsloten wordt is 1 groter dan het aantal omsloten zadelpunten.

Colloquium

"Niet-lineaire verschijnselen"

door

Prof.Dr C.S. van Veen

(2 December 1955 te Delft)

III

9) Onderzoek van conservatieve stelsels als functie van een parameter Critische waarden van de parameter.

Wij beschouwen dynamische problemen, die worden beschreven door een differentiaalvergelijking, welke een parameter λ bevat. Bij verandering van λ zullen de baankrommen van de oplossing variëren.

Gewone waarden van λ zijn zulke waarden, die baankrommen van dezelfde soort leveren (b.v. gesloten baankrommen, behorende tot hetzelfde "eiland", zoals de omgeving van de punten 2', 4', 8', 10', 12' in par. 8).

In een interval van "gewone" waarden van λ geeft continue verandering van λ continue verandering der krommen, zonder radicale verandering van hun topologisch karakter (passeren van de separatrix).

De waarden λ_k van λ , waarvoor het topologisch karakter abrupt verandert, heten "critische waarden".

Wij nemen aan, dat de potentiële energie van een parameter λ afhangt, dus gelijk is aan $V(x, \lambda)$. De kracht is

$$f(x, \lambda) = - \frac{\partial V(x, \lambda)}{\partial x}.$$

Evenwichtspunten corresponderen met extrema der potentiaalfunctie, dus deze voldoen aan

$$\frac{\partial V(x, \lambda)}{\partial x} = 0 \quad (1).$$

Het verloop van de kromme $\frac{\partial V(x, \lambda)}{\partial x} = 0$ wordt voorgesteld in een (x, λ) -vlak (fig. 1). Voor gegeven $\lambda = \lambda_0$ van de parameter worden de evenwichtsstanden x_1, x_2, x_3 bepaald door de snijpunten A, B, C met de rechte $\lambda = \lambda_0$.

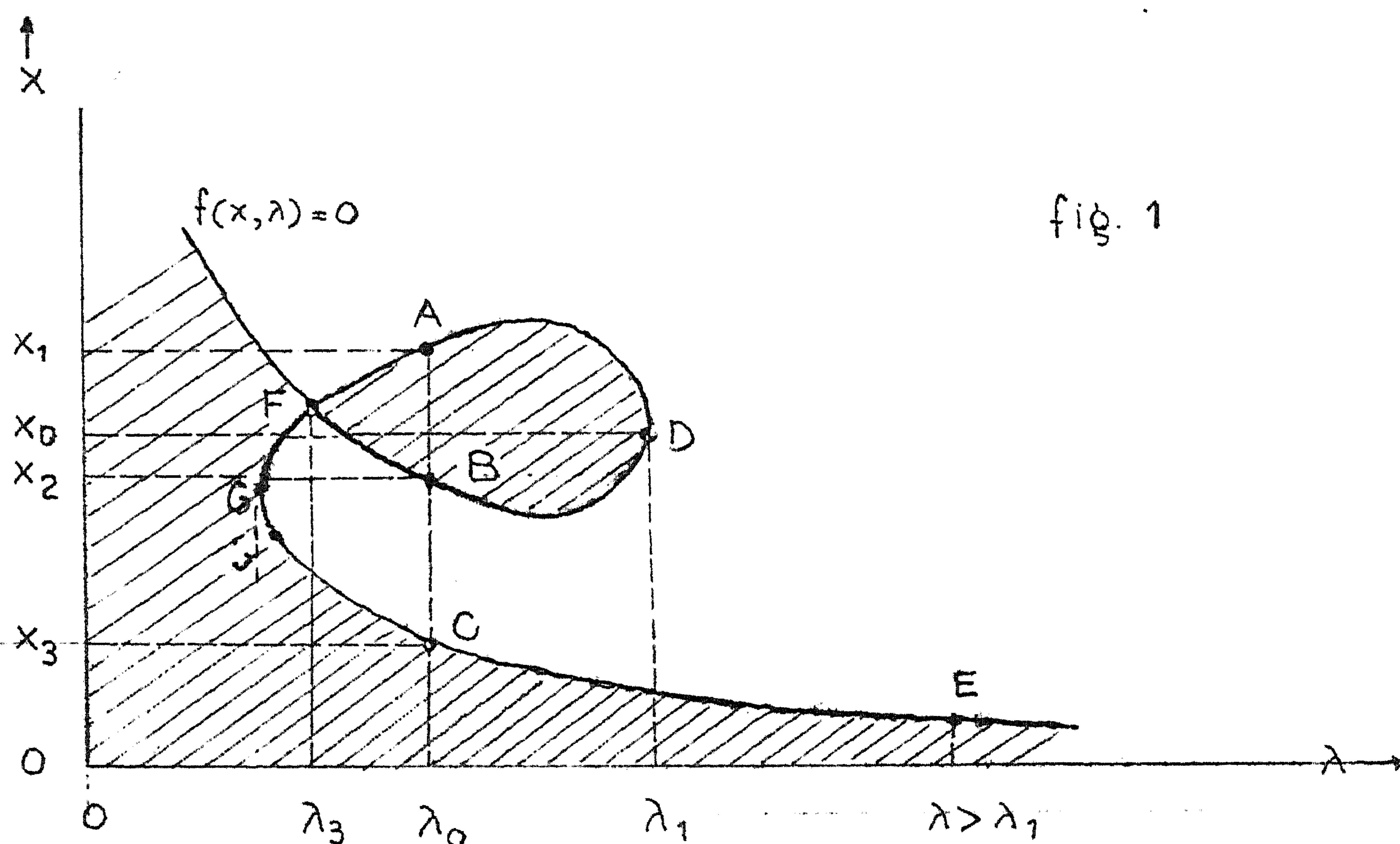


fig. 1

In par. 11 is gezien, dat voor $V(x, \lambda) \equiv \text{minimum}$ ($\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} < 0$) het evenwicht stabiel is (evenwichtspunt = wervelpunt); voor $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$ is het evenwicht instabiel.

De richting van de raaklijn aan de kromme $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ in fig. 1 wordt bepaald door:

$$\frac{dx}{d\lambda} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \lambda}}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$$

Als $\lambda > \lambda_0$ wordt, zal er bij de waarde $\lambda = \lambda_1$ een samenvallen van de punten A en B in D ontstaan. Dan is $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. (2 gelijke wortels x_0 van $f(x, \lambda) = 0$). $\lambda = \lambda_1$ levert een kritische waarde van de parameter. Als λ stijgend de waarde λ_1 passeert, verdwijnen er 2 van de 3 evenwichtspunten, en er blijft slechts 1 waarde over (zie E).

10) Criterium van Poincaré voor de soort van het evenwicht.

De kromme $\frac{\partial V(x, \lambda)}{\partial x} = 0$ is de meetkundige plaats der evenwichtspunten. Sommige punten behoren bij stabiel evenwicht, andere bij instabiel evenwicht. Poincaré heeft een zeer eenvoudig criterium gevonden voor het onderscheid tussen de puntverzamelingen van beide groepen. De kromme $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ vormt de scheidingslijn tussen de punten $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0$ en $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0$.

Laat in fig. 1 het gearceerde gedeelte het gebied $f(x, \lambda) > 0$ voorstellen. Het criterium van Poincaré luidt dan als volgt:

Voor $x > 0$ en $\lambda > 0$ leveren de punten van $f(x, \lambda) = 0$, welke gelegen zijn boven het gebied $f(x, \lambda) > 0$ punten x_k waarin het evenwicht stabiel is (wervelpunten), en die welke onder het gebied $f(x, \lambda) > 0$ zijn gelegen, leveren punten waarin het evenwicht instabiel is (zadelpunten).

A levert een punt van stabiel evenwicht x_1 , meer algemeen alle punten van de tak FAD en van de tak GCE.

B levert een punt van instabiel evenwicht x_2 , meer algemeen alle punten van de tak FBD en FG.

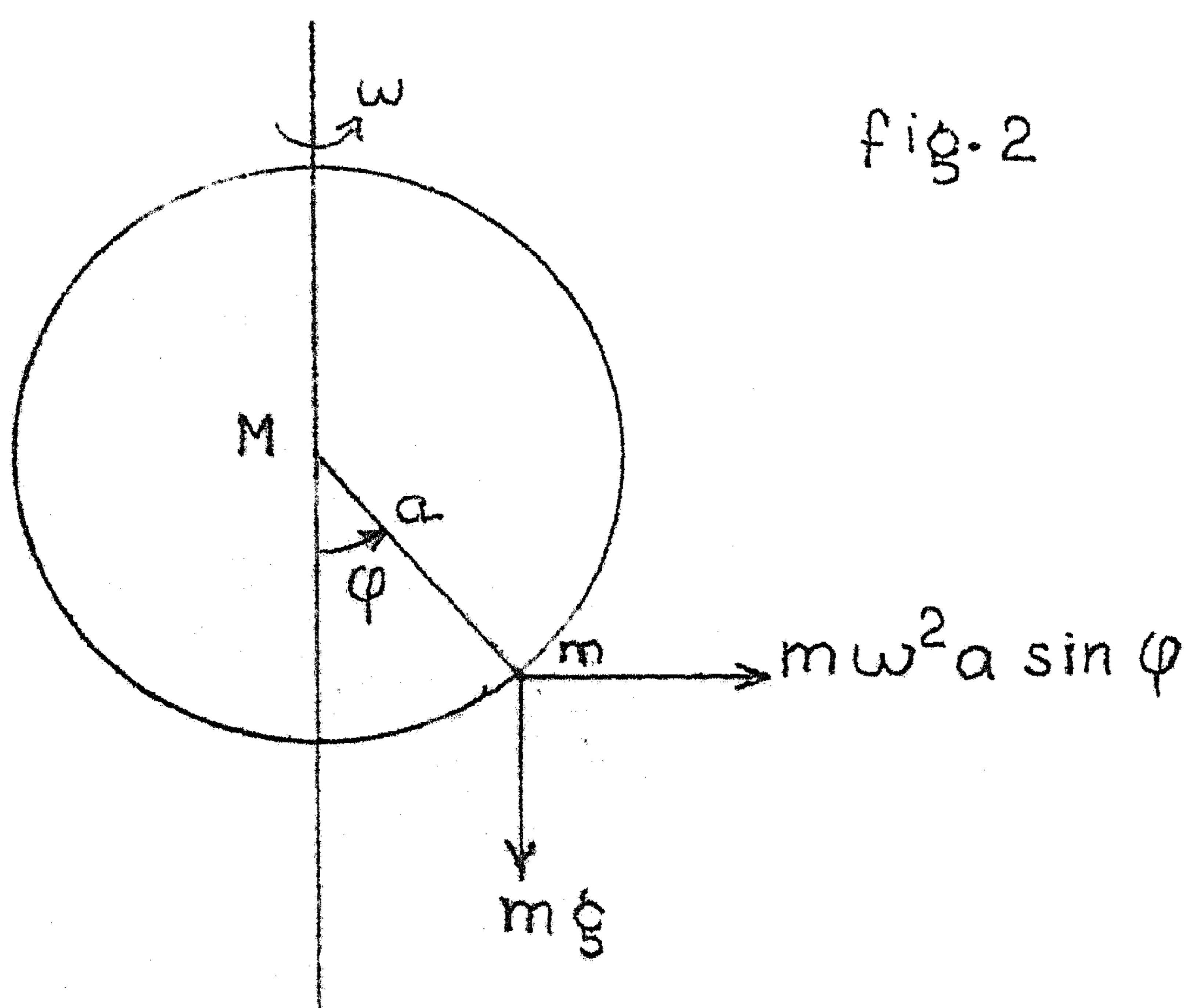
Bewijs: Laat x variëren bij constante λ . Bij toenemende x zal in A de waarde van $f(x, \lambda)$ veranderen van positief in negatief, dus

$\frac{\partial f}{\partial x} < 0$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0$, dus V is minimum (stabiel evenwicht).

In B verandert $f(x, \lambda)$ van negatief in positief, dus $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} < 0$ dus V is maximum (instabiel evenwicht).

De waarden λ_1 (bij D) en λ_3 (bij F) leveren kritische λ -waarden. Bij D gaan bij toenemende waarde van λ 2 evenwichtspunten na samenvallen verloren. Bij F (dubbelpunt) verwisselen zij van karakter (stabiel $\rightarrow$ instabiel, en instabiel $\rightarrow$ stabiel) (verwisseling van stabiliteiten). In conservatieve systemen verschijnen en verdwijnen de evenwichtspunten altijd bij paren. De verdwijning vindt plaats na het samenvloeden van een wervelpunt met een zadelpunt.

11) Voorbeelden: Conische slinger (centrifugaal-regulator).



Hoeksnelheid om verti-

cale as = ω

centrifugale kracht = $m\omega^2 a \sin \varphi$.

Het resulterende moment

t.o.v. M =

$m\omega^2 a^2 \sin \varphi \cos \varphi - m g a \sin \varphi$

De differentiaalvergelijking voor de beweging is:

$$ma^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} - ma^2 \omega^2 (\cos \varphi - \lambda) \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

waarin λ de parameter $\frac{g}{\omega^2 a}$ voorstelt.

Het equivalente stelsel:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \psi ;$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega^2 (\cos \varphi - \lambda) \sin \varphi .$$

levert de fase-vergelijking:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\omega^2 (\cos \varphi - \lambda) \sin \varphi}{\psi} \quad (2)$$

singuliere punten: $\begin{cases} \psi_1 = 0 \\ \psi_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_2 = 0 \\ \psi_2 = \pm \pi \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_3 = 0 \\ \psi_3 = \arccos \lambda \end{cases}$

Het derde singuliere punt is alleen aanwezig als $\lambda = \frac{g}{\omega^2 a} \leq 1$ is, dus als ω groot genoeg is.

De "kracht" wordt gegeven door de vergelijking:

$$f(\varphi, \lambda) = \omega^2 (\cos \varphi - \lambda) \sin \varphi .$$

Evenwichtspunten:

$$f(\varphi, \lambda) = 0$$

d.w.z. $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, $\varphi = -\pi$, en $\cos \varphi = \lambda$. (zie fig. 3).

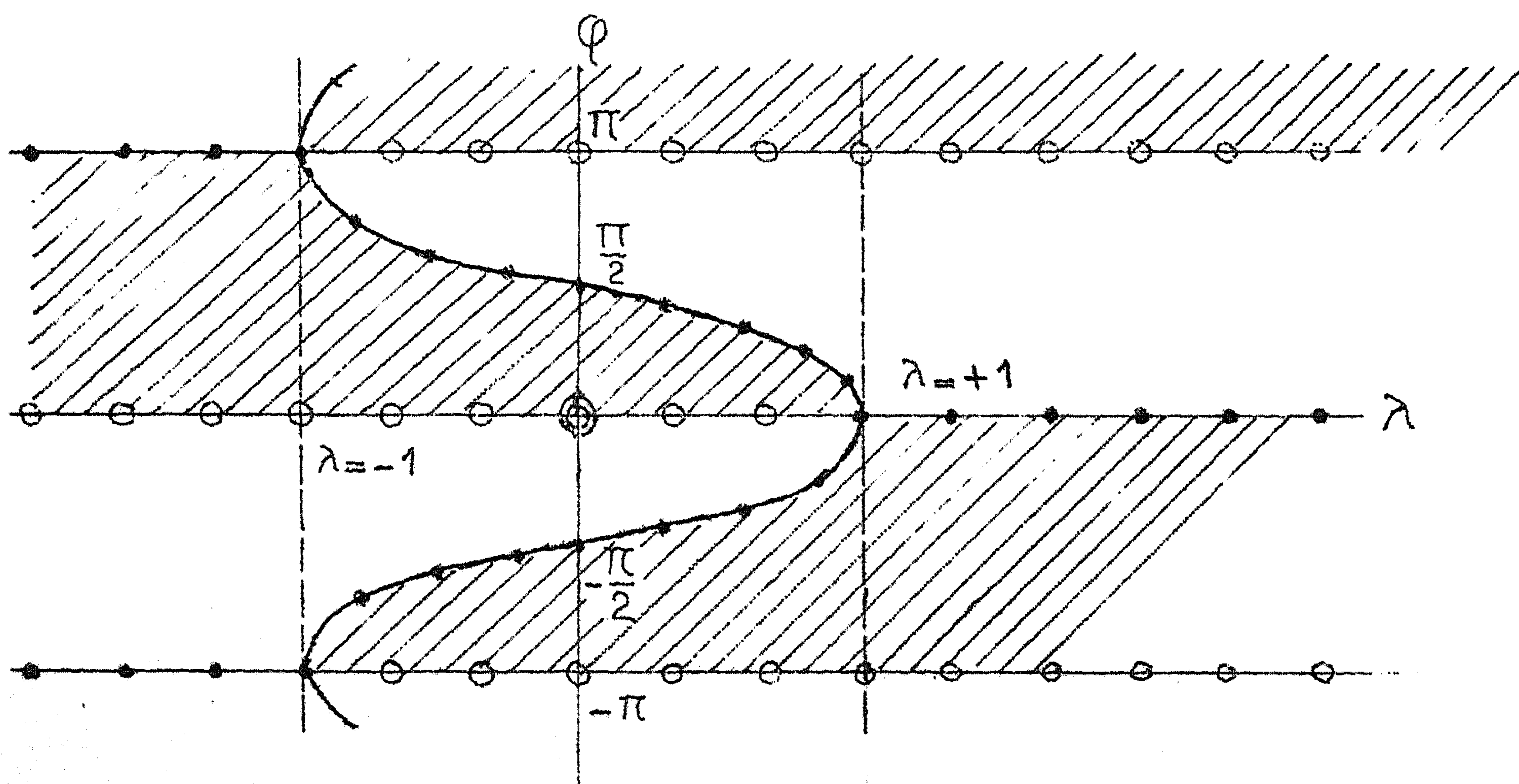


fig. 3

Het gearceerde gebied stelt weer het gebied $f(\varphi, \lambda) > 0$ voor.
Zwarte punten leveren stabiele singulariteiten, witte punten in-
stabiele singulariteiten.

Critieke punten zijn de punten $(\varphi = 0, \lambda = 1)$, $(\varphi = \pi, \lambda = -1)$,
 $(\varphi = -\pi, \lambda = -1)$. Hier vindt "verwisseling van stabiliteiten"
plaats.

De kromme $\cos \varphi = \lambda$ is de meetkundige plaats der punten, die wer-
velpunten leveren.

Energieintegraal: $\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \omega^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi}{2} + \lambda \cos \varphi \right) = h$.

De separatrix wordt bepaald als fasekromme door de zadelpunten
 $(\varphi = \pm \pi; \dot{\varphi} = 0)$, dus

$$h = \omega^2 \lambda.$$

Deze separatrix wordt dus voorgesteld door:

$$\varphi^2 = \omega^2 \{ \sin^2 \varphi + 2\lambda (\cos \varphi + 1) \} \quad (A).$$

Evenzo is er een tweede separatrix, gaande door het 2e zadelpunt
 $(\varphi = 0; \dot{\varphi} = 0)$ dus $h = -\omega^2 \lambda$.

$$\varphi^2 = \omega^2 \{ \sin^2 \varphi + 2\lambda (\cos \varphi - 1) \} \quad (B)$$

(zie fig. 4).

In fig. 4 zijn de fase-banen geschetst voor het geval $0 < \lambda < 1$.

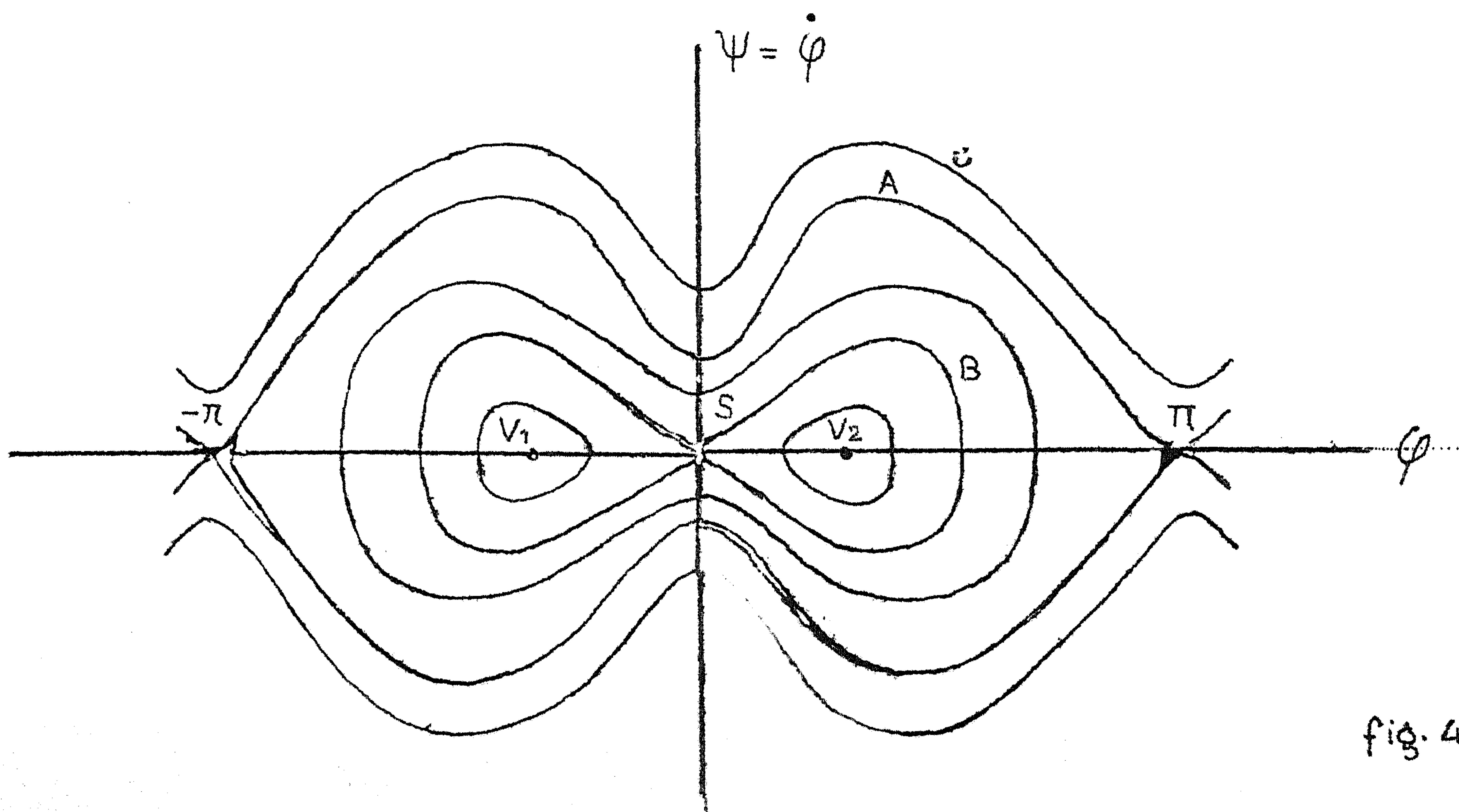


fig. 4

Voor $\omega = 0$ vinden wij het wervelpunt $\varphi = 0, \psi = 0$.

Voor $\omega \neq 0$ wordt dit singuliere punt zadelpunt (S).

Tegelijk ontstaan er voor $\omega \neq 0$ 2 wervelpunten V_1 en V_2 op de φ -as symmetrisch t.o.v. S met coördinaten $\varphi = \pm \arccos \frac{1}{\lambda}, \psi = 0$.

Om deze wervelpunten zijn periodieke bewegingen mogelijk.

Wanneer de energieconstante h de critische waarde $-\omega^2\lambda$ overschrijdt, zal de separatrix B worden gepasseerd, en dan wordt de beweging weer periodiek en symmetrisch t.o.v. S. Wanneer de energieconstante de andere critische waarde $+\omega^2\lambda$ overschrijdt, wordt de separatrix A gepasseerd. De beweging wordt dan roterend (kromme c).

Voor $\lambda = 0$, d.w.z. $\omega \rightarrow \infty$, vloeien de beide separatrices samen. De punten V_1 en V_2 naderen tot $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ (fig. 5)

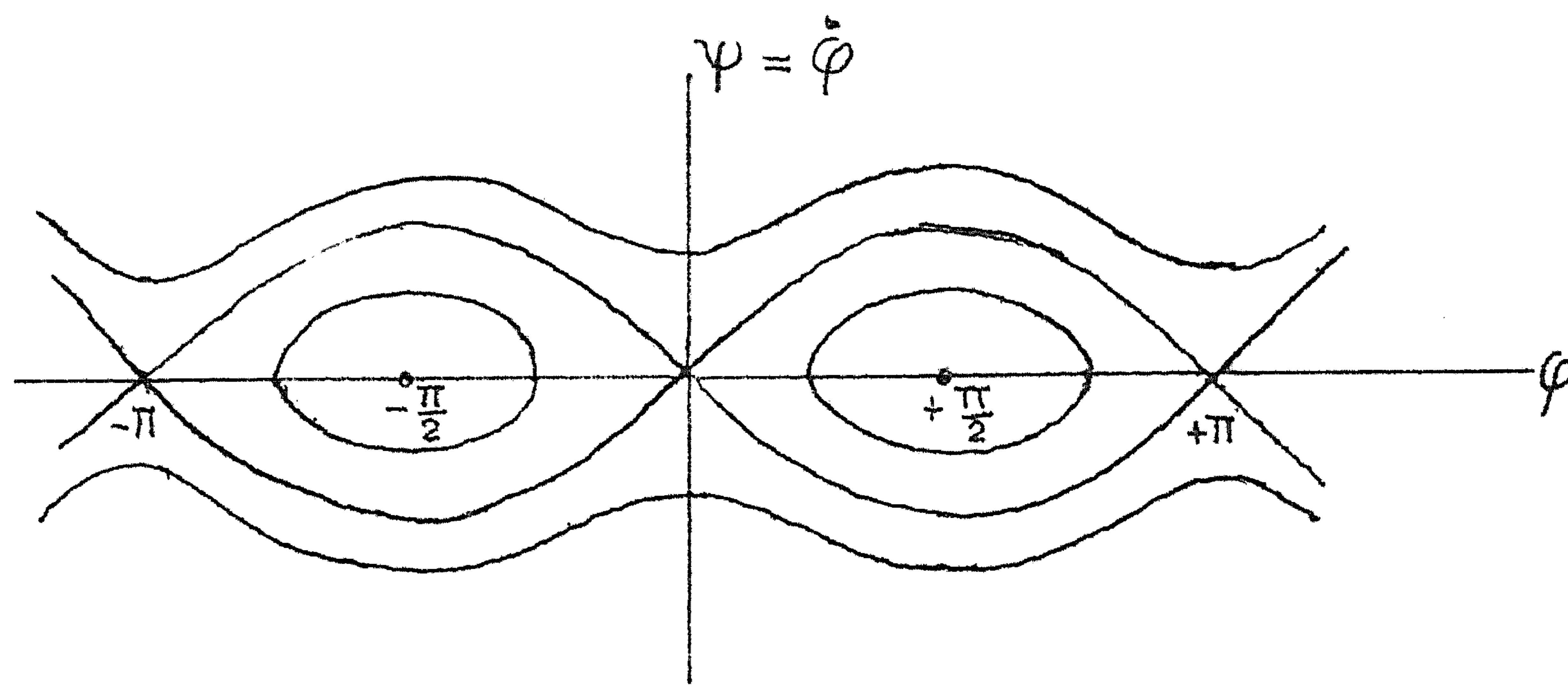


fig. 5

Voor $|\lambda| > 1$ ontstaan wervelpunten $\varphi = 0, \pi, -\pi$. De tussengelegen wervelpunten zijn verdwenen.

Colloquium

"Niet-lineaire verschijnselen"

door

Prof.Dr S.C. van Veen

(16 December 1955 te Delft)

IV

12) Onderzoek van de stabiliteit. Inleiding.

Het voorafgaande onderzoek kan worden samengevat in de volgende 3 uitkomsten. De fasekrommen der dynamische stelsels vertonen de volgende eigenschappen:

- a) Zij kunnen de singuliere punten naderen, hetzij voor $t \rightarrow +\infty$, hetzij voor $t \rightarrow -\infty$, hetzij voor beide gevallen. Deze punten corresponderen in het algemeen met evenwichtspunten.
- b) De baankrommen kunnen gesloten zijn, zodat zij met periodieke bewegingen corresponderen.
- c) De baankrommen kunnen naar het oneindige gaan of uit het oneindige komen.

Wij interesseren ons voornamelijk voor stationnaire toestanden, d.w.z. de gevallen a en b. Het geval c, (niet-stationnaire beweging) is van minder praktisch belang, omdat de kromme spoedig buiten het waarnemingsgebied komt.

Geval a) karakteriseert beweging in de buurt van evenwichtstoestanden en het probleem der stabiliteit behelst dan het onderzoek naar het evenwicht. Geval b) karakteriseert weliswaar beweging, maar ook dit vertoont verschillende stabiliteits-eigenschappen, die wij later zullen onderzoeken.

Een focus is een stabiel punt als het wordt genaderd voor $t \rightarrow +\infty$.

" " " " instabiel " " " " " " " " $t \rightarrow -\infty$.

(dus als het beeldpunt zich er onbepaald van verwijdert).

Voor een knooppunt geldt hetzelfde.

Een zadelpunt is steeds instabiel in deze betekenis.

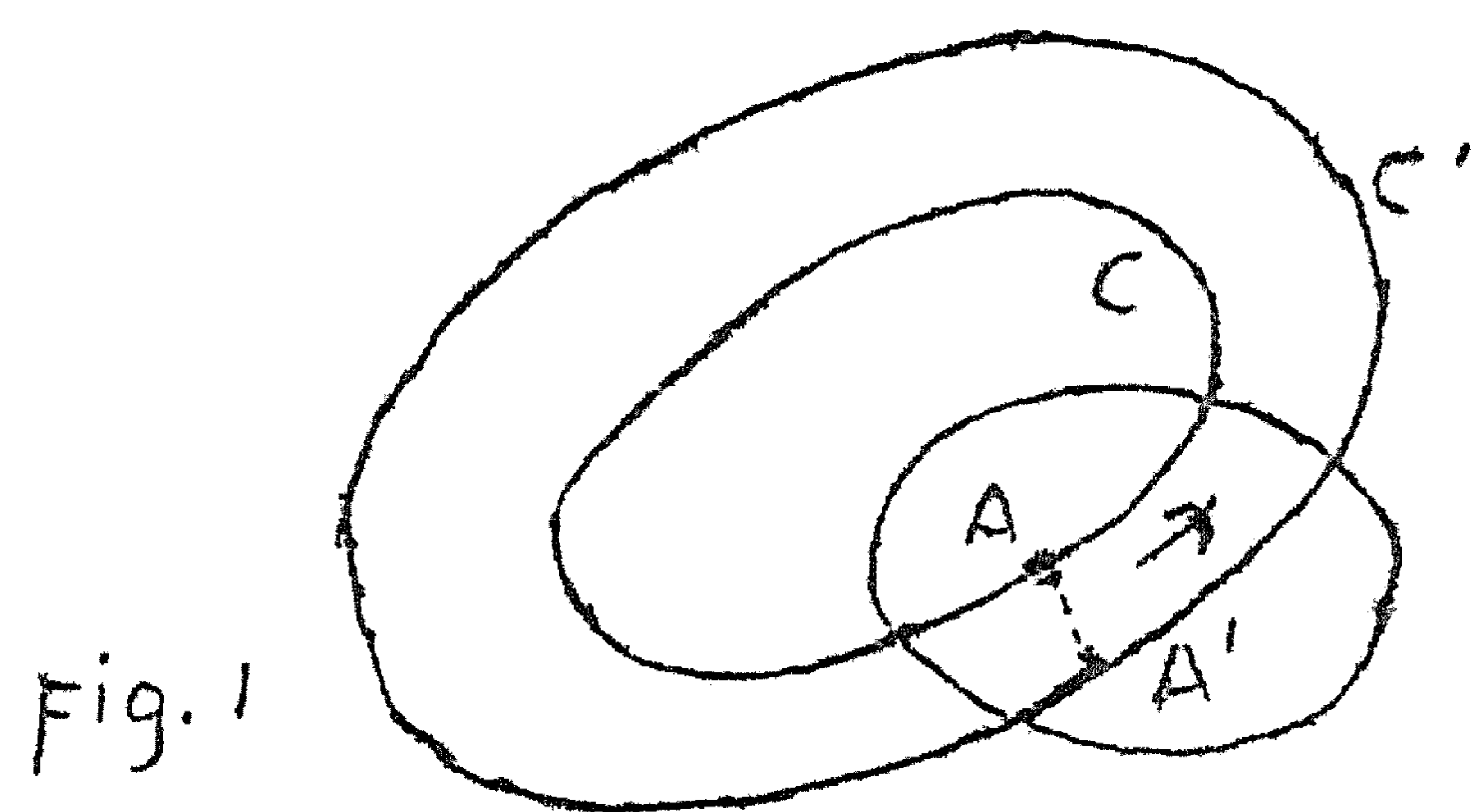
(Men zou geneigd zijn te zeggen, dat een punt gelegen op de tak van de separatrix, waarin de beweging naar het zadelpunt is gericht (zie fig.5, Syll.II). een stabiele beweging heeft. Het is daarom beter om bij een zadelpunt te spreken over bijna instabiele singulariteit).

De gewone definitie van stabiliteit $\equiv$ asymptotische benadering van de evenwichtspositie gaat niet door voor een wervelpunt, hoewel dit een duidelijk geval van stabiliteit is. Hier zal het fasepunt gesloten banen blijven beschrijven en niet asymptotisch naderen tot het singuliere punt.

Daarom is de definitie van stabiliteit gegeneraliseerd door Liapounoff, zodat daarmee zowel evenwichtstoestanden als stationnaire bewegingen kunnen worden omvat.

13). Stabiliteit in de zin van Liapounoff.

Eerst enige intuïtieve meetkundige beschouwingen.



A doorloopt een gesloten fasekromme C. Door een kleine verplaatsing (storing) komt A in A' en doorloopt een naburige baan C'.

De oorspronkelijke afstand A A' is zeer klein. Wanneer deze afstand nu klein blijft, als de tijd verandert,

dan heet de beweging stabiel in de zin van Liapounoff. Het is duidelijk, dat deze definitie insluit, dat de bewegingen isochroon verlopen, d.w.z. dat de periode van A op C exact gelijk is aan de periode van A' op C'. In het algemeen zal aan de voorwaarde van isochronisme slechts bij benadering worden voldaan in conservatieve stelsels, zodat zulke bewegingen i.h.a. onstabiel zijn in de zin van Liapounoff voor onbeperkte t, ofschoon ze als tijdelijk stabiel kunnen worden beschouwd, als voor een beperkt tijdsinterval de bewegingen bijna isochroon zijn in zeker gebied. Wij zullen later speciale periodieke bewegingen bij niet-lineaire stelsels ontmoeten, die stabiliteit in de zin van Liapounoff vertonen voor alle waarden van t.

Na deze kwalitatieve beschouwingen moge nu de exacte, analytische definitie van het begrip "stabiliteit in de zin van Liapounoff" volgen.

Gegeven: $x=x(t, x_0, y_0)$ en $y=y(t, x_0, y_0)$ zijn de coördinaten in het (x,y)-vlak van een periodieke beweging langs een baan C, met periode T, d.w.z. $x(T)=x(0)$; $y(T)=y(0)$.

Deze beweging heet stabiel in de zin van Liapounoff, als bij gegeven $\varepsilon > 0$ een getal $\delta(\varepsilon) > 0$ kan worden bepaald, zodat voor

$$|\bar{x}_0 - x_0| < \delta \quad ; \quad |\bar{y}_0 - y_0| < \delta$$

geldt:

$$|x(t, x_0, y_0) - x(t, \bar{x}_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon \quad ; \quad |y(t, x_0, y_0) - y(t, \bar{x}_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon$$

voor alle waarden van t.

Hierin stellen $\bar{x}_0, \bar{y}_0$ de gevarieerde beginwaarden x_0, y_0 voor.

Als de baan C ineenschrompelt tot een punt, gaat de definitie van Liapounoff over in de definitie van "stabiliteit van het evenwicht"

14) Kanonieke vorm der lineaire vergelijkingen. Karakteristieke vergelijking. Klassificatie der singulariteiten volgens Poincaré.

Beschouw het simultane stelsel van lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned} \quad (a, b, c, d \text{ constant}). \quad (1)$$

Differentiaalvergelijking van de fasebaan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}. \quad (1a)$$

Op analoge wijze kan men een algemeen niet-lineair stelsel bestuderen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + Q(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

of

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy + Q(x, y)}{ax + by + P(x, y)} \quad (2a)$$

waarin $P(x, y)$ en $Q(x, y)$ veeltermen in x en y voorstellen, waarin de termen van de laagste graad termen van de 2e graad zijn.

Wij zullen later zien, dat het gedrag van (2) in de omgeving van het singuliere punt ($x=0, y=0$) in hoge mate overeenstemt met het eenvoudig te beheersen gedrag van de oplossingen van (1).

Lineaire transformatie:

$$\begin{aligned} u &= \alpha x + \beta y \\ v &= \gamma x + \delta y \end{aligned} \quad \text{met} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{één-één-correspondentie}). \quad (3)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zijn constanten, die wij zo moeten bepalen, dat het stelsel kan worden getransformeerd in:

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1 u; \quad \frac{dv}{dt} = \lambda_2 v. \quad (4)$$

Uit (3) volgt:

$$\frac{du}{dt} = \alpha \frac{dx}{dt} + \beta \frac{dy}{dt} = (\alpha a + \beta c)x + (\alpha b + \beta d)y = \lambda_1 (\alpha x + \beta y).$$

$$\frac{dv}{dt} = \gamma \frac{dx}{dt} + \delta \frac{dy}{dt} = (\gamma a + \delta c)x + (\gamma b + \delta d)y = \lambda_2 (\gamma x + \delta y).$$

Door gelijkstelling van de coëfficiënten van x en y volgt:

$$\begin{aligned} \alpha(a - \lambda_1) + \beta c &= 0. \\ \alpha b + \beta(d - \lambda_1) &= 0. \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} \gamma(a - \lambda_2) + \delta c &= 0. \\ \gamma b + \delta(d - \lambda_2) &= 0. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Aan deze stelsels kunnen alleen niet-triviale oplossingen voor α, β , resp. γ, δ voldoen (d.w.z. oplossingen $\neq 0$) als λ_1 en λ_2 oplossingen zijn van de vierkantsvergelijking:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{of:} \quad \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0 \quad (6)$$

Vergelijking (6) draagt de naam van karakteristieke vergelijking van het stelsel (1).

Na oplossing van λ uit (6) vindt men uit (5) de verhouding $\frac{\alpha}{\beta}$, resp.

$\frac{\gamma}{\delta}$. Als $\lambda_1 \neq \lambda_2$, is $\frac{\alpha}{\beta} \neq \frac{\gamma}{\delta}$ of

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{voor} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Omgekeerd volgt uit (5) dat uit $\Delta \neq 0$ ook volgt: $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

tenzij: $\lambda_1 = \lambda_2 = a = d$; $b = c = 0$, in welk geval de oorspronkelijke vergelijkingen (1) reeds de gedaante (4) hebben.

De verkregen eenvoudige vorm (4) heet de kanonieke vorm.

Omgekeerd is nu door oplossing van (3): $x = \frac{\delta u - \beta v}{\Delta}$; $y = \frac{-\gamma u + \alpha v}{\Delta}$.

Aan (5) kan worden voldaan door:

$$\alpha = -c \Delta, \quad \beta = (a - \lambda_1) \Delta$$

$$\gamma = c \Delta, \quad \delta = -(a - \lambda_2) \Delta$$

dus $x = (\lambda_2 - a)u + (\lambda_1 - a)v$; $y = -c(u+v)$.

Door analoge transformatie gaat het stelsel (2) over in:

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1 u - \frac{1}{c(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[c \cdot \bar{P}(u,v) + (\lambda_1 - a) \bar{Q}(u,v) \right]$$

$$\frac{dv}{dt} = \lambda_2 v + \frac{1}{c(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[c \cdot \bar{P}(u,v) + (\lambda_2 - a) \bar{Q}(u,v) \right].$$

Wij nemen nu in het vervolg aan: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ dus $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$.

Stelling I: Voor λ_1 en λ_2 reëel van het zelfde teken bezit (1) een knooppunt in $x=y=0$.

Bewijs: $\frac{dv}{du} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{v}{u} \rightarrow v = Cu^m \quad (m = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0)$.

Voor $m > 1$ raken de krommen aan de u -as in de oorsprong (behalve de singuliere kromme $u=0$, die behoort bij $C \rightarrow \infty$).

Voor $m < 1$ raken de krommen aan de v -as, behalve $v=0$, die behoort bij $C=0$.

Voor λ_1 en λ_2 beide < 0 volgt uit (4) dat het beeldpunt in het fasevlak asymptotisch nadert tot $u=v=0$ voor $t \rightarrow +\infty$. Dan is de oorsprong

een stabiel knooppunt.

Evenzo is voor λ_1 en λ_2 beide > 0 de oorsprong een instabiel knooppunt.

Stelling II: Voor λ_1 en λ_2 reëel van verschillend teken bezit (1) een zadelpunt in $x=y=0$.

Bewijs: $\frac{dv}{du} = -m \frac{v}{u}$, met $m = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| > 0$, dus $v = C u^{-m}$.

De fasebanen zijn hyperbolische krommen, met de assen als asymptoten. Voor $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ zal een fasepunt dicht bij de u-as zich van de oorsprong verwijderen, maar een punt dicht bij de v-as zich tot de oorsprong naderen (zadelpunt).

Stelling III: Voor λ_1 en λ_2 toegevoegd complex bezit (1) een focus in $x=y=0$.

Bewijs: Voor λ_1 en λ_2 toegevoegd complex zijn ook u en v toegevoegd complex (omdat $\frac{\alpha}{\beta}$ en $\frac{\gamma}{\delta}$ volgens (5) toegevoegd complex zijn).

$$\begin{aligned} \text{Dus: } u &= u_1 + i v_1 \\ v &= u_1 - i v_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{du_1}{dt} + i \frac{dv_1}{dt} = \lambda_1 u = (a_1 + i b_1)(u_1 + i v_1). \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{du_1}{dt} - i \frac{dv_1}{dt} = \lambda_2 v = (a_1 - i b_1)(u_1 - i v_1). \end{aligned} \quad (7)$$

of:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= a_1 u_1 - b_1 v_1 \\ \frac{dv_1}{dt} &= a_1 v_1 + b_1 u_1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{dv_1}{du_1} = \frac{b_1 u_1 + a_1 v_1}{a_1 u_1 - b_1 v_1}.$$

Invoering van poolcoördinaten: $u_1 = z \cos \varphi$, $v_1 = r \sin \varphi$ geeft

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{a_1}{b_1} r \rightarrow r = C e^{\frac{a_1}{b_1} \varphi}. \quad (\text{logaritmische spiralen}).$$

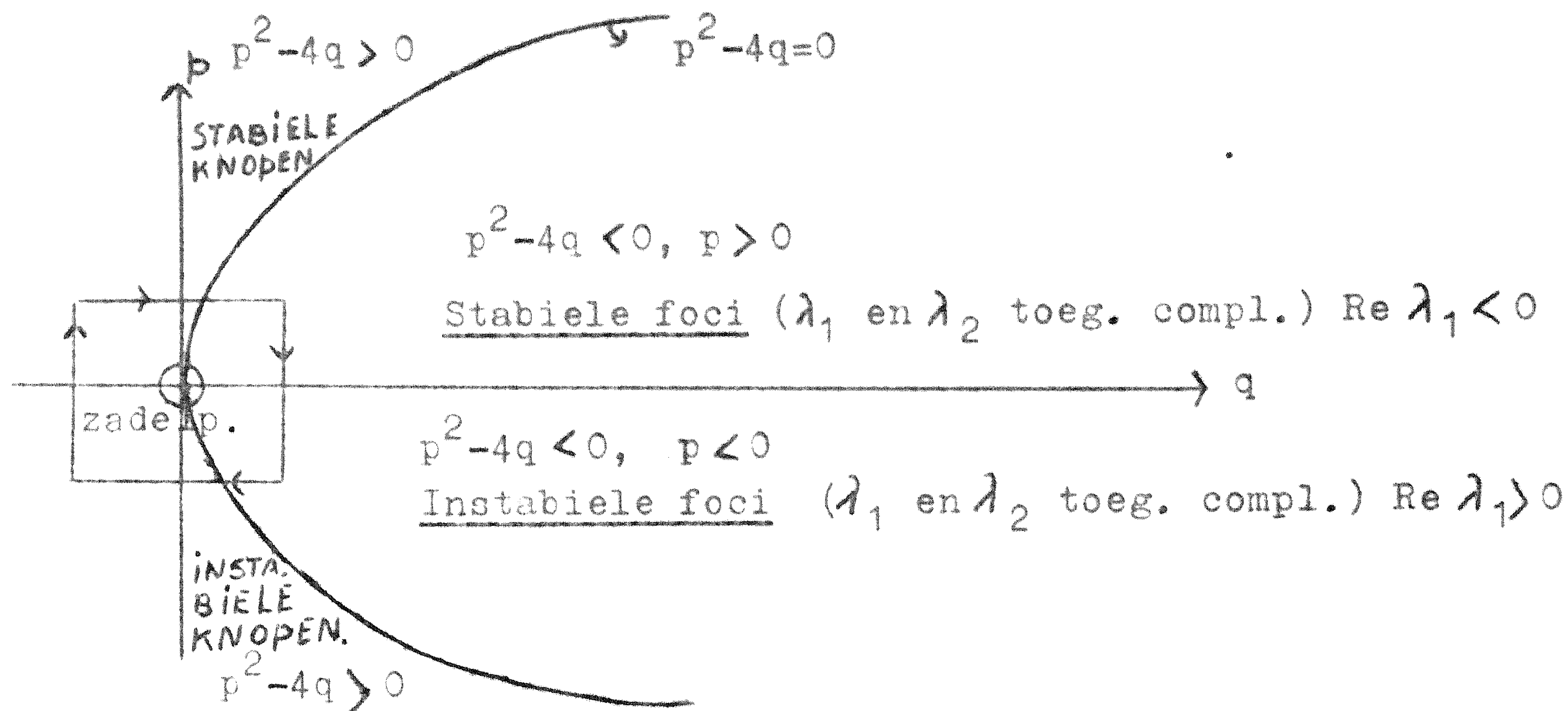
$$\text{Uit (7) volgt verder } u_1 \frac{du_1}{dt} + v_1 \frac{dv_1}{dt} = r \frac{dr}{dt} = a_1 r^2$$

$$\frac{dr}{dt} = a_1 r.$$

Dus voor $a_1 < 0$ asymptotische nadering tot focus (stabiele focus)
 $a_1 > 0$ " " " verwijdering van focus (instabiel).

Overzicht : $p = -(a+d)$; $q = \left| \frac{ab}{cd} \right|$.

De karakteristieke vergelijking wordt: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.



In de naaste omgeving van 0 blijken gebieden van totaal verschillend stabiliteitskarakter aan één te sluiten.

0 heet vertakkingspunt. De parabool $p^2 - 4q = 0$ vormt de overgang tussen knopen en foci, d.w.z. tussen aperiodieke bewegingen en gedempte trillingen.

"Niet-lineaire verschijnselen"

(13 januari 1956 te Delft)

15. Stabiliteit van het evenwicht volgens Liapounoff.

Evenwichtsstand x_0 .

$$|x(t) - x_0| < \varepsilon \text{ voor } t_0 \leq t < +\infty \quad \text{als} \quad |x(t_0) - x_0| < \delta$$
$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

Aangenomen, dat $f(x)$ analytisch is in de omgeving van x_0 , dan is:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{z} f'(\mathbf{x}_0) + \frac{\mathbf{z}^2}{2!} f''(\mathbf{x}_0) + \dots$$

dus: $\frac{d}{dt} \zeta = a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + \dots \quad (a_1 = f'(x_0); a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!})$

Onder verwaarlozing van de hogere machten van ϵ is:

$$\frac{d}{dt} \text{---} = a_1 \text{---}, \text{ dus } \text{---} = C e^{a_1 t} \quad (1)$$

Dus voor $a_1 < 0$ is het evenwicht stabiel
 $a_1 > 0$ " instabiel

Vermenigvuldig beide leden van (1) met $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} \frac{d(\zeta^2)}{dt} = a_1 \zeta^2 + a_2 \zeta^3 + \dots = F(\zeta). \quad (F(0) = F'(0) = 0; F''(0) = 2a_1) \quad (2)$$

of

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\zeta^2}{2} F''(\theta \zeta), \text{ met } \rho = \frac{1}{2} \zeta^2 \text{ en } 0 < \theta < 1.$$

Wegens de aangenomen continuïteit van $F''(\zeta)$ volgt uit $F''(0) < 0$ dat $F''(\zeta) < 0$ voor kleine $|\zeta|$.

$$\text{dus } \frac{d\rho}{dt} < 0.$$

Dus als $\rho = \frac{1}{2} \zeta^2$ in het begintijdstip afneemt, zal deze afname zich voortzetten, dus het evenwicht is stabiel.

Evenzo vindt men uit $F''(0) > 0$ dat $\frac{d\rho}{dt} > 0$, dus het evenwicht is instabiel (in de zin van Liapounoff).

Uit dit voorbeeld zien wij, dat de vergelijking bij eerste benadering (1) een juist antwoord geeft op de vraag naar stabiliteit voor de algemene niet-lineaire vergelijking (2), onder de enkele beperking $a_1 \neq 0$.

16. De algemene stelling van Liapounoff.

Wij beschouwen het algemene dynamische stelsel:

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) ; \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y).$$

De differentiaalvergelijking van de fase-kromme is:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}.$$

Een evenwichtspunt (x_0, y_0) is een snijpunt van de krommen $P(x,y)=0$ en $Q(x,y)=0$. Wij beschouwen een punt, dat een kleine afwijking (ζ, η) van een evenwichtspunt vertoont.

$$x = x_0 + \zeta ; \quad y = y_0 + \eta.$$

Dan wordt:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= a\zeta + b\eta + [p_{11}\zeta^2 + 2p_{12}\zeta\eta + p_{22}\eta^2 + \dots] \\ \frac{d\eta}{dt} &= c\zeta + d\eta + [q_{11}\zeta^2 + 2q_{12}\zeta\eta + q_{22}\eta^2 + \dots] \end{aligned} \quad (3)$$

$$(a=P_x(x_0, y_0), b=P_y(x_0, y_0), c=Q_x(x_0, y_0), d=Q_y(x_0, y_0)).$$

De stelling van Liapounoff luidt:

Als de reële gedeelten van de wortels van de karakteristieke vergelijking, behorende tot het lineaire gedeelte van (3), $\neq 0$ zijn, dan le-

veren de lineaire vergelijkingen een correct antwoord omtrent de kwestie der stabiliteit van het niet-lineaire stelsel (3).

Bewijs: Herleid de vergelijking (3) door lineaire transformatie (§ 14) tot het kanonieke stelsel:

$$\frac{du}{dt} = S_1 u + (p_{11}^1 u^2 + 2p_{12}^1 uv + p_{22}^1 v^2) + \dots$$

$$\frac{dv}{dt} = S_2 v + (q_{11}^1 u^2 + 2q_{12}^1 uv + q_{22}^1 v^2) + \dots$$

Vermenigvuldig de eerste vergelijking met u , de 2^e met v en tel op:

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = S_1 u^2 + S_2 v^2 + \dots = \varphi(u, v)$$

met

$$\rho = u^2 + v^2.$$

a) S_1 en S_2 beide reëel en < 0 .

$z = \varphi(u, v) = S_1 u^2 + S_2 v^2 + \dots$ is maximum $z=0$ voor $u=0, v=0$.

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = S_1 u^2 + S_2 v^2 + \psi(u, v)$$

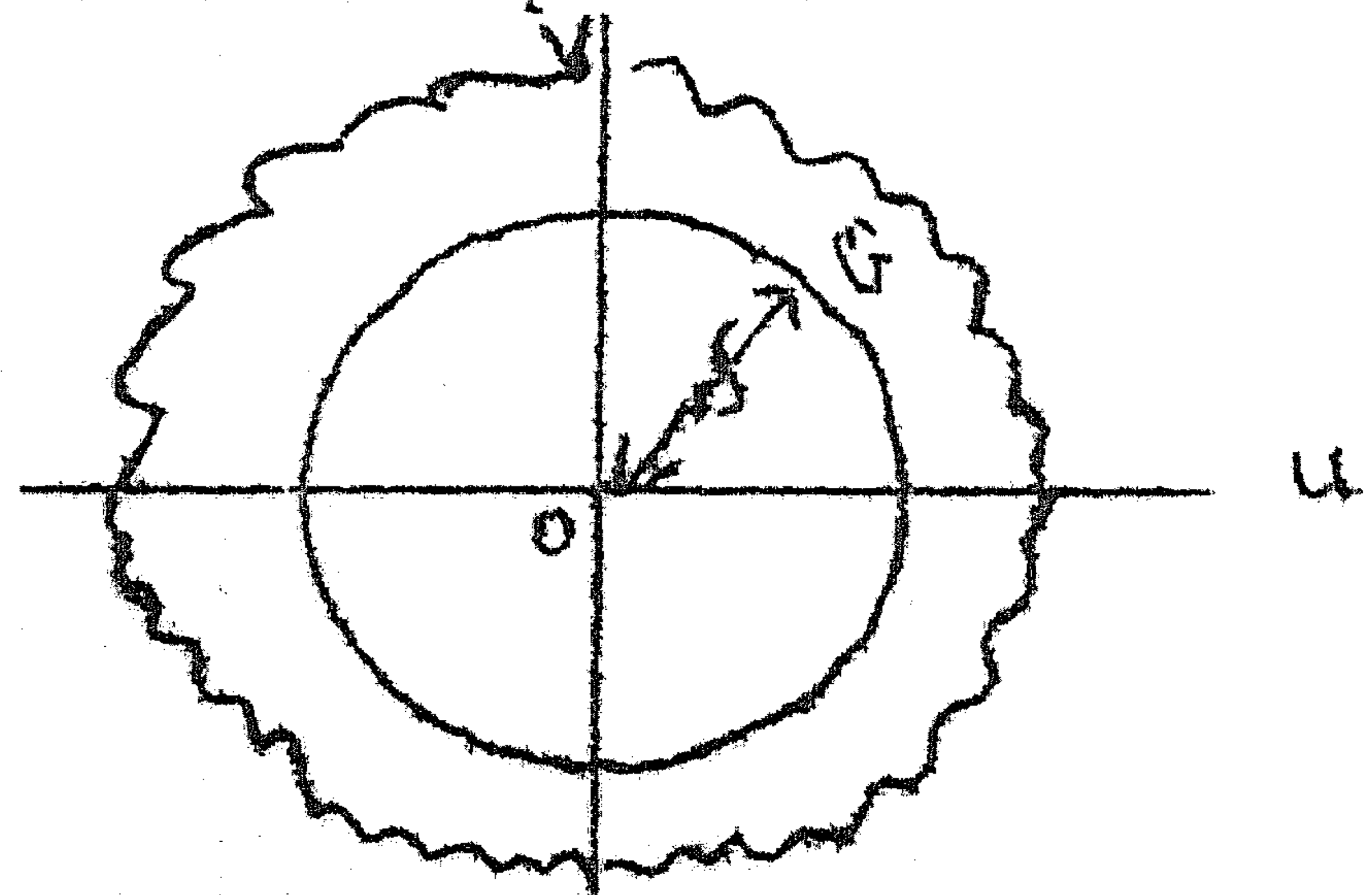
waarin $\psi(u, v)$ alleen termen van 3^e en hogere graad in u en v bevat. Er is een gebied G om de oorsprong aan te geven, waarin:

$$|\psi(u, v)| < \frac{1}{2} |S_1 u^2 + S_2 v^2|.$$

dus: $\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} < \frac{1}{2} (S_1 u^2 + S_2 v^2) \leq 0$ (gelijkteken alleen in $u=0, v=0$)

$$\text{en } \frac{1}{2} \left| \frac{d\rho}{dt} \right| > \frac{1}{2} |S_1 u^2 + S_2 v^2|$$

voor alle punten binnen G .



Voor δ klein genoeg zal cirkel om 0 met straal δ geheel binnen G vallen; kies beginpunt $R(u, v)$ binnen deze cirkel, dus $\rho = u^2 + v^2 < \delta^2$

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} < 0 \text{ (binnen de oorsprong)}$$

dus $\rho (> 0)$ neemt af, dus $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = \rho_0 \geq 0$.

Wij zullen nu bewijzen, dat $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0$, dus $\rho_0 = 0$.

Aangenomen dat $\rho_0 > 0$ was, dan zou voor $t \geq t_0$ (voldoende groot) $R(u, v)$ binnen G , maar buiten een cirkel met straal $\frac{\rho_0}{2}$ om 0 blijven.

Neem om de gedachten te bepalen $|S_1| \leq |S_2|$.

dus $|S_1 u^2 + S_2 v^2| \geq |S_1| (u^2 + v^2) \geq |S_1| \frac{\rho_0^2}{4}$ voor $t \geq t_0$.

$$\frac{1}{2} \left| \frac{d\rho}{dt} \right| \geq \frac{1}{2} \frac{\rho_0^2}{4} |S_1| > 0 \text{ voor } t \geq t_0.$$

$$|\rho(t) - \rho(t_0)| = \left| \int_{t_0}^t \frac{d\rho}{dt} dt \right| = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\rho}{dt} \right| dt$$

$$\geq \frac{\rho_0^2}{4} |S_1| (t - t_0)$$

dus $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \infty$, wat onmogelijk is.

Dus de aanname

$$\rho_0 > 0$$

is uitgesloten. Dus $\rho_0 = 0$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho = 0. \quad \text{Evenwicht stabiel.}$$

b). S_1 en S_2 beide reëel en > 0 .

$z = \varphi(u, v)$ bezit een minimum $z=0$ in de oorsprong.

Dus er is een gebied G om 0 , waarin $\varphi(u, v) > 0$. (gelijkteken alleen in

a). Analooog als bij a) $\frac{d\rho}{dt} \geq 0$ in G (gelijkteken alleen in 0), dus ρ monotoon toenemend. Evenwicht instabiel.

c). S_1 en S_2 beide reëel en van verschillend teken.

$z = \varphi(u, v)$ bezit een zadelpunt voor $u=0, v=0$.

Het gebied G om de oorsprong bestaat nu uit 2 gebiedsdelen:

I + II met $\varphi(u, v) > 0$

III + IV met $\varphi(u, v) < 0$.

In dit geval is het evenwicht instabiel, zoals wij nu zullen bewijzen.

Wij moeten eerst het teken van $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ bepalen.

Uit $\frac{1}{2} \frac{d\rho}{dt} = S_1 u^2 + S_2 v^2 + \dots \equiv \varphi(u, v)$ volgt:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\rho}{dt^2} = 2 S_1 u \frac{du}{dt} + 2 S_2 v \frac{dv}{dt} + \dots$$

$$= 2 S_1^2 u^2 + 2 S_2^2 v^2 + \dots = \varphi_1(u, v)$$

De functie $z = \varphi_1(u, v)$ bezit dus een minimum $z=0$ voor $u=0, v=0$.

Er is dus een omgeving G' van 0 , waarvoor $\varphi_1(u, v) > 0$, dus $\frac{d^2\rho}{dt^2} > 0$.

Kies nu een punt buiten de oorsprong en tegelijk binnen G' , maar binnen I of II, dus met $\frac{dP}{dt} > 0$, en $\frac{d^2P}{dt^2} > 0$, dus $\frac{dP}{dt}$ monotoon toenemend.

Hieruit volgt, dat het onmogelijk is een gebied δ om de oorsprong te bepalen, zodat een punt R, daarin gekozen (behalve in de oorsprong) binnen een willekeurig kleine cirkel met straal ϵ blijft. Het evenwicht is dus instabiel.

d). Ten slotte het geval S_1 en S_2 toegevoegd complex.

$$S_1 = a_1 + ib_1$$

$$S_2 = a_2 + ib_2.$$

Het stelsel $\frac{du}{dt} = S_1 u + (p_{11}^1 u^2 + 2p_{12}^1 uv + p_{22}^1 v^2) + \dots$

$$\frac{dv}{dt} = S_2 v + (q_{11}^1 u^2 + 2q_{12}^1 uv + q_{22}^1 v^2) + \dots$$

kan daardoor worden omgezet in:

$$\frac{du_1}{dt} = a_1 u_1 - b_1 v_1 + \dots$$

$$\frac{dv_1}{dt} = a_1 v_1 + b_1 u_1 + \dots$$

Door vermenigvuldiging van de 1^e vergelijking met u_1 , de 2^e met v_1 vindt men:

$$\frac{1}{2} \frac{dP}{dt} = a_1 (u_1^2 + v_1^2) + \dots \equiv \psi_1(u_1, v_1)$$

met $P = u_1^2 + v_1^2$.

Op dezelfde wijze als vroeger kan men aantonen, dat voor $a_1 < 0$ $\psi_1(u_1, v_1)$ een max. in de oorsprong heeft, zodat het evenwicht stabiel is, en voor $a_1 > 0$ een minimum, zodat het evenwicht instabiel is.

Het theorema van Liapounoff stelt ons dus in staat om de criteria voor lineaire systemen toe te passen op niet-lineaire systemen.

Verder worden de condities aangegeven, waarvoor deze equivalentie geldt. Het enige geval, dat nog niet beslist is, is het geval, dat S_1 en S_2 zuiver imaginair zijn.

Colloquium "Niet-lineaire verschijnselen"

door

Prof. Dr S.C. van Veen

(3 februari 1956, coll.7).

VI

17) De limiet-cycli van Poincaré. Definitie.

Beschouwen we als voorbeeld het volgende stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left\{ 1 - (x^2 + y^2) \right\} \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left\{ 1 - (x^2 + y^2) \right\}\end{aligned}$$

Door invoering van poolcoördinaten: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ vinden wij eerst:

$$\frac{dx}{dt} = y + \frac{x}{r} (1-r^2); \quad \frac{dy}{dt} = -x + \frac{y}{r} (1-r^2),$$

en vervolgens, door de 1^e vergelijking met x en de 2^e met y te vermenigvuldigen:

$$\frac{dr}{dt} = 1 - r^2 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\text{Verder is } y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} &= r \sin \varphi \left(\cos \varphi \frac{dr}{dt} - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) - \\ &\quad r \cos \varphi \left(\sin \varphi \frac{dr}{dt} + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) = -r^2 \frac{d\varphi}{dt}\end{aligned}$$

$$\text{dus } -r^2 \frac{d\varphi}{dt} = r^2; \quad \frac{d\varphi}{dt} = -1. \tag{2}$$

(1) levert na integratie:

$$\log \frac{1+r}{1-r} = 2t + \log A, \text{ of } r = \frac{Ae^{2t} - 1}{Ae^{2t} + 1} \tag{3}$$

waarin $A = \frac{1+r_0}{1-r_0}$ (r_0 is beginwaarde van r).

Uit (3) volgt: $r \rightarrow 1$ voor $t \rightarrow \infty$, zowel voor $r_0 < 1$ ($A > 0$) als $r_0 > 1$ ($A < 0$).

In verband met (2) heeft de beweging plaats met eenparige hoeksnelheid volgens spiralen, die zowel van buitenaf ($r_0 > 1$) als van binnenaf asymptotisch naderen tot een gesloten limietkromme $r = 1$.

Zulk een gesloten grenskromme, die wij bij niet-lineaire problemen veelvuldig zullen ontmoeten, is door Poincaré een limiet-cyclus genoemd.

Beschouwen wij in het algemeen het autonome, niet-lineaire, niet-conservatieve systeem

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y). \quad (4)$$

(autonoom wil zeggen, dat de rechterleden niet expliciet van t afhangen). Stel dat een niet-gesloten oplossingskromme C' van dit stelsel wordt bepaald door

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Wanneer er nu een gesloten kromme C bestaat met de eigenschap, dat voor $t \rightarrow +\infty$ of voor $t \rightarrow -\infty$ het bijbehorende punt R' van C' nadert tot C , dan heet de gesloten kromme C een limiet-cyclus van het stelsel (4). Men kan dan voor iedere gegeven $\varepsilon > 0$ een waarde t_0 bepalen, zodat voor $t > t_0$ (resp. $t < t_0$) de afstand van het punt $R' \{x(t), y(t)\}$ tot de kromme $C < \varepsilon$ is.

Een limiet-cyclus wordt stabiel genoemd, als deze zowel van de binnen-zijde als van de buitenzijde wordt benaderd voor $t \rightarrow +\infty$.

Hij wordt instabiel genoemd, als hij zowel van de binnenzijde als van de buitenzijde wordt benaderd voor $t \rightarrow -\infty$.

Tenslotte wordt hij half-stabiel of semi-stabiel genoemd, als hij van de buitenzijde wordt benaderd voor $t \rightarrow +\infty$, en van de binnenzijde voor $t \rightarrow -\infty$, of omgekeerd.

Het is duidelijk, dat in het bovenbehandelde voorbeeld de limietcyclus stabiel is.

Ook van de andere gevallen zullen wij eenvoudige voorbeelden behandelen. De limiet-cycli, die men in de praktijk ontmoet, vertonen de eigenschap, dat zij niet slechts worden benaderd door 1 bepaalde open integraalkromme, maar door iedere integraalkromme, die zijn beginpunt heeft in een bepaald gebied van het fasevlak. De beweging nadert dan tot een bepaalde periodieke stationnaire beweging langs C voor $t \rightarrow \infty$ of voor $t \rightarrow -\infty$, onafhankelijk van de beginpunten (mits deze zijn gelegen in een zeker gebied).

Wij merken op, dat periodieke bewegingen van deze soort radicaal afwijken van periodieke bewegingen van conservatieve systemen in de omgeving van een wervelpunt (focus). Daar vormen de gesloten fasekrommen een continue familie van krommen, terwijl hier slechts geïsoleerde limiet-cycli aanwezig zijn, d.w.z. wanneer C een limiet-cyclus is, dan is er geen andere van C verschillende limiet-cyclus die zeer weinig van C afwijkt.

18) Voorbeeld van een instabiele limiet-cyclus

Beschouw het stelsel:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ \frac{dy}{dt} &= x + y(x^2 + y^2 - 1)\end{aligned}\quad (5)$$

In poolcoördinaten:

$$\frac{dr}{dt} = r(r^2 - 1); \quad \frac{d\varphi}{dt} = +1.$$

Integratie levert:

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 - Ae^{2t}}} \quad (6)$$

met $A = \frac{r_0^2 - 1}{r_0^2}$

Voor $r_0 < 1$ is $r = \frac{1}{\sqrt{1 + |A|e^{2t}}}$

dus $r \rightarrow 1$ voor $t \rightarrow -\infty$. De spiraalbanen gaan dan vanuit de cirkel $r=1$ naar binnen. Voor $t \rightarrow +\infty$ $r \rightarrow 0$.

De spiraalbanen naderen dus de oorsprong (singulier punt).

De oorsprong is dus een stabiel evenwichtspunt.

Voor $r_0 > 1$ is $A > 0$; en uit (6) volgt:

$$r \rightarrow 1 \text{ voor } t \rightarrow -\infty.$$

De spiraalkrommen ontwinden zich dus buiten de cirkel.

Uit de voorgaande definities volgt, dat we hier te doen hebben met een instabiele limiet-cyclus.

19) Voorbeeld van een half-stabiele limiet-cyclus

G.D. Birkhoff heeft het volgende voorbeeld aangegeven:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(x^2 + y^2 - 1)^2 + y \\ \frac{dy}{dt} &= y(x^2 + y^2 - 1)^2 - x\end{aligned}\quad (7)$$

of, met poolcoördinaten:

$$\frac{dr}{dt} = r(r^2 - 1)^2; \quad \frac{d\varphi}{dt} = -1$$

Stel $r^2 = u$: $\frac{du}{dt} = 2u(u-1)^2$.

$$\frac{du}{u(u-1)^2} = \frac{du}{u} - \frac{du}{u-1} + \frac{du}{(u-1)^2} = 2 dt.$$

of: $\log \frac{u}{u-1} - \frac{1}{u-1} = 2t + \log C.$

$$\frac{u}{u-1} e^{-\frac{1}{u-1}} = C e^{2t}.$$

Stel $u-1=v.$

$$\left(\frac{1}{v} + 1\right) e^{-\frac{1}{v}} = C e^{2t}. \quad (8)$$

Voor $r=1$ is $\frac{dr}{dt} = 0$. In de omgeving van $r = 1$ beschouwen wij eerst:
 $r = 1 - \xi \quad (\xi > 0).$

Dan is $v < 0$, dus $C < 0$ (voor $v = -2\xi + \xi^2 > -1$).
 dus voor $\xi < \frac{1}{2}$

Als $v \rightarrow 0$ (dus $r \rightarrow 1$ van de binnenzijde van de cirkel $r=1$) $t \rightarrow +\infty$, zodat de cirkel $r=1$ een stabiele limiet-cyclus is voor de spiraalbanen binnen de cirkel.

Voor $r=1+\xi$ ($\xi > 0$) is $v > 0$, dus $C > 0$. Voor $v \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 1$ van de buitenzijde) $e^{2t} \rightarrow 0$ $t \rightarrow -\infty$, zodat de cirkel $r=1$ een instabiele limiet-cyclus is voor de spiralen buiten de cirkel. Het stelsel (7) bezit dus een half-stabiele limiet-cyclus als stationnaire oplossing.

20) Een verdichtingsgebied van limiet-cycli

In de voorafgaande voorbeelden was één en slechts één limiet-cyclus aanwezig. Er kunnen meerdere limiet-cycli aanwezig zijn, die in de regel om de beurt stabiel en instabiel zijn. Er kunnen zelfs oneindig vele limiet-cycli zijn. In het volgende voorbeeld ontmoeten wij oneindig vele limiet-cycli, die zich verdichten in de cirkel $r = 1$.

$$\frac{dx}{dt} = +y + \mu(x^2+y^2-1)x \sin \frac{1}{x^2+y^2-1}, \quad (9)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \mu(x^2+y^2-1)y \sin \frac{1}{x^2+y^2-1},$$

In poolcoördinaten wordt de fase-vergelijking:

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\mu(r^2-1)r \sin \frac{1}{r^2-1}, \quad r \neq 1. \quad (10)$$

en voor $r = 1$: $\frac{dr}{d\varphi} = 0.$

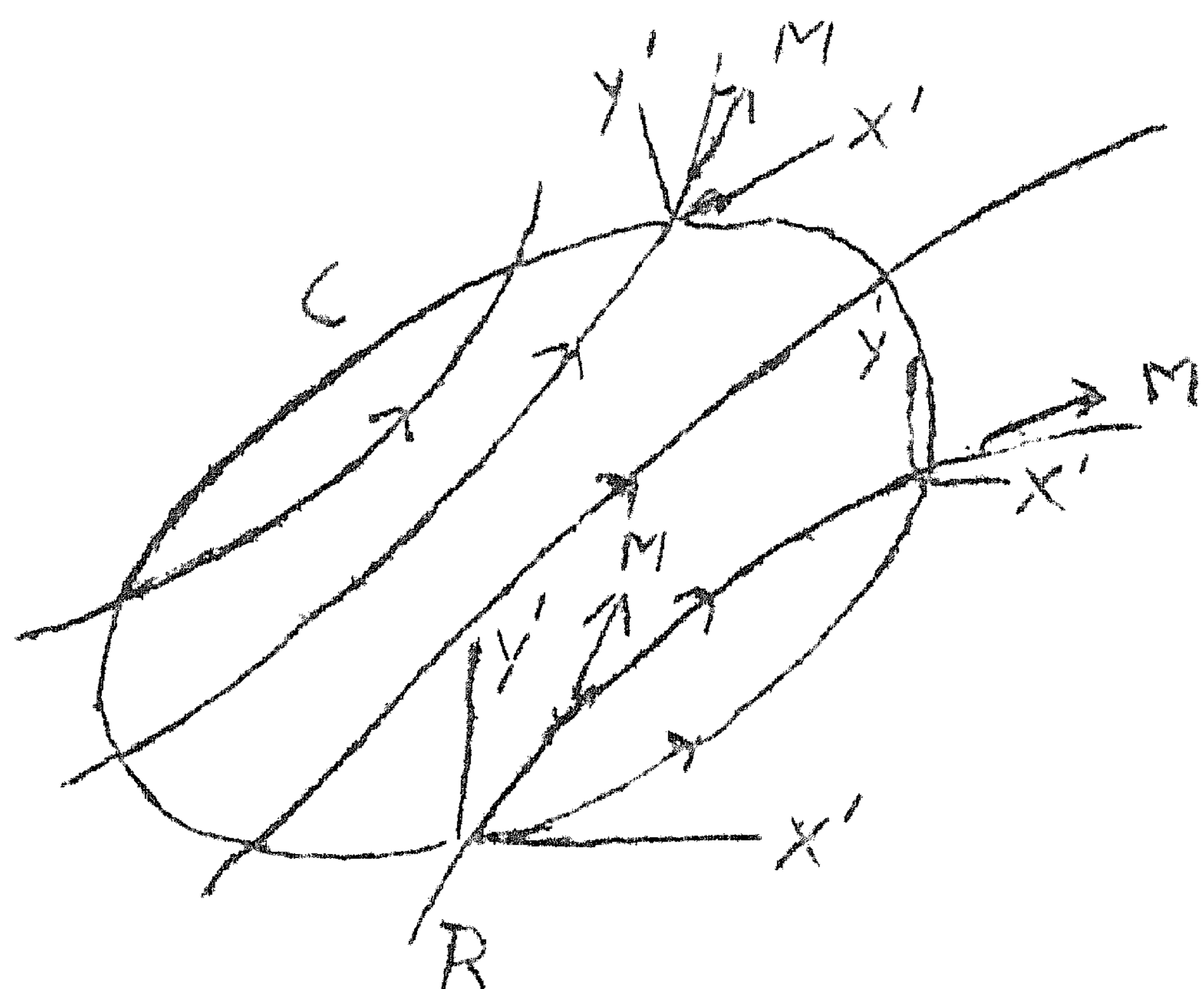
Wij vinden zodoende oneindig veel cirkels in de buurt van $r=1$, welke periodieke oplossingen van (9) leveren. Deze krommen corresponderen met de nulpunten van $\sin \frac{1}{r^2-1}$, ($r = \sqrt{1 + \frac{1}{k\pi}}$)

De voorgaande voorbeelden waren tamelijk kunstmatig en onnatuurlijk. Wij zullen echter in het volgende gedeelte voorbeelden ontmoeten, die op natuurlijke wijze uit fysische en technische problemen ontstaan, en welke limiet-cycli opleveren.

21) Verdere eigenschappen der limiet-cycli. De indices van Poincaré.
De theorema's van Bendixson.

In de voorgaande voorbeelden was de existentie van een limiet-cyclus gemakkelijk aan te tonen. Bij een willekeurige niet-lineaire differentiaalvergelijking is dit echter in het algemeen een zeer moeilijk probleem.

Poincaré heeft een aantal noodzakelijke voorwaarden voor het bestaan van limiet-cycli opgesteld.



Beschouw een gesloten kromme C in een vectorveld F . Beschouw een rechthoekig assenstelsel met vaste asrichtingen x', y' .

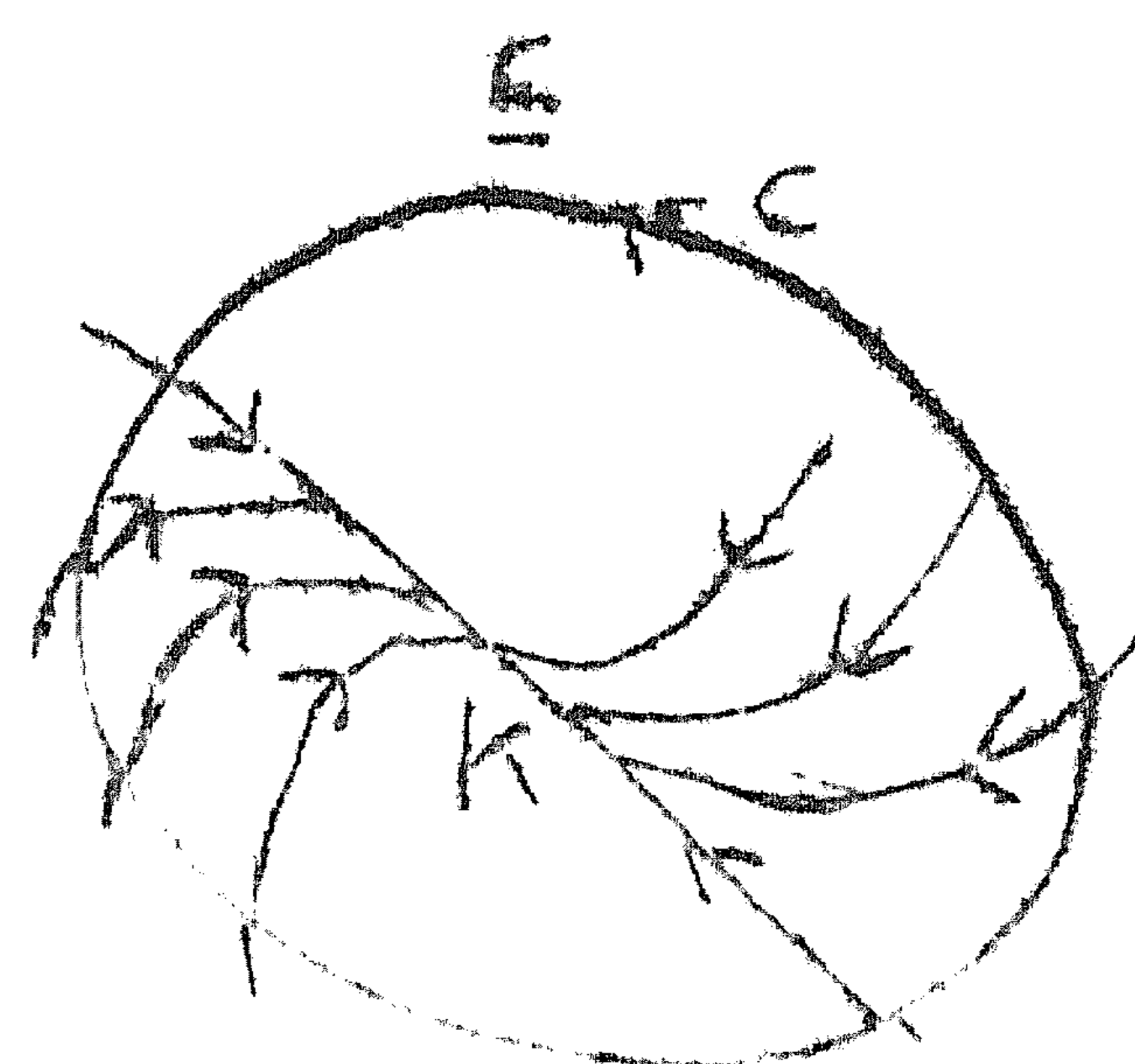
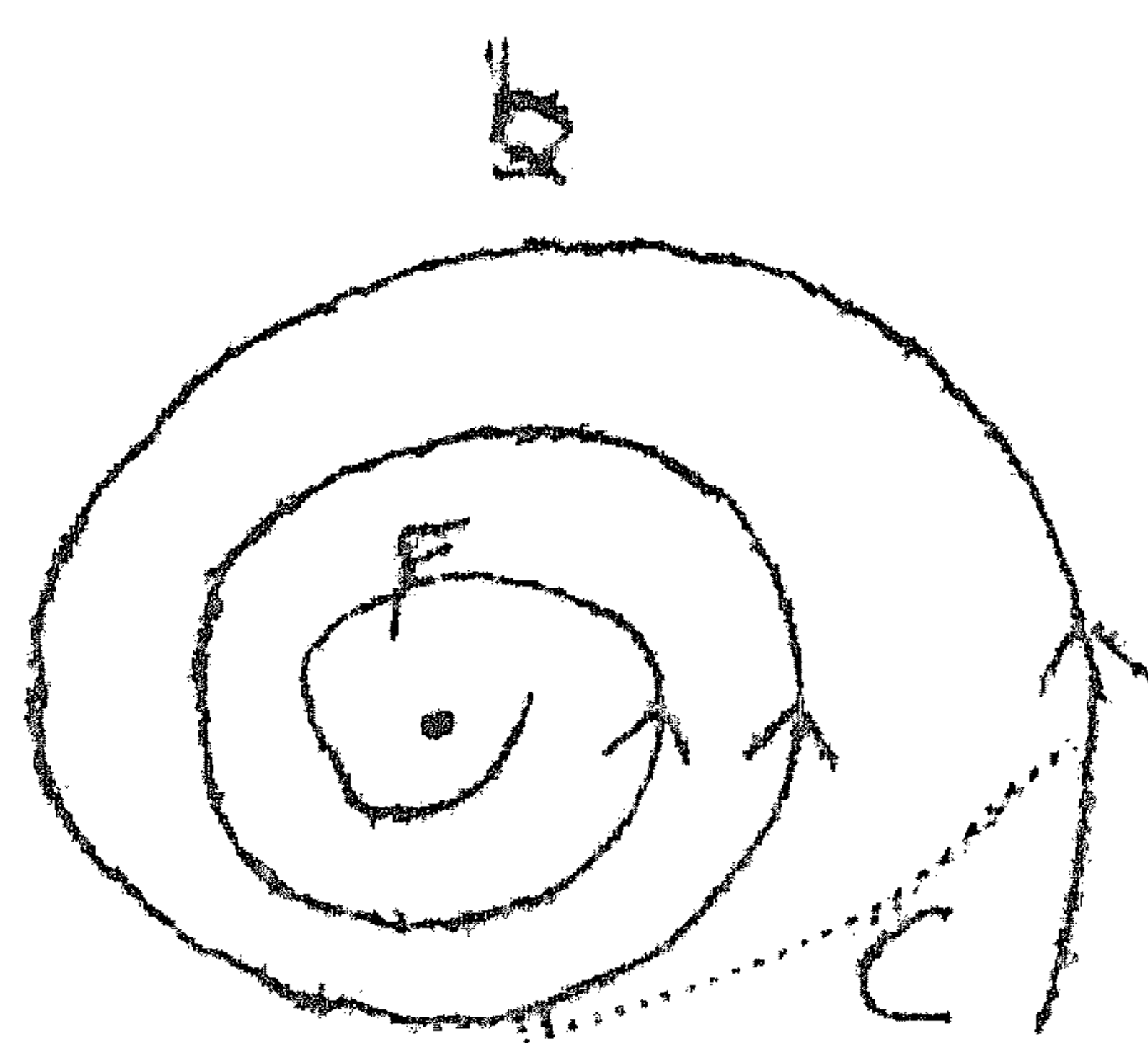
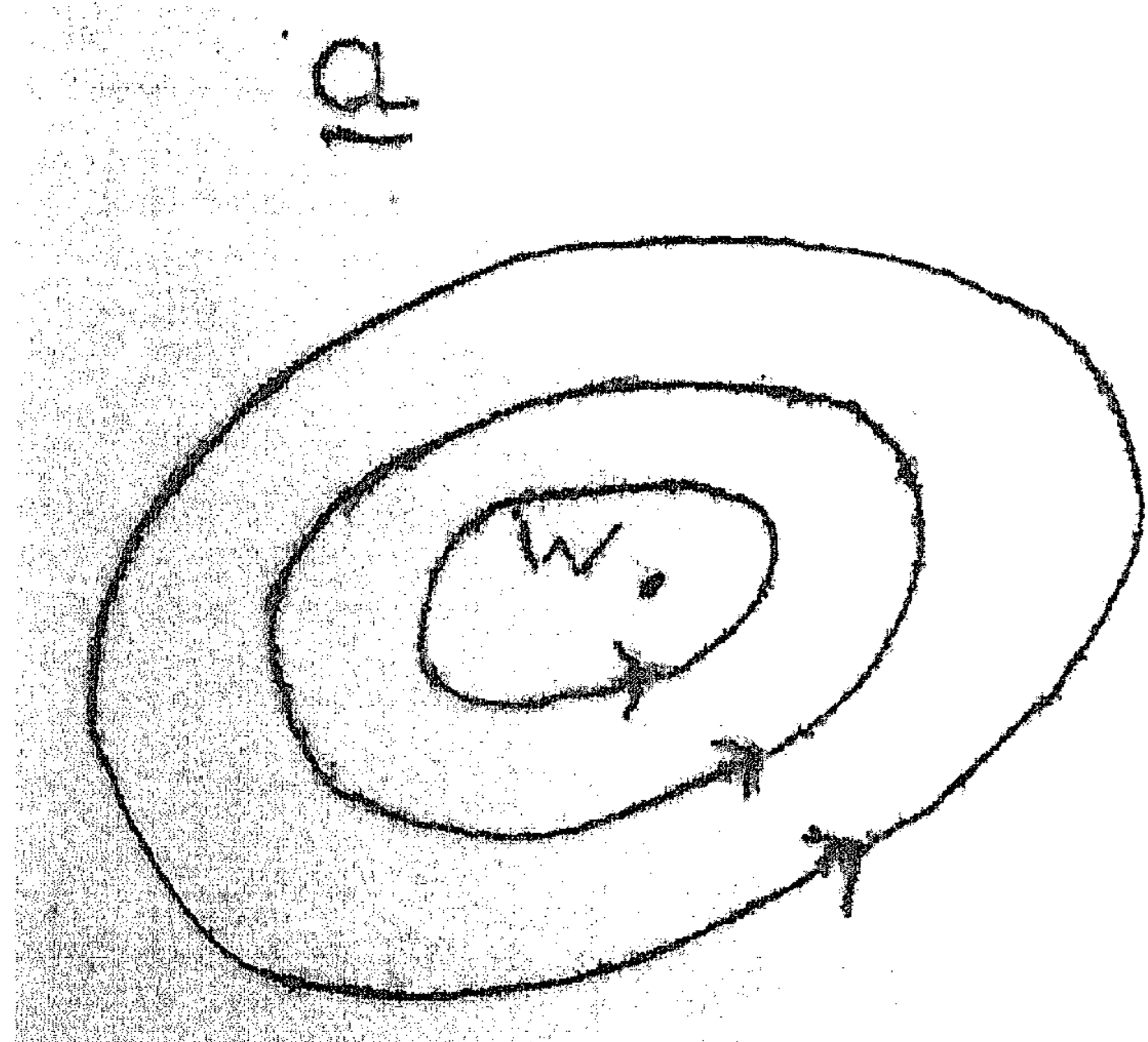
Laat de oorsprong R van dit assenstelsel in positieve richting de kromme C doorlopen. Na rondlopen van de contour heeft de vector $\overrightarrow{RM}$ zijn oorspronkelijke positie hernomen.

Poincaré definieert de "index j " van een gesloten kromme met betrekking tot een gegeven vectorveld op de volgende wijze:

De index j van een gesloten kromme met betrekking tot een vectorveld is het algebraïsch aantal volledige rotaties van de vector $\overrightarrow{RM}$ als R de kromme C in positieve richting doorloopt.

Als de index $= 0$, volvoert de vector slechts een slingering in het $x'y'$ -stelsel maar geen volledige rotatie.

Onder de index van een singulier punt verstaat men de index van een gesloten kromme, die het singuliere punt omvat.



$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ verandert niet van teken in D.

Bewijs: Volgens de stelling van Gauss is:

$$\oint_C (Pdy - Qdx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy.$$

met betrekking tot de contour C. Wegens (11) wordt de lijnintegraal

$$\int \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} dt - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt \right) = 0.$$

De dubbelintegraal kan slechts = 0 zijn, als $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ in het omsloten gebied van teken wisselt.

De gesloten contour C kan dus geen fasekromme zijn. Er is dus geen periodieke beweging in D.

Uit de theorie van de indices volgen ook een aantal negatieve criteria

- 1) In een singulariteitenvrij gebied kunnen geen periodieke bewegingen, en dus geen limiet-cycli aanwezig zijn.
 - 2) Als een stelsel 1 singulariteit met index $\neq +1$ bezit, is periodieke beweging uitgesloten.
 - 3) Bij een stelsel met meerdere singulariteiten waarvan de algebraïsche som $\neq +1$ is, is periodieke beweging in gesloten krommen, die al deze singulariteiten insluiten, onmogelijk.
 - 4) In een stelsel met 1 singulariteit met index +1, dat benaderd wordt door fasekrommen die naar het oneindige gaan, is periodieke beweging onmogelijk.
-

Colloquium "Niet-lineaire verschijnselen"

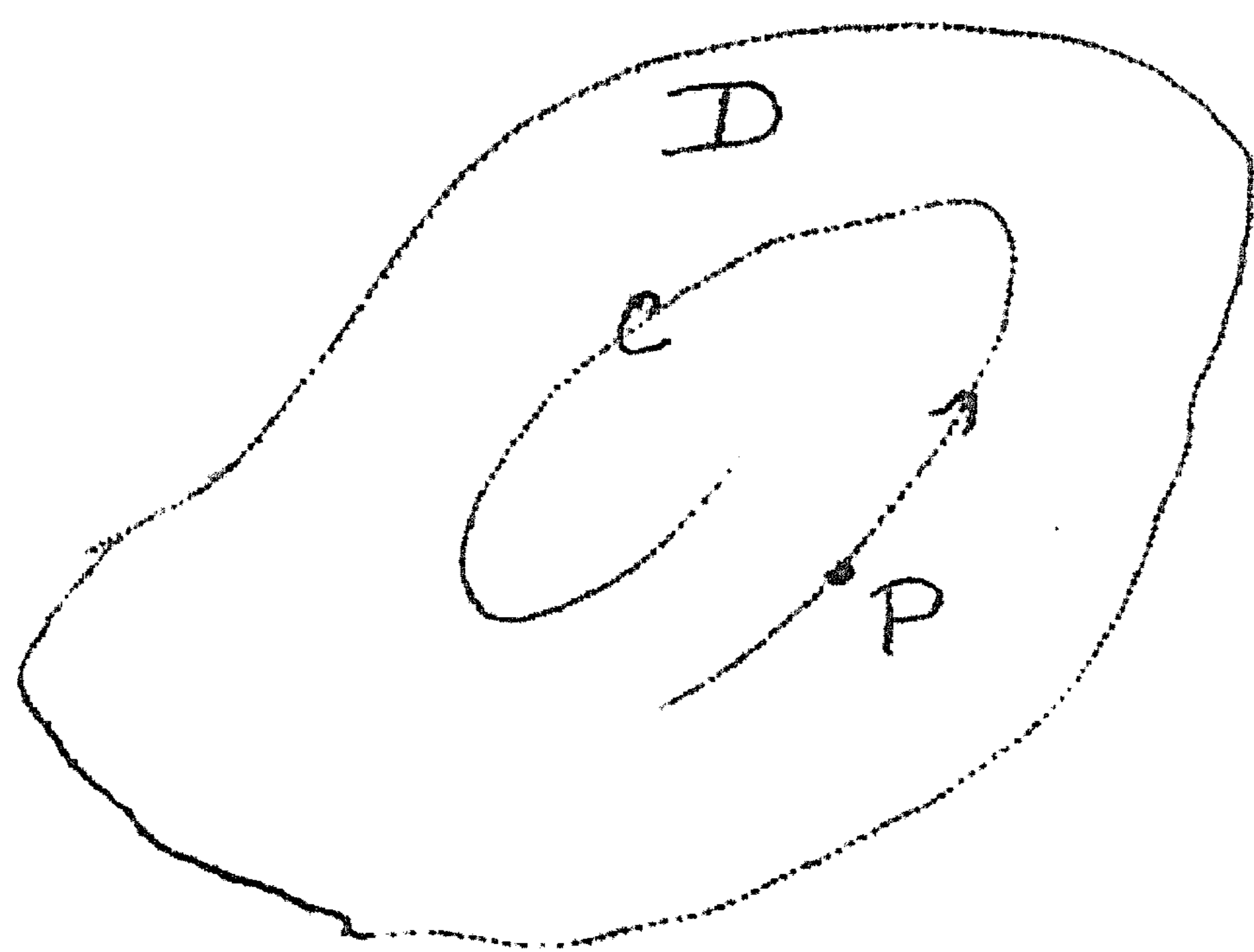
door

Prof.Dr S.C. van Veen

(17 februari 1956, coll.8).

VII

Vervolg van 21). Wij spraken in het opschrift van de theorema's van Bendixon. Bendixon heeft n.l. nog een tweede theorema uitgesproken van meer positieve inhoud: Dit kan als volgt worden geformuleerd.



Gegeven is een begrensde gebied D . Binnen D ligt een punt P . Een integraalkromme gaat door P voor $t=t_0$. Wanneer gegeven is, dat voor alle waarden van $t > t_0$ de integraalkromme C binnen D blijft, en wanneer deze kromme niet nadert tot een singulier punt, dan zijn er slechts 2 mogelijkheden voor C :

1° of C is zelf een gesloten kromme

2° of C nadert asymptotisch tot een gesloten kromme.

Ofschoon de juistheid van deze stelling intuïtief vrij duidelijk is, stelt een streng bewijs te hoge eisen, om hier te worden behandeld. Wij moeten dus een volledig bewijs achterwege laten en volstaan met enkele korte aanwijzingen:

a) C kan zich zelf niet snijden, want een snijpunt van 2 takken van C zou een singulier punt betekenen; en dit mag volgens veronderstelling niet worden bereikt.

b) De kromme C kan dan niet anders dan een soort spiraal vormen. Als deze spiraal zich uitwendig uitstrekt moet hij tot een limietcyclus naderen, omdat hij niet buiten D kan treden. Als de spiraal zich naar binnen uitstrekt, kan hij niet asymptotisch naderen tot 1 punt, want dan zou dit punt singulier punt moeten zijn; ook dit is volgens de veronderstelling uitgesloten. C zal dan asymptotisch moeten naderen tot een gesloten kromme.

c) Wanneer C een punt bereikt, dat hij reeds vroeger had bereikt, dan zal dit geen echt snijpunt zijn, maar de kromme zal dan ook weer dezelfde verdere punten doorlopen, en een gesloten kromme vormen.

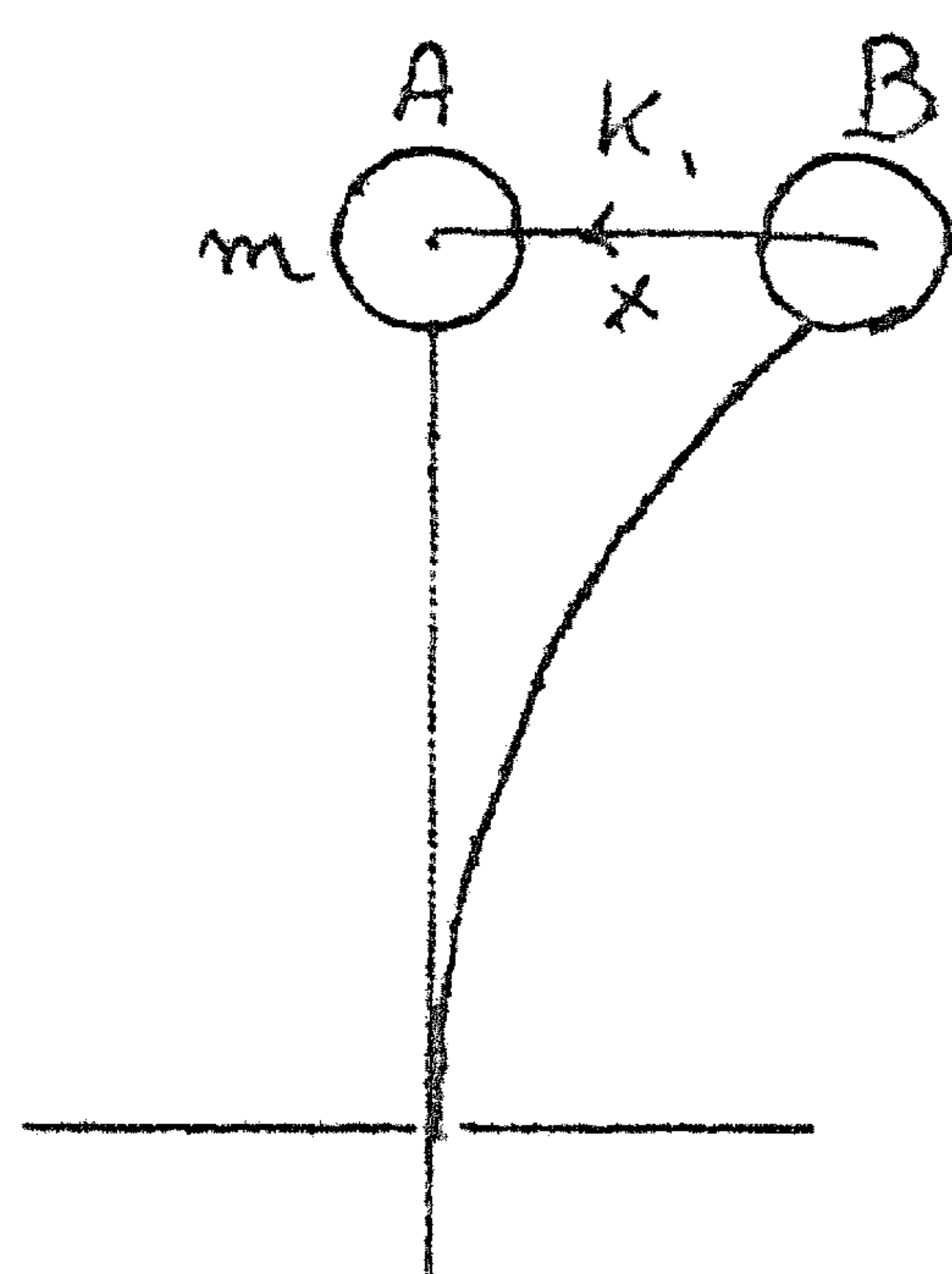
Uit deze laatste stelling kan inderdaad wel onder bepaalde omstandigheden de existentie van een limietcyclus worden afgeleid. De moeilijkheid is echter in de praktische gevallen de bepaling van het begrensde gebied D waarbinnen de integraalkromme voor alle waarden $t > t_0$ gelegen moet zijn, terwijl de singuliere punten uitgesloten zijn. Practisch

heeft men dan ook niet zo heel veel aan deze tweede stelling van Bending.

Wanneer men de existentie van een limietcyclus wil aantonen, doet men het beste om ieder concreet geval apart te onderzoeken. Dit kan nog vele moeilijkheden opleveren. De moeilijkheden, die aan deze onderzoeken zijn verbonden, kan men reeds in volle omvang bemerken bij het speciale, klassieke geval van de vergelijking van van der Pol.

§22). Over het ontstaan van de vergelijking van van der Pol.

Men kent alle bijzonderheden van "de gedempte harmonische trilling".



Een massapunt met massa m bevindt zich in de evenwichtsstand A, waar het elastisch gebonden is. Geeft men het punt een uitwijking naar B over een afstand x , dan werkt er volgens de wet van Hooke een elastische kracht $K_1 = ax$ die het punt naar zijn evenwichtsstand terug tracht te voeren.

Laat men het punt in B los, dan zal het een harmonische trilling gaan uitvoeren.

Nemen wij nu aan, dat deze trilling plaats vindt in een weerstandbiedend medium, dan zal deze trilling worden "gedempt". Tijdens de trilling wordt in het medium een weerstand ondervonden, die uit de aard der zaak tegengesteld gericht is met de momentele bewegingsrichting, en op de één of andere wijze afhankelijk is van de snelheid.

Men neemt op fysische gronden in de regel aan dat deze weerstand recht evenredig is met de snelheid. (Dit is een heel gelukkige aanname, want nu blijkt de differentiaalvergelijking geïntegreerd te kunnen worden, omdat hij lineair is!).

Men vindt dan zonder moeite als bewegingsvergelijking:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -ax - b \frac{dx}{dt},$$

waarin ax de elastische kracht is, terwijl $b \frac{dx}{dt}$ de weerstand van het medium voorstelt, dus de "damping".

a heet wel "veerconstante".

b heet de "dempingsfactor", en deze wordt hier als constant verondersteld.

De differentiaalvergelijking

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + ax = 0 \quad (1)$$

is dan een eenvoudige lineaire differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten, en biedt bij de oplossing geen verdere moeilijkheden,

zodat wij hem hier buiten beschouwing laten.

Bij zijn onderzoekingen op het gebied van de electronica werd van der Pol in 1926 gevoerd tot het onderzoek van trillingen, die door een differentiaalvergelijking werden beheerst, die enige overeenkomst met (1) vertoonde.

Ook hier was er sprake van een elastische binding, dus een term ax . Ook hier was er "damping", die evenredig kon worden beschouwd met de snelheid, dus een damping van de gedaante $b \frac{dx}{dt}$.

Maar nu komt het grote verschil. Bij deze trillingen in electronenbuizen bleek de factor b niet constant te zijn. b bleek in sterke mate afhankelijk van de uitwijking x te zijn. Het bleek zelfs, dat b van teken kon wisselen; speciaal in het evenwichtspunt A was b negatief.

Daar trad dus negatieve damping op; daar werd de trilling dus niet gehinderd, maar aangewakkerd.

Op grotere afstand van de evenwichtsstand A werd b kleiner, op zeker punt werd $b=0$, en op nog grotere afstand werd b positief (zoals bij de "mechanische" gedempte trilling). Dan werkte de damping inderdaad als hinder; positieve damping.

Daar de invloed van de damping symmetrisch t.o.v. de oorsprong bleek te zijn, kon de dempingsfactor $b(x)$ als functie van x in eerste instantie worden geschreven als

$$b(x) = m + nx^2 \quad (\text{nu zijn } m \text{ en } n \text{ constant}).$$

m = de dempingsfactor voor $x=0$, dus m is negatief. Door triviale transformaties in de verschillende veranderlijken kon de differentiaalvergelijking worden herleid tot de normaalvorm:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (2)$$

Deze laatste vergelijking staat sedert in de litteratuur bekend als de vergelijking van van der Pol. Hierin is nu μ een positieve constante. Het is onmiddellijk duidelijk, dat voor zeer kleine waarden van μ de oplossing van (2) weinig zal verschillen van die van de eenvoudige lineaire vergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \quad (\text{ongedempte harmonische trilling}).$$

Van der Pol was echter terecht geïnteresseerd voor de oplossing van de niet-lineaire vergelijkingen (2) voor grote positieve waarden van μ .

§23. Eerste behandeling. Fasekrommen. Methode der isoklinen.

Om de fasekrommen van (2) te bepalen, stelt men zoals gebruikelijk is:

$$\frac{dx}{dt} = y \quad (3)$$

waardoor (2) overgaat in:

$$\frac{dy}{dt} - \mu (1-x^2) y + x = 0$$

of

$$\frac{dy}{dt} = \mu (1-x^2) y - x \quad (4)$$

Deelt men (4) door (3) dan vindt men de zeer eenvoudige fase-vergelijking (van de eerste orde)

$$\frac{dy}{dx} = \mu (1-x^2) - \frac{x}{y} \quad (5)$$

die echter ook niet-lineair is, en daardoor evenmin voor directe behandeling toegankelijk is als de vergelijking (2).

Wel ziet men wederom, dat voor zeer kleine μ

$$\frac{dy}{dx} \approx - \frac{x}{y}$$

is, of:

$$x^2 + y^2 = C.$$

De fasekrommen zijn dan (bij benadering) concentrische cirkels om 0, wat in verband met de ongedempte trilling te verwachten is.

Voor de nadere bestudering van de oplossingskrommen van (5) gebruikte van der Pol de methode der isoklinen.

De isokline (=meetkundige plaats van de punten der integraalkrommen, waar de raaklijnen gelijk gericht zijn) behorende bij de richting

$$\frac{dy}{dx} = k \quad (k \text{ constant})$$

wordt volgens (5) bepaald door

$$y = \frac{x}{\mu(1-x^2) - k} \quad (6)$$

De isoklinen zijn dus zeer eenvoudige krommen van de 3^e graad. Voor alle waarden van k gaan ze door de oorsprong, terwijl de x -as de isokline $k=0$ voorstelt.

Alle fasekrommen moeten dus de x -as loodrecht snijden.

Van der Pol heeft een "fase-portrettengalerij" geconstrueerd voor

$$\mu = 0,1; \quad \mu = 1; \quad \mu = 10 \quad (\text{zie alle litteratuur op dit gebied})$$

Wij zullen even het geval $\mu=1$ schetsen.

Colloquium "Niet-lineaire verschijnselen"

door

Prof. Dr S.C. van Veen

(16 maart 1956, coll.10)

VIII

§24. De onderzoeken van Liénard (1928). Het Liénard-vlak.

Hoewel de toepassing van de isoklinen-methode inzicht heeft verschaft omtrent het verloop van de fasekrommen van de vergelijking van Van der Pol:

$$\frac{dy}{dx} = \mu(1-x^2) - \frac{x}{y} \quad (1)$$

in het bijzonder voor grote waarden van μ , toch heeft Liénard aangetoond, hoe door een eenvoudige transformatie van de afhankelijk veranderlijke y , deze onderzoeken aanmerkelijk konden worden vereenvoudigd, en het inzicht in het merkwaardige verloop van deze krommen aanzienlijk kon worden versterkt.

Het is duidelijk, dat (1) ook kan worden geschreven in de gedaante:

$$\frac{d}{dx} \left\{ y - \mu \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \right\} = - \frac{x}{y} \quad (2)$$

De vereenvoudiging, die Liénard bereikt, wordt in eerste instantie gevonden door invoering van de nieuwe afhankelijk veranderlijke

$$w = y - \mu \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \quad (3)$$

waardoor (2) overgaat in:

$$\frac{dw}{dx} = - \frac{x}{w + \mu \left(x - \frac{x^3}{3} \right)} \quad (4)$$

Iets eenvoudiger en meer overzichtelijk wordt het onderzoek, als met Liénard nog in tweede instantie de substitutie

$$w = \mu z \quad (5)$$

op (4) wordt toegepast, waardoor (4) onmiddellijk overgaat in:

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{x}{\mu^2 \left\{ z + x - \frac{x^3}{3} \right\}} \quad (6)$$

Wij zullen over de fasekrommen van (4) spreken als fasekrommen in het (w,x) -vlak van Liénard.

Evenzo over de fasekrommen van (6) als fasekrommen in het (z,x) -vlak van Liénard.

Voorlopig beperken wij ons tot het meer eenvoudige onderzoek van de isoklinen in het (z,x) -vlak.

Uit (6) volgt als vergelijking van de k -isokline (de meetkundige plaats van de punten der fasekrommen met helling k)

$$z_k = \frac{x^3}{3} - x - \frac{x}{\mu^2_k} . \quad (7)$$

Uit (7) ziet men direct de belangrijke rol, welke bij deze beschouwingen wordt gespeeld door de kromme

$$z = \frac{x^3}{3} - x \quad (8)$$

welke de "karakteristiek" van vergelijking (6) wordt genoemd.

Uit (7) volgt, dat de isoklinen kunnen worden gevonden door superpositie van de lineaire functie (afhankelijk van μ en k)

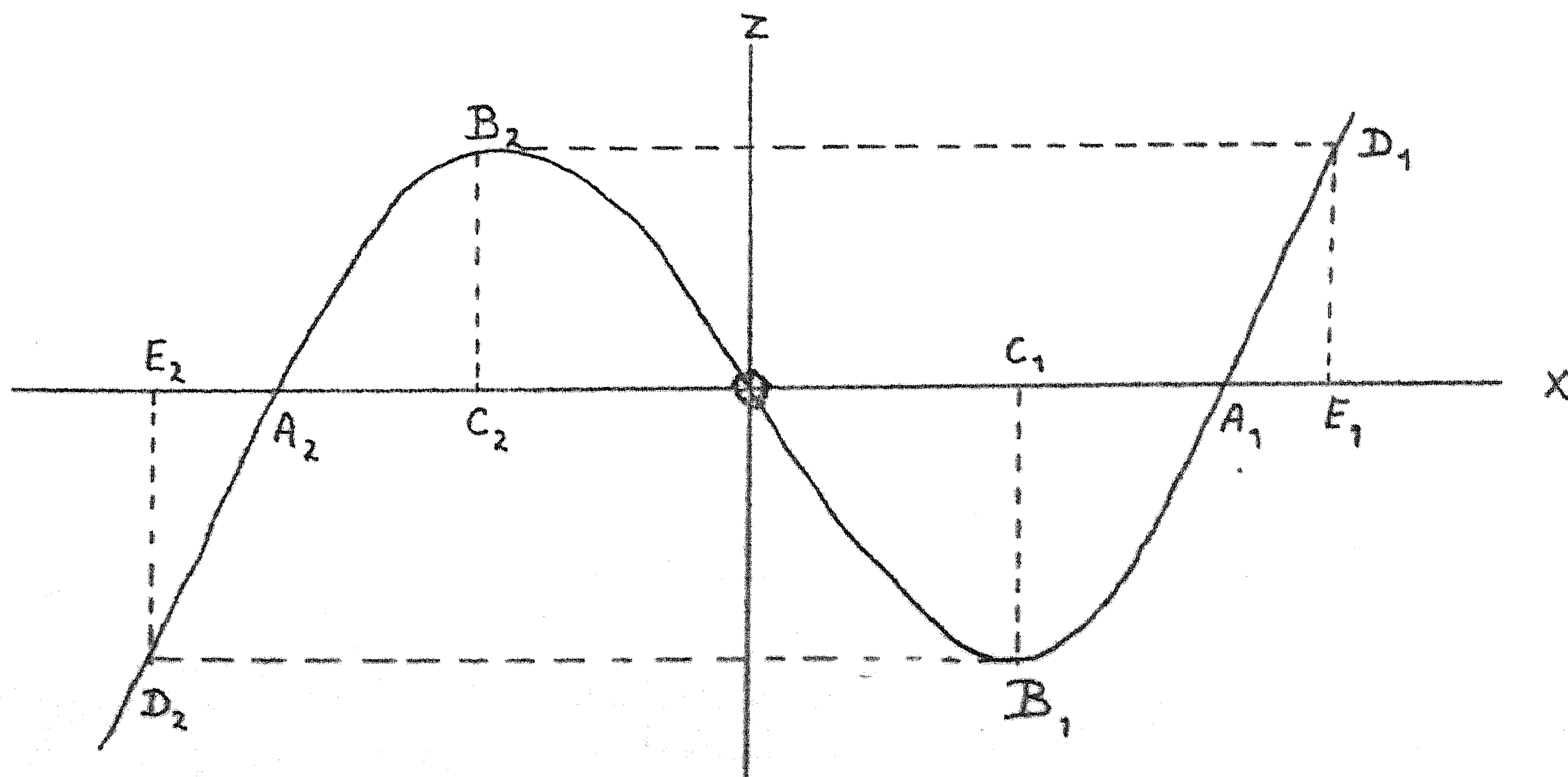
$$z_2 = -\frac{x}{\mu^2_k} \quad (9)$$

op de vaste karakteristiek:

$$z_1 = \frac{x^3}{3} - x .$$

In het bijzonder blijkt hieruit, dat voor grote waarden van μ de isoklinen (voor niet te kleine k) weinig afwijken van de karakteristiek.

§25. Het verloop der karakteristiek en de isoklinen in het (z,x) vlak.



figuur 1

De karakteristiek

$$z = \frac{x^3}{3} - x$$

is een derdegraadskromme, die door de oorsprong gaat onder een hoek van -45° . De kromme is centraal-symmetrisch t.o.v. de oorsprong. De

kromme gaat dus door 0 en snijdt verder de x-as in de punten A_1 en A_2 waarvan de abscissen zijn $\pm\sqrt{3}$. De karakteristiek bereikt 1 maximum in $B_2(-1, \frac{2}{3})$ en 1 minimum in $B_1(1, -\frac{2}{3})$.

De raaklijn in B_2 evenwijdig aan de x-as snijdt de kromme bovendien nog in $D_1(2, \frac{2}{3})$, analoog de raaklijn in B_1 de kromme in $D_2(-2, -\frac{2}{3})$. Al deze punten spelen in het verdere onderzoek van Liénard een uiterst belangrijke rol.

De constructie der isoklinen is nu zeer eenvoudig.

In de eerste plaats volgt uit (7) voor $k = \pm\infty$

$$z_{\pm\infty} = \frac{x^3}{3} - x.$$

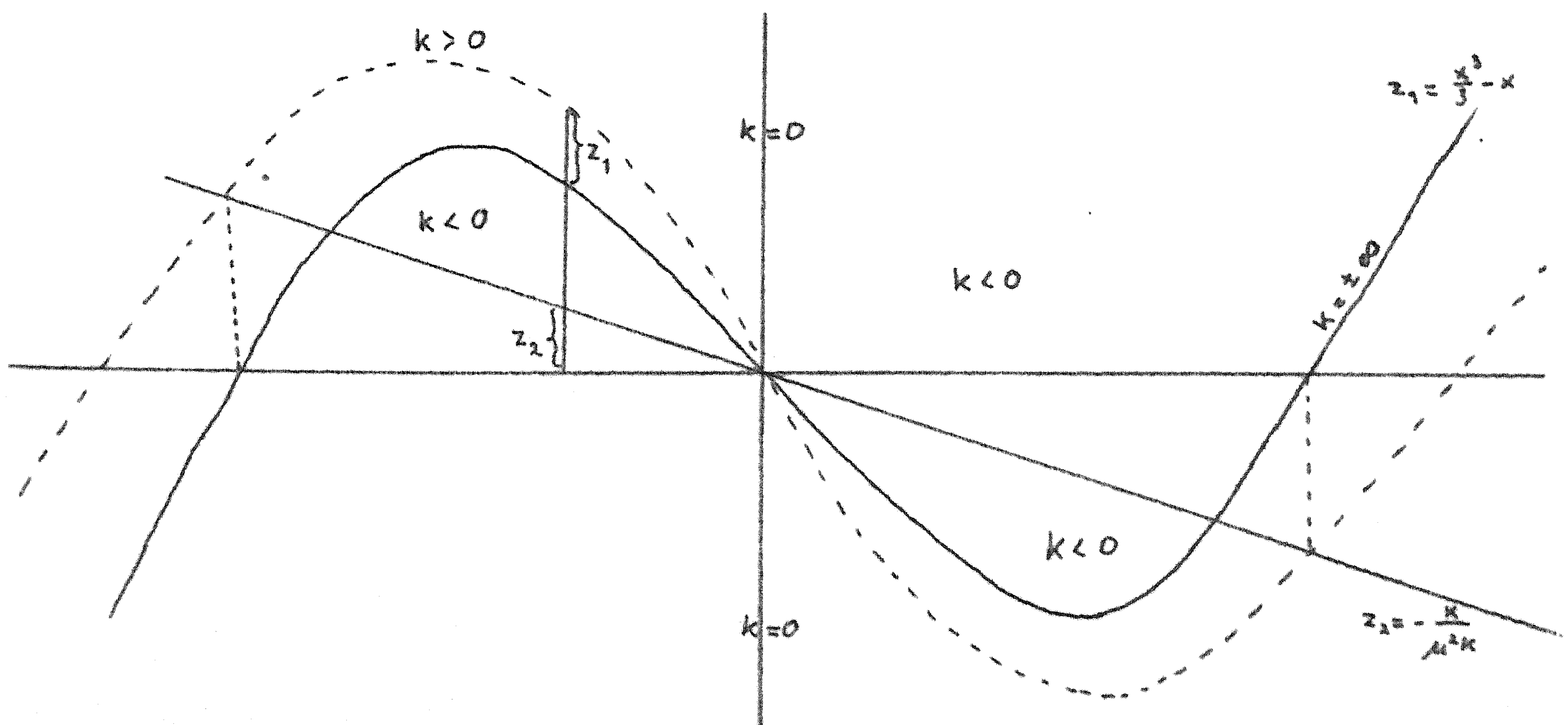
De karakteristiek is dus de $+\infty$ -isokline, m.a.w. alle integraalkrommen bezitten in hun snijpunten met de karakteristiek een verticale raaklijn.

Uit (7) volgt verder voor de 0-isokline

$$x = 0.$$

De punten der integraalkrommen met horizontale raaklijn liggen dus alle op de z-as.

De constructie en het verloop der isoklinen blijkt duidelijk uit fig.2.



figuur 2

Het is duidelijk, dat voor grote (uit de aard der zaak positieve) waarden van μ (b.v. $\mu=10$) en voor niet te kleine (positieve of negatieve) waarden van k de bijbehorende isoklinen zeer dicht bij de karakteristiek zijn gelegen. Deze dichte nabijheid blijft zelfs nog gelden voor $k = \pm 1$. Slechts voor zeer kleine waarden van k_1 (van de orde $\frac{1}{2}$) zullen de isoklinen steiler verlopen.

§26. Over het verloop der fasekrommen.

Wij zullen eerst een fasekromme beschouwen, die begint in een punt P boven de karakteristiek in het tweede kwadrant (fig.3).

Volgens het vroeger afgeleide is

$$z - \left(\frac{x^3}{3} - x\right) = \frac{1}{\mu} y = \frac{1}{\mu} \frac{dx}{dt}.$$

Voor punten boven de karakteristiek is $z - \left(\frac{x^3}{3} - x\right) > 0$, dus $\frac{dx}{dt} > 0$.

Analoog voor punten onder de karakteristiek $\frac{dx}{dt} < 0$.

Dus boven de karakteristiek is de fasebeweging naar rechts,
onder " " " " " " " " links.

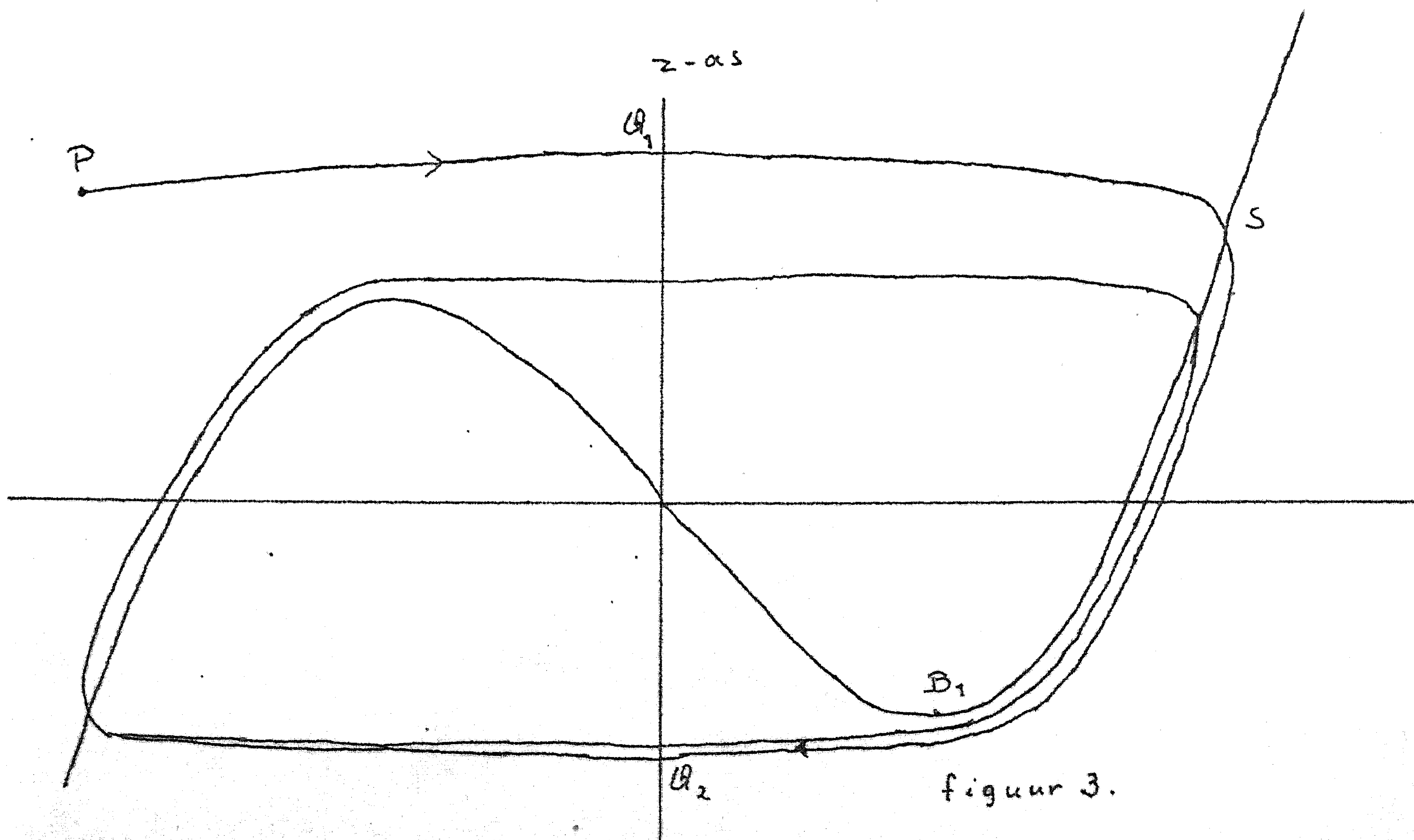
In overeenstemming hiermede verandert de fasebeweging op de karakteristiek van richting (verticale raaklijn).

Uit (6) volgt, boven de karakteristiek, voor $x < 0$:

$$\frac{dz}{dx} > 0, \text{ maar zeer klein.}$$

Evenzo voor $x > 0$ $\frac{dz}{dx} < 0$, maar i.h.a. absoluut zeer klein.

De fasekromme zal dus vanuit P zeer langzaam stijgen tot het snijpunt Q_1 met de z-as. Hier loopt de raaklijn horizontaal. Rechts van de z-as zal de fasekromme zeer langzaam dalen tot dicht bij de karakteristiek. Dan neemt de daling sterk toe, totdat de karakteristiek wordt gesneden.



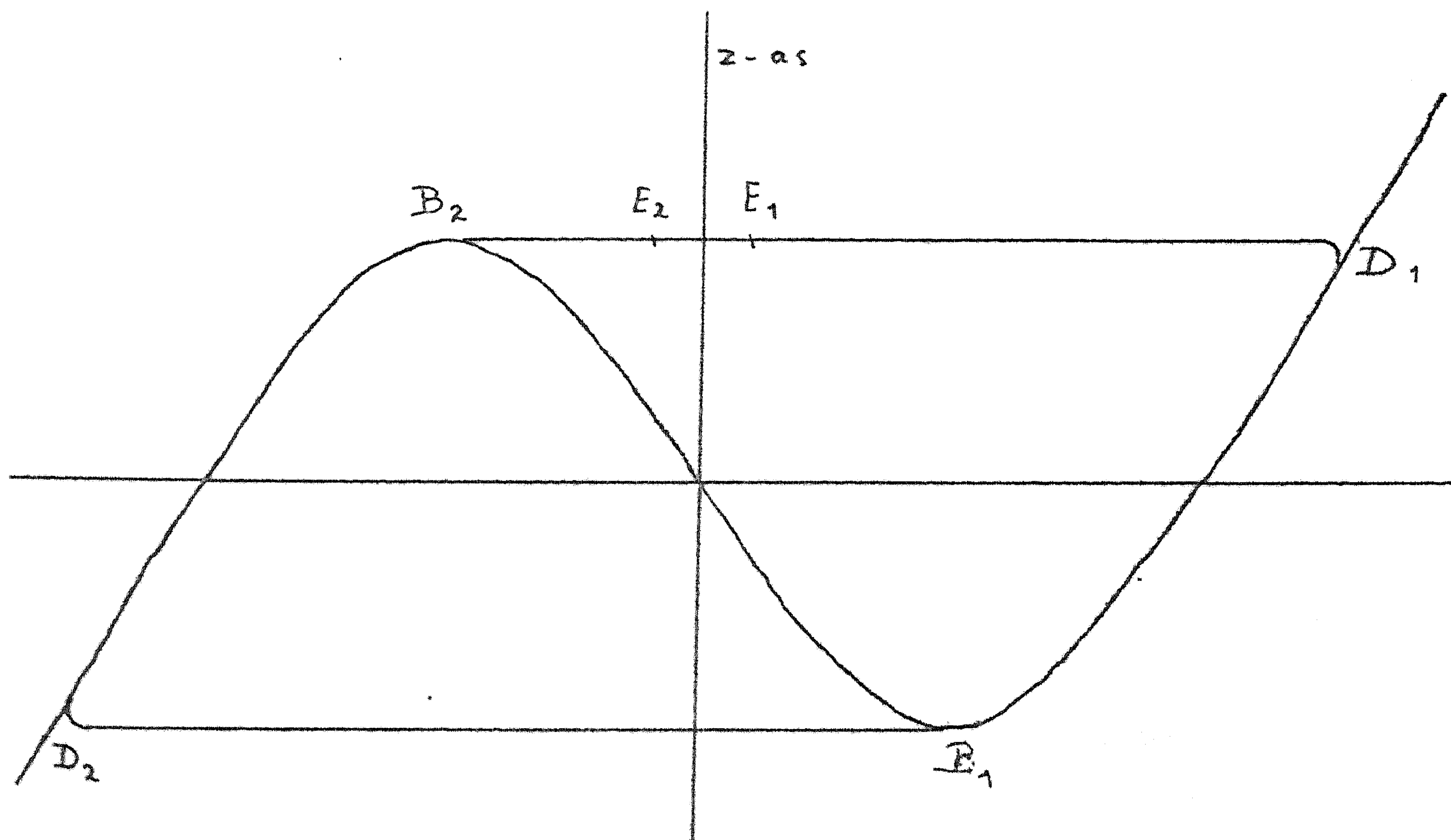
Onder de karakteristiek is aanvankelijk $\left| \frac{dz}{dx} \right|$ nog groot, dus, wegens (6)

$$z = \frac{x^3}{3} - x - \frac{x}{\mu^2} \frac{dz}{dx} \quad (10)$$

weinig verschillend van z_{kar} ; de fasekromme blijft voorlopig zeer dicht bij de karakteristiek lopen (aan de onderzijde). Dit blijft doorgaan totdat in de omgeving van B_1 $\frac{dz}{dx}$ zeer klein wordt (maar steeds nog > 0); dan worden de afwijkingen

$$z = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)$$

groter en $\frac{dz}{dx}$ wordt weer zeer klein (positief) zoals uit (6) volgt. In het snijpunt Q_2 met de z -as loopt de raaklijn weer horizontaal, tot dicht bij de karakteristiek, waarbij de fasekromme weer steil omhoog loopt. Het is hieruit duidelijk, dat voor grote μ wel spoedig een limietcyclus wordt bereikt (dit is echter nog geen bewijs!) die nage- noeg overeenkomt met de kromme in figuur 4, n.l. de kromme $D_1B_1D_2B_2$. (D_1B_2 en B_1D_2 zijn recht, de hoeken bij D_1 en D_2 zijn enigszins af- gerond).



figuur 4

Hoe groter μ is, des te nauwkeuriger komt deze kromme met de limiet- cyclus overeen.

§27. Benaderde berekening van de omlooptijd.

Wij zagen vroeger, dat de coördinaten van D_2 zijn $(-2, -\frac{2}{3})$, van B_2 $(-1, +\frac{2}{3})$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot y = \frac{dz}{dx} \cdot \mu \left\{ z - \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \right\} = -\frac{x}{\mu} \quad (11)$$

(volgens (6)).

Van D_2 tot B_2 is $z = \frac{x^3}{3} - x$, dus $\frac{dz}{dx} = (x^2 - 1)$ $\frac{dx}{dt}$.

Dus van D_2 tot B_2 geldt:

$$(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\mu}$$

of:

$$dt = -\mu \left(x - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$t_{B_2} - t_{D_2} = -\mu \int_{-2}^{-1} \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = -\mu \left(\frac{x^2}{2} - \log x\right) \Big|_{-2}^{-1} = \mu \left(\frac{3}{2} - \log 2\right). \quad (12)$$

Op $B_2 D_1$ nemen wij links en rechts van de z -as op gelijke afstand $\frac{\xi}{2}$ van de z -as verwijderd de punten E_2 en E_1 .

Van B_2 tot E_2 is $dz = 0$, dus volgens (11)

$$dt = -\frac{\mu}{x} dz = 0 \quad (\text{omdat } -x \gg \frac{\xi}{2} > 0 \text{ is voor alle punten van } B_2 E_1:$$

Dus $t_{E_2} - t_{B_2} = 0$.

Analoog voor $E_1 D_1$, omdat daar $x \gg \frac{\xi}{2} > 0$ is.

Langs $E_2 E_1$ is

$$\frac{dx}{dt} = y = \mu \left\{ z - \left(\frac{x^3}{3} - x\right) \right\} > \mu \left\{ \frac{2}{3} + \left(\frac{\xi^3}{24} - \frac{\xi}{2}\right) \right\} > \mu \left(\frac{2}{3} - \frac{\xi}{2}\right)$$

$$\text{dus } t_{E_1} - t_{E_2} < \frac{1}{\mu \left(\frac{2}{3} - \frac{\xi}{2}\right)} \int_{-\frac{\xi}{2}}^{+\frac{\xi}{2}} dx = \frac{\xi}{\mu \left(\frac{2}{3} - \frac{\xi}{2}\right)} \text{ voor willekeurige kleine } \xi > 0.$$

Dus tenslotte is

$$t_{D_1} - t_{B_2} = 0. \quad (13)$$

De berekening van $t_{B_1} - t_{D_1}$ verloopt volkomen analoog met die van $t_{B_2} - t_{D_2}$ dus

$$t_{B_1} - t_{D_2} = \mu \left(\frac{3}{2} - \log 2\right) \quad (14)$$

en evenzo:

$$t_{D_2} - t_{B_1} = 0 \quad (15)$$

Uit (12) - (15) volgt als benaderde waarde voor de omloopstijd:

$$T = \mu(3 - 2 \log 2) = 1,613706\mu. \quad (16)$$

Met nadruk wordt erop gewezen, dat deze resultaten slechts een eerste benadering geven. Door verschillende auteurs zijn deze resultaten verder uitgewerkt. Speciaal A.A. Dorodnicyn heeft hieraan veel moeite besteed (Asymptotic solution of Van der Pol's equation, Prikladnaja Matematika i Mehanika 11, 313-328 (1947)).

Na uiterst gecompliceerde berekeningen komt hij tot de volgende asymptotische ontwikkeling voor de omloopstijd:

$$T = (3 - 2 \log 2)\mu + \frac{7,01432}{\mu^{1/3}} - \frac{22}{9} \frac{\log \mu}{\mu} + \frac{0,0087}{\mu} + o(\mu^{-4/3}).$$

Een ander belangrijk resultaat van de berekeningen van Dorodnycin is de bepaling van de x-coördinaat van de grenspunten D_1 en D_2 .

$$x_{D_1} = -x_{D_2} = 2 + \frac{0,779369}{\mu^{\frac{4}{3}}} - \frac{16}{27} \frac{\log}{\mu^2} - \frac{0,8762}{\mu^2} + o(\mu^{-\frac{8}{3}}).$$

§ 28. Gebruik van het w-x-diagram. Constructie van de fasekrommen volgens Liénard.

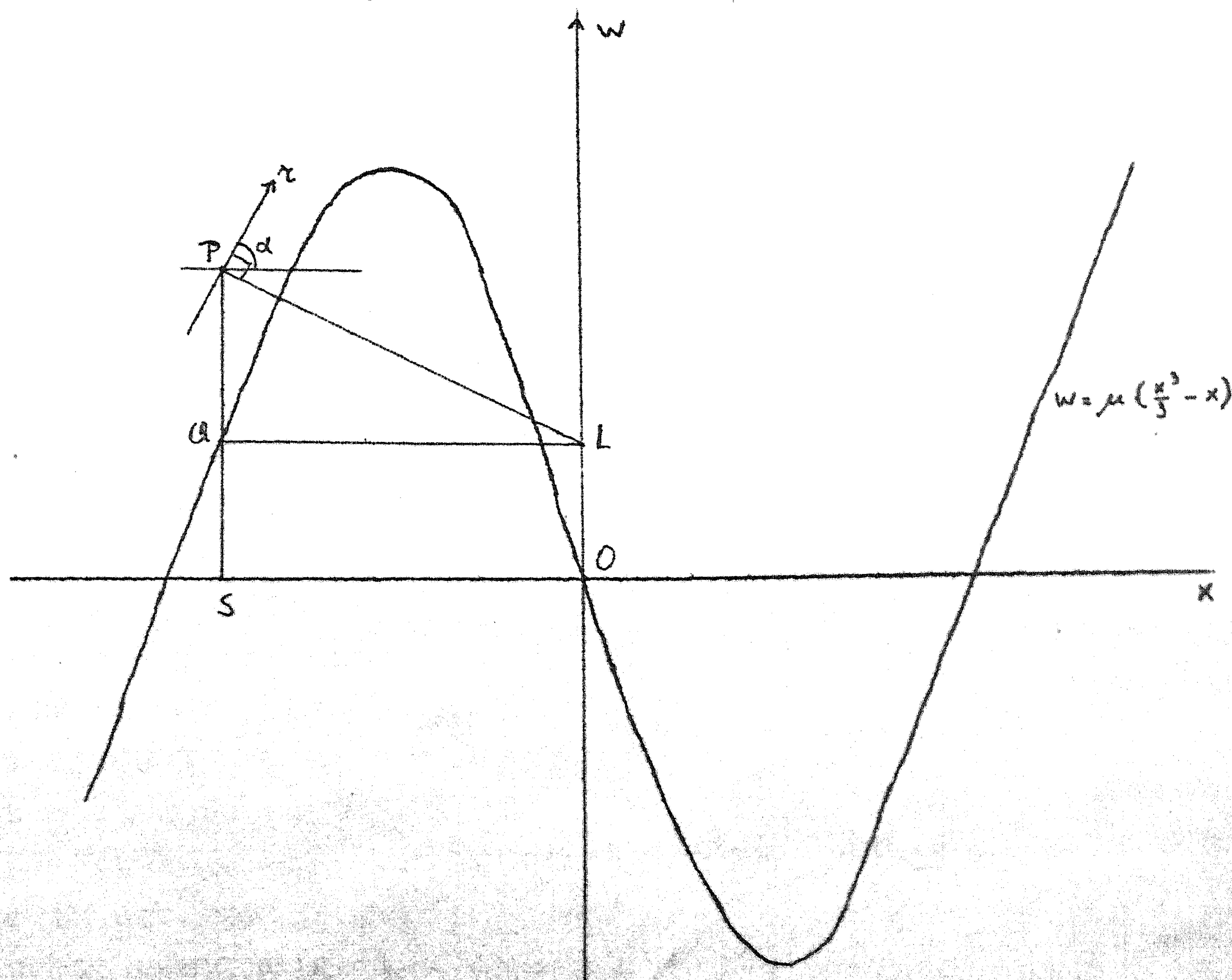
Liénard heeft opgemerkt, dat de fasekrommen bijzonder eenvoudig te construeren zijn, als men gebruik maakt van het w-x-diagram, dus van de differentiaalvergelijking (4).

Weliswaar vereist de constructie een nieuwe constructie van de karakteristiek voor iedere nieuwe waarde van μ (immers, de constructie uit het vroeger beschouwde z-x-diagram wordt als het ware in verticale richting uitgerekt in de verhouding $\mu:1$), maar het voordeel is, dat de fasekrommen nu veel eenvoudiger kunnen worden geconstrueerd, en dat het gebruik der isoklinen kan worden vermeden.

Deze constructie verloopt zeer eenvoudig als volgt (zie fig.5).

Stel dat k de karakteristiek in het w-x-diagram voorstelt

$$w = \mu \left(\frac{x^3}{3} - x \right).$$



figuur 5

Wanneer P een willekeurig punt in het w-x-vlak voorstelt, dan laat men uit P de loodlijn op de x-as neer. Deze snijdt de karakteristiek in Q en de x-as in S. De lijn uit Q evenwijdig aan de x-as snijdt de w-as in L.

De raaklijn aan de fasekromme in P staat dan loodrecht op PL.

Bewijs: De richting van de raaklijn r in P wordt aangegeven door $\frac{dw}{dx}$. Volgens (4) is

$$\frac{dw}{dx} = - \frac{x}{w + \mu(x - \frac{x^3}{3})} = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Nu is } PQ = PS - QS = W - \mu(\frac{x^3}{3} - x) = w + \mu(x - \frac{x^3}{3}).$$

$$QL = -x.$$

$$\operatorname{tg} QPL = \cotg PLQ = \frac{QL}{PQ} = \frac{-x}{w + \mu(x - \frac{x^3}{3})} = \operatorname{tg} \alpha$$

$\angle QPL = \alpha$, waaruit onmiddellijk volgt, dat r loodrecht op PL staat, w.t.b.w.

Het is duidelijk, dat met deze constructie de fasekromme (b.v. door polygonale benadering), zeer eenvoudig kan worden geschetst.

Ook de vroeger genoemde eigenschappen over het globale verloop van de fasekrommen zijn uit deze constructie onmiddellijk af te lezen. Deze constructie kan weliswaar na enige wijziging ook voor het z-x-diagram worden toegepast, maar het verloop is minder eenvoudig. Verder blijkt hieruit nog eens duidelijk, dat voor kleine waarden van μ de fasekrommen veel overeenkomst met cirkels om de oorsprong zullen vertonen.

§29. Theoretische beschouwingen. Bewijs van de existentie van één limiet-cyclus voor een generaliseerd geval van de vergelijking van Van der Pol.

Ofschoon de voorgaande beschouwingen, in de geest van Liénard (A. Liénard, Etude des oscillations entretenues, Revue Générale de l'Electricité, t.XXIII. (1928), pp.904-946) het bestaan van een limiet-cyclus bij de differentiaalvergelijking van Van der Pol in hoge mate aannemelijk hebben gemaakt, is een exact bewijs van dit bestaan in het voorafgaande deel nog niet gegeven.

Opgemerkt moet worden, dat Liénard in de bovenaangehaalde verhandeling voor het eerst zulk een bewijs heeft gegeven. Na hem hebben meerdere auteurs zulk een bewijs gegeven.

Een der meest eenvoudige bewijzen is in 1942 gegeven door Levinson & Smith (A General Equation for relaxation oscillations, Duke Mathematical Journal IX (1942), p.382-403). Zij geven zelfs een bewijs van de existentie van een limietcyclus voor een meer algemene differentiaalverge-

lijking dan die van Van der Pol. Wij zullen dit bewijs hier in extenso behandelen.

Levinson & Smith nemen i.p.v. de vergelijking van Van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0,$$

de meer algemene vergelijking:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \cdot \frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \quad (17)$$

waarin $f(x)$ een even functie is (d.w.z. $f(x) = f(-x)$), van zodanige aard, dat er voor de oneven functie ($F(x) = -F(-x)$).

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx \quad (18)$$

een waarde x_0 bestaat met:

$$\begin{cases} F(x) < 0 \text{ voor } 0 < x < x_0 \\ F(x) > 0 \text{ en monotoon toenemend voor } x > x_0 \end{cases} \quad (19)$$

Het is duidelijk dat in de vergelijking van Van der Pol:

$$f(x) = \mu(x^2 - 1) \quad (\text{even functie})$$

en dat

$$F(x) = \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right).$$

$F(x)$ voldoet met $x_0 = \sqrt{3}$ aan de in (19) gestelde eisen.

Verder is $g(x)$ een oneven functie, die differentieerbaar is voor alle in het spel zijnde waarden van x (ingesloten de oorsprong), met $g(x) > 0$ voor $x > 0$.

Hieruit volgt: $g(0) = 0$.

Verder wordt aangenomen, dat:

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty g(x) dx = \infty. \quad (20)$$

Het is wederom duidelijk, dat in het geval van Van der Pol $g(x) = x$ aan alle gestelde eisen voldoet.

Wij zullen nu bewijzen, dat onder de boven gestelde voorwaarden voor $f(x)$ en $g(x)$ de vergelijking (17) één éénduidig bepaalde periodieke oplossing (= limiet-cyclus) bezit.

Als vroeger wordt gesteld:

$$\frac{dx}{dt} = y.$$

Op de bekende manier volgt dan, analoog met (1)

$$\frac{dy}{dx} + f(x) + \frac{g(x)}{y} = 0 \quad (21)$$

Stellen wij

$$\frac{dy}{dx} + f(x) = \frac{dw}{dx}$$

$$\text{of: } w = y + \int_0^x f(x)dx = y + F(x)$$

dan gaat (21) over in:

$$\frac{dw}{dx} + \frac{g(x)}{w-F(x)} = 0 \quad (22)$$

(generalisatie van (4)).

Met iedere éénduidig bepaalde periodieke oplossing van (17) correspondeert een éénduidig bepaalde gesloten fasekromme voor (22).

Vergelijking (22) heeft de symmetrie-eigenschap, dat deze onveranderd blijft wanneer (x, w) wordt vervangen door $(-x, -w)$.

Dit volgt uit de veronderstelde onevenheid van $g(x)$ en $F(x)$.

Eerste eigenschap: Als een gesloten integraalkromme gaat door het punt $(0, w_0)$, dan gaat diezelfde kromme ook door het punt $(0, -w_0)$.

Bewijs: Stel dat de gesloten kromme door $(0, w_0)$ de w -as een 2^e maal snijdt in $(0, -\bar{w}_0)$; met $|\bar{w}_0| \neq |w_0|$. Neem om de gedachten te bepalen b.v.:

$$|\bar{w}_0| < |w_0|.$$

Dan zal wegens de centrale symmetrie ook door $(0, -w_0)$ een gesloten integraalkromme gaan, die de w -as de 2^e maal snijdt in $(0, +\bar{w}_0)$.

Noem de eerste kromme (door $(0, w_0)$) = C_I ,
de tweede " (door $(0, -w_0)$) = C_{II} .

Voor $|\bar{w}_0| < |w_0|$ ligt dan het punt $(0, -\bar{w}_0)$ (van C_I) binnen C_{II} , en het punt $(0, w_0)$ (van C_I) buiten C_{II} .

De gesloten kromme C_I zal dus de eveneens gesloten kromme C_{II} moeten snijden in tenminste 2 snijpunten, wat in gewone punten bij fasekrommen uitgesloten is. (Voor $|\bar{w}_0| > |w_0|$ verloopt het bewijs analoog).

Dus $|\bar{w}_0| = |w_0|$ w.t.b.w.

Wij voeren nu de volgende hulpfunctie in:

$$\lambda(x, w) = \frac{w^2}{2} + G(x) = \frac{w^2}{2} + \int_0^x g(x)dx. \quad (23)$$

(bij de verg. van Van der Pol is $\lambda(x,y) = \frac{w^2+x^2}{2} = \frac{r^2}{2}$, waarbij $r =$ afstand tot oorsprong).

Omdat $G(x)$ een even functie is, is $\lambda(x,w)$ even, zowel in w als in x .

$$\lambda(x,w) = \lambda(\pm x, \pm w)$$

(de tekencombinaties in het rechterlid zijn willekeurig).

Wij laten nu in de hulpfunctie $\lambda(x,w)$ het punt $P(x,w)$ de integraalkromme doorlopen.

Tweede eigenschap: Noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor het gesloten zijn van de integraalkromme is

$$\lambda(0,w_1) = \lambda(0,-w_2) \quad (24)$$

(waarin $+w_1$ en $-w_2$ de coördinaten der snijpunten met de w -as voorstellen).

Immers uit (24) volgt: $w_1 = w_2$, terwijl uit $w_1 = w_2$ omgekeerd (24) volgt.

Uit (22) volgt:

$$\text{voor } x > 0 \text{ en } w > F(x) \text{ is } \frac{dw}{dx} < 0$$

$$\text{" en } w < F(x) \text{ is } \frac{dw}{dx} > 0.$$

$$\text{Voor } w = F(x) \text{ is } \frac{dw}{dx} = \infty.$$

In figuur 6 zijn ACB , $A'C'B'$ en $A''C''B''$ integraalkrommen.

Vergelijking (22) kan worden geschreven in de vorm:

$$wdw + g(x)dx = F(x)dw$$

$$\text{of } d\lambda(x,w) = F(x)dw. \quad (25)$$

Beschouw nu het stuk van de integraalkromme ACB , die de kromme

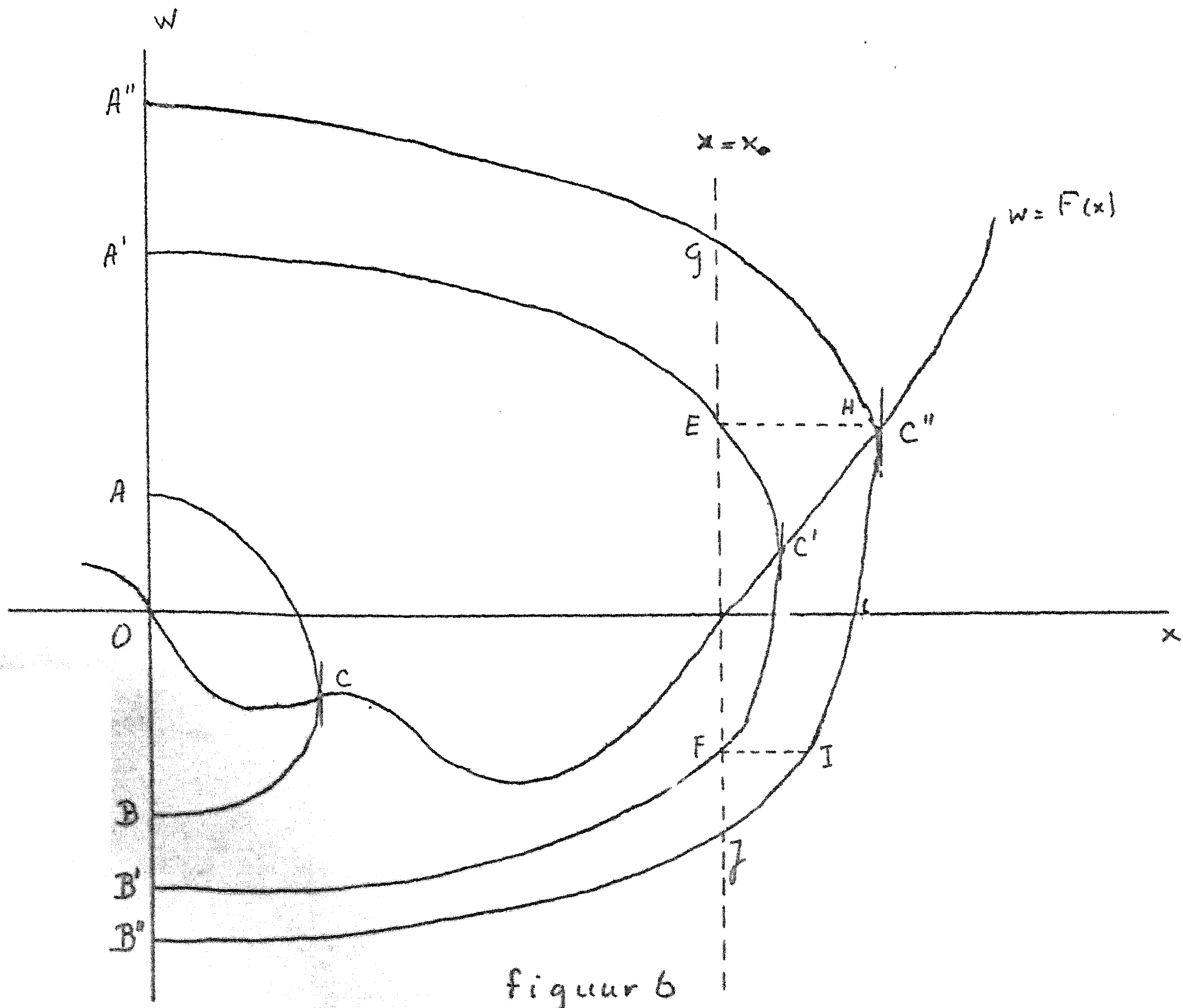
$$w = F(x) \quad (\text{karakteristiek})$$

snijdt in een punt C , waarvan de x -coördinaat ligt in het gebied $0 < x < x_0$. In dat interval is $F(x) < 0$ } dus $F(x)dw > 0$
 van A tot B is $dw < 0$

Dus volgens (25) is

$$\int_A^B d\lambda(x,w) > 0$$

of $\lambda_B - \lambda_A > 0$, dus $|OB| > |OA|$. voor $0 < x_C < x_0$.



Beschouw vervolgens integraalkrommen die de karakteristiek $y=F(x)$ snijden rechts van $x=x_0$. Zulke krommen zijn $A'B'C'$ en $A''B''C''$.
Uit (22) en (25) volgt:

$$d\lambda(x, w) = \frac{-F(x)g(x)}{w-F(x)} dx \quad (26)$$

Voor $0 < x < x_0$ is $-F(x) > 0$.

Langs $A''G$ is $w-F(x)$ groter dan langs $A'E$.

Dus:

$$\int_{A''}^G d\lambda(x, w) < \int_{A'}^E d\lambda(x, w)$$

of:

$$\lambda_G - \lambda_{A''} < \lambda_E - \lambda_{A'} \quad (27)$$

Langs GH is $F(x) > 0$, dus wegens: $d\lambda(x, w) = F(x)dw$ is langs GH :

$$\begin{aligned} d\lambda(x, w) &< 0 \\ \lambda_H - \lambda_G &< 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Vergelijk de krommen EF en HI . Op dezelfde hoogte (bij dezelfde w) is op EF de waarde van $F(x)$ kleiner dan op HI (monotonie van $F(x)$).

Dus wegens

is
$$\int_H^I d\lambda(x,w) = F(x)dw$$

$$\int_H^I d\lambda(x,w) < \int_E^F d\lambda(x,w)$$

of:
$$\lambda_I - \lambda_H < \lambda_F - \lambda_E \quad (29)$$

Langs IJ volgt analoog met GH

$$\lambda_J - \lambda_I < 0 \quad (30)$$

Analoog met (27)

$$\lambda_{B''} - \lambda_J < \lambda_{B'} - \lambda_F \quad (31)$$

Optelling van (27), (28), (29), (30) en (31) geeft:

$$\lambda_{B''} - \lambda_{A''} < \lambda_{B'} - \lambda_{A'}$$

of:

$$|OB''| - |OA''| < |OB'| - |OA'|$$

Conclusie: $|OB| - |OA| > 0$ voor $0 < x_C \leq x_0$.

Als C naar rechts over $w=F(x)$ beweegt, zodat de karakteristiek wordt gesneden voor $x_C > x_0$, dan neemt

$$|OB| - |OA| \text{ monotoon af}$$

Hieruit volgt, dat $|OB|$ hoogstens éénmaal gelijk aan $|OA|$ kan worden, dus dat er ten hoogste één gesloten integraalkromme optreedt.

Dat er precies één gesloten integraalkromme optreedt, kunnen wij bewijzen, door te laten zien, dat $|OB| - |OA|$ tenslotte negatief wordt, als A in positieve richting langs de W-as beweegt.

Neem daartoe het punt C" zover rechts, dat

$$x_{C''} > 2x_0.$$

De bijbehorende integraalkromme A"C"B" snijdt de rechte

$$x = 2x_0.$$

in 2 punten met coördinaten w_1 -en w_2 ($w_1 > w_2$).

Wegens (22) is $dw = -\frac{g(x)}{w-F(x)} dx$,

dus, beginnende bij A" geldt voor het interval $0 < x < 2x_0$.

$$|dw| < \frac{g(x)dx}{|w-F(2x_0)|}$$

dus door integratie:

$$\frac{|OA''|^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} - (|OA''| - w_1) F(2x_0) \leq G(2x_0),$$

dus:

$$\left\{ |OA''| - w_1 \right\} \left[\frac{|OA''| + w_1}{2} - F(2x_0) \right] \leq G(2x_0).$$

$$|OA''| - w_1 \leq \frac{2G(2x_0)}{|OA''| + w_1 - 2F(2x_0)}$$

Voor $|OA''| \rightarrow \infty$ zal rechterlid $\rightarrow 0$

$$|OA''| - w_1 \rightarrow 0, \text{ dus ook } w_1 \rightarrow \infty$$

tegelijk met $|OA''|$

$$\text{dus } w_1 - w_2 > w_1 - F(2x_0) \rightarrow \infty.$$

(32)

Voor $x > 2x_0$ is $F(x) > F(2x_0)$

$$\text{dus } d\lambda = F(x)dw < F(2x_0)dw$$

(want $dw < 0$).

Integratie tussen de snijpunten op de rechte $x=2x_0$ geeft:

$$\int d\lambda < -F(2x_0)(w_1 - w_2)$$

dus wegens (32)

$$\lambda_J - \lambda_G < -F(2x_0)(w_1 - w_2)$$

dus $\lambda_J - \lambda_G$ kan willekeurig groot negatief worden gemaakt. Volgens (27) is $\lambda_G - \lambda_{A''}$ begrensd naar boven; evenzo $\lambda_{B''} - \lambda_J$.

Dus door optelling vindt men, dat

$$\lambda_{B''} - \lambda_{A''} = \lambda_{B''} - \lambda_J + \lambda_J - \lambda_G + \lambda_G - \lambda_{A''}$$

negatief gemaakt kan worden door A'' hoog genoeg te kiezen.

$$\text{Dan is } |OB''| - |OA''| < 0$$

waarmede het bewijs is voltooid.